

Naprężenia normalne określa wzór /jak wyżej na str.157/

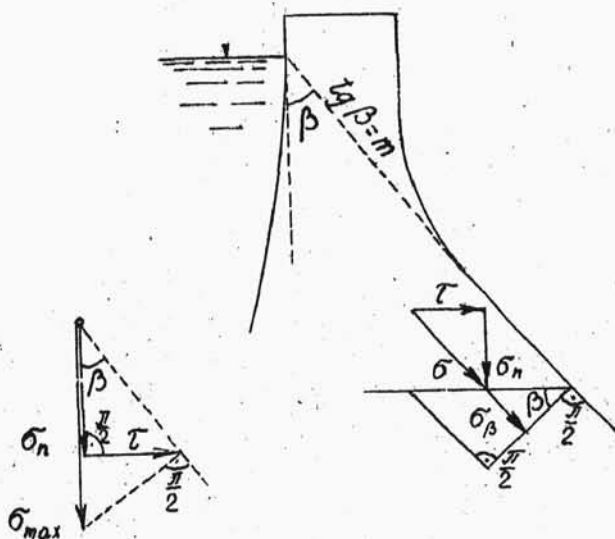
$$\sigma_{1,2} = \frac{\Sigma N}{b} \cdot \left(1 \pm \frac{6 \cdot e}{b}\right);$$

Największe naprężenia normalne występują w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni od strony powietrza /przy zbiorniku pełnym/. Z rys. 101 widać wyraźnie, że

$$\sigma_{max} \equiv \sigma_{\beta} = \frac{\sigma}{\cos \beta} = \frac{\sigma_n}{\cos^2 \beta};$$

stąd wynika konstrukcja wykreślnego oznaczenia σ_{max} podana na rys.99 i powtórzona na rys. 101. Wprowadzając $\operatorname{tg} \beta = m$, otrzymamy

$$\sigma_{max} = (1 + m^2) \cdot \sigma_n;$$



rys. 101.

Napężenie styczne /rys. 101/ :

$$\tau = \sigma \cdot \sin \beta = \frac{\sigma_n}{\cos \beta} \cdot \sin \beta = \sigma_n \cdot \operatorname{tg} \beta = m \cdot \sigma_n ;$$

albo -

$$\tau = \sigma \cdot \sin \beta = \sigma_n \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \equiv \frac{\sigma_{\max}}{2} \cdot \sin 2\beta ;$$

Największe napężenia styczne występują w płaszczyznach nachylonych do ściany zewnętrznej zapory pod 45° / $\beta = 45^\circ$ / i wynoszą

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{2} ;$$

Stateczność zapory objawia się w tem, że mur zapory nie przesunie się pod działaniem parcia wody ani po skale w płaszczyźnie stopy fundamentu, ani w jakiejkolwiek płaszczyźnie poziomej, gdyby tam nastąpiło pęknięcie muru zapory. Musi więc zachodzić nierówność:

$$\frac{P'}{\Sigma N} \leq \operatorname{tg} \varphi ;$$

gdzie φ - kąt tarcia muru po skale lub po murze, a $\operatorname{tg} \varphi$ jest współczynnikiem tarcia muru po skale, lub muru po murze. Dla zapór murowanych i betonowych przyjmuje się:

$$\varphi = 36^\circ 50' ;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,75 ;$$

Pożądane jest, aby stosunek $\frac{P'}{\Sigma N}$ przewyższał współczynnik tarcia o $\sim 10\%$.

Obliczenie metodą Pigeaud'a.

Obliczenie poniższe odnosi się tylko do zapór trójkątnych /zresztą powszechnie stosowanych/ z wierzchołkiem na poziomie zwierciadła wody.

Uważając zaporę za ciało jednorodne, można stwierdzić, że ciężar własny zapory wzrasta linjowo taksamo jak parcie wody. To proporcjonalne wzrastanie sił zewnętrznych w miarę oddalania się od wierzchołka zapory odnieść można również do wielkości, zależnych od tych sił zewnętrznych, a więc w pierwszym rzędzie do naprężeń, które zmieniają się także linjowo w zależności od odległości od wierzchołka trójkąta, przyjętego jako początek układu współrzędnych. Własność ta bardzo ułatwia tok obliczeń.

Naprężenia normalne i styczne.

Uważając zaporę za ciało sprężyste, można wypisać dwa równania równowagi nieskończenie małego prostopadkościanu $dx \times dy \times 1$ położonego w dowolnym punkcie, rys.102 /równania różniczkowe równowagi sprężystej dla ciała jednorodnego w polu działania sił

grawitacyjnych/:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = \gamma_0;$$

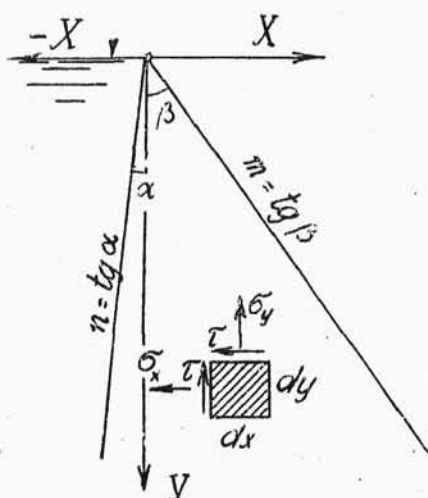
γ_0 - ciężar właściwy muru zapory.

Te dwa równania, wiążąc ze sobą trzy niewiadome naprężenia, dają nieograniczoną liczbę rozwiązań.

Aby powyższy układ równań rozwiązać w sposób jednoznaczny, należy założyć dodatkowo, że naprężenia σ_y normalne do przekroju poziomego zmieniają się według linii prostej. Dwie pozostałe niewiadome wyrażą się wobec tego także jako funkcje linjowe:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_1 \cdot x + b_1 \cdot y; \\ \sigma_y &= a_2 \cdot x + b_2 \cdot y; \\ \tau &= c \cdot x + d \cdot y; \end{aligned}$$

Należy teraz wyznaczyć współczynniki. Przez podstawienie powyższych wyrażeń do różniczkowych równań



rys. 102.

równowagi otrzymujemy

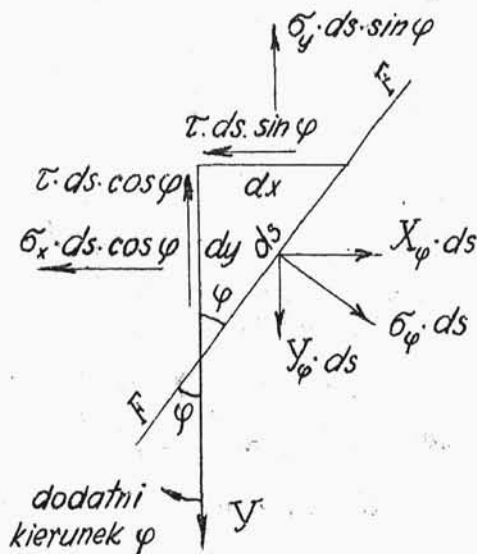
$$a_1 + d = 0 ;$$

$$c + b_2 = \tau_0 ;$$

Następnie z warunków brzegowych otrzymamy dalsze równania. Jeśli σ_φ - jest naprężeniem normalnym w dowolnej płaszczyźnie FF nachylonej pod φ do OY , a X_φ i Y_φ składowa pozioma i pionowa tego naprężenia, to z rys.103 wynika

$$X_\varphi = \sigma_x \cdot \cos \varphi + \tau \cdot \sin \varphi ;$$

$$Y_\varphi = \sigma_y \cdot \sin \varphi + \tau \cdot \cos \varphi ;$$



rys. 103.

Na krawędzi od strony powietrza, gdzie niema
żadnych sił zewnętrznych:

$$\varphi = \pi - \beta ; \quad X_{\varphi} = 0 ; \quad Y_{\varphi} = 0 ;$$

oraz

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma_y \cdot m ; \\ \sigma_x &= \sigma_y \cdot m^2 ; \end{aligned}$$

Na krawędzi od strony wody, gdy zbiornik jest
pełny / γ - ciężar właściwy wody /:

$$\varphi = \alpha ; \quad X_{\varphi} = \gamma \cdot y \cdot \cos \alpha ; \quad Y_{\varphi} = \gamma \cdot y \cdot \sin \alpha ;$$

oraz

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y \cdot n^2 + \gamma \cdot y \cdot (1 - n^2) ; \\ \tau &= (\gamma \cdot y - \sigma_y) \cdot n ; \end{aligned}$$

Przy zbiorniku pustym / $\gamma = 0$ /:

$$X_{\varphi} = 0 ; \quad Y_{\varphi} = 0 ;$$

oraz

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y \cdot n^2 ; \\ \tau &= - \sigma_y \cdot n ; \end{aligned}$$

Z tych równań otrzymujemy szukane wartości
spółczynników, podane na str. 165. W wypadku zbior-
nika pustego ważne są te same wzory, tylko w nich
 $\gamma = 0$.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\delta_0^*}{(m+n)^2} \cdot m \cdot n \cdot (m-n) + \frac{\delta^*}{(m+n)^3} \cdot m \cdot n \cdot (m \cdot n - m^2 - 2); \\
 b_1 &= \frac{\delta_0^*}{(m+n)^2} \cdot 2 \cdot m^2 \cdot n^2 - \frac{\delta^*}{(m+n)^3} \cdot m^2 \cdot (2 \cdot m \cdot n^2 - 3 \cdot n - m); \\
 a_2 &= -\frac{\delta_0^*}{(m+n)^2} \cdot (m-n) - \frac{\delta^*}{(m+n)^3} \cdot (n^2 + 3 \cdot m \cdot n - 2); \\
 b_2 &= \frac{\delta_0^*}{(m+n)^2} \cdot (m^2 + n^2) - \frac{\delta^*}{(m+n)^3} \cdot (m-n - 2 \cdot m^2 \cdot n); \\
 c &= \delta_0^* - b_2; \\
 d &= -a_1;
 \end{aligned}$$

Napężenia w dowolnej płaszczyźnie.

Z rys. 104 widać, że

$$\sigma_\varphi = X_\varphi \cdot \cos \varphi + Y_\varphi \cdot \sin \varphi;$$

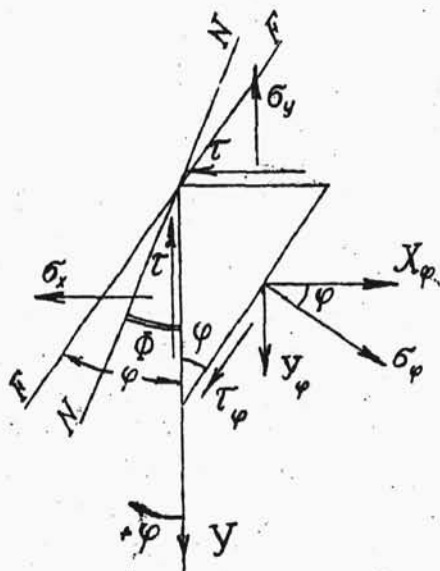
$$\tau_\varphi = -X_\varphi \cdot \sin \varphi + Y_\varphi \cdot \cos \varphi;$$

a ponieważ

$$X_\varphi = \sigma_x \cdot \cos \varphi + \tau \cdot \sin \varphi;$$

$$Y_\varphi = \sigma_y \cdot \sin \varphi + \tau \cdot \cos \varphi;$$

więc ostatecznie



rys. 104.

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + \tau \cdot \sin 2\varphi ; \\ \tau_{\varphi} &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau \cdot \cos 2\varphi ;\end{aligned}$$

Naprężenia główne.

Naprężenia główne są to maksymalne wartości σ_{φ} i τ_{φ} . Główne naprężenia normalne σ_{max} i σ_{min} otrzymamy w płaszczyźnie NN /rys.104/, której kąt nachylenia Φ względem osi OY określa równanie

$$\frac{d\sigma_{\varphi}}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\Phi} = 0 ; \quad \text{albo} \quad \tau_{\varphi} = 0 ;$$

/w płaszczyźnie działania naprężeń głównych nie ma naprężeń tnących/. Wypada zatem:

$$\operatorname{tg} 2\Phi = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} ;$$

albo

$$\operatorname{tg} \Phi_{1,2} = \frac{(\sigma_y - \sigma_x) \mp \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}}{2\tau} ;$$

Otrzymujemy dwie wartości na Φ przyczem $\Phi_2 = \Phi_1 + \frac{\pi}{2}$; /rys.107/. Największe naprężenia wyniosą wtedy:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} ; \\ \sigma_{min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} ;\end{aligned}$$

z tego wynika, że $\sigma_{max} + \sigma_{min} = \sigma_x + \sigma_y$;

Jeśli $\tilde{\sigma}_\varphi$ i $\tilde{\tau}_\varphi$ odnieść do osi głównych, jako do układu współrzędnych, dla którego $\tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}_{max}$;

$\tilde{\sigma}_y = \tilde{\sigma}_{min}$; $\tau = 0$; $\varphi = \delta$, to otrzymamy

$$\tilde{\sigma}_\varphi = \frac{\tilde{\sigma}_{max} + \tilde{\sigma}_{min}}{2} + \frac{\tilde{\sigma}_{max} - \tilde{\sigma}_{min}}{2} \cdot \cos 2\delta ;$$

$$\tilde{\tau}_\varphi = \frac{\tilde{\sigma}_{min} - \tilde{\sigma}_{max}}{2} \cdot \sin 2\delta ;$$

δ jest kątem, jaki tworzy dowolna płaszczyzna /w której obliczamy $\tilde{\sigma}_\varphi$ i $\tilde{\tau}_\varphi$ / z płaszczyzną główną.

Największe naprężenia tnące wystąpią w płaszczyźnie TT nachylonej pod ψ do osi OY , przy-
czem ψ określa równanie:

$$\frac{d\tilde{\tau}_\varphi}{d\varphi} = 0$$

zatem wypada

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\tilde{\sigma}_y - \tilde{\sigma}_x}{2\tilde{\tau}} ;$$

czyli

$$\operatorname{tg} 2\Phi = -\operatorname{ctg} 2\psi ;$$

a więc

$$\psi = \Phi - \frac{\pi}{4} ;$$

/porów. rys. 107/. Płaszczyzna TT , w której występują największe naprężenia ścinające, jest pochyłona pod 45° do płaszczyzn głównych NN .

Wartość $\max \tau$:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y)^2 + 4 \cdot \tau^2} ;$$

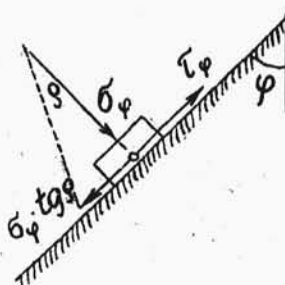
albo:

$$\tau_{\max} = \frac{\tilde{\sigma}_{\max} - \tilde{\sigma}_{\min}}{2} ;$$

Naprężenia tnące efektywne.

Naprężeniom tnącym

w każdym przekroju przeciwdziała wytrzymałość muru oraz opór tarcia, który wystąpiłby natychmiast po ścięciu przekroju. Tak więc istotne naprężenie ścinające, niszczące /efektywne/ ma wartość:



rys. 105.

$$\tau_{ef} = \tau_{\varphi} - \sigma_{\varphi} \cdot \operatorname{tg} \rho ;$$

/rys. 105 i 106/; $\operatorname{tg} \rho = 0,75$ - współczynnik tarcia muru po murze albo muru po skale /gruncie/;

$$\rho = 36^{\circ}50' ; \quad \sin \rho = 0,6 ; \quad \cos \rho = 0,8 ;$$

W płaszczyźnie TT , gdzie występuje τ_{\max} , występują także naprężenia normalne

$$\tilde{\sigma}' = \frac{1}{2} \cdot \tilde{\sigma}_{\max} ;$$

Naprężenia tnące efektywne wyniosą więc

$$\tau_{ef} = \tau_{\max} - \tilde{\sigma}' \cdot \operatorname{tg} \rho ;$$

w równanie $\tau_{ef} = \tau_{\varphi} - \sigma_{\varphi} \cdot \operatorname{tg} \vartheta$;
otrzymamy wartości $\pm \Delta$ z warunku

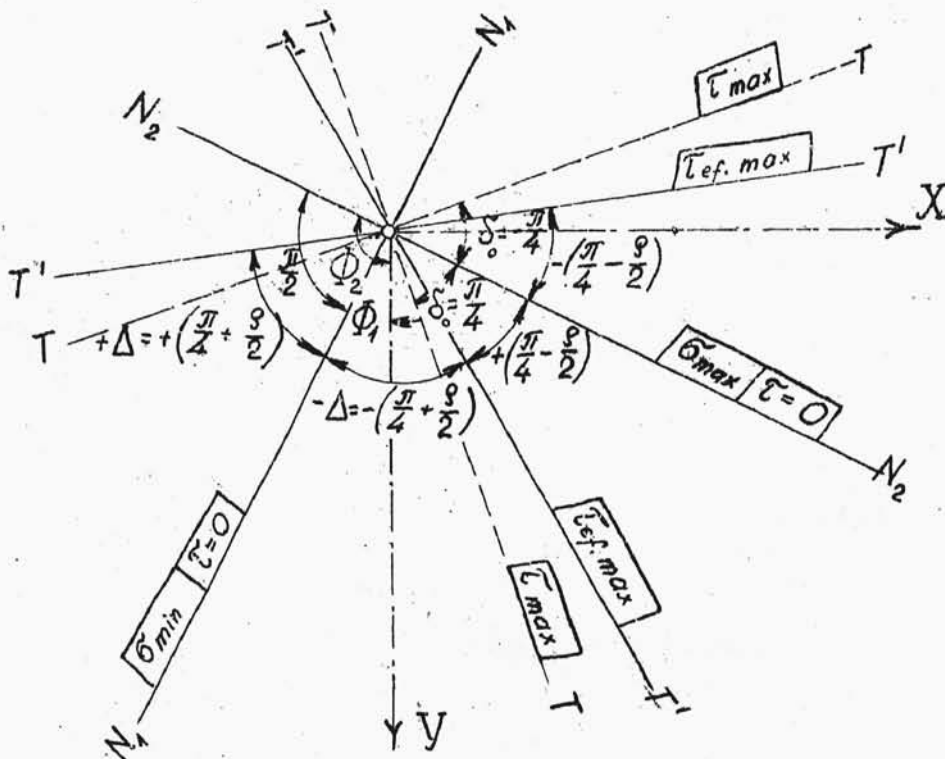
$$\frac{d\tau_{ef}}{d\vartheta} = 0 ;$$

$$\vartheta = \Delta$$

Wypada:

$$\Delta = \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right) ;$$

Płaszczyzny $T'T'$ tworzą z głównym kierunkiem $|\sigma_{min}|$ kąt $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right)$ natomiast z kierunkiem maksymalnych naprężeń $|\sigma_{max}|$ - kąt $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2} \right) = 26^{\circ}35'$.



rys. 107.

Wstawiając otrzymaną wartość na Δ do równań wiążących σ_φ i τ_φ z naprężeniami głównymi oraz 4δ , otrzymamy:

$$\tau_{ef. max} = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min}) - (\sigma_{max} + \sigma_{min}) \cdot \sin \varphi}{2 \cdot \cos \varphi};$$

albo /wprowadzając φ /:

$$\tau_{ef. max} = \frac{1}{2 \cdot \cos \varphi} \cdot \left[\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau^2} - (\sigma_x + \sigma_y) \cdot \sin \varphi \right];$$

Formuły praktyczne.

I. Zbiornik pełny.

A. Krawędź od strony wody.

Wychodząc z zasadniczego wzoru $\sigma_y = a_2 \cdot x + b_2 \cdot y$; pamiętając, że na tej krawędzi $x = -n \cdot y$, oraz podstawiając odpowiednie wartości na a_2 i b_2 , otrzymujemy:

$$\sigma_y = y \cdot \left\{ \frac{\sigma_0 \cdot m}{m+n} + \gamma \cdot \left[1 - \frac{1+m^2}{(m+n)^2} \right] \right\};$$

Na ścianę przednią działa parcie wody γy prostopadle do powierzchni ściany, a ponieważ w płaszczyźnie tej ściany od strony wody nie ma naprężeń / $\tau_\alpha = 0$ /, więc wynika stąd, że jedno z naprężeń głównych ma wartość równą parciu wody, które zaś z nich - to zależy od przyjętego współczynnika

wyporu $\Theta \geq 1$; $\Theta = \frac{\sigma}{\gamma y}$ /.

1/. $\Theta > 1$; $\sigma > \gamma y$; więc tylko $\sigma_{min} = \gamma y$;

$$\sigma_{max} = \tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y - \sigma_{min} = \tilde{\sigma}_y (1+n^2) - \gamma y \cdot n^2;$$

/ $\tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}_y \cdot n^2 + \gamma y (1-n^2)$ - określono na początku omawiania metody Pigeaud'a/.

2/. $\Theta = 1$; wtedy $\tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}_y = \sigma_{max} = \sigma_{min} = \gamma y$;

3/. $\Theta < 1$; wypadek naogół stosowany, wtedy $\sigma < \gamma y$;
zatem tylko

$$\sigma_{max} = \gamma y;$$

a z równania $\sigma_{max} + \sigma_{min} = \tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y$ oraz wyrażenia na $\tilde{\sigma}_x$ przed chwilą podanego - wypada

$$\sigma_{min} = \tilde{\sigma}_y \cdot (1+n^2) - \gamma y \cdot n^2;$$

Naprężenia tnące /wzór ogólny/

$$\tau_{ef,max} = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min}) - (\sigma_{max} + \sigma_{min}) \cdot \sin \varphi}{2 \cdot \cos \varphi};$$

B. Krawędź od strony powietrza.

Tutaj $x = m \cdot y$. Podobnie jak wyżej obliczamy

$$\tilde{\sigma}_y = y \cdot \left[\frac{\gamma \cdot n}{m+n} + \gamma \cdot \frac{1-m \cdot n}{(m+n)^2} \right];$$

Krawędź od strony powietrza pozostaje zawsze nieobciążona, a że w jej płaszczyźnie $\tau_\beta = 0$, więc jedno z naprężeń głównych jest zerem, a mianowicie

$$\sigma_{min} = 0;$$

$\sigma_{max} = \sigma_x + \sigma_y - \sigma_{min}$; gdzie $\sigma_x = \sigma_y \cdot m^2$;
/wielkość wyprowadzona na początku omawiania sposobu Pigeaud'a/

$$\sigma_{max} = \sigma_y \cdot (1 + m^2) ;$$

$$\tau_{ef. max} = \frac{\sigma_{max} \cdot (1 - \sin \vartheta)}{2 \cdot \cos \vartheta} ;$$

II. Zbiornik pusty.

Ważne są wszystkie powyższe wzory, wstawiając w nich $\gamma = 0$.

A. Krawędź od strony wody.

$$\sigma_y = \gamma \cdot \frac{\gamma_0 \cdot m}{m + n} ;$$

$$\sigma_{min} = 0 ;$$

$$\sigma_{max} = \sigma_y \cdot (1 + n^2) ;$$

$$\tau_{ef. max} = \frac{\sigma_{max} (1 - \sin \vartheta)}{2 \cdot \cos \vartheta} ;$$

B. Krawędź od strony powietrza.

$$\sigma_y = \gamma \cdot \frac{\gamma_0 \cdot n}{m + n} ;$$

$$\sigma_{min} = 0 ;$$

$$\sigma_{max} = \sigma_y \cdot (1 + m^2) ;$$

$$\tau_{ef. max} = \frac{\sigma_y \cdot (1 - \sin \vartheta)}{2 \cdot \cos \vartheta} ;$$