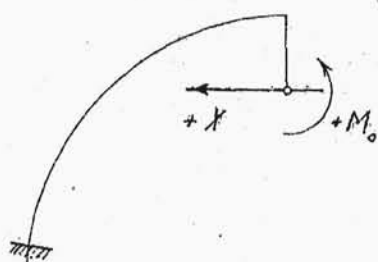


rys. 32.

działa M_0 oraz X



rys. 33.

Dla obciążeń nierównomiernych wygodniej jest przyjąć układ jak na rys. 33, przy czym środek łuku związany jest ze środkiem ciężkości.

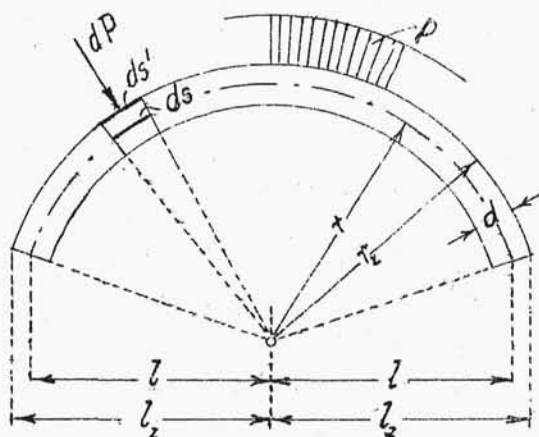
W obliczeniach przyjmujemy moment gnący wtedy za dodatni, gdy zmniejsza krzywiznę /rys. 32/ t. zn. gdy od strony grzbietu łuku otrzymujemy naprężenia ściskające. Wskutek takiego założenia w obu układach zastępczych dodatnie kierunki rozporu X i momentu podporowego M_0 są odmiennie.

Równomierne parcie wody.

Obliczenie wielkości hiperstatycznych.

Powyższe teoretyczne rozważania odnosiły się

do tego przypadku, gdy obciążona była oś łuku /elementy ds osi łuku/. W rzeczywistości jednak parcie wody działa na zewnętrzną powierzchnię łuku, zatoczoną promieniem większym r_z /rys.34/



rys 34

i wynosi

$$dP = p \cdot ds' ;$$

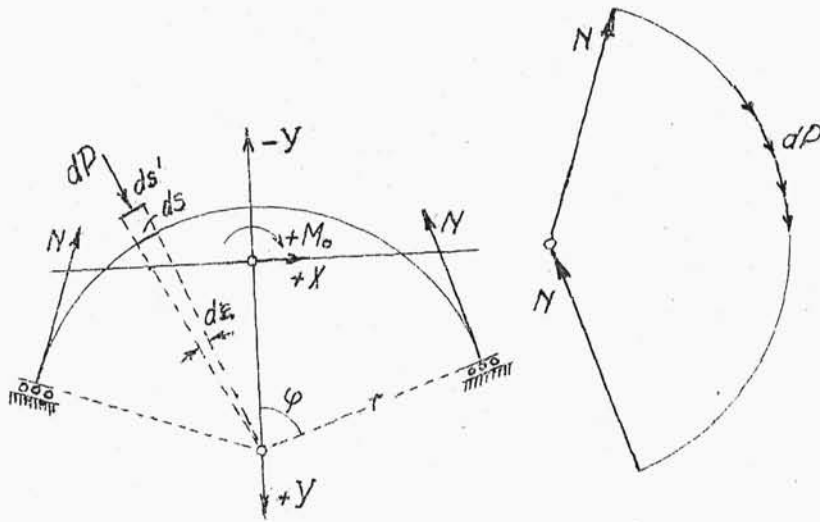
odnosząc to do osi łuku

$$dP = p \cdot ds \cdot \frac{r_z}{r} ;$$

Wygląda więc tak, jakby oś łuku była obciążona parciem $p' = p \cdot \frac{r_z}{r}$;

W przyjętym układzie statycznie wyznaczalnym /wg rys.32/ w każdym przekroju występuje jednakowa wszędzie siła normalna N . Siłę tę znajdziemy z wieloboku sił /rys.35/. Dla $p' = 1$ wielobok sił jest identyczny z linią osi łuku; w ogólnym wypadku jednak $p' \neq 1$ i wtedy obie krzywe są do siebie podobne, zatem

$$\frac{N}{dP} = \frac{r}{ds} ;$$



rys.35.

W układzie zastępczym tego rodzaju, co przyjęty do obliczeń nie występują momenty gnące

$$\mathcal{M} = 0 ;$$

a więc

$$M_0 = 0 ;$$

Pozostaje do określenia jedynie niewiadoma χ .

Ponieważ $\mathcal{M} = N = p \cdot r_2$ zaś $\mathcal{M} = 0$, więc zasadniczy wzór dla χ /str.47/ przybierze postać

$$\chi = \frac{-p \cdot r_2 \int \cos \xi \cdot ds}{\left(\frac{12}{8^2 \sin^3 \varphi} \cdot k_1 + \frac{1}{\sin \varphi} \cdot k_2 \right) \cdot l} ;$$

jeśli poczynimy następujące uproszczenia

$$p = \gamma h ; \quad \gamma - \text{ciężar właściwy wody}$$

h - głębokość grzbietu zwornika
rozpatrywanego łuku.

$$r_z = r + \frac{d}{2} = \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\delta}{2} \right) \cdot l = k_3 \cdot \delta \cdot l ;$$

$$k_3 = \frac{1}{\delta \cdot \sin \varphi} + \frac{1}{2} ;$$

$$\int \cos \xi \cdot ds = r \int_{-\varphi}^{+\varphi} \cos \xi \cdot d\xi = 2 \cdot l ;$$

wówczas dojdziemy do wzoru

$$\chi = -K_x \gamma h l ;$$

przy czym

$$K_x = \frac{2 \cdot k_3 \delta \sin \varphi}{\frac{12 \cdot k_1}{\delta^2 \sin^2 \varphi} + k_2} ;$$

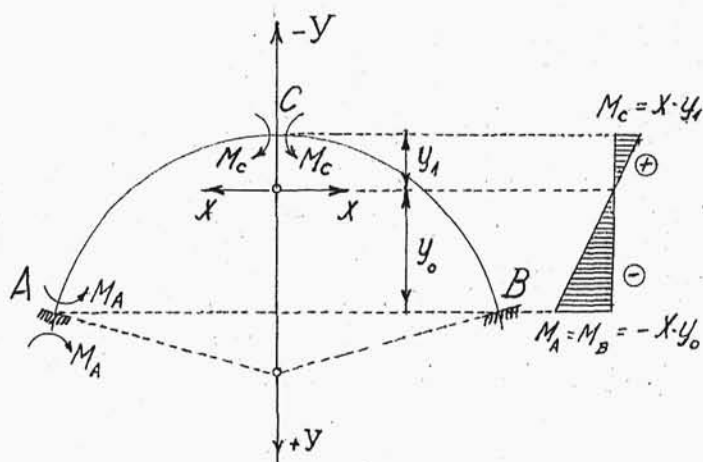
Jak widać rozpór zależy tylko od δ oraz φ .

Obliczenie momentów gnących.

W każdym przekroju moment gnący wywołany jest tylko siłą χ :

$$M = \chi \cdot y ;$$

i zależy jedynie od położenia przekroju, zmieniając się liniowo od zwornika do węzłowi /rys.36/, w których to punktach osiąga maximum dodatnie i



rys.36.

ujemne. Absolutne maximum jest zawsze w wezglowiu, gdyż dla φ zawartego w granicach stosowanych, t. zn. przy kącie środkowym $2\varphi = 90^\circ \dots 180^\circ$ zawsze

$|y_1| < |y_0|$, a stosunek $\frac{y_1}{y_0}$ zmienia się od 0,5159 do 0,5708, a więc

$$|y_1| \approx \left| \frac{1}{2} y_0 \right| \quad \text{czyli} \quad |M_c| \approx \left| \frac{1}{2} M_A \right|;$$

dokładniej

$$M_c = - \frac{y_1}{y_0} \cdot M_A;$$

Moment gnący w wezglowiu wynosi

$$M_A = X \cdot y_0;$$

$$y_0 = l \left(\frac{1}{\varphi} - \operatorname{ctg} \varphi \right);$$

porów.str.47

zatem

$$M_A = -K_x \gamma h l^2 \left(\frac{1}{\varphi} - \operatorname{ctg} \varphi \right);$$

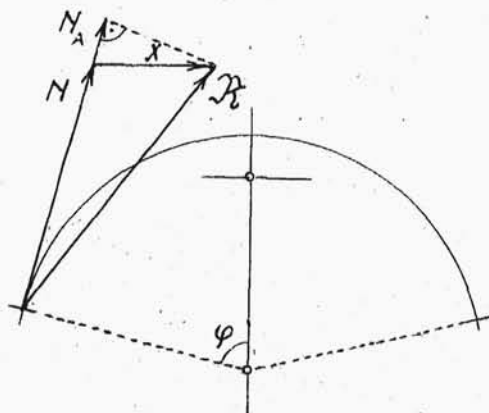
wprowadzając oznaczenie

$$K_M = K_x \left(\frac{1}{\varphi} - \operatorname{ctg} \varphi \right);$$

otrzymujemy

$$M_A = -K_M \cdot \gamma h l^2;$$

Reakcja podpory w węzłowie jest wypadkową
/rys. 37/ $\bar{R} = \bar{N} + \bar{X}$; siła normalna w węzłowie



rys. 37.

wiu

$$N_A = N + X \cdot \cos \varphi ;$$

gdzie

$$N = p r_z = \gamma h k_3 \delta l ;$$

$$X = -K_x \gamma h l ;$$

więc

$$N_A = (k_3 \delta - K_x \cos \varphi) \gamma h l ;$$

oznaczając

$$K_N = k_3 \delta - K_x \cos \varphi ;$$

otrzymujemy

$$N_A = K_N \gamma h l ;$$

Obliczenie naprężeń w węzłowie

Naprężenia określa wzór

$$\tilde{\sigma}_{1,2} = \frac{N_A}{A} \pm \frac{M_A}{W} ;$$

$$A = d = \delta l ;$$

$$W = \frac{d^2}{\delta} = \frac{\delta^2 l^2}{\delta} ;$$

zatem

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{K_N}{\delta} \mp \frac{6 \cdot K_M}{\delta^2} \right) x h ;$$

Znak górny dotyczy krawędzi od strony wody.

Jak widać, naprężenia zależą tylko od kąta środkowego 2φ i od stosunku $\delta = d : l$ t.j. od względnej grubości łuku, przy czym zależność ta jest bardzo zawiła, tak że uniemożliwia bezpośrednie obliczanie wymiarów łuku. Ustaliwszy pewne σ_{dep} i przyjmując pewną wartość dla φ możnaby drogą prób znaleźć wartość δ , lecz byłaby to metoda żmudna i długotrwała. Prof. Kelen w swym dziele p.t. "Staumauern" podaje wykresy, które pozwalają na szybkie rozwiązywanie wszystkich zagadnień związanych z wymiarowaniem łuku.

Naprężenia są zupełnie niezależne od rozpiętości łuku i maleją przy zwiększającym się kącie φ , osiągając minimum przy $\varphi = 90^\circ$.

Naprężenia od strony wody mogą być też ujemne, np. przy $\varphi = 60^\circ$ co w zaporach o łukach wielokrotnych często może mieć miejsce: $\sigma_1 < 0$ już dla $\delta = 0,2$.

Napężenia w zworniku.

$$\sigma' = \frac{N_c}{A} \pm \frac{M_c}{W};$$

$$N_c = N + X = (k_3 \delta - K_x) \gamma h l;$$

$$M_c = -\frac{y_1}{y_0} M_A = \frac{y_1}{y_0} K_M \gamma h l^2;$$

$$\sigma' = \left(k_3 - \frac{K_x}{\delta} \pm \frac{K_M}{\delta^2} \cdot \frac{y_1}{y_0} \right) \gamma h l;$$

Znak górny dotyczy krawędzi od strony wody.

Zwykle wystarcza znalezienie naprężeń w wezłowie i zworniku, dlatego poprzestajemy na podaniu powyższych wzorów.

Przykład.

W przykładzie poniższym oraz w kilku następnych obliczenia tyczyć się będą sklepienia o następujących danych:

rozpiętość teoretyczna..... $2l = 14,00$ m

kąt środkowy..... $2\varphi = 180^\circ$

grubość sklepienia w koronie $d = 0,40$ m

wysokość zapory..... $h = 40,00$ m

dopuszczalne napężenie

ściskające $\sigma_{doz} = 30$ kg/cm²

Celem określenia grubości sklepienia w głębokości 40 m należy drogą prób, lub korzystając z

odpowiednich wykresów Kelena, określić taki stosunek δ , przy którym $\sigma_2 \leq \sigma_{dep}$;

W naszym przykładzie otrzymamy wartość

$$\delta = 0,213;$$

zatem grubość najniższego łuku musi wynosić

$$d = \delta \cdot l = 0,213 \cdot 7,00 \cong 1,50 \text{ m}$$

Uwaga: w przykładzie niniejszym, gdzie rozpatrywany jest tylko wpływ parcia wody, za podstawę wzięto - $\sigma_2 \leq \sigma_{dep}$. W rzeczywistości jednak trzeba zawsze uwzględniać $\sigma_2 + \sigma_{t2} \leq \sigma_{dep}$; gdzie σ_{t2} jest naprężeniem występującym wskutek spadku temperatury zewnętrznej. Szczegóły niżej w ustępie "Wymiarowanie sklepień"

Naprężenia w wezłowie:

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{K_N}{\delta} + \frac{6 \cdot K_M}{\delta^2} \right) \delta \cdot h ;$$

dla $\varphi = 90^\circ$ i $\delta = 0,213$ wielkości pomocnicze wynoszą

$$k_1 = 0,297$$

$$K_x = 0,0276$$

$$k_2 = 1,571$$

$$K_N = 1,107$$

$$k_3 = 5,2$$

$$K_M = 0,0175$$

Zatem od strony wody

$$\sigma_1 = \left(\frac{1,107}{0,213} + \frac{6 \cdot 0,0175}{0,213^2} \right) \cdot 0,001 \cdot 4000 = 11,6 \text{ kg/cm}^2$$

od strony powietrza

$$\sigma_2 = \left(\frac{1,107}{0,213} + \frac{6 \cdot 0,0175}{0,213^2} \right) \cdot 0,001 \cdot 4000 = 30,0 \text{ kg/cm}^2$$

Napężenia w zworniku

$$\sigma'_{1,2} = \left(k_3 - \frac{K_1}{\delta} \pm \frac{6 \cdot K_M}{\delta^2} \cdot \frac{y_1}{y_0} \right) \gamma h ;$$

$$\frac{y_1}{y_0} = 0,571 ;$$

$$\sigma'_1 = 25,6 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma'_2 = 15,0 \text{ kg/cm}^2$$

Niejednostajne parcie wody.

Obliczenie sił zewnętrznych.

Dodatkowe, nierównomiernie wzdłuż łuku rozłożone parcie wody w zworniku = 0 i wzrasta liniowo, osiągając największą wartość w wezłowiach:

$$p_0 = \gamma h_0 ; \quad / \text{rys. 38/}$$

W dowolnym punkcie, wyznaczonym przez x i i mierzonym od płaszczyzny symetrii sklepienia, parcie wody wynosi

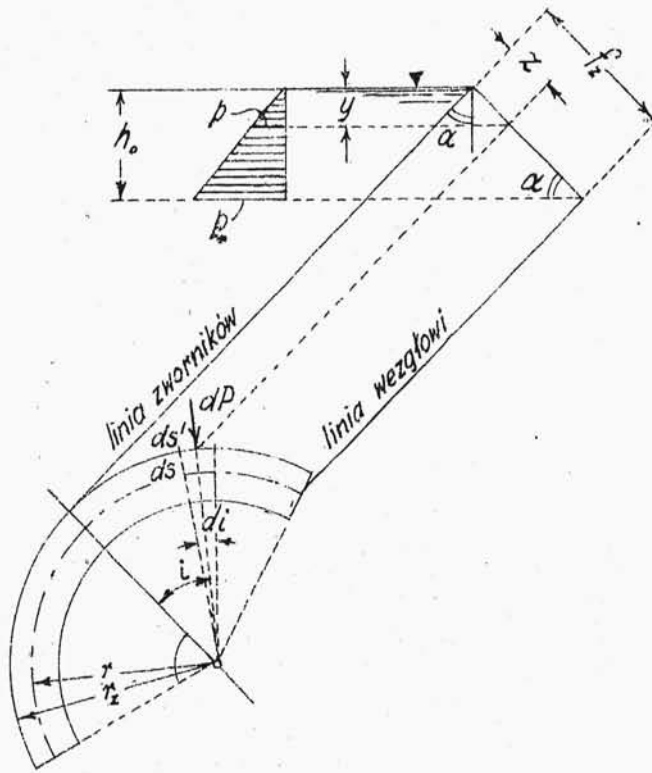
$$p = p_0 \cdot \frac{y}{h_0} = p_0 \cdot \frac{z}{f_z} ;$$

ponieważ jednak

$$f_z = \frac{h_0}{\sin \alpha} ;$$

$$z = r_2 - r_2 \cdot \cos i = r_2 (1 - \cos i) ;$$

$$p_0 = \gamma h_0 ;$$



rys. 38.

otrzymujemy

$$p = p_0 \frac{r_2 (1 - \cos i)}{h_0} \sin \alpha = r_2 (1 - \cos i) \sin \alpha \cdot \gamma^k ;$$

albo
$$p = \gamma' \cdot r_2 (1 - \cos i) ;$$

gdzie

$$\gamma' = \gamma \cdot \sin \alpha ;$$

Na zewnętrzny element powierzchniowy ds' , którego szerokość /prostopadła do płaszczyzny rysunku/ wynosi jednostkę, działa parcie wody /porów. str.49/

$$dP = p \cdot ds \cdot \frac{r_z}{r};$$

więc wstawiając wyżej określoną wartość p oraz

$$ds = r \cdot d\epsilon, \text{ otrzymuje się}$$

$$\underline{dP = \gamma' \cdot r_z^2 (1 - \cos i) \cdot di};$$

Obliczenie wielkości hiperstatycznych.

Obliczenie wielkości statycznie niewyznaczalnych dokonywamy przy pomocy wzorów /str. 47/

$$M_{ow} = - \frac{\int m_w \cdot ds}{\frac{2\varphi}{\sin \varphi} \cdot l};$$

$$\chi_w = - \frac{\frac{12}{\delta^2 l^2} \int m_w y \cdot ds + \int \pi \cdot \cos \xi \cdot ds}{\left(\frac{12}{\delta^2 \sin^2 \varphi} \cdot k_1 + \frac{1}{\sin \varphi} \cdot k_2 \right) \cdot l};$$

Najpierw trzeba obliczyć m_w i π_w w układzie zastępczym, statycznie wyznaczalnym.

Moment siły dP w stosunku do punktu K /rys. 39/ wynosi

$$d m_w = - dP \cdot \overline{KL};$$

a ponieważ $\overline{KL} = r \cdot \sin (\xi - i),$

więc $d m_w = - \gamma' r_z^2 \pi (1 - \cos i) \sin (\xi - i) \cdot di;$

Całkowity moment gnący w punkcie K otrzymamy przez scałkowanie powyższego równania w grani-

i wtedy $M_N = - \gamma' r_z^2 r f_1(\xi)$;

Siłę normalną znajdziemy następująco: N_N , które działa w punkcie K , jest składową styczną wypadkowej parcia wody, działającego na odcinku łuku od zwornika do punktu K . Ponieważ każde elementarne parcie dP przechodzi przez środek łuku, więc ich wypadkowa też przejdzie przez środek. Rozkładamy wypadkową na dwie składowe, które zaczepiamy w środku łuku. Jedna składowa T niechaj ma kierunek promienia od środka łuku do punktu K , druga - prostopadła do pierwszej - będzie szukany N_N .

W punkcie K moment M_N wynikający z działania wypadkowej parcia wody można więc napisać w formie

$$M_N = - N_N \cdot r;$$

składowa T nie wywołuje żadnego momentu w punkcie K , bo przechodzi przez ten punkt. Zatem

$$N_N = - \frac{M_N}{r} = \gamma' r_z^2 f_1(\xi);$$

Przechodząc do obliczenia M_{ow} , obliczamy wpraw całość

$$\begin{aligned} \int M_N \cdot ds &= - \gamma' r_z^2 r \int f_1(\xi) \cdot ds = - \gamma' r_z^2 r^2 \int_{-\varphi}^{+\varphi} f_1(\xi) \cdot d\xi = \\ &= - \gamma' r_z^2 r^2 (2\varphi + \varphi \cdot \cos \varphi - 3 \cdot \sin \varphi); \end{aligned}$$

ponieważ

$$r = \frac{l}{\sin \varphi};$$

$$r_z = k_3 \delta l; \quad /str.46/$$

oznaczając

$$k_4 = 1 + \frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi};$$

otrzymujemy

$$M_{ow} = r' \cdot \frac{(k_3 \delta)^2}{\sin \varphi} \cdot k_4 \cdot l^3;$$

W celu obliczenia X_w należy rozwiązać dwie całki $\int m_w \cdot y \cdot ds$ oraz $\int m_w \cdot \cos \xi \cdot ds$, w których rzędna y musi być wyrażona w funkcji kąta ξ t.j. w formie

$$y = r \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} - \cos \xi \right); \quad /str.51/$$

Całka pierwsza sprowadza się do rozwiązania

$$\int m_w \cdot y \cdot ds = r' r_z^2 r^3 \left[\int_{-\varphi}^{+\varphi} f_1(\xi) \cos \xi \cdot d\xi - \frac{\sin \varphi}{\varphi} \int_{-\varphi}^{+\varphi} f_1(\xi) \cdot d\xi \right];$$

Po wstawieniu wartości $f_1(\xi)$ i scałkowaniu

wypada
$$\int m_w \cdot y \cdot ds = -r' r_z^2 r^3 k_5;$$

gdzie

$$k_5 = \frac{9}{8} \sin 2\varphi + \varphi - \frac{1}{4} \varphi \cos 2\varphi - 3 \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi};$$

Druga całka sprowadza się do obliczenia

$$\int M_N \cos \xi \cdot ds = r' r_z^2 r \int_{-\varphi}^{+\varphi} f_1\left(\frac{\xi}{\delta}\right) \cdot \cos \xi \cdot d\xi ;$$

i wynosi po wykonaniu działań i scałkowaniu

$$\int M_N \cdot \cos \xi \cdot ds = r' r_z^2 r k_6 ;$$

gdzie $k_6 = 2 \cdot \sin \varphi - \frac{5}{8} \sin 2\varphi - \varphi + \frac{1}{4} \varphi \cdot \cos 2\varphi ;$

Uwzględniając jeszcze zależności

$$r = \frac{l}{\sin \varphi} ; \quad \text{oraz} \quad r_z = k_3 \delta l ;$$

dochodzimy ostatecznie do wzoru

$$X_W = \frac{\frac{12}{\delta^2} \cdot \frac{k_5}{\sin^2 \varphi} - k_6}{\frac{12}{\delta^2} \cdot \frac{k_1}{\sin^2 \varphi} + k_2} \cdot (k_3 \delta)^2 r' l^2 ;$$

Aby zaoszczędzić żmudnych obliczeń, jakich wymagają wzory dla M_{ow} i X_W , Kelen podał tablice wykresalne w podręczniku cytowanym wyżej.

Obliczenie momentów gnących i sił normalnych.

Moment gnący w dowolnym punkcie K o rzędnej y wynosi

$$M_W = M_N + M_{ow} + X_W \cdot y ;$$

gdzie M_N określone wzorem na str. 61 może być przedstawione w postaci

$$\mathcal{M}_W = - \gamma' \frac{(k_3 \delta)^2}{\sin \varphi} \cdot l^3 \cdot f_1(\xi);$$

Wartości $f_1(\xi)$ dla różnych kątów ξ podane są poniżej w tabeli. Wartości M_{ON} i χ_W znajduje się z odpowiednich wykresów, lub na podstawie wyżej podanych wzorów. Rzędna y określa wzór na str.46.

Tabela wartości $f_1(\xi)$.

ξ	$f_1(\xi)$	ξ	$f_1(\xi)$
5°	0,000002	50°	0,022962
10°	0,000038	55°	0,033259
15°	0,000195	60°	0,046550
20°	0,000614	65°	0,063295
25°	0,001491	70°	0,083954
30°	0,003075	75°	0,108984
35°	0,005659	80°	0,138826
40°	0,009580	85°	0,173902
45°	0,015213	90°	0,214602

Siła normalna w punkcie K wynosi

$$N_W = \mathcal{M}_W + \chi \cdot \cos \xi ;$$

przy czym wartość \mathcal{M}_W podaną na str.61, a któ-

raż można przedstawić w postaci

$$M_w = \gamma' (k_3 \delta)^2 l^2 f_1(\xi);$$

łatwo jest obliczyć przy pomocy tabeli wartości $f_1(\xi)$.

Obliczenie naprężeń.

Naprężenia na krawędziach wynoszą

$$\sigma_{w1,2} = \frac{M_w}{\delta l} \pm \frac{\sigma \cdot M_w}{\delta^2 l^2};$$

znak górny dotyczy krawędzi od strony wody.

Gdy podstawimy w odpowiednie wzory $\xi = \varphi$ lub $\xi = 0$, to otrzymamy moment gnący, siłę normalną i naprężenia w wezglowie lub w zworniku.

Porównując otrzymane wyniki ze wzorami, określającymi wpływ równomiernie rozłożonego parcia wody, należy zwrócić uwagę na następujące okoliczności.

Przedewszystkim naprężenia σ_w są wprost proporcjonalne do rozpiętości łuku i maleją wraz ze zmniejszającym się kątem środkowym /wprost przeciwnie, niż to ma miejsce przy równomiernym obciążeniu wodą, wtedy bowiem σ_{max} wypada przy $\varphi = 90^\circ$.