

KOMISJA WYDAWNICZA

Towarzystwa Bratniej Pomocy Studentów Politechniki Warszawskiej.

Prof. inż. WACŁAW PASZKOWSKI

ŻELBETNICTWO

*Żelbetnictwo
1925*



KURS WYKŁADÓW

NA POLITECHNICE WARSZAWSKIEJ

Rok akad. 1923/24.

Nr wyd. 165.

W A R S Z A W A

Skład Główny Komisji Wydawniczej: Politechnika — Polna 3. Telefon 88-60.

Drukarnia i Litografia „SATURN” Marszałkowska 91. Telefon 20-44.

Prof. dr WŁADYSŁAW PRZYBYLSKI

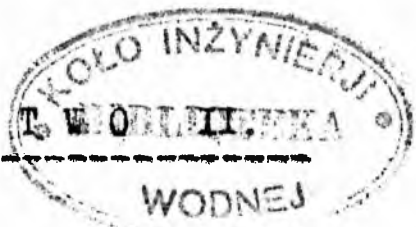
BIBLIOTEKA
KATEDRY
POLSKI
WARSZAWA

~~C-13123~~

główny wypożyczalnia



nr. 817



USTROJE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE.

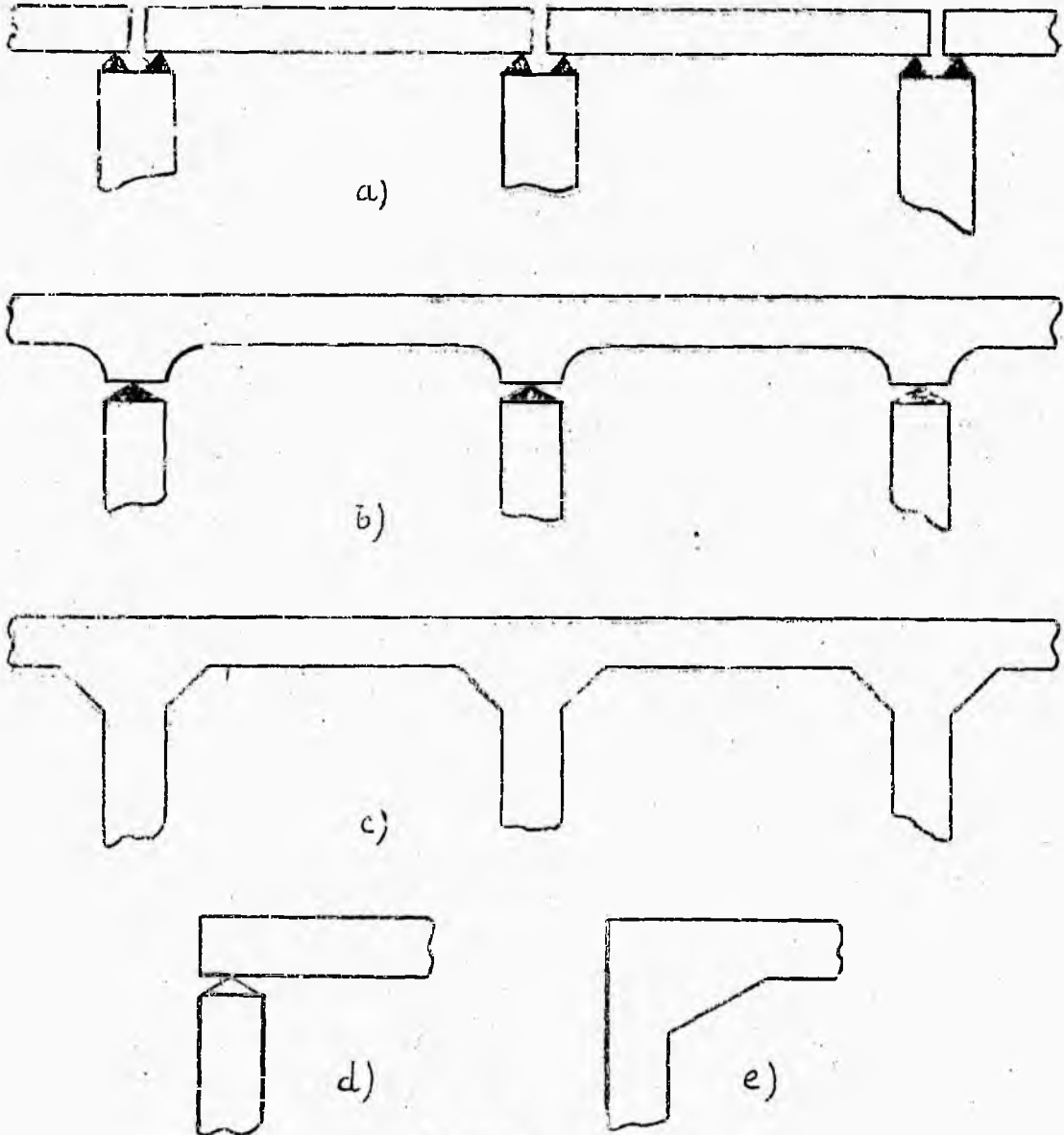
UWAGI OGÓLNE.

W ustrojach żelazo-betonowych wykonywanie wszelkich podziałów i przegubów, oraz wszelkich w mniejszym lub większym stopniu ruchomych połączeń, napotyka na trudności konstrukcyjne. Z drugiej strony, sam sposób powstania każdej budowli żelbetowej: z materiału płynnego a bezkształtnego, który nabiera kształtu i twardości w specjalnie dla danej budowli wykonanych formach, narzuca nam niejako konieczność pojmowania ustroju żelazo-betonowego, jakgdyby ulanego z jednej bryły, a więc ustroju ciągłego, niepodzielonego na drobne i elementarne części konstrukcyjne.

Dlatego też w budownictwie żelazo-betonowym większość ustrojów stosowanych nie daje się sprowadzić do elementów prostych, których zewnętrzne warunki mechaniczne dałyby się wyznaczyć przy pomocy samych tylko równań statyki.

Stanowi to w pewnym zakresie przeciwieństwo tych ustrojów w stosunku do ustrojów żelaznych lub drewnia-

nych. Naprzykład belka, leżąca na dwóch podporach przegubowych, z których jedna jest oprócz tego przesuwna, stanowi element statycznie wyznaczalny, bardzo często spotykany w urządzeniach żelaznych i dREW-

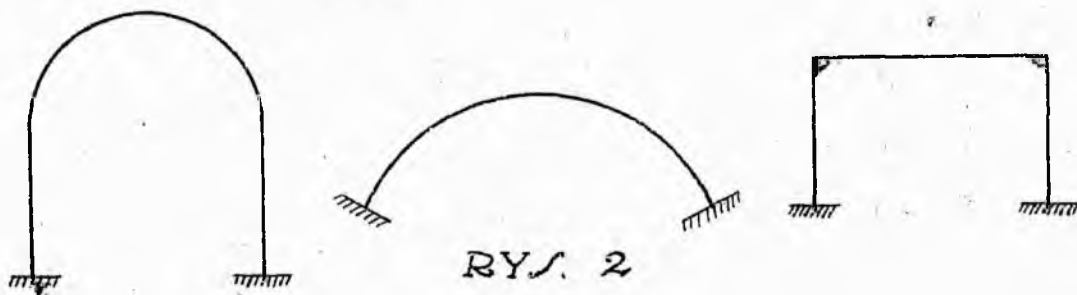


RYC. 1

nianych. Belkę taką, z wyżej wyłuszczoonych powodów, w żelazo-betonie spotykamy o wiele rzadziej, natomiast jako ustrój typowy będziemy tu mieli ciąg belek, leżących na jednej osi i sztywno ze sobą połączonych, czyli belkę ciągłą, wieloprzęsłową, a więc belkę statycznie niewyznaczalną /rys.1.a,b,c/. To samo można powiedzieć o połączeniu belek ze słupami na których się wspierają. W ustrojach żelbetowych belki zasadniczo stanowią jedną całość ze słupami, co znów wprowadza w pewnych warunkach statyczną niewyznaczalność /rys.1,d,e/.

Widzimy więc, że ustroje żelazo-betonowe są to ustroje, po większej części statycznie niewyznaczalne. Statyczna niewyznaczalność może być zewnętrzna lub wewnętrzna.

Zewnętrzna statyczna niewyznaczalność charakteryzuje się tem, że ze zmianą rodzaju podpór /stopnia zamocowania/ ona znika. Przykłady takich ustrojów widzimy na rys.2. Są to przede wszystkim ramownice jednoprzęsłowe, najogólniej ujęte jako ciąg belek,



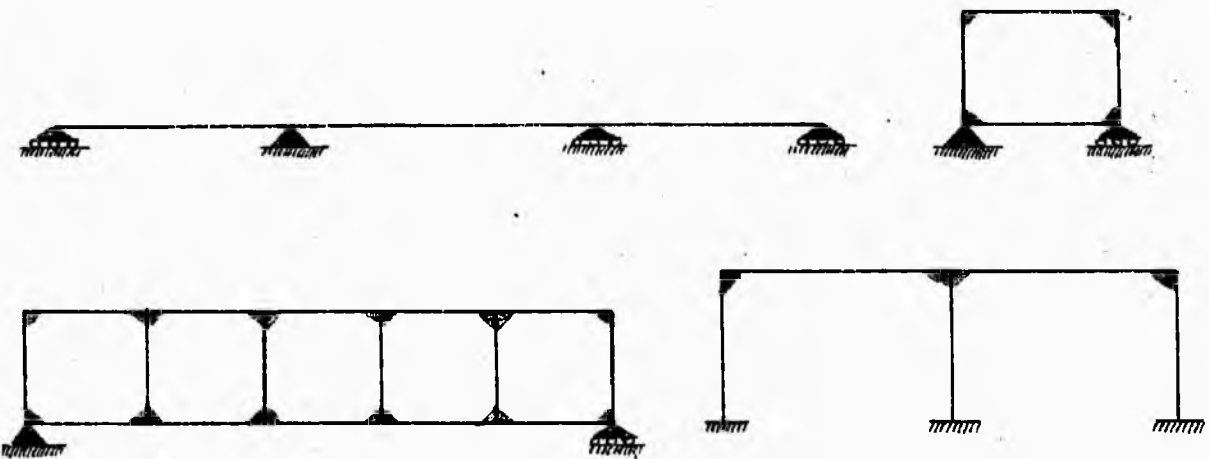
sztywno połączonych między sobą, a leżących na linii



RYŚ. 2

łamanej, wspartej dwoma swoimi końcami.

Ustroje, wskazane na rys.3, są wewnętrznie statycznie niewyznaczalne, gdyż żadne zmiany w ich opo-



RYŚ. 3.

rach nie prowadzą statycznej wyznaczalności. Są to przede wszystkim wieloprzęskowe belki ciągłe i ramownice otwarte lub zamknięte /Kratownice Vierendeel'a/. W pierwszym rodzaju ustrojów zmiany temperatury ustro-

ju mają zawsze wpływ na naprężenia.

Do wyznaczenia wszystkich warunków mechanicznych ustrojów obu powyższych rodzaj, równania statyki, wynikające z rozważania brył doskonale sztywnych, jak wiemy, nie wystarczają.

Uciekamy się więc do innej dziedziny mechaniki, a mianowicie do zjawisk i praw, wynikających ze sprężystości tworzywa, które określają nam warunki pracy tych ustrojów i dostarczają brakujących zależności matematycznych.

Jak zaznaczyliśmy, w ustrojach statycznie niewyznaczalnych zewnętrznie, spotykamy się zawsze z czynnikiem wywierającym bardzo znaczny wpływ na rozkład i wielkość naprężeń w danym ustroju, a mianowicie z wpływem zmian temperatury i kurczeniem się tworzywa. Istotnie opora nieruchoma lub nieruchoma i sztywna inaczej będzie oddziaływała na ustrój, gdy on się skurczy lub rozszerzy skutkiem ochłodzenia lub nagrzania, niż to na miejsce, gdy ustrój pozostaje niezmiennym co do swych wymiarów. Powstają zatem skutkiem zmian temperatury w prętach ustroju dodatkowe naprężenia, nieraz bardzo znaczne.

Podobny wpływ jak ochłodzenie ustroju posiada skurcz betonu, czyli właściwość zmniejszania objętości w okresie twardnienia. Skurcz ten można przy-

jąć jako równoznaczny z ochłodzeniem ustroju o 10° do 15°C ., co wynosi, przy współczynniku rozszerzalności betonu równym $0,000012$ na 1°C ., skrócenie o $0,12$ do $0,18$ milimetra na jeden metr długości.

STOPIEŃ STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI.

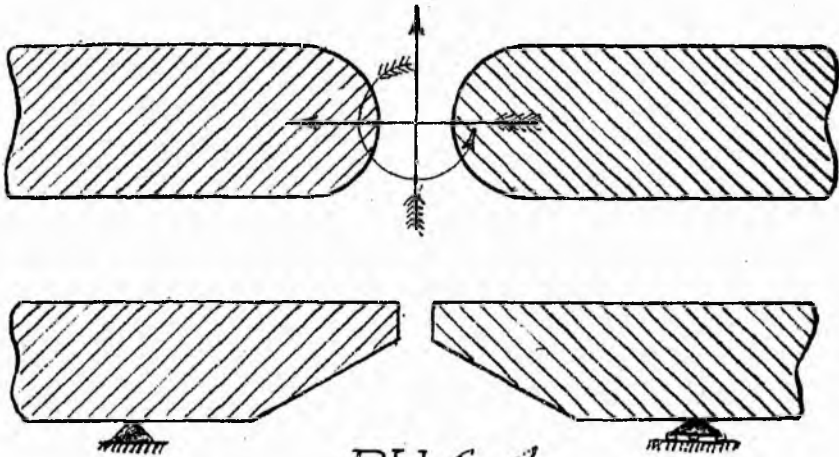
Pod stopniem statycznej niewyznaczalności pojmujemy liczbę równań, które należy ustalić poza równaniami statyki, w tym celu, ażeby wyznaczyć wszystkie siły zewnętrzne, działające na dany ustrój, oraz punkty zaczepienia tych sił. Mówimy więc, że ustrój jest pojedynczo, dwukrotnie, trzykrotnie i t.d. statycznie niewyznaczalny, jeżeli potrzeba jest jednego, dwóch, trzech i t.d. dodatkowych równań.

Jako sposobu określania statycznej niewyznaczalności, użyjemy następującej metody poglądowej.

Jeżeli będziemy rozpatrywali połączenia ze sobą dwóch brył, to zauważymy, że połączenia te mogą pozostawiać tym bryłom większą lub mniejszą swobodę wzajemnych ruchów w jednej płaszczyźnie, tylko bowiem ustroje leżące w jednej płaszczyźnie będziemy brali narazie pod uwagę. Połączenia te wyrazimy w postaci mechanicznej drążków osadzonych w bryłach przegubowo. Zależnie od liczby tych drążków, będzie istniała

mniejsza lub większa swoboda wzajemnych ruchów.

WYPADEK I. Bryły nie są wcale połączone, zatem swoboda wzajemnych ruchów jest zupełna /rys.4/. -

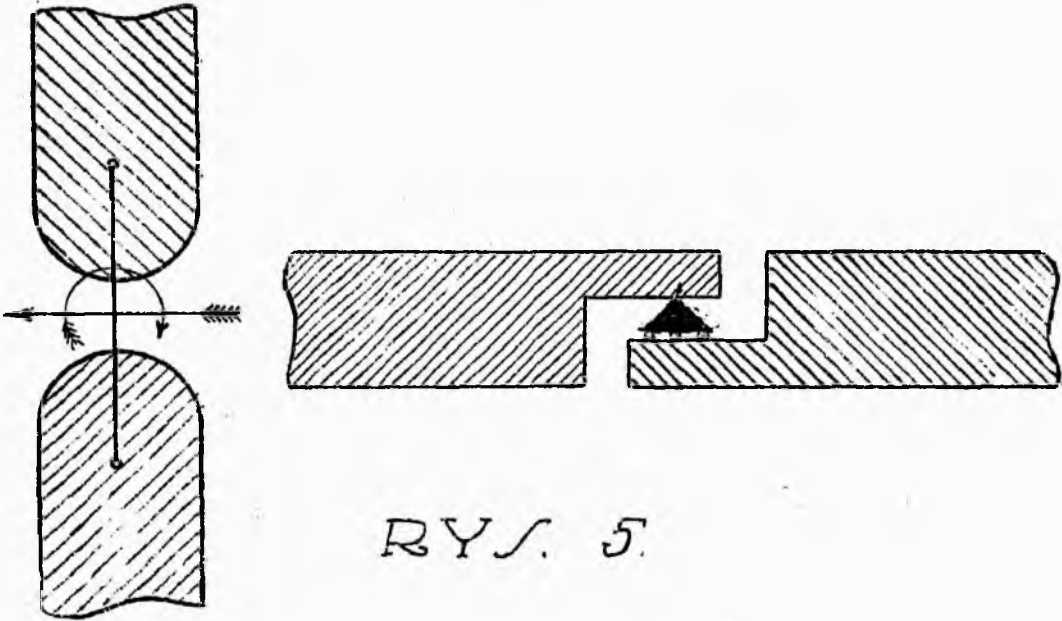


RYŚ. 4.

Bryły mogą się wzajemnie: a/ obracać, b/ przesuwąć poziomo, c/ przesuwąć pionowo.

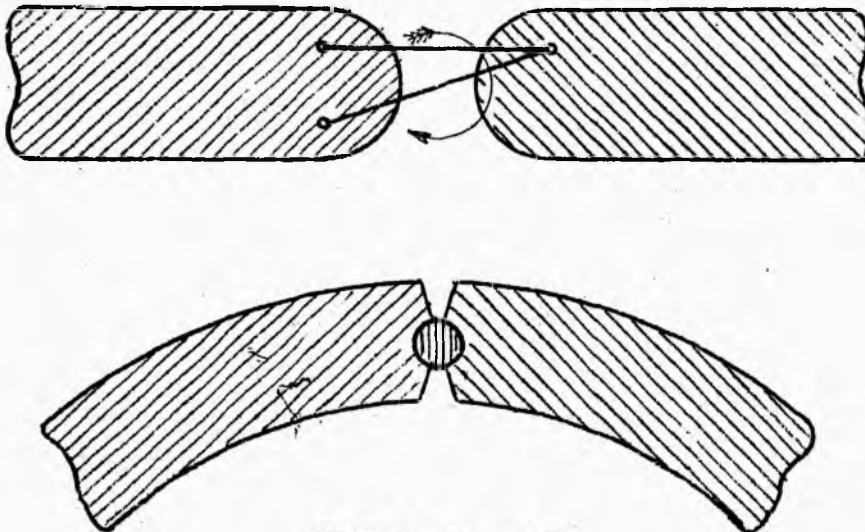
Wszystkie trzy możliwe ruchy uwidocznione są na rysunku strzałkami. Jako przykład mogą służyć końce dwóch belek wspornikowych, niczem ze sobą bezpośrednio nie połączonych.

WYPADEK II. Bryły są połączone jednym sztywnym drążkiem, osadzonym przegubowo. Swoboda ruchów wzajemnych unicestwiona w kierunku pionowym /rys.5/. Bryły mogą wzajemnie tylko: a/ obracać się, b/ przesuwąć poziomo. Przykład: połączenie przegubowe i przesuwne końców dwóch belek, z których jedna służy za oporę dla drugiej.



RYS. 5.

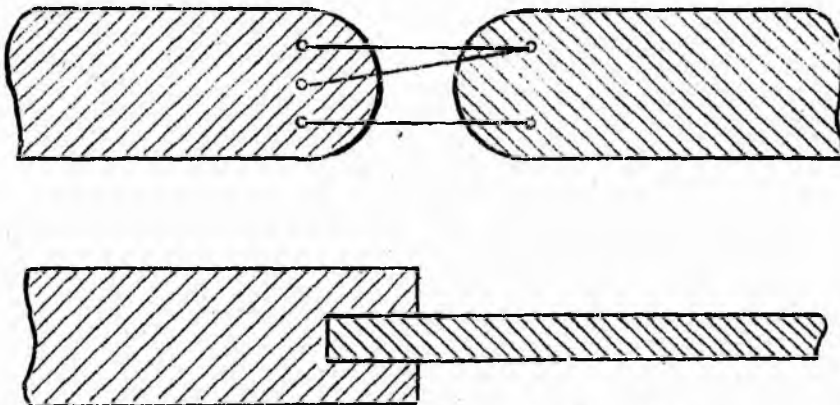
WYPADEK III. Bryły są połączone dwoma drążkami sztywnymi, jak wskazano na rys. 6, przyczem jeden



RYS. 6.

z przegubów jest dla obu drążków wspólny. Swoboda ruchów wzajemnych unicestwiona tak w kierunku pionowym, jak i poziomym. Pozostaje jedynie swoboda wzajemnego obrotu brył. Przykład: zwornikowy przegub łuku.

WYPADEK IV. Bryły są połączone trzema drążkami sztywnymi, z których dwa posiadają wspólny przegub, trzeci zaś umieszczony jest zupełnie oddzielnie /wszystkie trzy drążki nie mogą być wzajemnie równoległe/. Wszelka wzajemna swoboda ruchów unicestwiona /rys. 7/. Przykład: belka jednym końcem osadzona w murze i wszelki przekrój sztywnego ożłona konstrukcyjnego.



RY. 7

Zastąpienie różnego rodzaju połączeń pomiędzy bryłami systemem prętów, jak to uczyniono powyżej, daje nam możność stwierdzenia w każdym wypadku, ile

niewiadomych następuje rozwiązanie danego zagadnienia statycznego. Mianowicie niewiadomych jest tyle, ile prętów, gdyż rozwiązanie statyczne winno nam dać siłę działającą w każdym z tych prętów, gdyby istotnie połączenia były w ten sposób urzeczywistnione. Wykonanie tych połączeń przy pomocy innych mechanizmów /jak to widać z przytoczonych powyżej przykładów/, dających te same swobody ruchów nic nie zmienia oczywiście w warunkach statycznych ustroju.

Przy połączeniach pewnej liczby brył w jeden ustrój nośny, czyli w jeden nieprzerwany ciąg belek dowolnego kształtu, oparty na fundamencie lub bezpośrednio na ziemi, możemy całość uważać za zespół brył /belek/ tak czy inaczej połączonych ze sobą i z fundamentem /lub ziemią/. Wówczas dla każdej poszczególnej bryły układu istnieją 3 równania równowagi, zatem dla ustroju, składającego się z b brył będziemy mieli $3b$ równań. Zważywszy, że w myśl powyższego, każdy z wyobrażalnych drążków, łączących dane ciała, może być zastąpiony siłą, i że znajomość wszystkich tych sił da nam znajomość mechanicznego stanu danego ustroju, dochodzimy do wniosku, iż łatwo zdamy sobie sprawę ze stopnia statycznej niewyznaczalności tego ustroju, gdy zastąpimy drążkami wzajemne połączenia poszczególnych belek ustroju i połączenia

z ziemią lub fundamentem i porównamy otrzymaną liczbę drążków wyobrażalnych z liczbą równań, dostarczonych przez statykę, $3b$. Oznaczymy przez ω liczbę drążków wyobrażalnych, stanowiących połączenia belek między sobą, a przez z liczbę takichże drążków, łączących ustrój z ziemią lub fundamentem. Wówczas będziemy mieli przy statycznej wyznaczalności ustroju równanie:

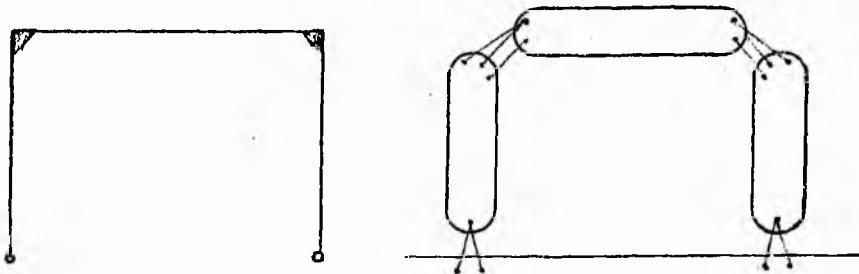
$$\omega + z = 3b \quad \dots\dots\dots/1/$$

zaś w wypadku statycznej niewyznaczalności równość powyższa zamieni się na nierówność:

$$\omega + z > 3b \quad \text{lub inaczej} \quad \omega + z - 3b = v \dots\dots/2/$$

gdzie v będzie liczbą brakujących równań czyli stopniem statycznej niewyznaczalności ustroju.

Weźmy dla przykładu najprostszą ramę /rys. 8/,



RYS. 8.

składającą się z trzech prętów, połączonych ze sobą zupełnie sztywno, z ziemią zaś przegubowo, czyli przy pozostawieniu swobody obrotu; mamy więc w tym

wypadku:

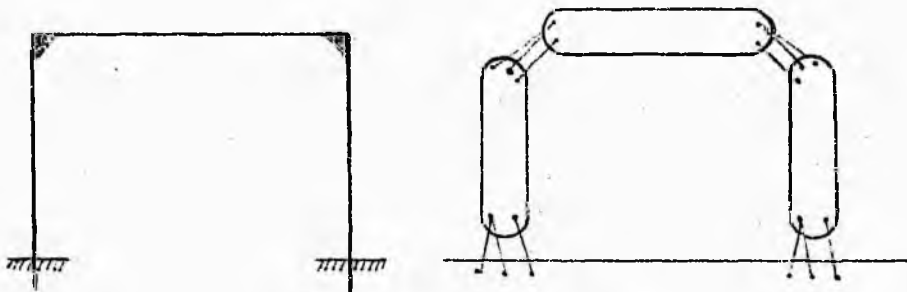
$$\omega = 6; z = 4; b = 3 \quad \text{zatem} \quad \omega + z = 6 + 4 = 10$$
$$3b = 9; \quad v = \omega + z - 3b = 10 - 9 = 1$$

brak więc jednego równania; ustrój jest pojedynczo statycznie niewyznaczalny.

Przy takiej samej ramie, ale zamocowanej na oporach /rys. 9/ mamy:

$$\omega = 6; z = 6; 3b = 9; \quad v = 6 + 6 - 9 = 3$$

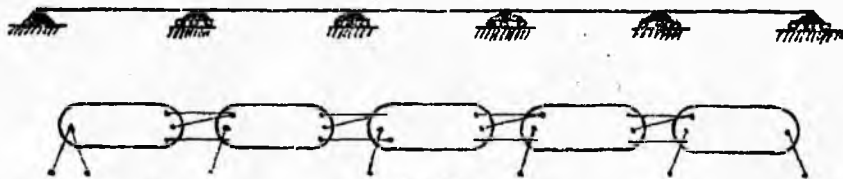
czyli brak nam trzech równań; rama taka będzie trzy-



RYS. 9.

krotnie statycznie niewyznaczalna.

Rozpatrzmy jeszcze belkę ciągłą na n oporach /rys. 10/, z których jedna jest przegubowa stała, a pozostałe przegubowe i przesuwne.



RYS. 10.

Będziemy mieli:

$$\omega = (n-2)3; \quad z = n+1; \quad b = n-1$$

zatem

$$v = (n-2)3 + (n+1) - 3(n-1) = n-2$$

czyli brak jest $(n-2)$ równań, belka jest $(n-2)$ krotnie statycznie niewyznaczalna. Jak wiadomo tę właśnie brakującą liczbę równań dają nam równania Clapeyrona.

Przy projektowaniu ustroi statycznie niewyznaczalnych należy mieć na uwadze, że zbyt wielka liczba brakujących równań v komplikuje zadanie do tego stopnia, że dokładne obliczenie staje się niemożliwym. Dlatego też należy dążyć do zmniejszenia stopnia statycznej niewyznaczalności ustroju. Trzykrotną statyczną niewyznaczalność można uważać w praktyce jeszcze za łatwą do przeprowadzenia w obliczeniu. Wogóle w dużych konstrukcjach bardzo wielu statycznie niewyznaczalnych, radzimy sobie w ten sposób, iż konstrukcję dzielimy przy pomocy przegubów i innych mniej lub więcej ruchomych połączeń na części składowe o małym stopniu statycznej niewyznaczalności, obliczamy w tym założeniu i wykonywamy stosownie do obliczenia.

W ustrojach żelbetonowych, nie dźwigających spe-

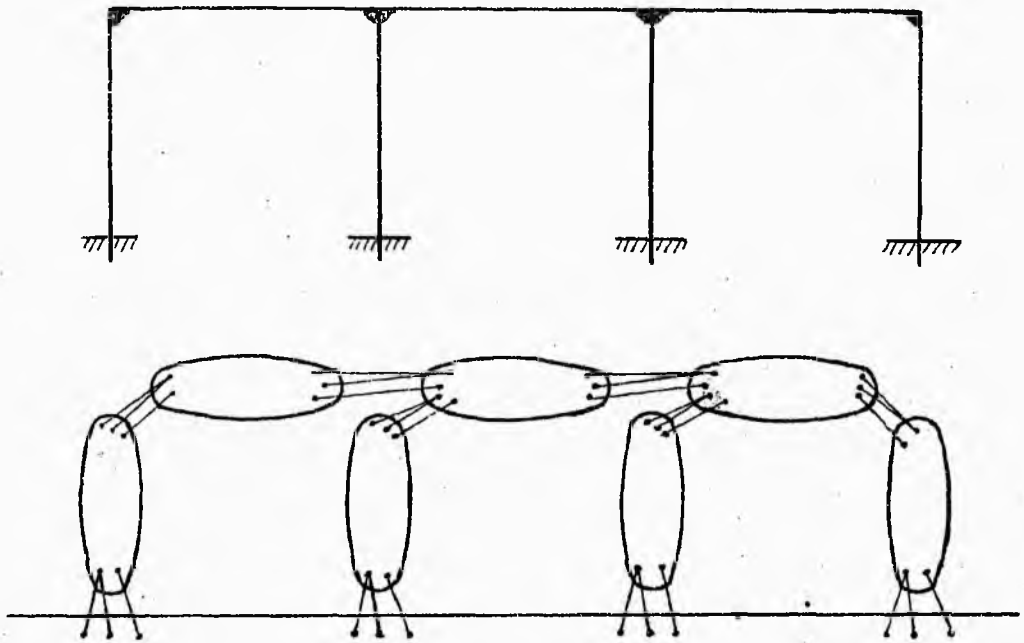
ożalnie wielkich obciążeń, pozwalamy sobie na pewne przybliżenia, polegające na tem, że w danej konstrukcji wielokrotnie statycznie niewyznaczalnej zakładamy do obliczenia szereg przegubów tak, by pokaźnie zmniejszyć liczbę statycznie niewyznaczalnych, a następnie, przy wykonywaniu budowy, przegubów nie robimy, miejsca przegubów robimy zupełnie sztywnymi, pomijając przyjęte w obliczeniu założenie. Na to, ażeby takie postępowanie nie prowadziło do dużej rozbieżności między obliczaniem a samą pracą konstrukcji, trzeba, ażeby owe przeguby fikcyjne były założone w takich miejscach, w których moment gnący jest, w konstrukcji ciągłej przy nieistniejących przegubach bardzo mały, najmniej odbiegający od zera.

Takie ułatwienie się z wielokrotną statyczną niewyznaczalnością przy trafnie pomysłanych przegubach, znacznie upraszcza obliczenie konstrukcji, nie odbierając jej zalety sztywności i jednolitości, jaką żelazo-beton posiada.

Rozpatrzmy kilka przykładów z powyższego stanowiska.

Ramownica trójprzęsłowa, całkowicie zamocowana na oporach /rys.11/, wymaga do rozwiązania $\sqrt{=18+12-21=9}$ równań dodatkowych prócz równań statyki. Jeżeli sku-

py oprzemy na przegubach, to ilość brakujących równań zmniejszy się nam o 4, pozostanie wszakże $V_1 = 5$

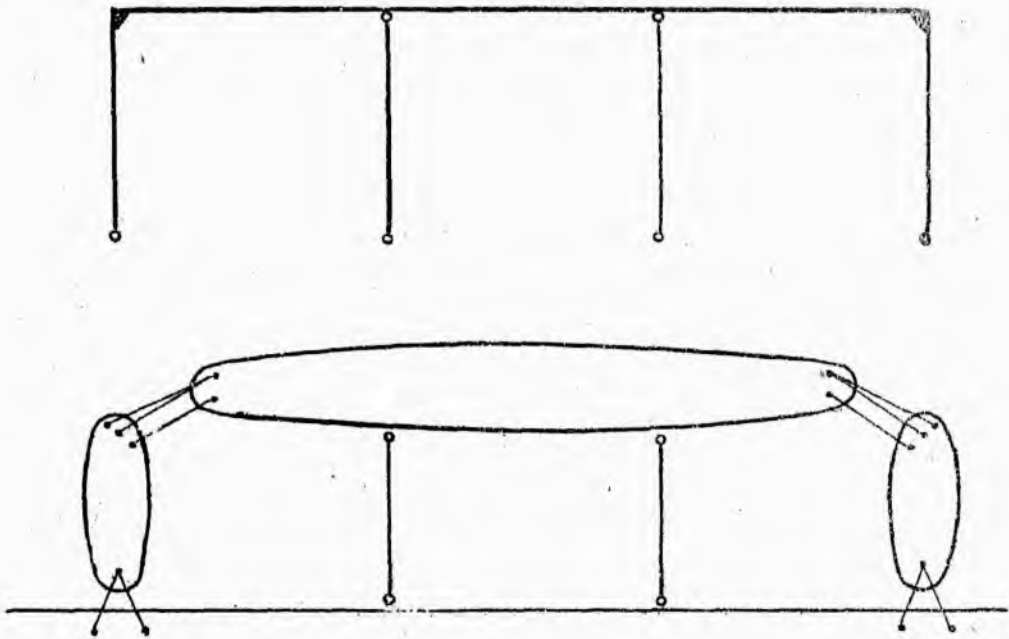


RYS. 11.

Możemy zrobić dalsze założenie: możemy słupom środkowym dać przeguby na górze, czyniąc z nich w ten sposób drążki, kępujące wyłącznie ruch pionowy /rys.12/. Będą to t.zw. słupy wahakowe. Wówczas

$V_2 = 6 + 6 - 9 = 3$, czyli konstrukcja stała się tylko trzykrotnie statycznie niewyznaczalną, możemy więc ją z łatwością obliczyć.

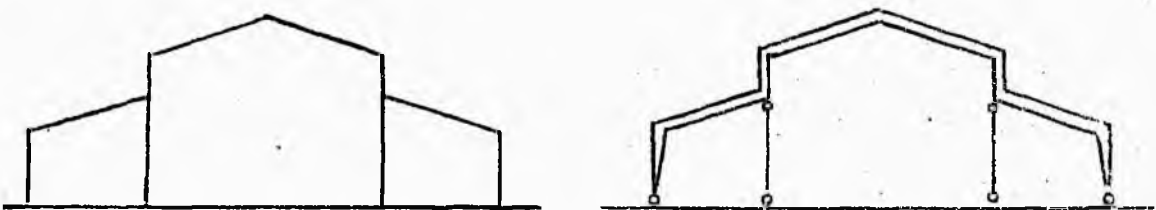




RYS. 12.

Ostatnie ze wskazanych rozwiązań jest najbardziej celowe, gdyż w istocie mało odchyła się od tego wyniku, jaki otrzymalibyśmy nie robiąc zupełnie przegubów, obliczenie zaś znacznie się upraszcza, gdyż, jak widzimy, ilość brakujących równań spada z 9-ciu na 3.

Trójprzęskowe hale fabryczne /rys.13/ najlepiej



RYS. 13.

dają się rozwiązać przez stosowanie skupów wahakowych.

Inne rodzaje uproszczeń, uwidocznione na rys. 14-a i 14-b, dają rozwiązanie mniej racjonalne.

Mówiliśmy poprzednio, iż zamianę połączeń sztywnych na przegubowe przeprowadzamy tylko teoretycznie, dla uproszczenia obliczeń, zaś przy budowie przegubów nie wykonywamy. Nie zawsze jednak jest to możliwem.



RYS. 14-a



RYS. 14-b

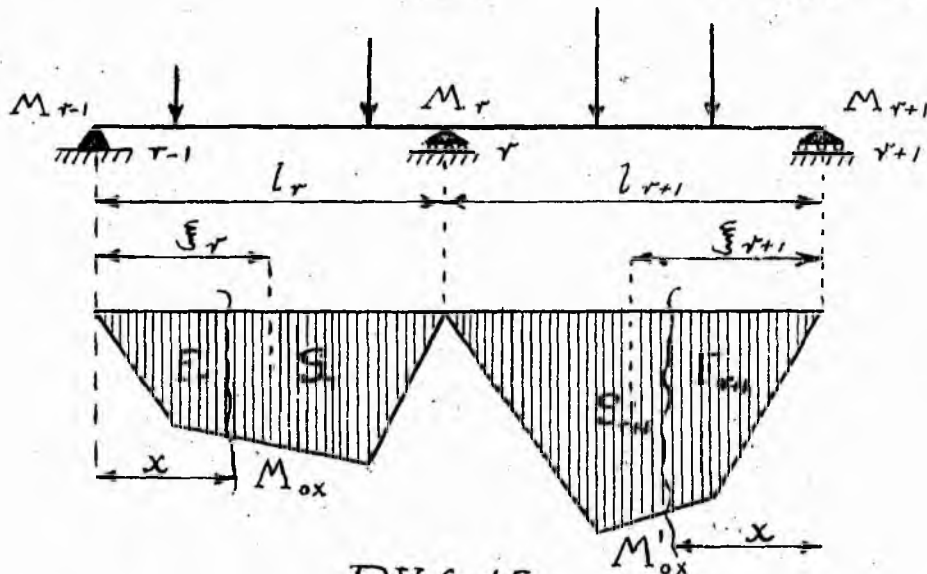
Przy budowlach bardzo poważnych i o dużych obciążeniach, jest konieczne wykonywanie w rzeczywistości przegubów przyjętych w obliczeniu.

BELKA CIĄGA.

Belkę ciągłą rozpatrujemy jako układ wyłącznie wewnątrznie statycznie niewyznaczalny, w założeniu przegibności wszystkich opór i przesuwności wszystkich prócz jednej. W konstrukcji żelazo-betonowej w

rzeczywistości ściśle biorąc niema to miejsca, jednakże powyższe założenia możemy przyjąć, jako dające nam dostateczne przybliżenie.

Weźmy belkę ciągłą, podpartą na n oporach. Jeżeli przyjmiemy za niewiadome statycznie niewyznaczalne, wartości momentów oporowych, to, korzystając z równań Clapeyron'a, mamy możliwość wyznaczenia tych momentów. Na oporach krańcowych momenty oporowe są równe zero /w założeniu podpór jak wyżej/, pozostają więc do wyznaczenia $(n-2)$ momenty oporowe. Rozpatrzmy dwa sąsiednie przęsła belki ciągłej /oznaczenia są podane na rys.15/, przy czym M_{r-1} , M_r i M_{r+1}



RYJ. 15.

są to momenty oporowe na odnośnych oporach. Wskazane na rysunku wykresy momentów gładkich dla przyjętego obciążenia /zresztą zupełnie dowolnego/ odpowiadają

przypuszczeniu, że każde przęsło belki ciągłej jest oddzielną, od sąsiednich odciętą, belką, leżącą swobodnie na dwu oporach. Oznaczmy wielkość pola momentów gnących lewego przęsła przez F_r , jego środek ciężkości przez S_r oraz odległość tego środka ciężkości od opory lewą $r-1$ przez ξ_r . Analogicznie dla prawego przęsła wprowadzamy oznaczenia F_{r+1} , S_{r+1} oraz ξ_{r+1} - odległość od prawej opory.

Równania Clapeyron'a, jak wiemy z wytrzymałości tworzyw, zwiążą każde trzy sąsiednie momenty oporowe następującą zależnością:

$$M_{r-1} \cdot l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} \cdot l_{r+1} = N_r \dots /3/$$

gdzie N_r jest wyrazem zależnym od obciążenia rozpatrywanych przęseł oraz od ugięcia się opory r względem dwóch pozostałych opór, które to przesunięcie pionowe oznaczmy przez δ_r /rys.16/. Wartość N_r wyraża się wzorem:

$$/4/ \dots N = - \frac{6L_{0,r}}{l_r} - \frac{6R_{0,(r+1)}}{l_{r+1}} - \frac{6EJ\delta_r(l_r + l_{r+1})}{l_r \cdot l_{r+1}}$$

gdy jednak ugięcia podpór nie uwzględniamy, ostatni wyraz odpada.

We wzorze /4/ wyraz $L_{0,r}$ jest momentem statycznym

pola momentów F_r
 lewego przęsła
 względem lewej opo-
 ry $r-1$, zaś

$R_{o(r+1)}$ - momen-

tem statycznym pola momentów F_{r+1} prawego przęsła względem opory prawej $r+1$ /w założeniu belki rozciętej nad oporami/. Możemy zatem napisać:

$$15/ \dots L_{or} = F_r \cdot \xi_r ; R_{o(r+1)} = F_{r+1} \cdot \xi_{r+1}$$

lub inaczej:

$$16/ \dots L_{or} = \int_0^{l_r} M_{ox} \cdot x \, dx ; R_{o(r+1)} = \int_0^{l_{r+1}} M'_{ox} \cdot x \, dx$$

jeżeli przez M_{ox} oznaczymy moment giący w dowolnym przekroju lewego przęsła, wziętym w odległości x od opory $r-1$, a przez M'_{ox} - analogiczny moment prawego przęsła względem opory $r+1$ /rys.15/.

Jako wynik zastosowania równania Clapeyron'a otrzymamy tyle równań, ile posiadamy momentów oporowych, przytem momenty skrajne wyznaczymy z warunków podparcia skrajnych przęseł belki /w danym wypadku będą one równe zero/, będziemy mogli zatem wszystkie niewiadome momenty oporowe wyznaczyć.

Wyznaczanie wielkości N_r , wchodzącej w skład

równania Clapeyron'a, przyjęcie następująca postać przy różnych rodzajach obciążeń:

WYPADEK I. Obciążenie siłami skupionymi:

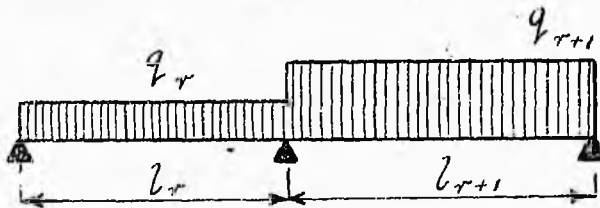
Przyjmując oznaczenie, jak na rys.17, mamy:

$$17/ \dots N_r = - \frac{\sum P_r \cdot a_r (l_r^2 - a_r^2)}{l_r} - \frac{\sum P_{r+1} \cdot a_{r+1} (l_{r+1}^2 - a_{r+1}^2)}{l_{r+1}}$$



RYJ. 17.

WYPADEK II. Obciążenie w sposób ciągły na całkowitych długościach przęseł



tych długościach przęseł

/rys.18/

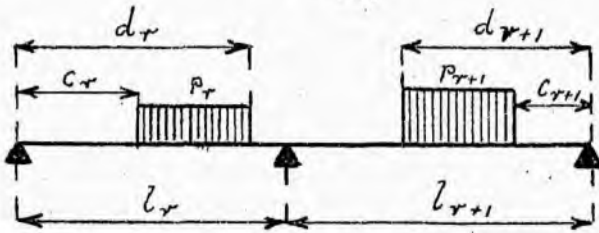
RYJ. 18.

$$M_{\max} \frac{q_r \cdot l_r^2}{8} ; F_r \frac{2}{3} \frac{q_r \cdot l_r^2}{8} ; \xi = \frac{1}{2} l_r$$

$$N_r = - \frac{1}{4} (q_r \cdot l_r^3 + q_{r+1} \cdot l_{r+1}) \dots \dots \dots 18/$$

WYPADEK III. Obciążenie w sposób ciągły tylko na częściach długości przęseł /rys.19/;

$$N_r = - \frac{P_r (d_r^2 - c_r^2) (2l_r^2 - c_r^2 - d_r^2)}{4l_r} - \frac{P_{r+1} (d_{r+1}^2 - c_{r+1}^2) (2l_{r+1}^2 - c_{r+1}^2 - d_{r+1}^2)}{4l_{r+1}} \quad \dots /9/$$



RYS. 19.

Do obliczania belek ciągłych możemy posługiwać się tablicami Winklera. Tablice te są ułożone dla belek dwu- i trzyprzęsłowych i dla obciążeń równomiernych, zajmujących całe przęsła, w założeniu równych przęseł l . Obliczamy z nich maximum i minimum momentu gnącego w dowolnym przekroju /tablice podają współczynniki co $\frac{1}{10} l$ / z wzorów:

$$M_{\max} = (ag + bp) l^2 \quad \dots \dots \dots /10/$$

$$M_{\min} = (ag + cp) l^2 \quad \dots \dots \dots /11/$$

gdzie g jest obciążeniem ciągłym stałym /np. ciężar własny belki/, zaś p - obciążeniem ciągłym rucho-

mem /względnie obciążeniem zastępczym ciągu ciężarów skupionych/, obliczonym na metr bieżący belki. Wartość współczynników a , b i c podają tablice /patrz str. 26 i 27/.

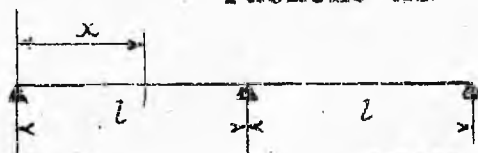
Zmienność momentów gnących belkę ciągłą w przekrojach niebezpiecznych t. zn. na osi opory i w pobliżu środka przęsła uprzytomnimy sobie lepiej, gdy wyznaczymy momenty jako funkcje sumy obciążeń: stałego i ruchomego, badając w każdym wypadku najniekorzystniejsze dla danego momentu rozłożenie na belce ciągłej obciążenia ruchomego.

T A B L I C I
DO WYZNACZENIA MOMENTÓW GNĄCYCH DLA BEL
RÓWNOMIERNYK
WSZYSTKIE PRZEŚLA BELI

$$M_{max} = (ag + bp) l^2$$

g - obciążenie stałe na m. b. belki.

p - " " ruchome na " "



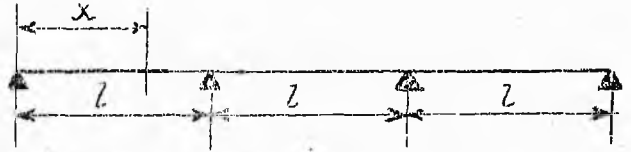
BELKA NA 3 OPORACH.

Stosunek $x:l$	Wpływ obciążenia g	Wpływ obciążenia p	
	a	b	c
0.0	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	+0.0325	+0.03875	-0.00625
0.2	+0.0550	+0.0675	-0.0125
0.3	+0.0675	+0.08625	-0.01875
0.375	+0.0703	+0.09375	-0.02344
0.4	+0.0700	+0.09500	-0.02500
0.5	+0.0625	+0.09375	-0.03125
0.6	+0.0450	+0.08250	-0.03750
0.7	+0.0175	+0.06125	-0.04375
0.75	0.00000	+0.04688	-0.04688
0.8	-0.0200	+0.03000	-0.05000
0.85	-0.0425	+0.01523	-0.05773
0.9	-0.0675	+0.00611	-0.07361
0.95	-0.0950	+0.00138	-0.09638
1.00	-0.1250	+0.00000	-0.1250

WINKLERA
CIĄGLYCH NA 3 i 4 OPORACH PRZY OBCIĄŻENIACH

SĄ JEDNAKOWEJ ROZPIĘTOŚCI.

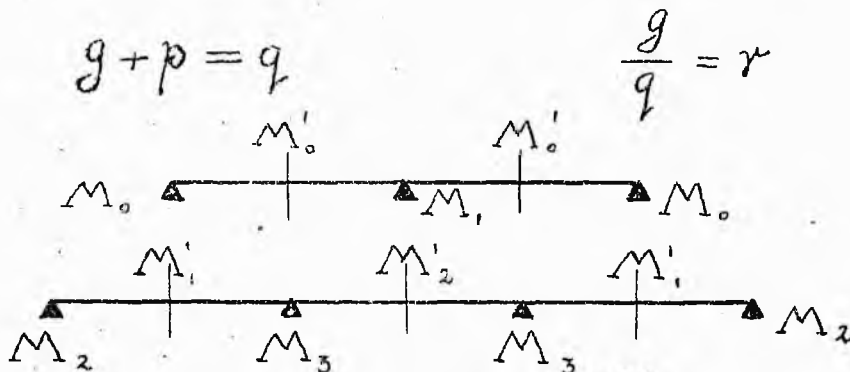
$$M_{min} = (ag + cp) l^2$$



BELKA NA 4 OPORACH.

Stosunek $x:l$	Wpływ obciążenia g	Wpływ obciążenia p	
	a	b	c
	PRZEJĘŁO KRAŃCOWE		
0.0	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	+ 0.035	+ 0.040	- 0.005
0.2	+ 0.060	+ 0.070	- 0.010
0.3	+ 0.075	+ 0.090	- 0.015
0.4	+ 0.080	+ 0.100	- 0.020
0.5	+ 0.075	+ 0.100	- 0.025
0.6	+ 0.060	+ 0.090	- 0.030
0.7	+ 0.035	+ 0.070	- 0.035
0.8	0.000	+ 0.04022	- 0.04022
0.85	- 0.02125	+ 0.02773	- 0.04898
0.9	- 0.04500	+ 0.02042	- 0.06542
0.95	- 0.07125	+ 0.01706	- 0.08831
1.00	- 0.10000	+ 0.01667	- 0.11667
	PRZEJĘŁO ŚRODKOWE		
0.0	- 0.1000	+ 0.01667	- 0.11667
0.05	- 0.07625	+ 0.01408	- 0.09033
0.10	- 0.05500	+ 0.00748	- 0.06248
0.15	- 0.03625	+ 0.02053	- 0.05678
0.20	- 0.0200	+ 0.030	- 0.050
0.2764	0.0000	+ 0.050	- 0.050
0.3	+ 0.005	+ 0.055	- 0.050
0.4	+ 0.020	+ 0.070	- 0.050
0.5	+ 0.025	+ 0.075	- 0.050

Oznaczając sumę obciążenia stałego i ruchomego przez q oraz przez $r = \frac{g}{q}$ - stosunek obciążenia stałego do całkowitego, możemy wyznaczyć momenty gnące w zależności od q i jednego tylko współczynnika f , zastępującego współczynniki z tablic Winklera.



Dla momentów w środkach przęseł $M_{max} = (ag + bp)l^2 =$

$$= [arq + b(1-r)q]l^2 = (ar - br + b)ql^2 = f'ql^2$$

Dla momentów na osiach opór $M_{min} = -(ag + cp)l^2 =$

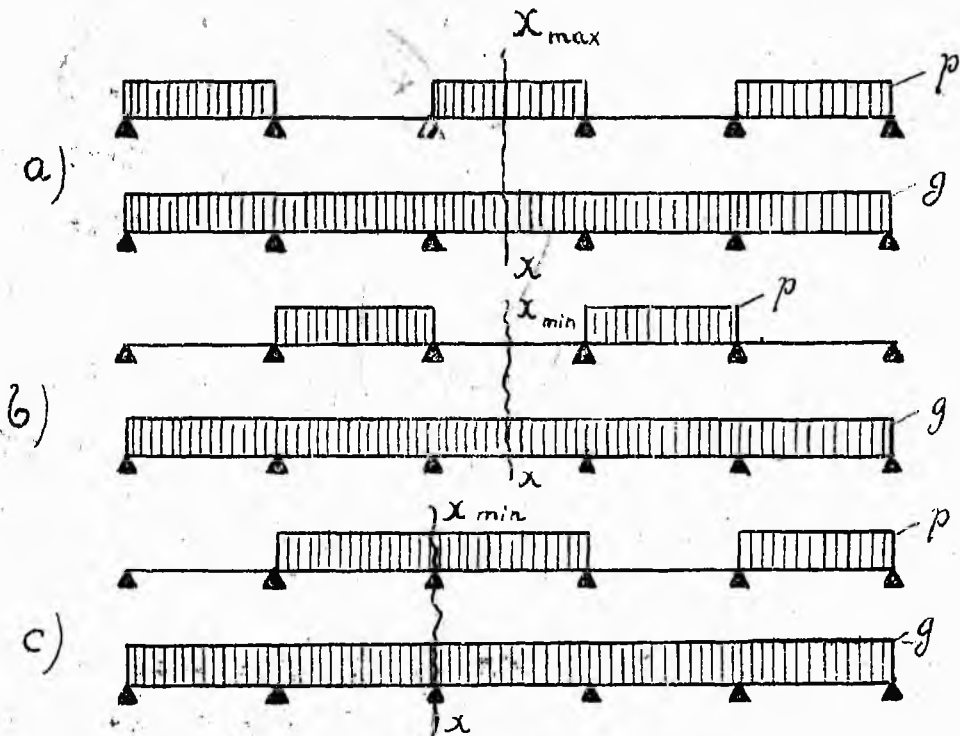
$$= -[arq + c(1-r)q]l^2 = -(ar - cr + c)ql^2 = f''ql^2$$

Współczynniki f' i f'' dla punktów wskazanych na powyższym szkicu są podane w tablicy na str. 29 przy różnych stosunkach obciążenia ruchomego do obciążenia całkowitego.

Na rys. 20 a, b i c są wskazane dla przykładu rozłożenia obciążenia ruchomego na belce 5-przęsłowej, dające max. lub min. momentów gnących w przekrojach oznaczonych

Spółczynniki f' i f'' dla :

$\gamma = \frac{g}{q}$	M_1	M_0	M_3	M_1'	M_2'
1	-0.125	+0.0703	-0.100	+0.08	+0.025
0.9	- .125	.07277	.10167	.082	.030
0.8	- .125	.07524	.10333	.084	.035
0.7	- .125	.07771	.105	.086	.040
0.6	- .125	.08018	.10667	.088	.045
0.5	- .125	.08265	.10833	.090	.050
0.4	- .125	.08512	.11	.092	.055
0.3	- .125	.08759	.11167	.094	.060
0.2	- .125	.09006	.11333	.096	.065
0.1	- .125	.09253	.115	.098	.070
0	-0.125	+0.0950	-0.11667	+0.100	+0.075



RYS. 20.

Wykres momentów dla belki ciągłej, wyznaczonych dla najkorzystniejszych wypadków składa się z dwóch ciągów krzywych /patra rys.21 a/, z których jeden ciąg jest dla max. momentów, drugi - dla min. momentów. Szczególnie interesujące dla obliczenia wytrzymałości są oczywiście części krzywych wyrysowane grubiej. Należy podkreślić, że pewne części belek, jak to widać z wykresu, znajdują się pod działaniem to momentów dodatnich, to momentów ujemnych i winny być odpowiednio uzbrojone.

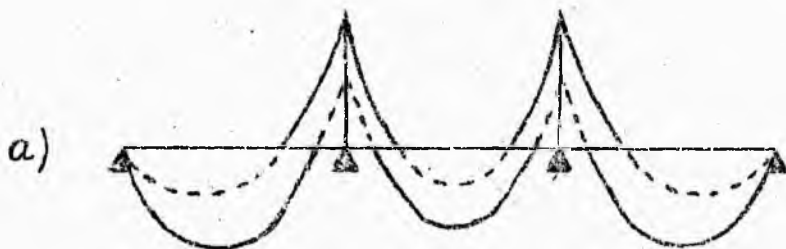
W wypadkach stosunkowo małych obciążeń i równych rzęseł obliczenie belek ciągłych równomiernie obciążonych można dokonywać w uproszczony sposób następujący:

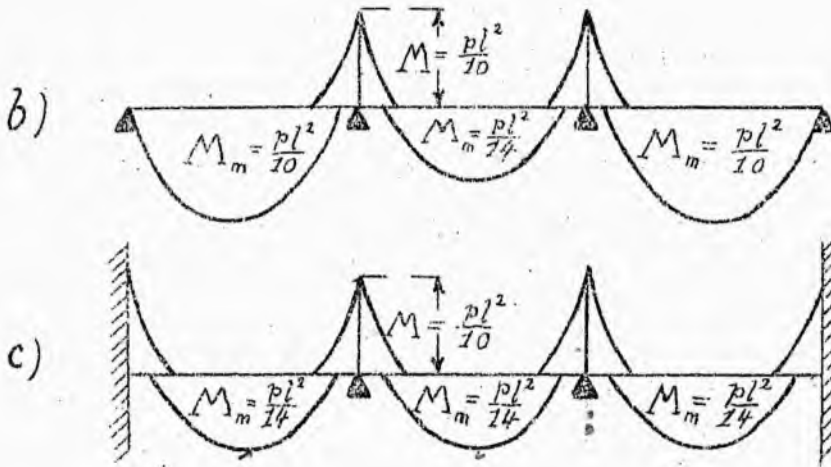
1^o dla belki dwuprzęsłowej: największy moment gnący a oporze środkowej, jest równy $\frac{pl^2}{8}$

2^o dla belki trzyprzęsłowej /rys.21/:

w przęsłach skrajnych: $M_{max} = \frac{pl^2}{10}$ * jeżeli skrajne pory są przegubowe,

w przęśle środkowym: $M_{max} = \frac{pl^2}{14}$





RYN. 21

Na rys. 21 b i c dla wszystkich przęsał M_{max} podane jest dla środkowego przekroju przęsała.

Jeżeli belka jest obustronnie zamocowana, to M_{max} w skrajnych przęsałach bierzemy takie same, jak w przęśle środkowym, czyli $M_{max} = \frac{pl^2}{14}$

Momenty oporowe na oporach środkowych i skrajnych, jeżeli belka obustronnie zamocowana:

$$M = \frac{pl^2}{10}$$

3^o dla belki wieloprzęskowej:

Przęsła skrajne, przy skrajnych oporach przegubowych, jak przęsła skrajne belki trzyprzęskowej, t.j.

$$M_{max} = \frac{pl^2}{10}$$

jeżeli belka zamocowana obustronnie, to $M_{max} = \frac{pl^2}{14}$

Przęsła środkowe, wszystkie jednakowe, jak przęsa-

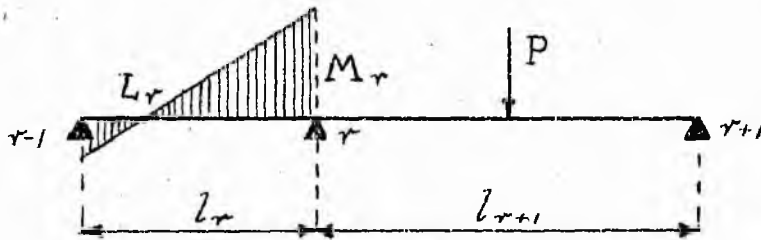
to środkowe belki trzyprzęsłowej, czyli $M_{max} = \frac{pl^2}{14}$

Opory, wszystkie jednakowe, jak opory środkowe belki trzyprzęsłowej, czyli momenty oporowe będą:

$$M = \frac{pl^2}{10}$$

Sposób graficzny wyznaczania momentów oporowych belki ciągłej.

Podamy jeszcze graficzny sposób obliczania belek ciągłych. Wyobraźmy sobie belkę ciągłą wieloprzęsłową /rys.22/, będziemy rozpatrywać dwa jakiegokolwiek są-



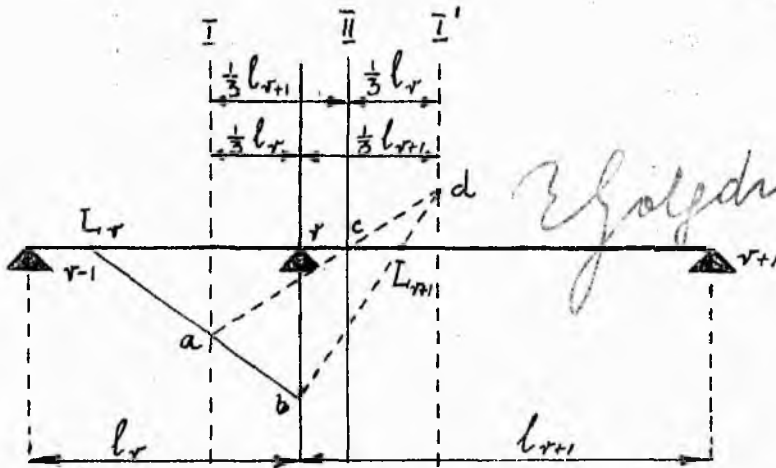
RYC. 22.

siednie przęsła tej belki, które oznaczmy przez l_r i l_{r+1} /pozostałe oznaczenia przyjmijmy jak po-

przednio /rys.15//. Punktem stałym lewym przęsła l_r będziemy nazywać punkt przecięcia się prostej momentów z osią belki, jeżeli obciążymy tylko przęsło sąsiednie

l_{r+1} , pozostawiając przęsła na lewo od tegoż nieobciążonymi i uważając belkę za nieważką. Przypuśćmy narazie, że położenie punktu stałego dla przęsła l_r jest nam znane, oznaczmy je przez L_r ; mając dane położenie jednego punktu stałego L_r , możemy

znaleźć sąsiednie. Dzielimy pręsto l_r na trzy równe części, to samo robimy z pręstem l_{r+1} /rys.23/,



RYS. 23.

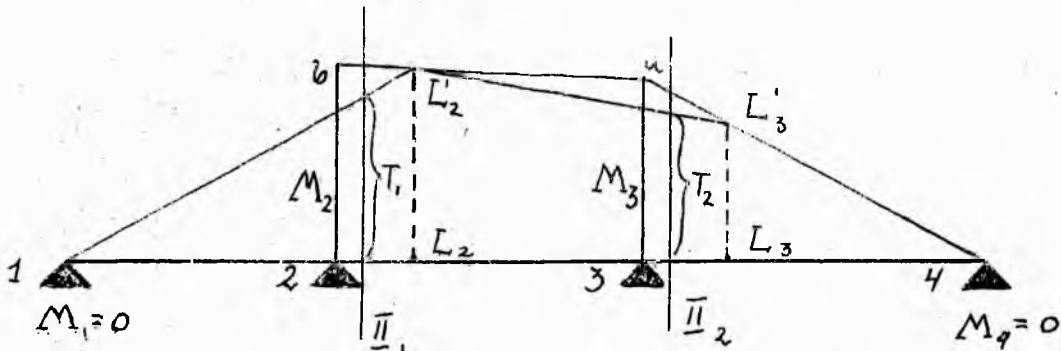
przez punkty podziału położone w sąsiedztwie opory prowadzimy proste \bar{I} i \bar{I}' prostopadłe do osi belki. Odległość między temi prostymi będzie równa sumie trzecich części pręseł l_r i l_{r+1} . Przesławimy te trzecie części w odcinku $\bar{I}-\bar{I}'$ z lewa na prawo i odwrotnie. Wtedy otrzymamy linję \bar{II} jako pionową przechodzącą przez punkt podziału przestawionych trzecich części.

Prowadzimy z punktu L_r prostą pod dowolnym kątem; oznaczmy punkty przecięcia tej prostej z prostą \bar{I} i r przez a i b . Punkt a łączymy z punktem c przecięcia się prostej \bar{II} z osią belki i przedłużamy ac do przecięcia się w punkcie d z prostą \bar{I}' .

Łączymy teraz punkt b i d . Przecięcie się prostej bd z osią belki będzie właśnie szukany punkt stałym L_{r+1} przęsła l_{r+1} . Jeżeli teraz będziemy chcieli znaleźć następne punkty stałe L_{r+2} i L_{r+3} i t.d., postępować będziemy analogicznie, wychodząc ze znanego nam już punktu stałego L_{r+1} .

Oczywiście pierwszym punktem stałym każdej belki ciągłej jest jej krańcowa opora, gdyż przez nią przejdzie linja momentów w każdym wypadku obciążenia.

Ważny dalej dla przykładu belkę trzyprzęsłową



RYŚ. 24.

/rys.24/ i wyznaczmy dla niej punkty stałe i linje przedstawionych trzecich części. Będą to punkty L_2 i L_3 oraz proste $\bar{\Pi}_1$ i $\bar{\Pi}_2$. Na prostych $\bar{\Pi}_1$ i $\bar{\Pi}_2$ odkładamy wartości T_1 i T_2 jako rzędne, znajdując je z wzoru:

$$T_r = \frac{N_r}{3(l_r + l_{r+1})} \dots \dots /12/$$

przez N_r określamy z wzorów 7,8 lub 9.

Przez punkt 1 i koniec rzędnej T_1 , prowadzimy prostą do przecięcia się w punkcie L'_2 z prostopadłą wystawioną z punktu L_2 . Przez punkt L'_2 i koniec rzędnej T_2 prowadzimy prostą do przecięcia się w punkcie L'_3 z prostopadłą wystawioną z punktu L_3 . Gdybyśmy mieli więcej pręseł, postępowalibyśmy w dalszym ciągu tak samo. Łączymy teraz punkt 4 z L'_3 prostą i prowadzimy ją do przecięcia się w punkcie

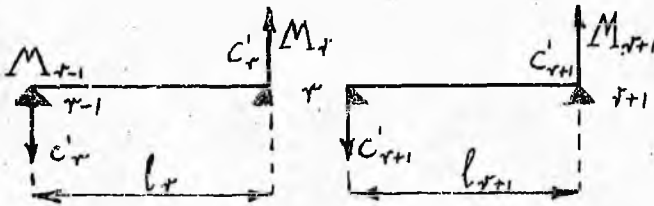
a z linią opory 3, dalej łączymy punkt a z punktem L'_2 do przecięcia się z linią opory 2. Odcinki $2b$ i $3a$ będą oznaczały wartości szukanych momentów oporowych M_2 i M_3 . Rzecz oczywista, iż przy danych warunkach zagadnienia $M_1 = M_4 = 0$.

Mając znalezione w ten czy inny sposób momenty oporowe, możemy wyznaczyć wszystkie pozostałe do określenia wartości.

1° Oddziaływania opór.

Rozpatrzmy każde pręsieło jako oddzielnie leżące na dwóch oporach, przezem momenty oporowe określimy zapomocą par sił o ramionach l_r i l_{r+1} /rys.25/ skąd wynikają zależności:

$$C'_r = \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} ; \quad C'_{r+1} = \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}$$



RYJ. 25.

Oddziaływanie opory środkowej r wywołane wyłącznie obciążeniem zewnętrznym belki oznaczymy przez

C_{or} , wówczas cał-

kowite oddziaływanie opory będzie:

$$C_r = C_{or} + C'_r - C'_{r+1}$$

wstawiając zaś wartości na C'_r i C'_{r+1} , otrzymamy

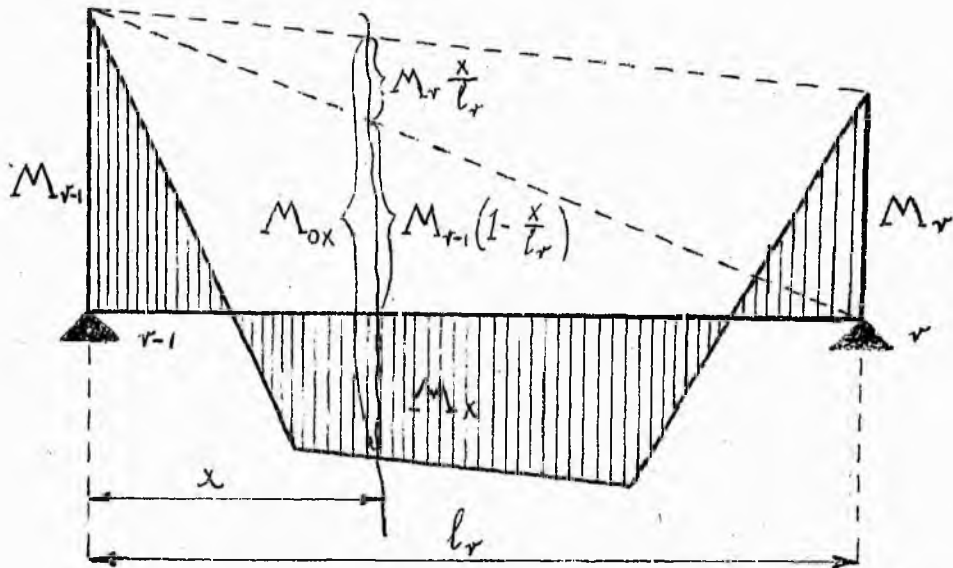
$$C_r = C_{or} - \frac{M_{r+1}}{l_r} + M_r \left[\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right] - \frac{M_{r-1}}{l_{r+1}} \dots \dots /13/$$

2^o. Momenty gnące w dowolnym przekroju belki.

Moment gnący w przekroju odległym o x od lewej opory $r-1$ będzie oczywiście równy:

$$M_x = \mathcal{M}_x - M_{r-1} \left(1 - \frac{x}{l_r} \right) - M_r \frac{x}{l_r} \dots \dots /14/$$

gdzie przez \mathcal{M}_x oznaczyliśmy moment w tymże przekroju od obciążenia belki wyłącznie siłami zewnętrznymi, przy belce rozciętej na oporach /rys.26/.



RYS. 26.

RAMOWNICE

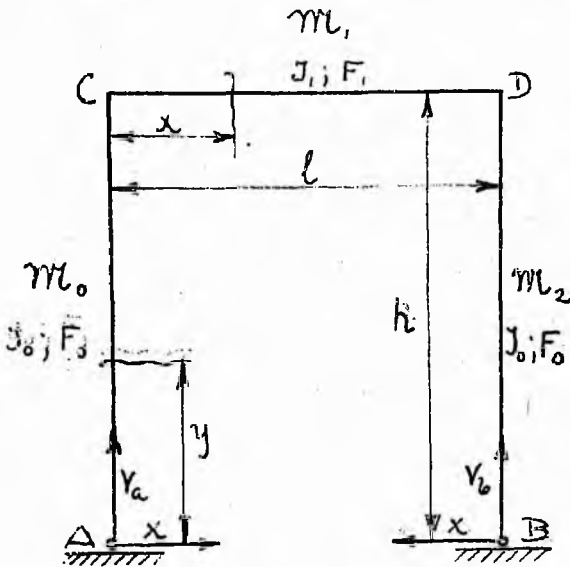
I. Ramownica jednoprzęsłowa przegubowa

Rozpatrzmy najprostszą ramownicę prostokątną /rys.27/ obciążoną dowolnie siłami pionowymi. Poprzecznicą jest sztywno połączona ze słupami w węzłach C i D, natomiast na podporach A i B słupy są oparte przegubowo. Wysokość ramownicy niech będzie h , rozpiętość l . Obciążenie zewnętrzne daje odpory pionowe Y_a i Y_b skierowane do góry, oraz odpory poziome X_a i X_b . Ponieważ rozpatrujemy obciążenia tylko pionowe, odpory X'_a i X'_b będą

działały do wewnątrz, będąc równe i skierowane przeciwnie, czyli:

$$|X_a| = |X_b| = |X|$$

Zwykle równania statyki pozwolą nam wyznaczyć odpory pionowe V_a i V_b w zależności od warunków obciążenia zewnętrznego. Ramownica taka, posiada jedną wartość statycznie niewyznaczalną. Niech tą wartością będzie odpór



RYŚ. 27.

boczny X . Celem wyznaczenia tej wartości winniśmy uzyskać jedno równanie dodatkowe do równań statyki i w tym celu, sięgając do praw sprężystości, zastosujemy zasadę najmniejszej pracy sprężystej. Przyjmując przeguby za nieprzesuwalne możemy w myśl tej zasady przyrównać do zera pierwszą pochodną po X od wyrazu pracy; będziemy wówczas mieli:

$$\int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} ds + \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} ds + \int \epsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial X} ds + \int \epsilon \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} ds = 0 \quad /15/$$

gdzie M oznacza istotny moment gnący, występujący

w danym punkcie osi ramy pod wpływem dowolnego układu sił zewnętrznych /obciążeń/.

N - siłę normalną /osiową/ w tymże punkcie

ds - element długości osi ramownicy

J - moment bezwładności }
 F - pole przekroju } członów ramownicy

E - współczynnik sprężystości tworzywa.

Wyraz trzeci odnosi się do zmiany temperatury, równomiernej w całej ramownicy na t° przy współczynniku rozszerzalności materiału ε ; zaś wyraz czwarty wyraża pracę pod wpływem powstania różnicy temperatury Δt w tworzywie ramownicy pomiędzy zewnętrzną i wewnętrzną powierzchnią jej członów. Jeżeli chwilowo nie będziemy brali pod uwagę wpływu zmian temperatury, czyli przyjmiemy $t=0$ i $\Delta t=0$, otrzymamy równania:

$$\int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial \lambda} ds + \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial \lambda} ds = 0 \dots /16/$$

Przypuśćmy na chwilę, że rozpatrywaną ramownicę uczyniliśmy statycznie wyznaczalną przez danie jednemu z przegubów możności przesuwania się. Wówczas odpory poziome χ znikną, a zatem i momenty gnące panujące w poszczególnych częściach ramy ulegną zmianie. Nie zmieniając obciążenia nazwijmy momenty

które wystąpiłyby w tym wypadku w ramownicy: dla lewego słupa $AC - m_0$, dla poprzeczki $CD - m_1$, oraz dla prawego słupa $BD - m_2$.

Gdy z powrotem przyczepimy odpory X do przegubów to rozpatrując przekrój słupa AC w odległości y od opory A możemy napisać:

moment gnący $M = m_0 - x \cdot y$ stąd $\frac{\partial M}{\partial x} = -y$ /17/

siła osiowa $N = \pm Y_a$ " $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$

element długości $ds = dy$

analogicznie dla słupa BD :

moment gnący $M = m_2 - xy$; $\frac{\partial M}{\partial x} = -y$ } /18/
siła osiowa $N = \pm Y_b$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$ }

element długości $ds = dy$

dla poprzeczki CD rozpatrujemy przekrój w odległości x od punktu C :

moment gnący $M = m_1 - x \cdot h$; $\frac{\partial M}{\partial x} = -h$ } /19/
siła osiowa $N = -x$; $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$ }

element długości $ds = dx$

Podstawiając te wartości w równanie /16/ i zakładając E jednakowe dla słupów i poprzeczki, zaś J i F różne, przy czym oznaczymy J_0 i F_0 dla słupów, zaś J_1 i F_1 dla poprzeczki, otrzymamy:

$$\int_0^h \frac{m_0 - xy}{E J_0} (-y dy) + \int_0^l \frac{m_1 - xh}{E J_1} (-h dx) +$$

$$+ \int_0^l \frac{-x}{E F_1} (-1 \cdot dx) + \int_0^h \frac{m_2 - xy}{E J_0} (-y dy) = 0 \quad /20/$$

skracając to równanie przez E , porządkując wyrazy i mnożąc wszystkie wyrazy przez moment bezwładności poprzeczki J_1 , otrzymamy:

$$\frac{J_1}{J_0} \int_0^h m_0 y dy + h \int_0^l m_1 dx + \frac{J_1}{J_0} \int_0^h m_2 y dy =$$

$$= \left[\frac{J_1}{J_0} 2 \int_0^h y^2 dy + h^2 \int_0^l dx + \frac{J_1}{F_1} \int_0^h dx \right] x$$

skąd

$$X = \frac{\frac{J_1}{J_0} \int_0^h m_0 y dy + h \int_0^l m_1 dx + \frac{J_1}{J_0} \int_0^h m_2 y dy}{\frac{J_1}{J_0} \cdot \frac{2}{3} h^3 + h^2 + \frac{J_1}{F_1} l} \quad /21/$$

Rozpatrzmy co oznaczają poszczególne wyrazy równania /21/.

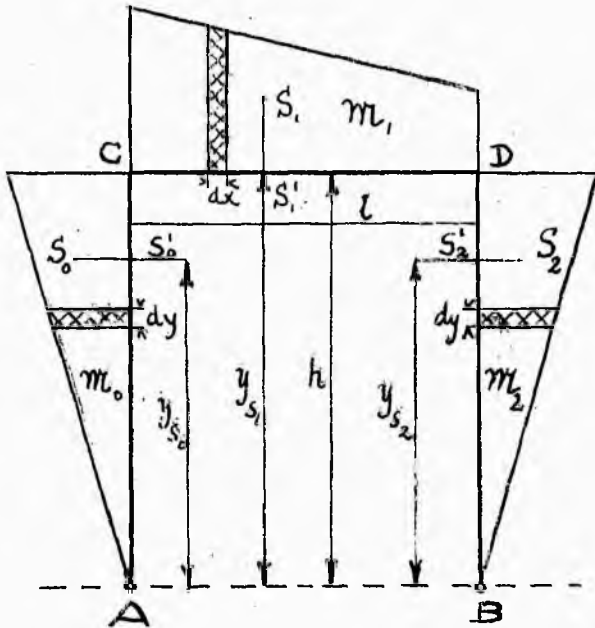
Zaczynamy od dwóch pierwszych wyrazów mianownika

t.j. $\frac{y_1}{y_0} \frac{2}{3} h^3$ oraz $l h^2$. Jeżeli każdemu elementowi długości dy słupów AC i BD nadamy pewien ciężar równy $\frac{y_1}{y_0} dy$ to całka $2 \int_0^h \left(\frac{y_1}{y_0} dy\right) y^2 = \frac{y_1}{y_0} \frac{2}{3} h^3$ będzie momentem bezwładności poprzeczki względem tejże osi. Ostatecznie więc suma wyrazów $\frac{y_1}{y_0} \frac{2}{3} h^3 + l h^2$ będzie momentem bezwładności osi ramownicy względem osi AB gdy osi ramownicy nadana jest pewna waga na jednostkę długości, wagi czysto fikcyjna, zwana czasem "wagą sprężystą".

Powyższy moment bezwładności oznaczymy przez B_a

$$\text{czyli } B_a = \frac{y_1}{y_0} \cdot \frac{2}{3} h^3 + l h^2 \dots \dots \dots /22/$$

Przed rozpatrzeniem znaczenia wyrazów licznika w równaniu /21/ przypuszczamy ponownie, iż ramownica stała się statycznie wyznaczalną przez nadanie przesuwności jednej z przegibnych podpór przy zachowaniu pierwotnego /dowolnego/ obciążenia. Niech obciążenia te wywołują w poszczególnych częściach ramownicy momenty gnące uwidocznione na rys.28. Wówczas pierwsza całka licznika w równaniu /21/ $\int_0^l m_0 \frac{y_1}{y_0} dy y$ będzie momentem statycznym osi słupa AC ramownicy względem osi AB , jeżeli elementom długości dy tego słupa nadamy ciężar fikcyjny $m_0 \frac{y_1}{y_0} dy$. Niech dalej S_0 będzie środkiem ciężkości pola momentów słupa



RYŚ. 28.

AC , f_0 - wielkością powierzchni tego pola, a S'_0 - reutem środka ciężkości S_0 na oś słupa; wówczas będziemy mogli napisać:

$$\frac{J_1}{J_0} \int_0^h m_0 y dy = \frac{J_1}{J_0} f_0 y_{S_0}$$

gdzie y_{S_0} jest rzędną punktu S'_0 ,

stosując to samo rozumowanie i podobne oznaczenia, dla poprzeczki, mamy:

$$\frac{J_1}{J_0} h \int_0^l m_1 dx = \frac{J_1}{J_0} f_1 h$$

wreszcie dla drugiego słupa BD napiszemy:

$$\frac{J_1}{J_0} \int_0^l m_2 y dy = \frac{J_1}{J_0} f_2 y_{S_2}$$

Stąd widzimy, że całki licznika równania /21/ są momentami statycznymi rzutów środków ciężkości pól momentów gnących, na oś ramownicy, wziętymi

względem osi AB . Sumę tych momentów statycznych oznaczmy przez S_a wobec czego możemy napisać:

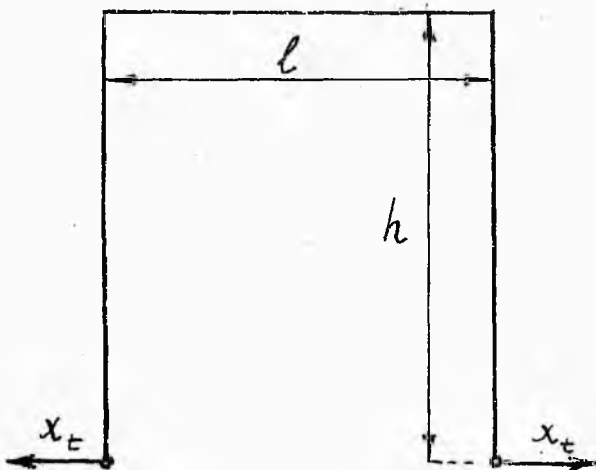
$$S_a = \frac{y_1}{y_0} f_0 y_{s_0} + \frac{y_1}{y_1} f_1 h + \frac{y_1}{y_0} f_2 y_{s_2} \dots /23/$$

Po podstawieniu w równanie /21/ wielkości S_a i B_a mamy:

$$X = \frac{S_a}{B_a + \frac{y_1}{F} l} \dots /24/$$

WPLYW ZMIAN TEMPERATURY

Wyobraźmy sobie, iż rozpatrywana ramownica jest nieważka i nieobciążona siłami zewnętrznymi



RYJ. 29.

/rys.29/ i znajduje się w temperaturze, w której została wykonana. W takim wypadku nie mamy żadnych naprężeń. Jeżeli temperatura ulegnie

zmianie, to zjawia się naprężenia w ramownicy, spowodowane wystąpieniem odporów w przegubach. Przy-
puśćmy, że temperatura obniżyła się, skutkiem czego ramownica uległa skurczeniu, wówczas jedynie siły X_t , które powstaną w przegubach będą działały nazewnątrz, gdyż ramownica kurząc się stara się zbliżyć przeguby ku sobie. W razie nagrzania ramownicy, kierunek parć X_t będzie odwrotny. Rozpatrzmy wypadek równomiernej zmiany temperatury w całej ramownicy a więc wypadek gdy $\Delta t = 0$.

Przypuśćmy, że nasza ramownica została oziębiona równomiernie o t° wywołując odpory X_t , których działanie określimy z ogólnego równania /15/:

$$\int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X_t} ds + \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X_t} ds + \int \epsilon t \frac{\partial N}{\partial X_t} ds = 0 /25/$$

z powodu braku jakiegokolwiek obciążenia zewnętrznego ramownicy będziemy mieli:

$$N = X_t ; M = X_t \cdot y ; \frac{\partial N}{\partial X_t} = 1 ; \frac{\partial M}{\partial X_t} = y$$

Po wstawieniu tych wartości w równanie /25/ i wprowadzeniu oznaczeń analogicznych do oznaczeń równania /24/ otrzymamy:

$$X_t = \frac{J_1 E \epsilon t l}{B_a + \frac{J_1}{F_1} l} = \frac{J_1 E \Delta l}{B_a + \frac{J_1}{F_1} l} \dots /26/$$

UWAGA: dla betonu przyjmujemy $E = 0.00001$

do 0.0000135 średnio $E = 0.000012$

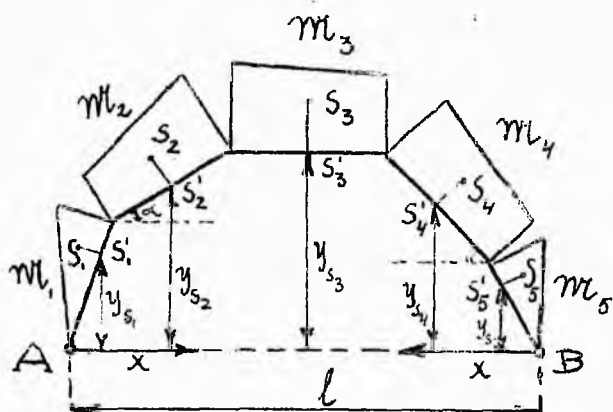
$$E = 140000 \text{ kg/cm}^2$$

Mając już wyznaczone wartości χ i χ_t , dalsze obliczenia prowadzimy, posługując się wyłącznie prawami statyki.

RAMA DOWOLNEGO KSZTAŁTU

Z OPORAMI NA JEDNAKOWEJ WYSOKOŚCI.

Wzór /24/ i /25/ wyznaczający wartości χ i χ_t w szczególnym wypadku rozpatrywanej powyżej ramownicy, możemy uogólnić dla ramownicy jakiegokolwiek, o dwu przegubach na jednej wysokości.



RYS. 30.

Niech będzie ramownica kształtu wskazanego na rys.30 obciążona jakimkolwiek układem sił zewnętrznych, oparta na dwóch oporach przegibnych, znajdujących się na jednym poziomie. Ramownica

taka jak wiemy będzie pojedynczo statycznie niewyznaczalną. Uczyńmy ją statycznie wyznaczalną przez

zamianę jednej z opór przegibnych na przesuwną. Wówczas momenty gnące M w poszczególnych prętach ramownicy, wywołane obciążeniem zewnętrznym przedstawiają się jak na rysunku.

Moment gnący ramownicy statycznie niewyznaczalnej, w dowolnym punkcie tej ramownicy, wyrazi się wzorem:

$$M = m - x \cdot y$$

zaś siła osiowa w tymże punkcie:

$N = -x \cos \alpha$ gdzie α jest kątem nachylenia dowolnego pręta ramownicy względem poziomu AB biorąc pochodne po x mamy:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -y \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\cos \alpha$$

wstawiając otrzymane wartości w równanie zasadnicze /16/:

$$-\int_0^s \frac{m}{EJ} y ds + x \int_0^s \frac{y^2}{EJ} ds + x \int_0^s \frac{\cos^2 \alpha}{EF} ds = 0 \quad /27/$$

stąd zaś po skróceniu przez E , pomnożeniu przez dowolną stałą J_c i przekształceniu:

$$X = \frac{\int_0^s m \frac{J_c}{J} ds y}{\int_0^s \frac{J_c}{J} ds y^2 + \int_0^s \cos^2 \alpha \frac{J_c}{F} ds}$$

/28/

rozpatrująo znaczenia poszczególnych całek widzi-
my, że:

$\int_0^s \left(\frac{J_c}{J} ds \right) y^2$ jest momentem bezwładności
osi ramownicy względem
osi AB , przy nadaniu ciężaru elementowi dłu-
gości równym $\frac{J_c}{J} ds$, możemy ją zatem oznaczyć
przez B_a jak w poprzednim wypadku szczególnym.

$\int_0^s m \frac{J_c}{J} ds y$ — jest momentem statycznym
ramownicy względem osi AB
przy nadaniu elementowi długości ciężaru równego
 $\frac{J_c}{J} f$, oznaczmy ją zatem przez S_a przyczem:

$$S_a = \int_0^s m \frac{J_c}{J} ds y = \frac{J_c}{J_1} f_1 y_{s_1} + \frac{J_c}{J_2} f_2 y_{s_2} + \dots + \frac{J_c}{J_n} f_n y_{s_n}$$

Ostatecznie więc:

$$\chi = \frac{S_a}{B_a + \int_0^s \cos^2 \alpha \frac{J_c}{F} ds} \dots \dots \dots /29/$$

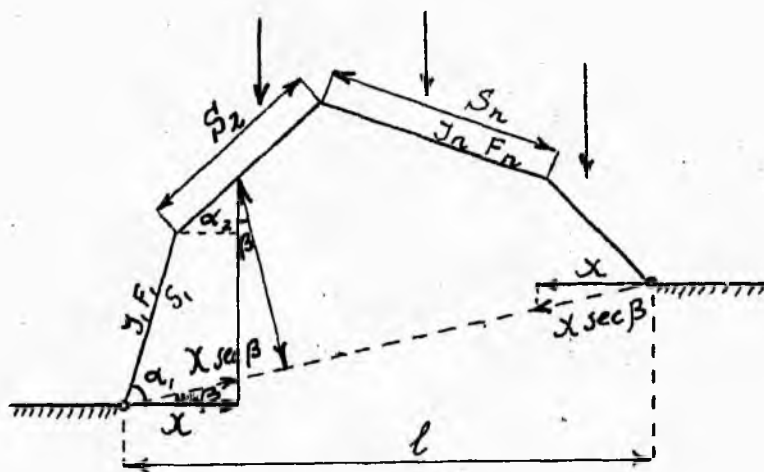
analogicznie dla χ_t możemy napisać wzór ogólny:

$$\chi_t = \frac{J E \Delta l}{B_a + \int_0^s \cos^2 \alpha \frac{J_c}{F} ds} \dots \dots \dots /30/$$

UWAGA: Ponieważ wyraz $\int_0^s \cos^2 \alpha \frac{J_c}{F} ds$ jest mały
w porównaniu z B_a , w większości wypadków można
go odrzucić, bez dużej nieścisłości.

RAMA DOWOLNEGO KSZTAŁTU Z OPORAMI NA NIEJEDNA-
KOWEJ WYSOKOŚCI.

Wprowadzimy teraz dalsze uogólnienie zasadni-
czych wzorów. Przypuśćmy, że mamy jak poprzednio
ramownicę dowolnego kształtu, obciążoną dowolnym
układem sił zewnętrznych /rys.31/, różniącą się od



RYS. 31.

poprzedniej tylko tem, że opory A i B nie znaj-
dują się na jednakowym poziomie. Moment gnący tej
ramownicy, w dowolnym jej punkcie C będzie:

$$M = m - x \sec \beta y \cos \beta = m - xy$$

siła osiowa w tymże punkcie pozostanie jak poprzed-
nio bez zmiany: $N = x \cos \alpha$

Ostatecznie więc będziemy mogli napisać najogólniej:

$$\chi = \frac{S_a}{B_a + \int_0^s \cos^2 \alpha \frac{J_c}{F} ds} \quad \dots /31/$$

$$\chi_t = \frac{J E \Delta l}{B_a + \int_0^s \cos^2 \alpha \frac{J_c}{F} ds} \quad \dots /32/$$

pamiętając, że wartości S_a i B_a wyznacza się, przyjmując pionowe rzędne y odmierzone od osi AB

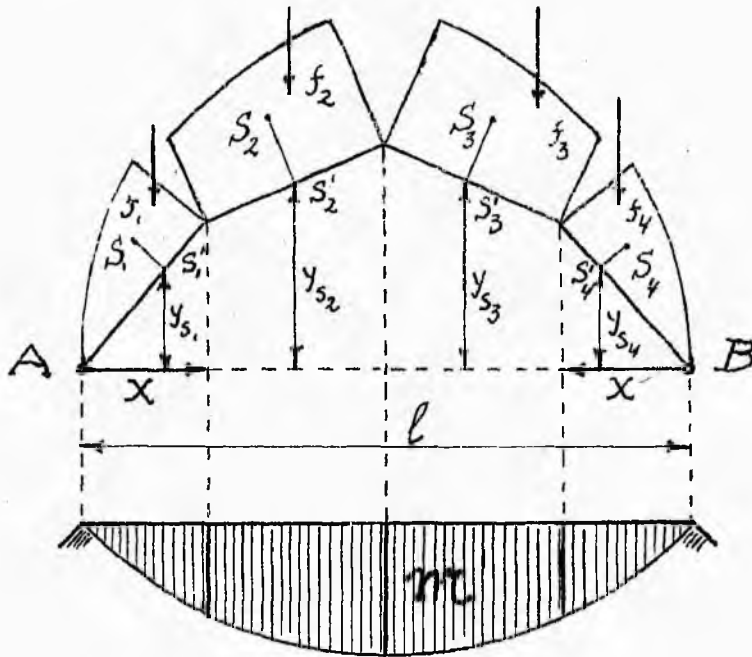
PRZEBIEG OBLICZENIA RAMOWNICY.

Dla ramownicy wskazanej na rys. 32 wyznaczyć χ , więc obliczyć S_a i B_a .

1/ Wykreślamy krzywą momentów M na osi ramownicy w założeniu, że jedna z opór może się swobodnie poruszać.

2/Dla każdego pola momentów na ramownicy znajdujemy środek ciężkości i rzut tegoż na oś ramownicy, oraz samo pole, skąd otrzymujemy iloczyn $\frac{J_c}{J_n} f_n y_n$

J_c - jest dowolnym momentem bezwładności, zaś
 J_n - jest momentem bezwładności przekroju danego
pręta ramownicy.



RYJ. 32.

3/ Znajdujemy moment bezwładności B dla każdego prostego odcinka osi ramownicy.

Do tego celu służyć może wzór następujący:

$$B = \frac{J_c}{J_n} \int_{y_1}^{y_2} y^2 ds ; \quad \text{ale} \quad \frac{ds}{dy} = \frac{S}{y_2 - y_1}$$

więc

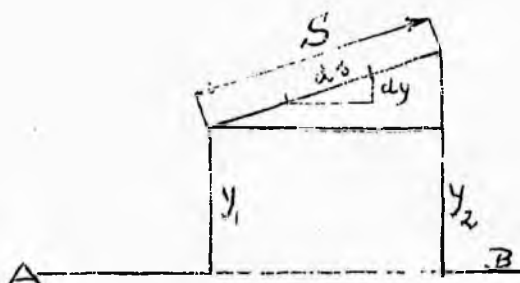
$$ds = \frac{S}{y_2 - y_1} dy$$

stąd

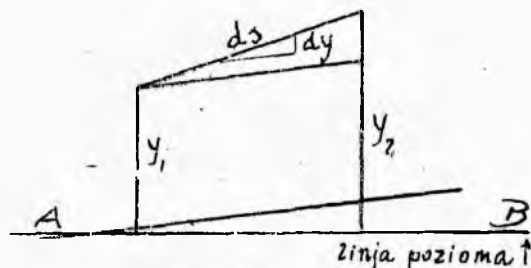
$$B = \frac{J_c}{J_n} \int_{y_1}^{y_2} \frac{S}{y_2 - y_1} y^2 dy = \frac{S}{y_2 - y_1} \frac{y_2^3 - y_1^3}{3} =$$

$$= \frac{J_c}{J_n} \frac{S}{3} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

Dla najbardziej ogólnego wypadku, gdy AB nie jest poziome, otrzymamy oczywiście wzór identyczny, jak to widać z rozpatrzenia rys.34. Znaki



RYS. 33.



RYS. 34.

średnich y mogą oczywiście być różne.

LITERATURA.

Gotowe wzory do obliczenia wartości statycznie niewyznaczalnych w najbardziej często spotykanych urządzeniach ramownic i wypadkach obciążeń daje:

Dr. KLEINLOGEL "Rahmenformeln" - Berlin. Ernst. u. Sohn.

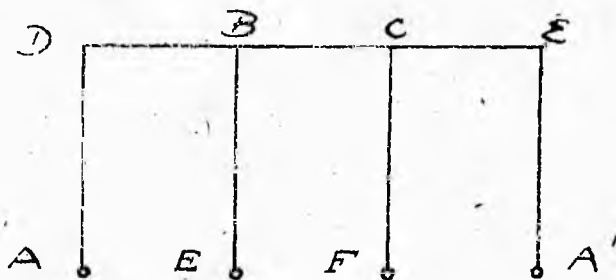
Zwięzłe teoretyczne traktowanie przedmiotu znajduje się w następujących książkach:

Dr. Ing. W. Gehler "Der Rahmen". Berlin. Ernst. u. Sohn.

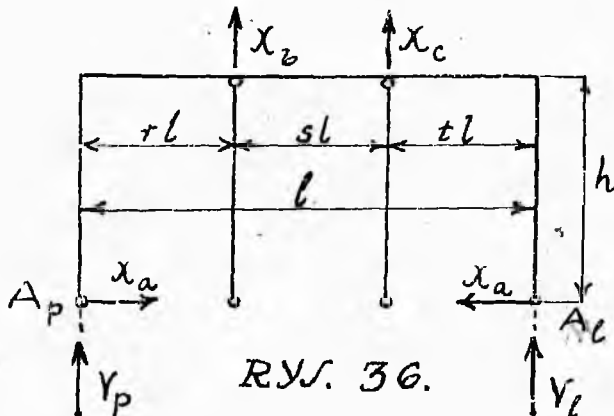
Ing. Hugo v. BRONNEK "Biegungsfeste Rahmen". Berlin, Ernst u. Sohn.

RAMOWNICA WIELOPRZĘSŁOWA.

Celem zmniejszenia liczby wartości statycznie niewyznaczalnych zamieńmy pośrednie słupy /rys. 35/ na wahaki, przez dodanie słupom wspartym na przegubach E i F dodatkowych przegubów



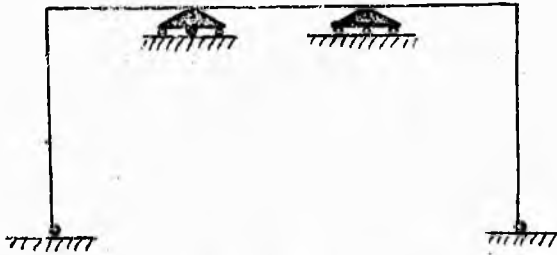
RYS. 35.



RYS. 36.

pod belką górną w punktach B i C /rys. 36/.

Przyjmujemy, że takie podparcie punktów B i C daje oddziaływania wyłącznie pionowe, czyli wahaki są równoznaczne z oporami prze-

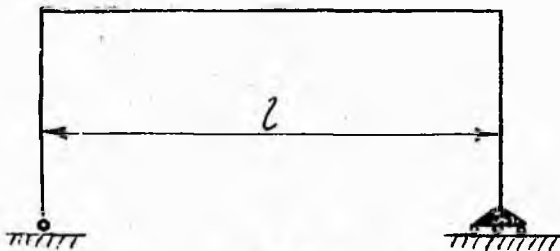


RYŚ. 37.

gibnemi i przesuwne
/rys.37/. Jak to się łat-
wo przekonać, będziemy
mieli wówczas tyle warto-
ści statycznie niewyzna-
czalnych, ile jest prze-
seł ramownicy.

Jako statycznie niewy-
znaczalne wybierzemy: rozpór boczny χ_a oraz od-
działywanie wahaków: χ_b i χ_c .

Wartości te wyznaczymy z rozpatrzenia przesu-
nień δ_a , δ_b i δ_c punktów A, B i C ramownicy
pod działaniem sił χ_a , χ_b i χ_c na ramownicę, któ-
rą uczyniliśmy statycznie wyznaczalną przez usunię-
cie chwilowe podpór B i C oraz przez danie jed-
nej z opór A możliwości poziomego przesuwania się



RYŚ. 38.

/rys.38/. Tak przekształ-
coną ramownicę poddamy
kolejno działaniu:

a/ siły $\chi_a = -1$

b/ siły $\chi_b = -1$

c/ siły $\chi_c = -1$

oraz

d/ sił zewnętrznych, przy których wartości
powyższe obliczamy.

Niech wtedy oznaczają:

δ_{aa}	-	wpływ siły	$X_a = -1$	na przesunięcie	δ_a	
δ_{ab}	-	"	"	$X_b = -1$	"	δ_a
δ_{ac}	-	"	"	$X_c = -1$	"	δ_a
δ_{oa}	-	"	sił zewnętrznych"	"	"	δ_a

Analogiczne mają znaczenie inne zestawienia wskaźników we wzorach poniższych. Jeżeli założymy, że w istniejącej ramownicy opory są nieruchome i niema zmian temperatury, to prawa sprężystości pozwolą nam nadanie równaniom pracy następującej postaci: ^{x/}

$$\left. \begin{aligned} \delta_{aa} X_a + \delta_{ba} X_b + \delta_{ca} X_c &= \delta_{oa} \\ \delta_{ab} X_a + \delta_{bb} X_b + \delta_{cb} X_c &= \delta_{ob} \\ \delta_{ac} X_a + \delta_{bc} X_b + \delta_{cc} X_c &= \delta_{oc} \end{aligned} \right\} \dots /33/$$

Stosownie do prawa Maxwell'a:

$$\delta_{ab} = \delta_{ba} ; \delta_{bc} = \delta_{cb} \quad \text{i t. d.}$$

x/ Müller-Bresslau: "Graphische Statik". 2 tom. 2 dział.

i "Die neuen Methoden der Festigkeitslehre".

co zmniejsza liczbę współczynników przy niewiadomych.

Jeżeli będziemy rozpatrywali wyłącznie prace gięcia, pozostawiając na uboczu prace sił osiowych i tnących, to każde przesunięcie wyrazi się wzorem:

$$\delta_{mn} = \int \frac{M_m M_n}{E J} ds \quad /34/$$

gdzie ds jest elementem długości osi ramownicy, zaś całka obejmuje całą ramownicę.

Momenty M z odpowiednimi wskaźnikami są to momenty odpowiadające obciążeniom, działającym na ramownicę statycznie wyznaczalną /rys.38/. Więc stosownie do powyższych założeń będziemy mieli:

M_0 - mom. gnące pod obciążeniem sił zewnętrznych, gdy wszystkie $\chi = 0$

M_a - mom. gnące przy $\chi_a = -1$

M_b - " " " $\chi_b = -1$

M_c - " " " $\chi_c = -1$

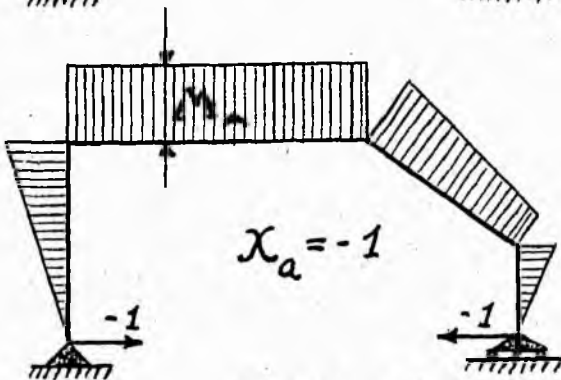
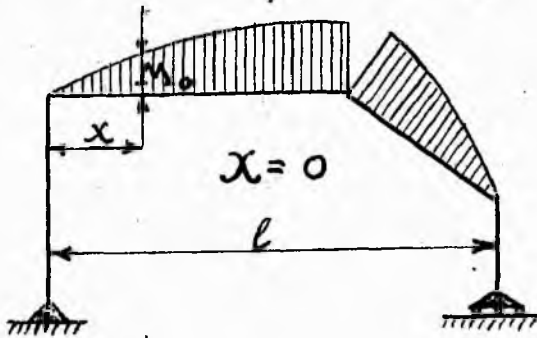
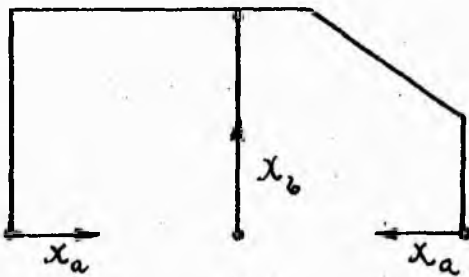
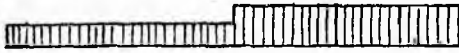
Jest oczywiste, że z chwilą, gdy wyznaczymy wartości statycznie niewyznaczalne z równań /33/, moment istotny, gnący ramownicę w danym przekroju, wyrazi się wzorem:

$$M = M_0 - M_a \chi_a - M_b \chi_b - M_c \chi_c - \dots \quad /35/$$

Oddziaływania opór Y_P i Y_L będą miały postać:

$$\left. \begin{aligned} Y_P &= Y_{P_0} - Y_{P_a} x_a - Y_{P_b} x_b - Y_{P_c} x_c - \dots \\ Y_L &= Y_{L_0} - Y_{L_a} x_a - Y_{L_b} x_b - Y_{L_c} x_c - \dots \end{aligned} \right\} /36/$$

gdzie



Rys. 39.

Y_{P_0} - jest oddziaływaniem opory prawej przy $x=0$.

Y_{P_a} - jest oddziaływaniem opory prawej przy $x=-1$

i t.d.

Przebieg obliczenia będzie więc następujący: po doprowadzeniu ramownicy do postaci statycznie wyznaczalnej /rys. 38/ wykreślamy na osi ramownicy linje momentów dla następujących jej stanów:

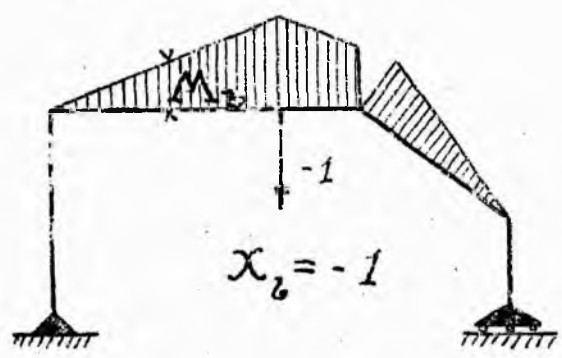
$$x=0, x_a=-1, x_b=-1$$

/wybraliśmy ramownicę dwuprzęsłową o dwu war-

tościach statycznie niewyznaczalnych/ rys.39. Pozostaje dokonać całkowania wyrazów typu wzoru /34/, ażeby móc rozwiązać dwa równania typu /33/ z dwiema niewiadomymi x_a i x_b .

Mamy tu $S_{oa}, S_{ob}, S_{aa}, S_{ab}, S_{bb}$

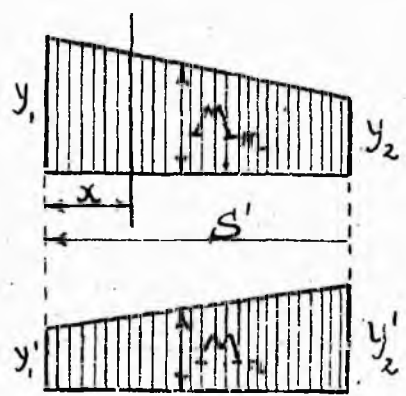
Jak widzimy, pola momentów, których iloczyn znajduje się pod znakiem całki, mogą mieć różne kształty.



RYJ. 39.

Jeżeli krzywe /jak w stanie $x=0$ / zamienimy odcinkami prostymi, to możemy powiedzieć, że w najbardziej ogólnym wypadku pola momentów są to dwa różne trapezy o wspólnej długości podstawy S' .

Będziemy mieli /rys.40/:



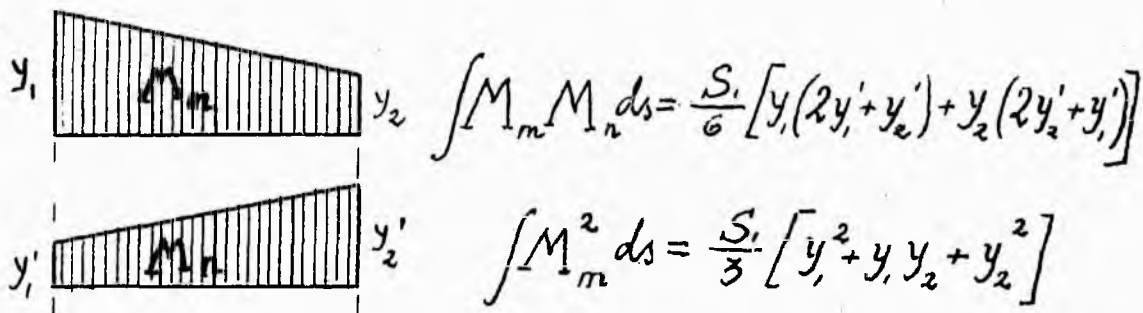
$$\int M_m M_n dx =$$

$$= \int \left[y_1 - (y_1 - y_2) \frac{S' - x}{S'} \right] \left[y'_1 + (y'_2 - y'_1) \frac{x}{S'} \right] dx =$$

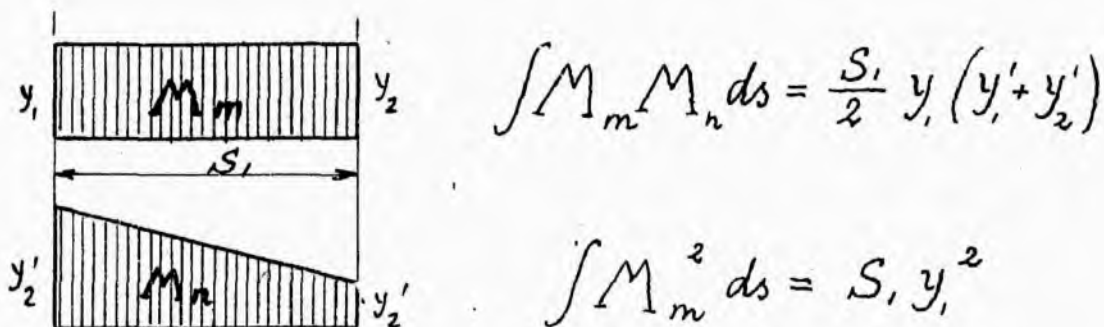
RYJ. 40.

$$= \frac{S'}{6} [y_1 (2y_1' + y_2') + y_2 (2y_2' + y_1')] \dots \dots \dots /37/$$

Z wzoru /37/, odpowiadającego dwóm różnym trapezom, możemy z łatwością wyprowadzić wzory dla innych szczególnych wypadków, nadając różne wartości y -om: gdy naprzykład $y_2 = 0$ - mamy trójkąt z trapezem, gdy $y_1 = y_2$ mamy prostokąt z trapezem i t.d.
2 trapezy.



Prostokąt z trapezem



Trójkąt z trapezem:



$$\int M_m M_n ds = \frac{S_1}{6} y_1 (2y_1' + y_2')$$



$$\int M_m^2 ds = \frac{S_1}{3} y_1'^2$$

2 prostokąty:



$$\int M_m M_n ds = S_1 y_1 y_1'$$



Prostokąt z trójkątem.



$$\int M_m M_n ds = \frac{S_1}{2} y_1 y_1'$$



Dwa trójkąty

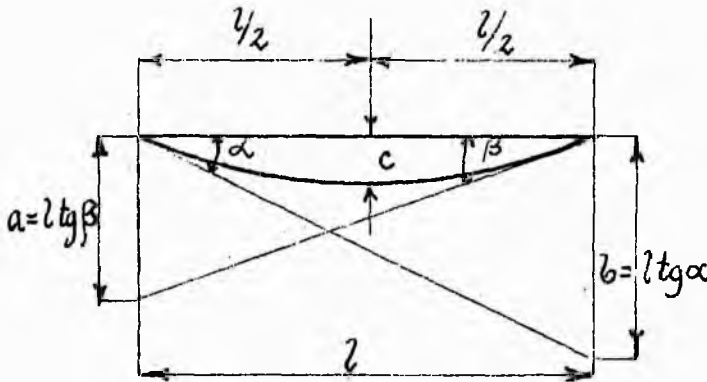


$$\int M_m M_n ds = \frac{S_1}{3} y_1 y_1'$$



WYZNACZANIE OSI ODKSZTAŁCONEJ.

Najszybciej będziemy mogli wykreślić kształt osi odkształconej belki giętej /lub słupa/, gdy znajdziemy długości a , b i c /rys.41/, przy czym a i b są to odcinki wycięte przez styczne do



odkształconej osi na oporach, zaś C jest to wartość ugięcia pośrodku belki.

Na tablicy są zestawione wzory dla najczęściej spotykanych sposobów obciążenia.

RYS. 41.

Otrzymujemy te wzory najłatwiej bądź z ogólnego wzoru sprężystości

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \dots \dots \dots /38/$$

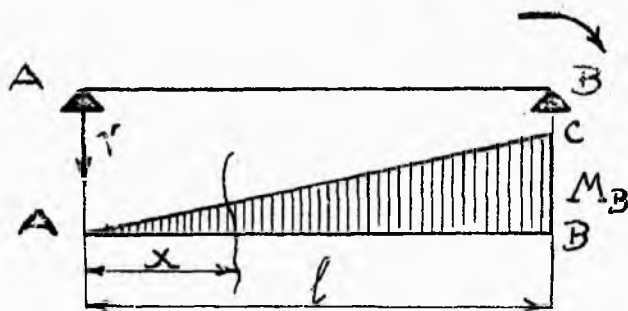
bądź z twierdzenia Mohra /odkształcona danego pręta giętego posiada kształt linii momentów przy biegunowej odległości $H = EJ$ dla tegoż pręta, obciążonego polami momentów, wywołanych rozpatrywanym obciążeniem/.

Dla przykładu weźmy najprostszy wypadek pręta obciążonego momentem M_B .

Posiłkując się twierdzeniem Mohr'a będziemy

mieli:

$$V = \frac{1}{3} M_B \frac{l}{2} = \frac{M_B l}{6}$$



skąd moment gnący
w odstępie x od le-
wej opory jest obcią-
żeniem trójkąta ABC .

$$M_o = V_x - \frac{M_B x}{l} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{M_B x}{6l} (l^2 - x^2)$$

a więc rzędna ugięcia będzie:

$$y = \frac{M_o}{EJ} = \frac{M_B x}{6EJl} (l^2 - x^2) \cdot 139/$$

Kąt ϑ stycznej do odkształconej z osią nieod-
kształconą będzie:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{M_B}{6EJl} (l^2 - 3x^2)$$

więc w punkcie A przy $x=0$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_B l}{6EJ} \text{ więc } b = l \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_B l^2}{6EJ} = K \frac{M_B}{6}$$

zaś w punkcie B przy $x=l$

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_B l}{3EJ} \text{ więc } a = -l \operatorname{tg} \beta = \frac{M_B l^2}{3EJ} = K \frac{M_B}{3}$$

Ugięcie C pośrodku będzie z wzoru /39/ przy $\chi = \frac{l}{2}$

$$C = \frac{M_B}{16} \cdot \frac{l^2}{EJ} = K \frac{M_B}{16}$$

SLYPY AD

Sposób obciążenia				
Powierzchnia momentów				
Odkształcona				
$\frac{a}{K}$	$\frac{M_A}{6}$	$\frac{m}{3} + \frac{M_A}{6}$	$\frac{m}{4} + \frac{M_A}{6}$	$\frac{M_A}{6} - \frac{M_D}{3}$
$\frac{b}{K}$	$\frac{M_A}{3}$	$\frac{m}{3} + \frac{M_A}{3}$	$\frac{m}{4} + \frac{M_A}{3}$	$\frac{M_A}{3} - \frac{M_D}{6}$
$\frac{c}{K}$	$\frac{M_A}{16}$	$\frac{5}{48} m + \frac{M_A}{16}$	$\frac{m}{12} + \frac{M_A}{16}$	$\frac{M_A - M_D}{16}$

$$K_s = \frac{h^2}{EJ_s}$$

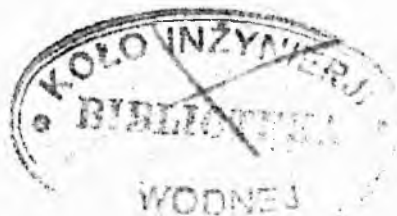
BELKI AB

$\frac{M_A}{6} + \frac{M_B}{3}$	$\frac{M_A}{6} - \frac{M_B}{3}$	$\frac{wL}{3} - \frac{M_A}{6} - \frac{M_B}{3}$	$\frac{wL}{4} - \frac{M_A}{6} - \frac{M_B}{3}$
$\frac{M_A}{3} + \frac{M_B}{6}$	$\frac{M_A}{3} - \frac{M_B}{6}$	$\frac{wL}{3} - \frac{M_A}{3} - \frac{M_B}{6}$	$\frac{wL}{4} - \frac{M_A}{3} - \frac{M_B}{6}$
$\frac{M_A + M_B}{16}$	$\frac{M_A - M_B}{16}$	$\frac{5}{48} wL - \frac{M_A + M_B}{16}$	$\frac{wL}{12} - \frac{M_A + M_B}{16}$

$$K = \frac{l^2}{EJ}$$

BELKI CIĄGŁE

W RAMOWNICACH PIĘTROWYCH.



Obliczanie ramownic piętrowych należy do zagadnień wielce złożonych, zwłaszcza gdy, jak to najczęściej bywa, ramownica składa się z wielu pięter i wielu przęseł. Choć uniknąć trudności rachunkowych, konstruktorzy upraszczają sobie zadanie, rozpatrując belki poziome takich ramownic, jako belki ciągłe, leżące na oporach przegibnych, pozostawiając na uboczu sprężyste oddziaływania słupów, związanych sztywno z belką.

O ile założenie przegibnych opór jest do zaakceptowania, gdy chodzi o opory pośrednie danej belki, o tyle zbyt daleko odbiega ono od prawdy, gdy chodzi o opory krańcowe. Istotnie, jeżeli zbadamy w belce ciągłej, przegibnie podpartej, odchylenia stycznej do osi belki odkształconej od poziomu, to przekonamy się, że te odchylenia są kilkakrotnie większe na oporach krańcowych, niż na oporach pośrednich. Utwierdzenie przeto, choćby częściowe /sprężyste/, końców belki ciągłej wywołuje znaczne momenty zamocowania, wpływające wydatnie na rozkład

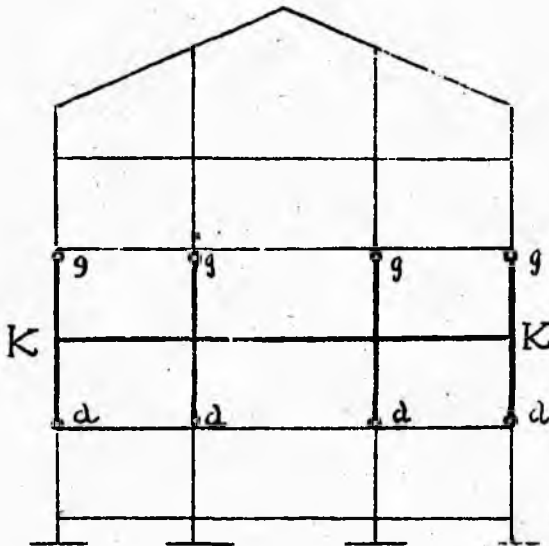
momentów w samej belce i wywołujące pokaźne momenty gnące w słupach krańcowych. Ponieważ w każdej ramownicy wielopiętrowej słupy krańcowe posiadają znaczną sztywność, końce belki ciągłej są w nich w wysokim stopniu utwierdzone, i zarówno przyjęcie tych opór za przegibne, jak szacowanie stopnia zamocowania w sposób dowolny, jedynie w celu przybliżonego sprawdzenia słupów i przeważnie niedoskonałego skonstruowania połączenia, uważać należy za zbyt daleko posunięte uproszczenie statycznego zadania.

Jeżeli takie uproszczenia są stale w obiegu, przypisać to należy brakowi dostatecznie łatwej i przejrzystej, a jednocześnie wystarczająco ścisłej metody, przy której pomocy mogłyby być szybko wyznaczone momenty zamocowania końców ciągłej belki w słupach ramownicy piętrowej. Jest przytem konieczne, aby ta metoda pozwalała na uwzględnienie odmiennych współczynników sprężystości materiału słupów i belek, gdyż w praktyce często takie wypadki zachodzą, zwłaszcza w postaci połączenia konstrukcji żelbetowej z murami ceglanymi.

Metodę, dającą dostatecznie dokładne rozwią-

zanie tego zadania, przynajmniej w granicach dokładności, wynikającej z uproszczeń, jakie są stale stosowane w obliczeniach ustroju o wielu statycznie niewyznaczalnych, pragniemy tu zaproponować. Można ją nazwać "metodą prostowania ramownicy".

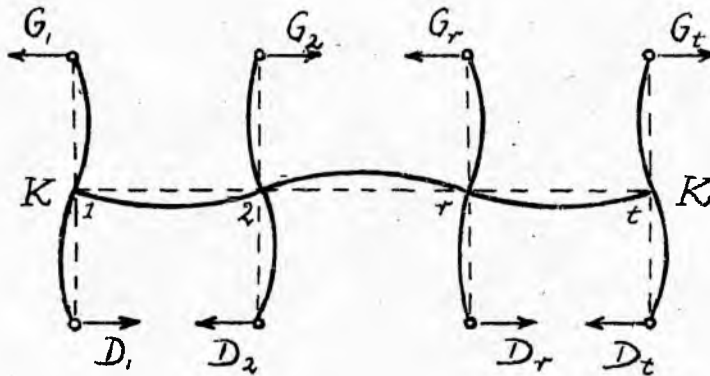
Rozpatrzmy w ramownicy wielopiętrowej jedną z belek ciągłych KK wraz ze związanymi z nią słupami /rys. 42/.



RYJ. 42.

Wyodrębnijmy ją z reszty ustroju przy pomocy przegubów, które założymy w miejscach, gdzie momenty, pochodzące od odkształcenia tej belki są niewielkie, tak ażeby przyrównanie ich do zera

przez umieszczenie przegubów nie odbiło się zbyt-
nio na dokładności wyników. Na razie założmy prze-
guby w punktach g i d . Pod wpływem obciążenia
nasza wyodrębniona część ustroju odkształci się
naprzykład jak schematycznie wskazano na rys. 43
W przegubach górnych i dolnych powstaną siły po-
ziome G i D . O siłach tych możemy w każdym ra-
zie powiedzieć: 1/ że każda siła G_r , jest zwrócona



RYS. 43.

w odwrotnym kierunku do siły D_r , przyczepionej
do znajdującego się na tej samej osi pionowej dol-
nego przegubu i 2/ że w wypadku ogólnym te siły nie
są sobie równe, są bowiem zależne nie tylko od kąta
o jaki został obrócony dany węzeł γ , ale i od dłu-
gości słupów, ich momentów bezwładności, oraz współ-
czynników sprężystości materiału, z którego są wyko-
nane. Jeżeli jednak założymy, że piętra są prawie

jednakowej, jeżeli nie zupełnie równej wysokości, i że sztywność słupów przyległych kondygnacji różni się niewiele, to bez wielkiego błędu możemy przyjąć, że dla każdego węzła r belki KK zachodzi równanie:

$$G_r + D_r = 0 \quad \dots \quad /40/$$

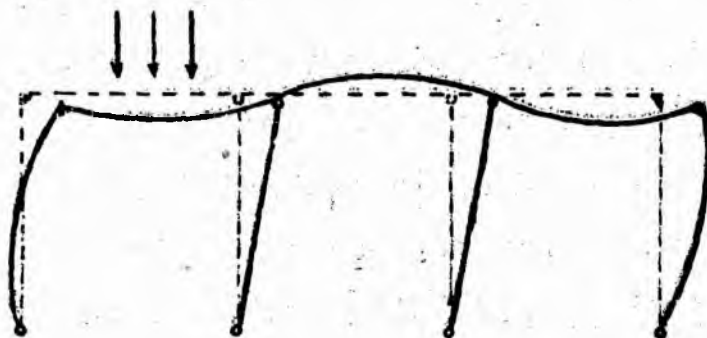
Możemy więc przyjąć, że nasz wyodrębniony ustrój znajduje się pod działaniem sił poziomych, które, będąc przyłączone do poszczególnych węzłów, wzajemnie się równoważą, tak że belka KK nie ma możliwości przesuwania się poziomo pod wpływem jakichkolwiek obciążeń pionowych na nią działających.

Ta ostatnia właściwość odróżnia naszą belkę w rozpatrywanego typu ramownicy od takiejże belki w ramownicy, mającej słupy pod belką tylko, taką bowiem ramownica, czy to wskutek własnej asymetrii, czy też wskutek niesymetrycznego obciążenia odkształca się w ten sposób, że belka przesuwa się poziomo, jak to ilustruje rys. 44. Ta możliwość lub niemożność przesuwania się poprzecznic wzdluż swej osi ma oczywiście duży wpływ na rozkład momentów gnących ramownicy.

Nasz wyodrębniony ustrój, posiadający wyżej opisaną właściwość, nazwiemy "ramownicą typu H ". -

Rozpatrzmy bliżej ten typ ramownicy.

Jak zaznaczono wyżej, można bez wielkiego błędu uznać pośrednie opory za przegibne, co urzeczywistnia się w ramownicach zwykłych /rys. 44/ przez zapatrzenie dla celów obliczania odpowiednich słupów w choćby fikcyjne przeguby pod belką, czyli założenie, że słupy spełniają tu rolę wahaków, a więc rolę identyczną z tą, jaką spełniają opory ostre na rolkach. Nie zmieniając mocy równania /40/ zamienimy nasze, sztywne w istocie połączone, słupy



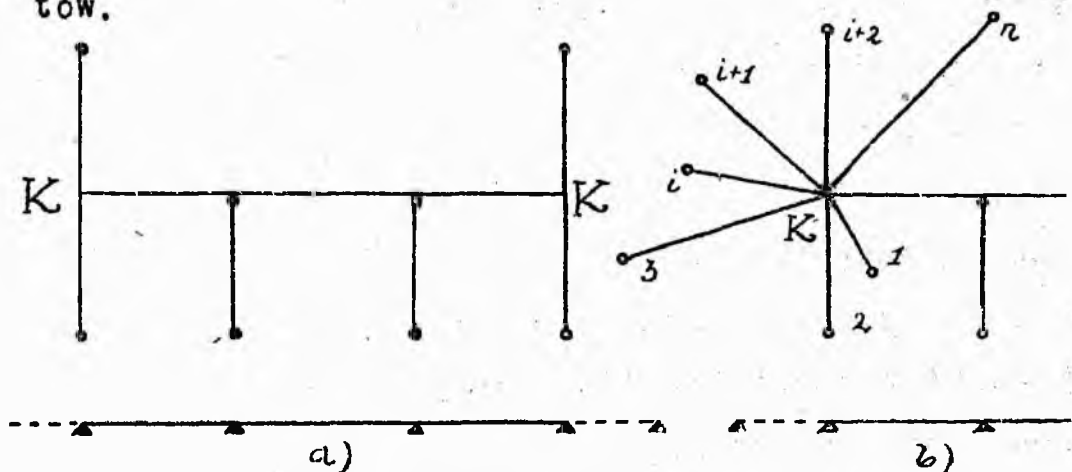
rys. 44.

pośrednie na słupy wahakowe, krańcowe zaś słupy pozostawimy jako sztywno połączone z belką. Badana przez nas ramownica typu *H* przy-

bierze ostatecznie postać, wskazaną na rys. 45a.

Zadanie sprowadza się do wyznaczenia stopnia zamocowania, jaki wytwarzają słupy, zbiegające się na końcach belki w punktach *K*, w założeniu, że punkty te są stałe, natomiast możliwy jest ruch obrotowy końców belki około tych punktów.

Jeszcze ogólniej zadanie może być ujęte, jeżeli, zamiast dwóch słupów na jednej, pionowej założymy istnienie w punktach K całych snopów zbiegających się prętów, z których każdy posiada inną długość, inny moment bezwładności i inny współczynnik sprężystości materiału /rys. 45/; wyznaczyć należy stopień zamocowania, wytworzony przez taki snop sztywno z końcem belki połączonych prętów.

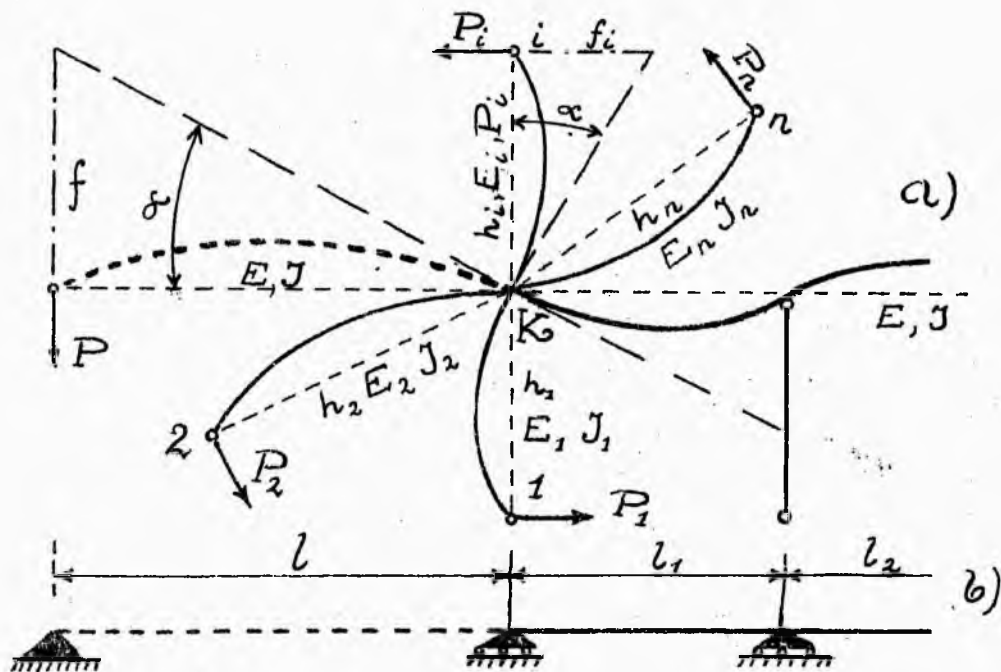


RYC. 45.

Niech pręt osadzony w przegubie i posiada długość h_i , mom. bezwł. J_i oraz współcz. spręż. E_i . Odpowiednio oznaczmy h, J, E dla wszystkich prętów osadzonych w przegubach $1, 2, \dots, n$ /rys. 46/. - Przypuśćmy, że pod wpływem pewnych obciążeń, działających na belkę, węzeł K obrócił się o kąt α , w przegubach prętów powstały siły $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$,

ugięcia końców prętów będą $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_n$. Znajdźmy długość l fikcyjnego, przedłużenia belki KK , czyli długość fikcyjnego pręta, leżącego na osi belki, sztywno z nią połączonego, a posiadającego ten sam mom. bezwł. J i ten sam spółośc. spręż. E co belka, pod warunkiem, że przy tej długości pręt ten będzie posiadał tę samą sztywność co snop prętów, który przy jego pomocy zastąpimy; innymi słowy: przez zastąpienie snopa prętów przedłużeniem belki o długości l nie zmieni się kąt α w danych warunkach obciążenia belki.

Dokonawszy tej zmiany, otrzymamy belkę prostą na wielu oporach, składającą się z realnej badanej belki z dodatkiem fikcyjnych zastępczych przęseł na końcach czyli "wyprostowaną ramownicę" którą możemy badać i rozwiązać przy pomocy równań trzech momentów i wszelkich innych metod, stosowanych do belek ciągłych na wielu oporach. Następnie, rozmieszczając dowolnie obciążenia na przęsłach badanej belki KK , wyznaczymy momenty oporowe na oporach K oraz wszystkie inne momenty gnące, powstające przy istnieniu tych momentów zamocowania końców, zamocowania, wywołanego



RYS. 46.

istnieniem sztywno połączonych z belką snopów, prętów, wzgl. krańcowych słupów przyległych pięter. Przęsła zastępcze są wskazane na rys. 45 i 46 linją przerywaną w przedłużeniu belki.

Jest oczywiste, że tą samą metodą można badać ramownice zwykłe /nie typu H / prostokątne i wieloprzęsłowe pod warunkiem wszakże, że są symetryczne względem osi pionowej i obciążone symetrycznie względem tejże osi.

Długość l zastępczego przęsła belki wyznaczymy jak następuje. Skoro ma pozostać niezmiennym moment na oporze K , przy zastąpieniu snopa prętów przęsłem zastępczym, musi istnieć równanie

$$P \cdot l = \sum_1^n P_i h_i \dots \dots \dots /41/$$

Jak wiadomo, ugięcie

$$f_i = \frac{1}{3} \cdot \frac{P_i h_i^3}{E_i J_i}$$

skąd

$$P_i = \frac{3 f_i E_i J_i}{h_i^3}$$

Przez tego, z podobieństwa trójkątów mamy:

$$f_i = f \frac{h_i}{l}$$

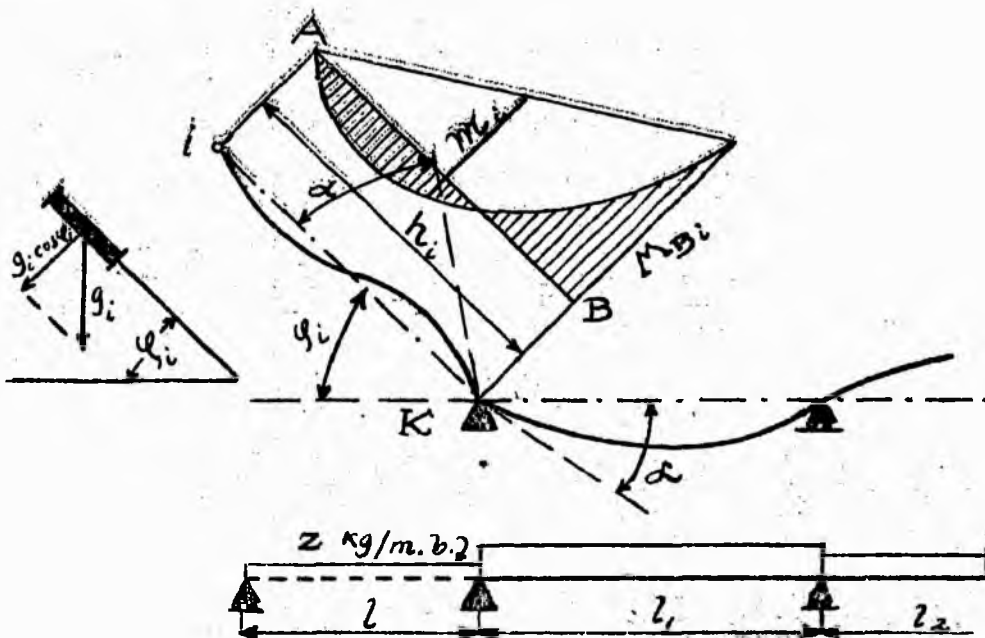
Wstawiając te wyraży do równania /41/, otrzymujemy

$$l = \frac{E J}{\sum_1^n \frac{E_i J_i}{h_i}} \dots \dots \dots /42/$$

Jest to poszukiwana długość przęsła zastępczego.

Jeżeli przęsła zastępcze powstały ze słupów pionowych, będą oczywiście rozpatrywane jako przęsła, na które nie ma dostępu obciążenie ruchome i których waga własna równa jest zero. -

W ogólnym jednak wypadku waga własna prętów, wchodzących w skład snopa, wzgl. te obciążenia, które na nie działają, będą miały wpływ na stopień zamocowania końców belki, gdyż wpływają na wartość kąta obrotu α . Ograniczając się do obciążeń równomiernych i ciągłych, znajdziemy takie obciążenie zastępcze w kg/m.b. , które, będąc rozłożone na zastępczym przęśle l , wywrze taki sam wpływ na kąt α , jaki wywierają łącznie obciążenia g , rozłożone na poszczególnych prętach snopa /rys. 47/.



RYŚ. 47.

Rozpatrzmy pręt, osadzony w przegubie i , tworzący z przesłem zastępczym kąt φ_i , i dźwigający obciążenie równomierne g_i kg/m.b. Na zasadzie równań, wynikających bezpośrednio z twierdzenia Mohra możemy napisać:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_i}{E_i J_i} \left(\frac{M_i}{3} - \frac{M_{Bi}}{3} \right)$$

ale

$$M_i = \frac{g_i \cos \varphi_i h_i^2}{8},$$

skąd

$$M_{Bi} = \frac{g_i \cos \varphi_i h_i^2}{8} - \frac{3 E_i J_i}{h_i} \operatorname{tg} \alpha.$$

Ponieważ suma momentów zamocowania prętów szopa w punkcie K musi być równą momentowi zamocowania przęsła zastępczego, mamy równanie:

$$\sum_1^n \frac{g_i \cos \varphi_i h_i^2}{8} - \sum_1^n \frac{3 E_i J_i}{h_i} \operatorname{tg} \alpha = \frac{z l^2}{8} - \frac{3 E J}{l} \operatorname{tg} \alpha;$$

skąd

$$z = \sum_1^n \frac{g_i \cos \varphi_i h_i^2}{l^2} + \frac{24 \operatorname{tg} \alpha}{l^2} \left[\frac{E J}{l} - \sum_1^n \frac{E_i J_i}{h_i} \right]$$

lecz, jak wynika z równania /42/, wyraz w nawiasie jest równy zeru, więc poszukiwane obciążenie zastępcze będzie:

$$Z = \frac{1}{l^2} \sum_1^n g_i \cos \varphi_i h_i^2 \dots \dots /43/$$

Gdy mamy do czynienia tylko z dwoma słupami pionowymi $\varphi_1 = 90^\circ$ i $\varphi_2 = 270^\circ$, to oczywiście $Z = 0$.

Dajemy poniżej przykład liczbowy, ilustrujący zastosowanie wzoru /42/. Należy obliczyć momenty gnące w belce ciągłej żelbetowej trzyprzęsłowej, wspartej w środkowej swej części na żelbetowych słupach, końcami zaś zamocowanej w słupach ceglanych /rys. 48a i b/. Po wyodrębnieniu ramownicy typu H /rys. 48c/ na podstawie liczb, podanych na rysunku, otrzymujemy następujące wartości:

$$h_1 = 350 \text{ cm.}; \quad J_1 = \frac{150 \times 41^3}{12} = 860000 \text{ cm}^4,$$

$$h_2 = 400 \text{ cm.}; \quad J_2 = \frac{150 \times 55^3}{12} = 2080000 \text{ cm}^4,$$

$$E_1 = E_2 = 84000 \text{ kg/cm}^2 \text{ dla cegły.}$$

Dalej

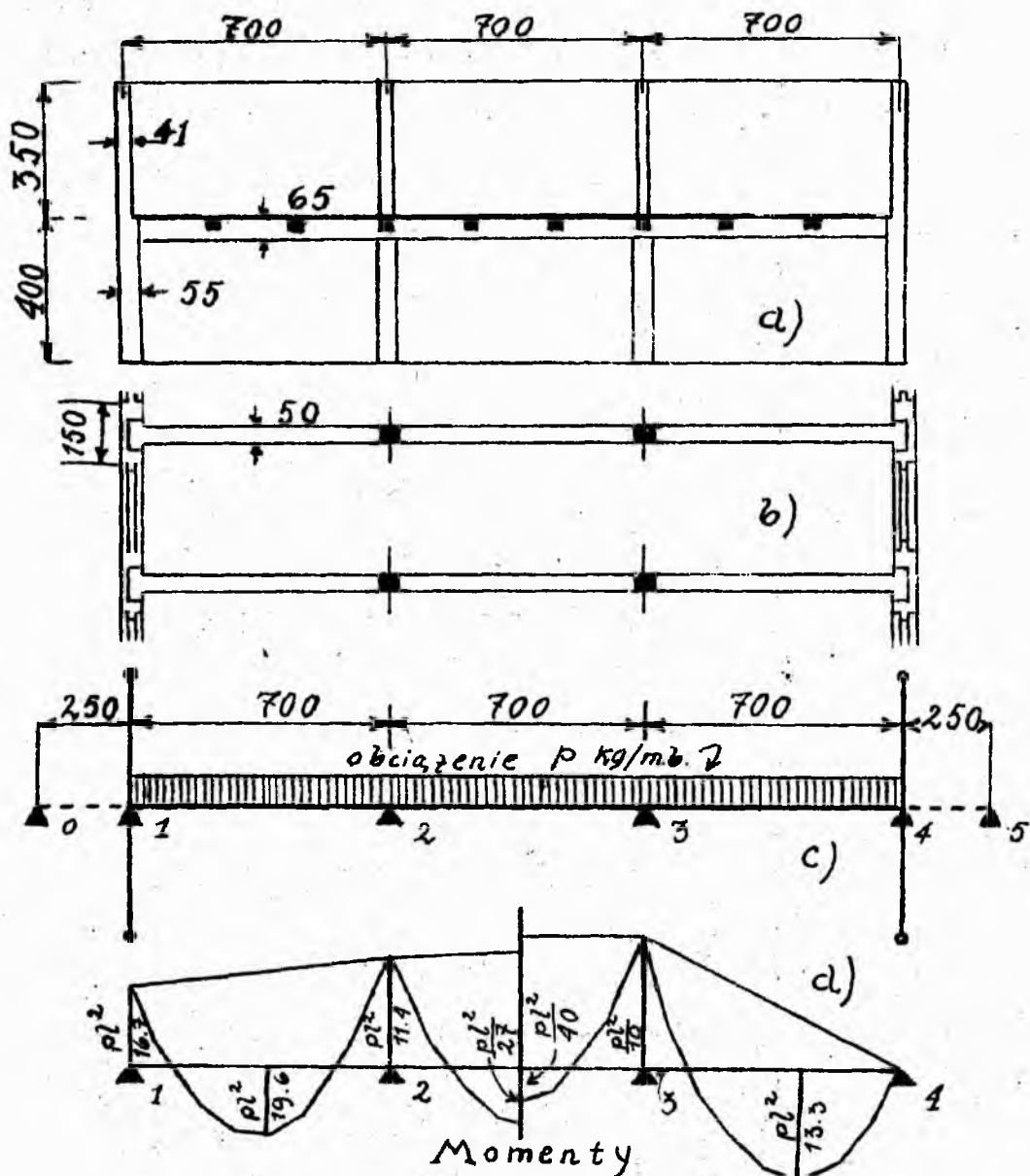
$$J = \frac{50 \times 65^3}{12} = 1140000 \text{ cm}^4,$$

$$\text{zaś } E = 140000 \text{ kg/cm}^2 \text{ dla żelbetu.}$$

Wstawiając te liczby do wzoru /42/, otrzymamy:

$$l = \frac{140000 \times 1140000}{8400 \left[\frac{860000}{350} + \frac{2080000}{400} \right]} \cong 2,50 \text{ m.}$$

Rozpatrując dalej belkę na 6-iu oporach, np. pod obciążeniem równomiernym na wszystkich trzech przęsłach, i posilując się równaniami trzech momentów, wyznaczamy poszukiwane momenty gnaące z



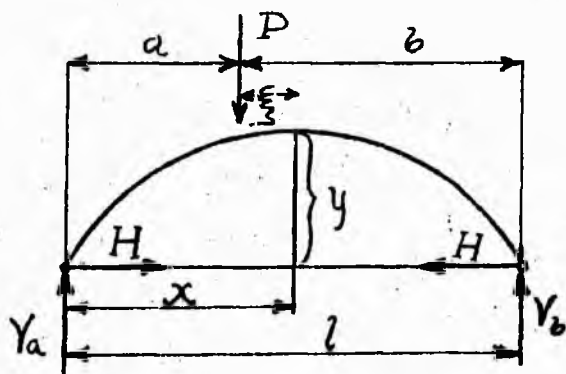
Momenty
w ramownicy typu H - w belce ciągłej
RYS. 48.

uwzględnieniem zamocowania końców, jakie dają słupy ceglane. Dla porównania, na wykresie /rys. 48d/ są zestawione wartości momentów, wynikające z rozpatrzenia ramownicy typu H i z obliczenia belki ciągłej.

ŁUKI ŻELBETOWE.

ŁUK O DWU PRZEGUBACH.

Jest oczywiste, że wzory, które zostały wyrowadzone z warunku najmniejszości pracy i uogólnione do dowolnego ciągu belek sztywno ze sobą połączonych i znajdujących się w jednej płaszczyźnie, ciągu wspartego na 2 przegubach, stosują się w całości do wyznaczenia wartości H jako statycznie niewyznaczalnej w łuku dwuprzegubowym. Zachodzą tu jednak



RYC. 49.

pewne okoliczności nowe i dlatego należy to zadanie rozpatrzyć oddzielnie. Przy obciążeniu jedną siłą skupioną /rys. 49/,

będziemy mieli:

Oddziaływania opór:

$$V_a = P \frac{b}{l} ; \quad V_b = P \frac{a}{l}$$

moment gnący w odstępnie x od lewej opory:

$$M = V_a \cdot x - P \xi - H \cdot y$$

Ale $V_a x - P \xi$ jest to moment gnący zwykłą belkę swobodnie wspartą na oporach A i B , więc nazywając taki moment M_0 możemy napisać:

$$M = M_0 - H \cdot y$$

Rozpatrując dalej łuk uczyniony chwilowo statycznie wyznaczalnym przez nadanie oporze prawej możliwości przesuwania się, możemy przeprowadzić następujące

rozumowanie /rys.50/.

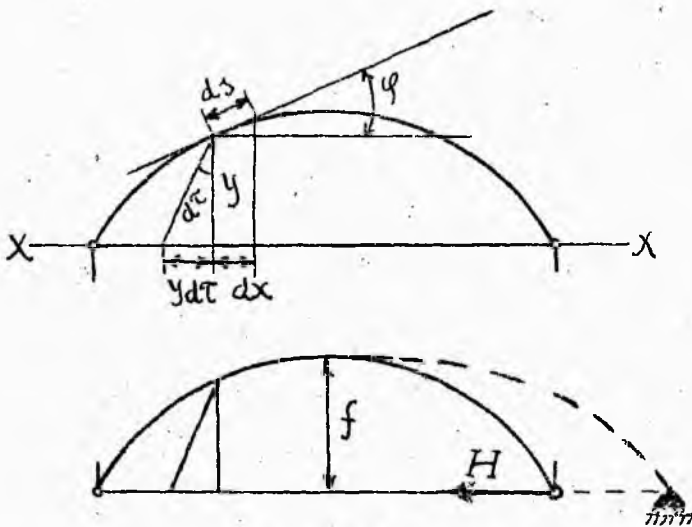
Siła normalna wywołuje przesunięcie wzdłuż osi x

$$\Delta ds \cos \varphi =$$

$$= \frac{N ds}{EF} \cos \varphi = \frac{N dx}{EF}$$

Moment gnący wywołuje katowe odkształcenie $d\tau$

$$d\tau = \frac{M ds}{E J}$$



RYJ. 50.

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header.

Handwritten text in the upper middle section, including the word "Handwritten" and other illegible characters.

Handwritten text in the middle section, possibly a label for the diagrams below.



Handwritten text below the first diagram, possibly a label or description.

Handwritten text in the lower middle section, possibly a label or description.



Handwritten text in the lower middle section, possibly a label or description.



Handwritten text below the fourth diagram, possibly a label or description.



Wytrzymałość betonu

1) na ściskanie

w belkach $35 \times 40 \text{ kg/cm}^2$

w słupach $25 \times 30 \text{ — — —}$

2) na rozciąganie

do 2 kg/cm^2

3) współczynnik sprężystości

$$E_{bs} = 140.000 \text{ kg/cm}^2$$

• dla $\sigma = 35 \text{ kg/cm}^2$; $m = 1.15$; $E_s = 200.000$

$$E_{br} = 0.4 E_{bs} = 56.000 \text{ kg/cm}^2$$

4) na ścinanie (przesuwanie)

$$\tau_p = 5 \text{ kg/cm}^2$$

5) przyczepność

$$\tau = 5 \times 4.5 \text{ kg/cm}^2$$



a więc przesunięcie wzdłuż osi x będzie

$$y d\tau = \frac{M ds}{E J} y$$

Równomierne nagrzanie powoduje przesunięcie:

$$\epsilon t ds \cos \varphi = \epsilon t dx$$

Całkowite więc przesunięcie opory nożynionej przesuwana byłaby:

$$\delta_x = \int \frac{N dx}{EF} + \int \frac{M y ds}{E J} + \int \epsilon t dx \quad /44/$$

Ponieważ jednak zakładamy opory nieprzesuwne, więc wyraz /44/ możemy przyrównać do 0.

Wobec tego, że łuk posiada przeważnie przekrój zmienny, celem ułatwienia całkowania założmy pewne prawo tej zmienności naprz.:

$$J = J' \sec \varphi; \quad F = F' \sec \varphi$$

gdzie J' i F' są to średnie wartości stałe.

Możemy też przybliżenie przyjąć

$$N = -H \sec \varphi$$

prócz tego jest

$$ds = dx \sec \varphi$$

Wtedy otrzymamy:

$$\int \frac{M y dx \sec \vartheta}{E J' \sec \vartheta} + \int \frac{-H \sec \vartheta dx}{E F' \sec \vartheta} + \varepsilon \tau l = 0$$

skąd

$$\int \frac{M y dx}{E J'} + \int \frac{-H dx}{E F'} + \varepsilon \tau l = 0 \dots /45/$$

gdy prócz tego wstawimy stosownie do wyżej wskazanego $M = M_0 - H \cdot y$, otrzymamy:

$$\frac{H l}{E F'} + \frac{1}{E J'} \int M_0 y dx - \frac{H}{E J'} \int y^2 dx + \varepsilon \tau l = 0 \dots /46/$$

Gdy narazie odrzucimy wpływ zmiany temperatury, otrzymamy:

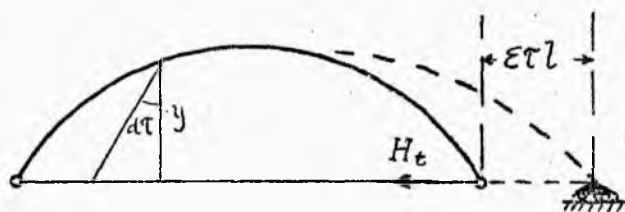
$$H = \frac{\int_0^l M_0 y dx}{\int_0^l y^2 dx + \frac{J'}{F'} l} = \frac{\int M_0 y dx}{\int y^2 dx} \cdot \gamma \quad /47/$$

gdzie

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{J' l}{F' \int y^2 dx}}$$

jest to współczynnik zależny od uwzględnienia odkształceń od sił normalnych.

W łukach płaskich należy go uwzględnić, w innych może być wpływ ten nierozpatrywany; wtedy $\gamma = 1$.



RYS. 51.

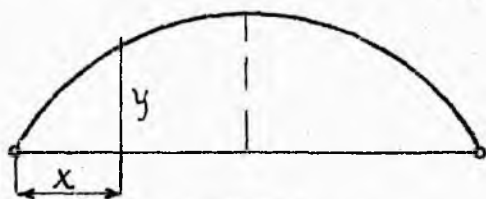
Wpływ zmiany temperatury otrzymamy /rys. 51/ z rozpatrzenia momentu gnącego $M_t = H_t \cdot y$; odrzucając pracę sił normalnych będziemy mieli:

$$\Delta_t = \varepsilon \tau l = \int y d\tau = \int \frac{M_t y dx}{E J'} = \frac{H_t}{E J'} \int_0^l y^2 dx$$

skąd

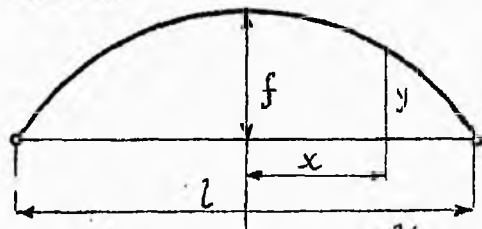
$$H_t = \frac{\varepsilon E J' t l}{\int y^2 dx} \dots \dots /48/$$

Gdy mamy łuk paraboliczny /lub płaski kołowy zbliżony do parabolicznego/, wtedy



$$\int y^2 dx = \frac{8}{15} fl$$

Istotnie równanie paraboli względem środka łuku będzie:



$$y = f - \frac{4fx^2}{l^2}$$

$$\int_0^l y^2 dx = 2 \int_0^{l/2} \left(f - \frac{4fx^2}{l^2} \right)^2 dx = \frac{8}{15} f^2 l$$

Spółczynnik γ będzie oczywiście:

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{J'}{f^2 F'}}$$

Siła H od siły skupionej P będzie:

$$H = \frac{3}{4} \frac{Pa \cdot b}{f \cdot l} \gamma$$

Siła H od równomiernego obciążenia q $\frac{\text{kg}}{\text{mb}}$ będzie:

$$H = \frac{q l^2}{8 f} \gamma$$

wkłada od temperatury:

$$H_t = \frac{15}{8} \frac{\epsilon E J' t}{f^2}$$

BUK ZE ŚCIĄGIEM.

W tym wypadku przesunięcie opór już nie jest równem 0. Jeżeli przekrój ściąga będzie F_z , a jego współczynnik sprężystości E_z , to

$$S_x = \frac{Hl}{E_z F_z}$$

Wtedy /bez zmian temperatury/ zamiast równania 7/ będziemy mieli, odróżniając E_0 i E_z dla łuku i dla ściąga :

$$\frac{Hl}{E_2 F'} + \frac{1}{E_2 J'} \int M_0 y dx - \frac{H}{E_2 J'} \int y^2 dx = \frac{Hl}{E_2 F_2}$$

skąd

$$H = \frac{\int M_0 y dx}{\int y^2 dx + l \left(\frac{J'}{F'} + \frac{E_2}{E_2} \cdot \frac{J'}{F_2} \right)} \dots /49/$$

albo

$$H = \frac{\int M_0 y dx}{\int y^2 dx} \gamma'$$

gdzie

$$\gamma' = \frac{1}{1 + \frac{l J'}{\int y^2 dx} \left[\frac{1}{F'} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{F_2} \right]}$$

dla łuku parabolicznego:

$$\gamma' = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{J'}{f^2} \left[\frac{1}{F'} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{F_2} \right]}$$

NAPRĘŻENIA POWSTAJĄCE W KOMINACH WSKUTEK RÓŻNICY
TEMPERATUR.

Ścianka komina znajduje się podczas funkcjonowania

tego ostatniego pomiędzy gazami spalinowymi i powietrzem zewnętrznym. Temperatura gazów spalinowych wyniesi w połączeniu z osopuchem około $+ 250^{\circ}\text{C}$. Gazy w miarę podnoszenia się w kominie tracą nieco ciepła, tak, że temperatura ich spada mniejwięcej o 1°C . na każdy metr podniesienia się w kominie. Jeżeli wziąć temperaturę powietrza w najbardziej niekorzystnym wypadku $- 20^{\circ}\text{C}$., to różnica między temperaturami gazów z jednej i z drugiej strony ścianki będzie:

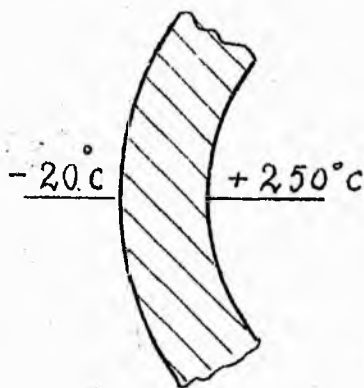
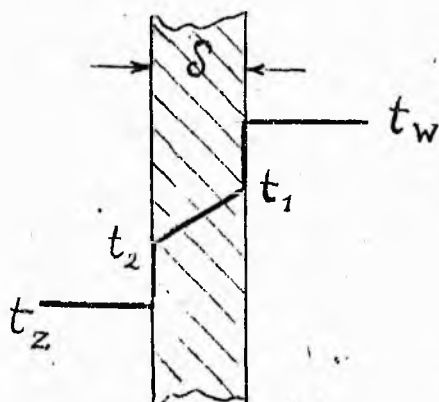
$$t_w - t_z = 250^{\circ} - (-20^{\circ}) = 270^{\circ}\text{C}$$

Różnica temperatur na powierzchniach ścianki będzie oczywiście mniejszą z powodu oporów powierzchniowych i różnicy $t_1 - t_2$ /rys. 52/. Obliczamy ze wzoru:

$$t_1 - t_2 = \frac{\frac{W \cdot S}{K_b} (t_w - t_z)}{2 + \frac{W_b \cdot S}{K_b}} \dots\dots\dots/50/$$

gdzie W - ilość ciepła /w kalerjach/, która się traci na powierzchniach ścianki przy 1°C . różnicy temperatur i 1 m^2 . powierzchni, K_b - ilość ciepła,

która przejdzie w godzinę przez 1 m.² przekroju danego ciała przy 1 m. grubości i 1°C. różnicy temperatur.



Między betonem i powietrzem

$W =$ około 4,5 .

Dla betonu $K_b = 0,3$ do 0,6 przeciętnie 0,45.

Gdy wstawimy te wartości do wzoru /50/ otrzymamy:

$$t_1 - t_2 = \frac{10\delta(t_w - t_z)}{2 + 10\delta} \quad /51/$$

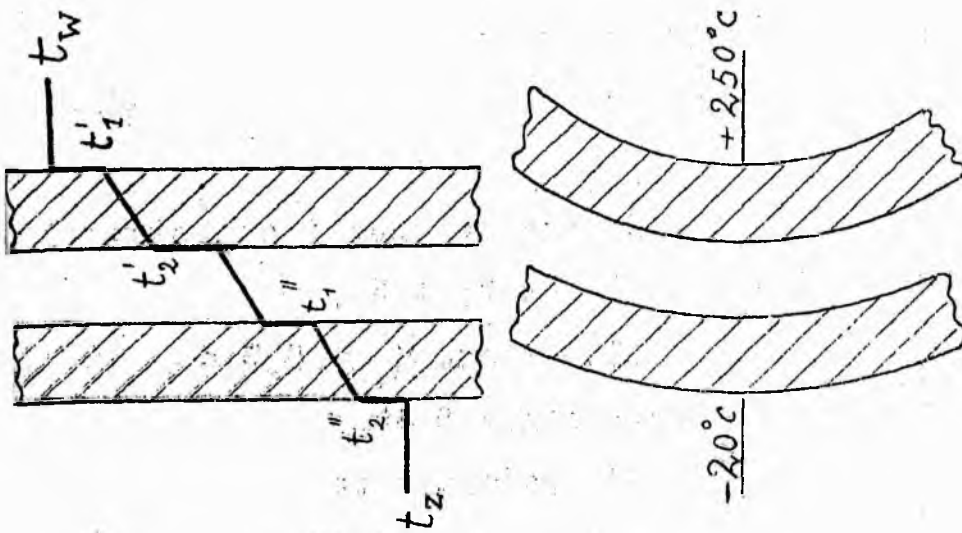
przy czym δ jest to grubość ścianki w metrach.

Dla wyżej podanych t_w i t_z i grubości ścianki $\delta = 0,15$ otrzymamy:

RYS. 52.
$$t_1 - t_2 = \frac{10 \cdot 0,15 \cdot 270}{2 + 10 \cdot 0,15} = 116^\circ\text{C}$$

Jeżeli nie brać wypadku krańcowego, można uważać, że normalnie w kominach $t_1 - t_2 = 80^\circ$ do 90°C .

Przy ściankach podwójnych spadek temperatury przedstawi się linją wykresu /rys.53/i w każdej ściance, przy tych samych założeniach ogólnych, spadek



RYS. 53.

$t_1 - t_2$ wyniesie około 30°C . Należy zaznaczyć, że wskutek dowolności współczynników, obliczenie powyższe nie jest ścisłe i daje jedynie przybliżone pojęcie o stanie rzeczy.

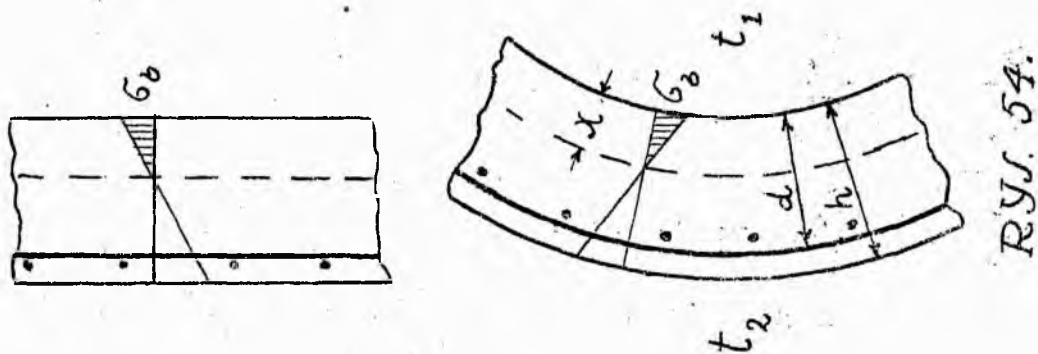
NAPRĘŻENIA POWSTAJĄCE OD TEMPERATURY.

Założmy, że spadek temperatury odbywa się po linii prostej w grubości ścianki i że współczynnik rozszerzalności betonu i żelaza jest jednakowy /średnio $\epsilon = 0,000012$ do $0,00001$ /. Ścianka pozostawiona samej sobie i zupełnie swobodna, będąc w ten sposób nagrzana wygięłaby się. Jeżeli wygięcie jej jest powstrzymane, to oczywiście powstaną w niej naprężenia wynikające z odkształcenia włókien, wydłużonych niejednakowo wskutek różnic temperatury. Róż-

nica temperatur $t_1 - t_2$ wywołała stosunkowe wydłużenie Δ włókien krańcowych. Wskutek powstrzymania odkształcenia ścianki, włókna z zimnej strony rozciągną się o Δ_z , zaś ze strony gorącej skrócą się o Δ_g , przyczem jest oczywiste, że

$$\Delta_z + \Delta_g = \Delta$$

Każde z tych odkształceń odpowiada pewnemu naprężeniu, mamy więc wypadek gięcia płyty żelbetowej, gięcia określonego sumą odkształceń krańcowych włókien. W kominie zjawisko to ma miejsce zarówno w pierścieniach, jak i w pasach pionowych /rys. 54/.



Rozpatrzmy to zagadnienie najprzód w fazie II. Oznaczmy w danej płycie żelbetowej, jednostronnie nagrzanej, a nie mogącej się swobodnie odkształcić, $\tau = t_1 - t_2$ - różnicę temperatur w stopniach

C pomiędzy powierzchnią betonu /bardziej nagrzanego/ i żelazem /mniej nagrzanem/. Dane jest pozatem A_z - przekrój żelaza oraz d - rachunkowa grubość płyty, skąd zawartość żelaza $\varphi = \frac{A_z}{b \cdot d}$. Położenie osi obojętnej jest wobec tego wiadome, gdyż $x = \alpha d$ gdzie

$$\alpha = n \varphi \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n \varphi}} \right)$$

/patrz Cz.I wzór 38 a/.

Skoro suma odkształceń włókien ścisanych i rozciąganych jest nam wiadoma, mianowicie:

$$\frac{\sigma_b}{E_b} + \frac{\sigma_z}{E_z} = \varepsilon \tau$$

czyli

$$\frac{\sigma_b}{E_b} + \frac{\sigma_z}{n E_b} = \varepsilon \tau$$

skąd

$$\sigma_b + \frac{\sigma_z}{n} = \varepsilon \tau E_b$$

i jest nam wiadome położenie osi obojętnej, wyznaczymy naprężenie z podobieństwa trójkątów /rys.55/. Wtedy

$$\sigma_b = \alpha \varepsilon \tau E_b \quad \dots\dots\dots/52/$$

$$\sigma_z = n(1-\alpha) \varepsilon \tau E_b \quad \dots\dots\dots/53/$$

Jak widać z powyższych wzorów, naprężenia te przy określonej zawartości żelaza φ , są zależne jedynie

od różnicy temperatur τ , gdyż wzory dla każdego określonego φ przybierają postać:

$$\sigma_b = B_s \tau \quad \dots\dots /54/$$

$$\sigma_z = Z \tau \quad \dots\dots /55/$$

gdzie współczynniki B_s i Z są zależne jedynie od wartości stałych i od φ .

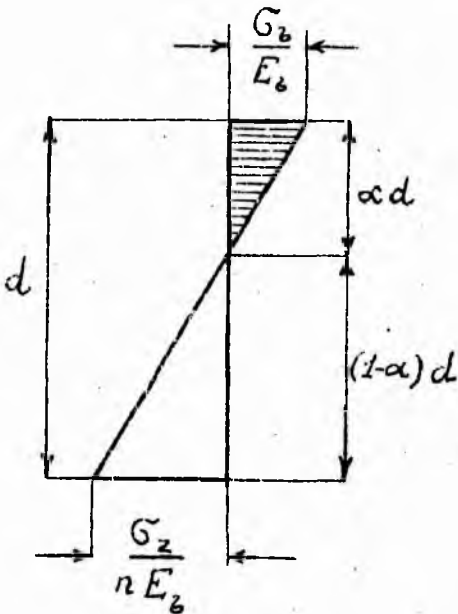
Ponieważ sprawa pęknięcia kombinów od temperatury jest związana z naprężeniami rozciągającymi, jakie powstają w betonie,

należy zbadać naprężenie też w fazie I, t.j. przy uwzględnieniu betonu na rozciąganie.

Rozpatrzmy najprzód wypadek, gdy współczynniki sprężystości betonu na ściskanie i na rozciąganie mogą być przyjęte jako sobie równe, więc

$$E_{br} : E_{bs} = m = 1.$$

Niech tu φ oznacza zawartość żelaza w całym przekroju, czyli $\varphi = \frac{A_z}{b \cdot h}$, zaś τ niech będzie różnicą temperatur pomiędzy powierzchniami betonu. Ze wzoru /135/ części I, założwszy $x = \alpha \cdot h$, oraz przyjmąwszy, że żelazo znajduje się



RYŚ. 55.

w środku ciężkości trójkąta naprężeń rozciągających otrzymany /rys. 56/:

$$\alpha h = \frac{\frac{b h^2 \alpha^2}{2} + \frac{b h^2}{2} - \frac{b h^2 \alpha^2}{2} + n \varphi b h^2 \frac{2+\alpha}{3}}{b \alpha h + b h - b \alpha h + n \varphi b h}$$

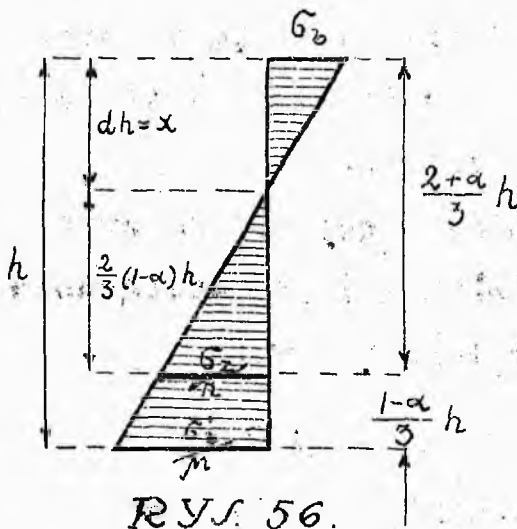
skąd

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2} + n \varphi \frac{2+\alpha}{3}}{1 + n \varphi}$$

Rozwiązanie tego równania daje:

$$\alpha = \frac{3 + 4 n \varphi}{6 + 4 n \varphi}$$

...../56/.



W wypadku, gdy współczynniki E_{bs} i E_{br} nie są równe, czyli:

$$E_{bs} : E_{br} = m \neq 1,$$

z tego samego wzoru /135/ cz. I,

otrzymany:

$$\alpha h = \frac{\frac{b \alpha^2 h^2}{2} + m b \frac{h^2 - \alpha h^2}{2} + n \varphi b h^2 \frac{2+\alpha}{3}}{b \alpha h + m b (h - \alpha h) + n \varphi b h}$$

skąd po uporządkowaniu i rozwiązaniu w stosunku do α otrzymamy:

$$\alpha = -\frac{3m+2n\varphi}{3(1-m)} + \sqrt{\left[\frac{3m+2n\varphi}{3(1-m)}\right]^2 + \frac{3m+4n\varphi}{3(1-m)}} \quad \dots /57/$$

Jest oczywiste, że na zasadzie wyżej przytoczonego rozumowania otrzymamy /rys. 56/

$$\sigma_b = \alpha \varepsilon \tau E_{bs} \quad \dots \dots \dots /58/$$

$$\sigma'_b = m(1-\alpha) \varepsilon \tau E_{bs} \quad \dots \dots \dots /59/$$

$$\sigma_z = n \frac{2}{3} (1-\alpha) \varepsilon \tau E_{bs} \quad \dots \dots \dots /60/$$

jak widzimy więc, wszystkie naprężenia posiadają postać równań /54/ i /55/, mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_b &= B_s \tau \\ \sigma'_b &= B_r \tau \\ \sigma_z &= Z \tau \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots /61/$$

przyczem współczynniki B_s , B_r i Z są zależne jedynie od zawartości żelaza φ i od kilku wartości stałych. Współczynniki te, jak to widać z postaci wzorów /61/, są to naprężenia, jakie powstają w odnośnych włóknach przekroju przy 1°C. różnicy temperatur pomiędzy powierzchniami ścianki kolumny.

Na załączonym wykresie są umieszczone krzywe B_s , B_r i Z /czyli naprężenia σ_{bs} , σ_{br} i σ_z przy 1°C . różnicy temperatur ($\bar{t} = 1^\circ\text{C}$) / dla pięciu wypadków, w których współczynnik rozszerzalności od temperatury przyjęto na 1°C . $\epsilon = 0,000012$.

1/ Faza I a, $\mu = 1$, $E_{bs} = E_{br} = 210000$, $n = 10$

2/ Faza I a, $\mu = 1$, $E_{bs} = E_{br} = 140000$, $n = 15$

3/ Faza I b, $\mu = 0,4$; $E_{bs} = 140000$, $n = 15$

4/ Faza I b, $\mu = 0,111 \left(\frac{1}{9}\right)$, $E_{bs} = 140000$, $n = 15$

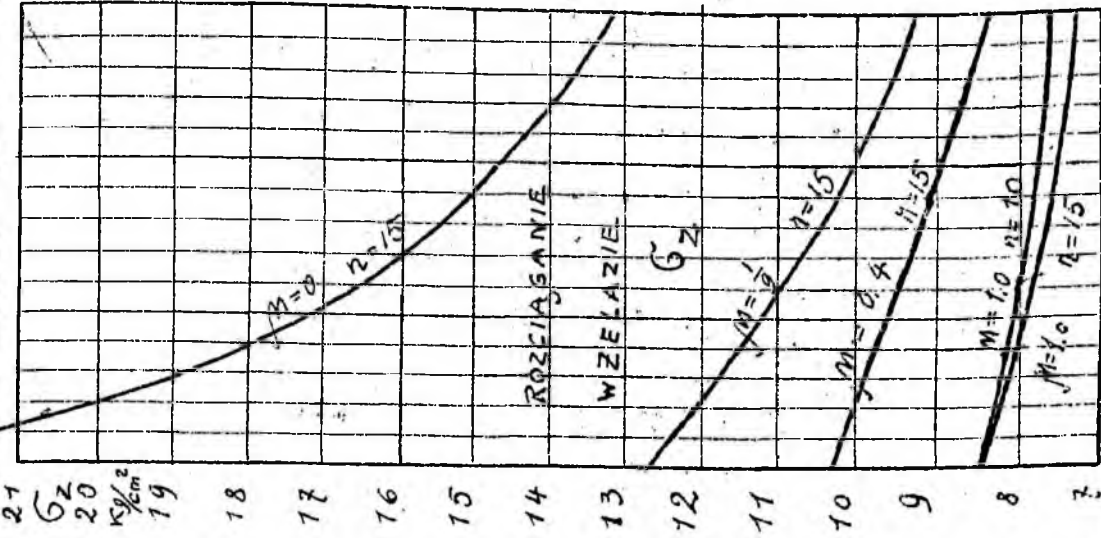
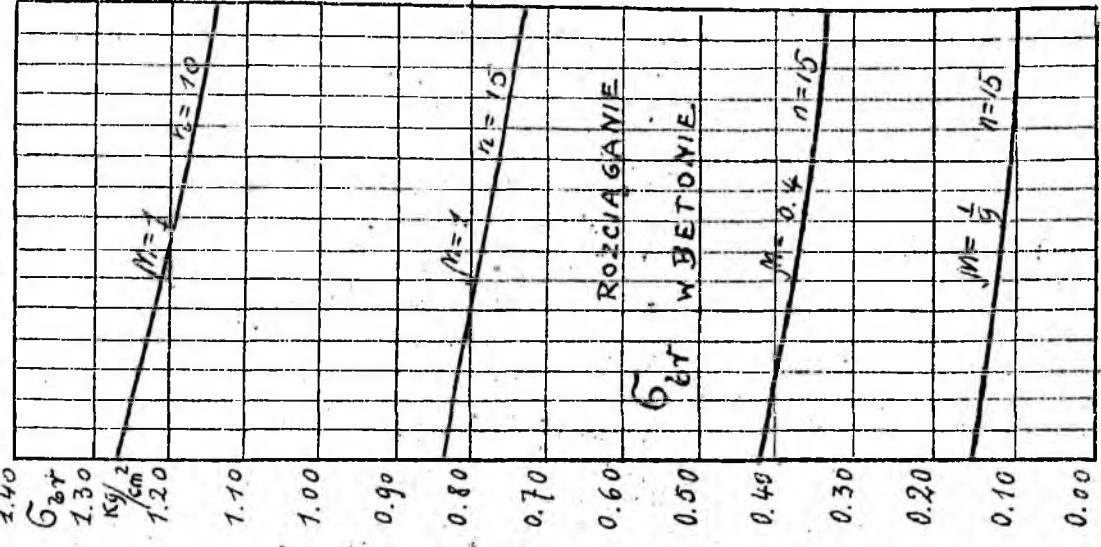
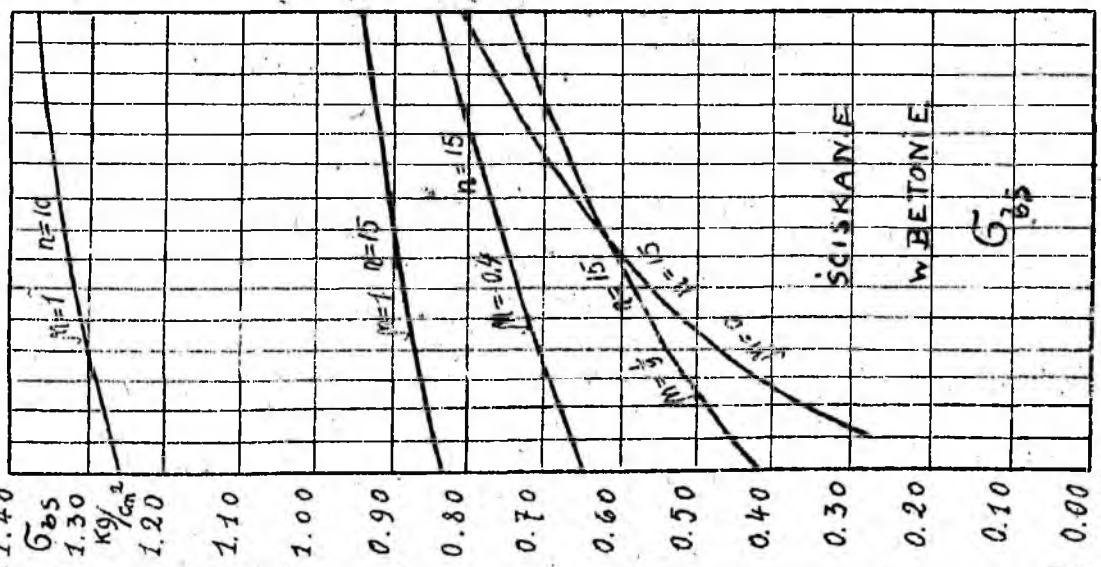
5/ Faza II, $E_{bs} = 140000$, $n = 15$

Wypadek 4/ został podany jedynie dlatego, że z tych czy innych powodów w niektórych podręcznikach niemieckich tak nieprawdopodobne $\mu = \frac{1}{9}$ bywa przytaczane.

Z wykresu można wyciągnąć następujące wnioski:

a/ Stosunki μ i n współczynników sprężystości /zwłaszcza μ / mają duży wpływ na naprężenia. Dlatego, jeżeli obliczenie ma dać realne wskazówki co do naprężeń panujących w przekrojach, stosunki te muszą być dobrane zupełnie realnie. Opierając się na wynikach ostatnich doświadczeń należy stwierdzić, że μ

WYKRES NAPRĘŻEŃ. PRZY RÓŻNICY TEMPERATUR = 1°C.



0.00 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5

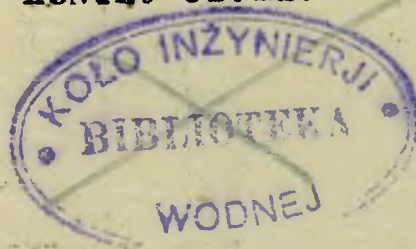
0.00 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5

jest bliskie 1.

b/ Naprężenia rozciągające w betonie przy zwykłej choćby różnicy temperatur powierzchni $\Delta T = 80^{\circ}\text{C}.$ są naogół bardzo duże i przekraczają wytrzymałość najlepszych betonów na rozciąganie.

o/ Dodawanie żelaza w pasie rozciągany bardzo mało wpływa na zmniejszenie naprężeń rozciągających w betonie.

KONIEC CZ. II.



SPIS RZECZY cz. II :	
	STR.:
VSTROJE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE	1
BELKA CIĄGŁA	19
RAMOWNICE	37
BELKA CIĄGŁA W RAMOWNICACH PIĘTROWYCH	65
ŁVKI ŻELBETOWE	79
NAPRĘŻENIA W KOMINACH	85