

C
Nr 20276.
Politechnika Warszawska

KOMISJA WYDAWNICZA
KRAJOWEJ POMOCY STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

L. H. NISHIAN i D. B. STEINMAN

WYKREŚLNA METODA OBLICZANIA BELEK CIĄGŁYCH

OPRACOWAŁ Z ANGIELSKIEGO, POD KIEROWNICTWEM
PROF. DR. K. POMIANOWSKIEGO, INŻ. ZIEMOWIT ŚLI-
WIŃSKI, ASYST. KAT. BUD. WOD. POL. WARSZ.



ROK

WARSZAWA

1930

WYDANO WESPÓŁ Z KOŁEM INŻYNIERJI WODNEJ SŁ. POL. WARSZ.

KOMISJA WYDAWNICZA
TOW. BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

L. H. NISHIAN i D. B. STEINMAN

WYKREŚLNA METODA OBLICZANIA BELEK CIĄGLYCH

OPRACOWAŁ Z ANGIELSKIEGO, POD KIEROWNICTWEM
PROF. DR. K. POMIANOWSKIEGO, INŻ. ZIEMOWIT ŚLI-
WIŃSKI, ASYST. KAT. BUD. WOD. POL. WARSZAWSKIEJ



ROK

WARSZAWA

1930

===== WYDANO WESPÓŁ Z KOŁEM INŻYNIERJI WODNEJ SZ. POL. WARSZ. =====



~~G. 276~~

C. 20946

BG04A/010-50

Od wydawców.

Wypuszczając swe nowe wydawnictwo poczuwamy się do miłego obowiązku złożenia serdecznego podziękowania pp. prof. dr. K. Pomianowskiemu i inż. Ż. Śliwińskiemu za bezinteresowne opracowanie i inicjatywę wydania niniejszej pracy, w której podane metody ułatwią technikowi praktyczne rozwiązywanie ustrojów statycznie niewyznaczalnych.

*Koło Inżynierji Wodnej
St. Pol. Warsz.*

*Kom. Wyd. Tow. Br. Pom.
St. Pol. Warsz.*

W budownictwie wodnem częściej niż gdzieindziej spotyka się z potrzebą zastosowania belek ciągłych i ram, zwykle żelazobetonowych. W czasie budowy trzeba szybko i pewnie obliczać konstrukcje, które muszą być natychmiast wykonane. Metody wykreślne pozwalają właśnie na wykonanie obliczeń z małą stratą czasu oraz tak jasnych, że popełnienie błędu grubego można zupełnie wykluczyć. Dokładność obliczenia jest dla celów praktycznych zawsze wystarczająca, gdyż zależy ona od skali, którą można przyjąć dowolnie dużą, i błędy obliczenia mieć zawsze mniejsze, niż błędy wynikające z powodu przyjęcia konstrukcyjnie większych wymiarów żelaza, niż wypadają z obliczenia, oraz błędów, wynikających z powodu rozłożenia prętów w szalunku w odstępach nie pokrywających się ściśle z przyjętymi założeniami.

Metoda Amerykańska obliczenia wykreślnego wydawała mi się tak prostą i jasną, że uważałem za rzecz bardzo pożądaną aby udostępnić ją szerszemu ogółowi techników.

Dr. K. Pomianowski.

SPIS RZECZY.

	<i>Str.</i>
Od wydawców	III
Od Prof. Dr. K. Pomianowskiego	V
Od tłumacza	VI
Spis rzeczy	VII
1. Uwagi ogólne	1
2. Dogodna forma twierdzenia o trzech momentach	1
3. Zależności współczynników równania trzech momentów	4
4. Szczególne wypadki równania trzech momentów	5
5. Punkty sprzężone	6
6. Wykreślne wyznaczenie punktów sprzężonych	8
7. Zastosowanie metody punktów sprzężonych do wyznaczania momentów odporowych belek ciągłych	11
8. Wykreślne wyznaczenie sił tnących i reakcyj podpór	23
9. Zastosowanie metody punktów sprzężonych do wyznaczania dodatko- wych momentów powstałych przez obniżenie podpór belki ciągłej	24
10. Zastosowanie metody punktów sprzężonych do rozwiązań ram sztywnych	25
11. Zastosowanie metody punktów sprzężonych do wyznaczania linii wpły- wu belek ciągłych	36

1. Uwagi ogólne.

Metoda punktów sprzężonych jest jedną z mało u nas znanych metod wykreslnych, która pozwala na szybkie, proste i pewne obliczanie statyczne belek ciągłych i ram sztywnych. Metoda ta jest zbliżona do metody punktów stałych (Suter „Die Methode der Festpunkte“ Berlin 1923).

Podstawą metody jest wykreslnie przedstawienie zależności wyrażonej twierdzeniem o trzech momentach.

2. Dogodna forma twierdzenia o trzech momentach.

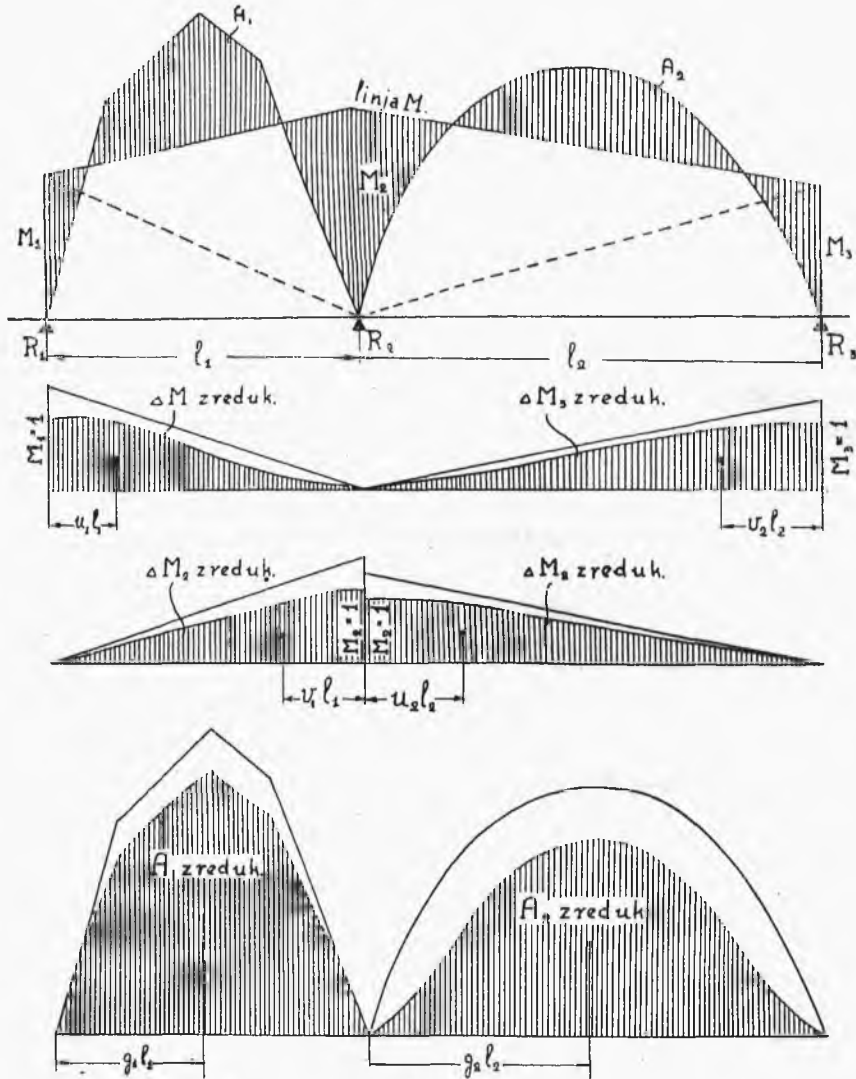
Założenia:

1. Belka na wielu podporach przegubowo-przesuwnych (końce podparte przegubowo, lub zamocowane).
2. Moment bezwładności zmienny.
3. Obciążenie pionowe, nieruchome, kształtu dowolnego.

Rozpatrzmy dwa sąsiednie przęsła Rys 1. Jako skutek założonego obciążenia powstanie w przekrojach belki moment gnący M . Zmianę tego momentu można przedstawić w znanej formie algebraicznej sumy wykresów: momentów podporowych i momentów belki wolno podpartej. Zauważymy, że wykres momentów podporowych składa się z dwóch trójkątów (na każdym przęśle), których podstawy stanowią odpowiednio momenty M_1 i M_2 oraz M_2 i M_3 . Będziemy wykresy te nazywali trójkątem M_1 , trójkątem M_2 ; M_2 , M_3 i t. d. Aby znaleźć związek M_1 , M_2 , M_3 rozważmy fikcyjne obciążenie określone dla każdego punktu belki jako $\frac{M}{EJ}$. Przy tym założeniu, obliczone reakcje podpor wyrażą odpowiednie tangensy kątów nachylenia odkształconej (patrz „Mechanika Budowli“ Dr. Wierzbicki, Obliczenie ugięć sposobem momentów wtórnych). Dla środkowej podpory war-



tość reakcji obliczona z lewego i prawego przęsła musi być ta sama (ze znakiem przeciwnym) ze względu na ciągłość belki. Wyżej założone obciążenie fikcyjne $\frac{M}{EJ}$ da się przedstawić przez redukcję wykresu M .



Rys. I.

- l_1, l_2 — Długości przęseł.
- R_1, R_2, R_3 — Podpory.
- M_1, M_2, M_3 — Momenty odporowe.
- A_1, A_2 — Pola wykresów momentów belki wolno podpartej.

Należy każdą rzędną wykresu podzielić przez odpowiednią wartość EJ .

Ponieważ wartości M_1, M_2, M_3 są nieznanne, redukcję przeprowadzamy dla obciążenia jednostkowego, zakładając $M_1 = M_2 = 1$ i przyjmując skalę (dla każdego przęsła inną) $\frac{A}{l} = 1$. Otrzymane w ten sposób wykresy jednostkowe ($M_1 = M_2 = \frac{A_1}{l_1} = 1$) redukujemy następnie w stosunku $\frac{1}{EJ}$. Należy przy tem zauważyć, że wprowadzenie wykresów jednostkowych nie spowodowało żadnych przesunięć środków ciężkości pól wykresów momentów w kierunku poziomym.

Oczywiście, że całkowite wartości fikcyjnego obciążenia otrzymamy, mnożąc odpowiednio pola tych wykresów jednostkowych przez M_1, M_2 lub $\frac{A_1}{l_1}, \frac{A_2}{l_2}$.

Oznaczmy:

m_1 — średnią rzędną zredukowanego wykresu trójkąta M_1 .

n_1 — średnią rzędną zredukowanego wykresu trójkąta M_2 .

f_1 — średnią rzędną zredukowanego wykresu A_1 .

u_1 — współczynnik określający odległość środka ciężkości zredukowanego wykresu jednostkowego trójkąta M_1 od lewej podpory R_1 ($u_1 l_1 =$ tej odległości).

v_1 — współczynnik określający odległość środka ciężkości zredukowanego wykresu jednostkowego trójkąta M_2 od prawej podpory R_2 ($v_1 l_1 =$ tej odległości).

g_1 — współczynnik określający odległość środka ciężkości zredukowanego wykresu jednostkowego A_1 od lewej podpory R_1 ($g_1 l_1 =$ tej odległości).

Dla sąsiedniego przęsła l_2 odpowiednie wartości oznaczmy przez $m_2, n_2, f_2, u_2, v_2, g_2$.

Korzystając z wyżej poczynionych oznaczeń wyznaczamy wartość odpory środkowej z lewego przęsła:

$$\text{tg } \varphi = m_1 l_1 u_1 M_1 + n_1 l_1 (1 - v_1) M_2 + f_1 l_1 g_1 \frac{A_1}{l_1}$$

i z prawego przęsła:

$$-\text{tg } \varphi = m_2 l_2 (1 - u_2) M_2 + n_2 l_2 v_2 M_3 + f_2 (1 - g_2) l_2 \frac{A_2}{l_2}$$

dodając oba równania stronami i oznaczając:

$$\begin{aligned} C_1 &= m_1 u_1 (= n_1 v_1) & C_2 &= m_2 (1 - u_2) \\ D_1 &= n_1 (1 - v_1) & D_2 &= n_2 v_2 (= m_2 u_2) \\ F_1 &= f_1 g_1 & F_2 &= f_2 (1 - g_2) \end{aligned}$$

otrzymujemy ogólną formę równania trzech momentów:

$$(C_1 M_1 + D_1 M_2) l_1 + (C_2 M_2 + D_2 M_3) l_2 = - (F_1 A_1 + F_2 A_2) \quad . \quad (1)$$

3. Zależności współczynników równania trzech momentów.

Niektóre zależności współczynników równania trzech momentów są pomocne w wykreślnym rozwiązaniu.

Z określenia mamy:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{l} \int \frac{l-x}{EJl} dx = \frac{1}{l^2} \int \frac{l-x}{EJ} dx \\ n &= \frac{1}{l} \int \frac{x}{EJl} dx = \frac{1}{l^2} \int \frac{x}{EJ} dx \\ u &= \frac{\int \frac{x(l-x)}{EJl} dx}{l \int \frac{l-x}{EJl} dx} = \frac{1}{ml^3} \int \frac{x(l-x)}{EJ} dx \\ v &= \frac{\int \frac{x(l-x)}{EJl} dx}{l \int \frac{x}{EJl} dx} = \frac{1}{nl^3} \int \frac{x(l-x)}{EJ} dx = \frac{m}{n} u \\ f &= \frac{\int \frac{y}{EJ} dx}{\int y dx} = \frac{1}{A} \int \frac{y}{EJ} dx \\ g &= \frac{\int \frac{xy}{EJ} dx}{l \int \frac{y}{EJ} dx} = \frac{1}{Afl} \int \frac{xy}{EJ} dx \end{aligned}$$

gdzie y oznacza rzędne momentów belki wolnopodpartej (wykres A),
 x długości mierzone wzdłuż osi belki. Stąd:

$$C_1 = m_1 u_1 = \frac{1}{l_1^3} \int_0^{l_1} \frac{x(l_1 - x)}{E_1 J_1} dx = n_1 v_1$$

$$D_1 = n_1 (1 - v_1) = n_1 - C_1$$

$$C_1 + D_1 = n_1$$

$$F_1 = f_1 g_1 = \frac{1}{A_1 l_1} \int_0^{l_1} \frac{x_1 y_1}{E_1 J_1} dx$$

$$D_2 = n_2 v_2 = \frac{1}{l_2^3} \int_0^{l_2} \frac{x(l-x)}{E_2 J_2} dx = m_2 u_2$$

$$C_2 = m_2 (1 - u_2) = m_2 - D_2$$

$$C_2 + D_2 = m_2$$

$$F_2 = f_2 (1 - g_2) = \frac{1}{A_2 l_2} \int_0^{l_2} \frac{(l-x)y_2}{E_2 J_2} dx$$

$$\frac{C_1}{C_1 + D_1} = v_1 \qquad \frac{C_2}{C_2 + D_2} = 1 - u_2 \quad a$$

$$\frac{D_1}{D_1 + C_1} = 1 - v_1 \qquad \frac{D_2}{C_2 + D_2} = u_2 \quad b$$

$$\frac{F_1}{C_1 + D_1} = \frac{f_1 g_1}{n_1} \qquad \frac{F_2}{C_2 + D_2} = \frac{f_2 (1 - g_2)}{m_2} \quad c$$

4. Szczególne wypadki równania trzech momentów.

a) Belka o stałym momencie bezwładności w każdym przęśle
 (w sąsiednich rozpatrywanych przęsłach wartości J_1 i J_2) i stałym
 dla całej belki współczynnikiem sprężystości.

$$m_1 = \frac{1}{2JE} \qquad u_1 = \frac{1}{3} \qquad f_1 = \frac{1}{J_1 E} \qquad m_2 = \frac{1}{2J_2 E} \qquad u_2 = \frac{1}{3}$$

stąd:

$$(M_1 + 2 M_2) \frac{l_1}{J_1} + (M_3 + 2 M_2) \frac{l_2}{J_2} = -6 \left(\frac{A_1}{J_1} g_1 + \frac{A_2}{J_2} g_2 \right) \quad (1')$$

b) Belka o stałym w każdym przęśle momencie bezwładności i symetrycznym obciążeniu

$$g_1 = g_2 = \frac{1}{2}$$

stąd:

$$(M_1 + 2 M_2) \frac{l_1}{J_1} + (M_3 + 2 M_2) \frac{l_2}{J_2} = -3 \left(\frac{A_1}{J_1} + \frac{A_2}{J_2} \right) \quad (1'')$$

c) Belka o stałym momencie bezwładności

$$J_1 = J_2$$

stąd:

$$(M_1 + 2 M_2) l_1 + (M_3 + 2 M_2) l_2 = -6 (A_1 g_1 + A_2 g_2) \quad (1''')$$

d) Belka o stałym momencie bezwładności przy symetrycznym obciążeniu

$$g_1 = g_2 = \frac{1}{2}$$

stąd:

$$(M_1 + 2 M_2) l_1 + (M_3 + 2 M_2) l_2 = -3 (A_1 + A_2) \quad (1'''')$$

5. Punkty sprzężone.

Linja momentów podporowych musi oczywiście spełniać wyżej wyprowadzone równanie trzech momentów. Linji takich, które spełniają równanie trzech momentów może być nieskończenie wiele, (równanie jest dwukrotnie nieoznaczone).

Przeprowadźmy przez punkt P_1 Rys. 2 dowolnie obrany w obrębie przęsła l_1 linję, spełniającą równanie trzech momentów. Przez ten sam punkt przeprowadźmy drugą linję, która zadość czyni równaniu trzech momentów.

Niech punkt przecięcia tych obu linii w obrębie przęsła l_2 będzie P_2 . Łatwo możemy znaleźć związek między współrzędnymi obu punktów x_1, y_1 i x_2, y_2 .

Z geometrycznych zależności:

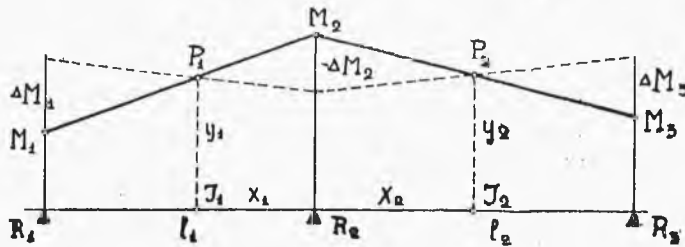
$$\Delta M_1 = - \Delta M_2 \frac{l_1 - x_1}{x_1} \quad \Delta M_3 = - \Delta M_2 \frac{l_2 - x_2}{x_2}$$

Uwzględniając te wartości, z równania trzech momentów otrzymujemy:

$$\left(-C_1 \frac{l_1 - x_1}{x_1} + D_1\right) l_1 + \left(C_2 - D_2 \frac{l_2 - x_2}{x_2}\right) l_2 = 0$$

Przekształcając:

$$\left(C_1 + D_1 - \frac{l_1}{x_1} C_1\right) l_1 = -\left(C_2 + D_2 - \frac{l_2}{x_2} C_2\right) l_2 \quad \dots \quad (2)$$



Rys 2.

podobnie z geometrycznych zależności otrzymujemy:

$$M_1 = \left(1 - \frac{l_1}{x_1}\right) M_2 + \frac{l_1}{x_1} y_1 \quad M_3 = \left(1 - \frac{l_2}{x_2}\right) M_2 + \frac{l_2}{x_2} y_2$$

stąd:

$$C_1 \frac{l_1^2 y_1}{x_1} + D_2 \frac{l_2^2 y_2}{x_2} = F_1 A_1 + F_2 A_2 \quad \dots \quad (3)$$

Równanie (2) wyraża związek między odcięciami punktów P_1 i P_2 , niezależnie od obciążenia i od rzędnych tych punktów. Punkty takie nazywamy stałymi.

Równanie (3) określa związek między rzędnymi w zależności od odciętych i pól momentów A_1 i A_2 .

Jeżeli znane jest położenie punktu P_1 to równania (2) i (3) pozwolą wyznaczyć punkt P_2 .

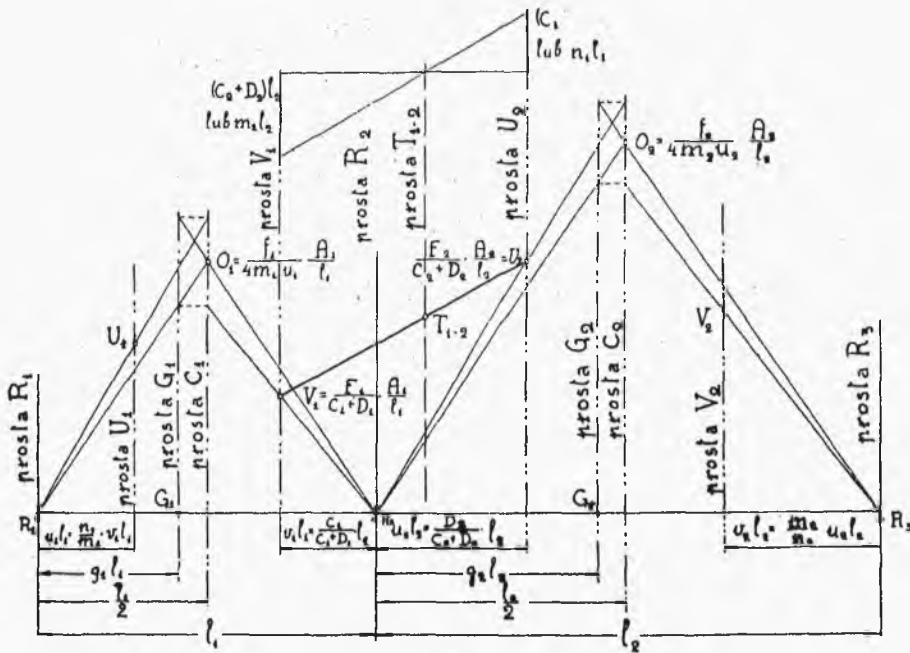
Punkty takie, których wzajemne położenie określone jest równaniami (2) i (3) nazywamy sprzężonymi.

Ponieważ w założeniu były to dwie linje dowolne przechodzące przez P_1 i spełniające równanie (1), to każda linja przechodząca przez P_1 i spełniająca równanie (1) musi przechodzić przez punkt P_2 . Jeżeli właściwa linja momentów przechodzi przez P_1 to przejdzie też przez P_2 . Z kształtu równań wynika, że zależność między obu punktami jest odwracalna i zamienna.

6. Wykreślne wyznaczanie punktów sprzężonych.

Poprowadźmy w każdym przęśle proste pionowe przez środek ciężkości zredukowanych wykresów trójkątów M_1 i M_2 . Nazwijmy przez U proste położone z lewej, a przez V proste położone z prawej strony w każdym przęśle Rys. 3. Linje U będą leżały w odległości $u l$ od lewych końców przęseł, a linje V w odległości $v l$ od prawych końców przęseł.

Między dwiema prostymi U i V sąsiednich przęseł prowadzimy prostą pionową T dzielącą odległość od V do U w stosunku odwrot-



Rys. 3.

nym do odcinków $n_1 l_1$ i $m_2 l_2$, lub co jest równoznaczne, odwrotnie proporcjonalnie do $(C_1 + D_1) l_1$ i $(C_2 + D_2) l_2$ (patrz: zależności współczynników równania trzech momentów).

Na prostych U i V umieszczamy odpowiednio punkty U i V o rzędnych:

$$U_1 = \frac{f_1 (1 - g_1) A_1}{m_1 l_1} \quad V_1 = \frac{f_1 g_1 A_1}{n_1 l_1}$$

Do wykreślnego wyznaczenia punktów U i V , służy punkt

$$O = \frac{f}{4 n v l} A = \frac{f}{4 m u l} A$$

Konstrukcja uwidoczniiona na rysunku. Łącząc punkty V_1, U_2 , otrzymujemy w przecięciu z prostą T punkt $T_{1,2}$. Zauważmy, że (patrz: zależności współczynników równania trzech momentów):

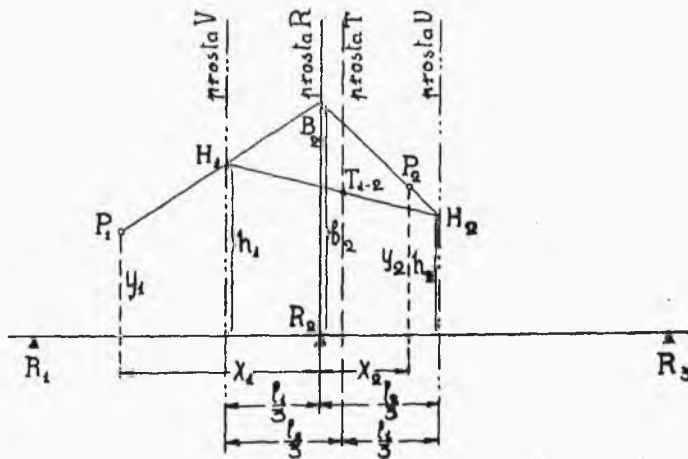
$$U_2 = \frac{f_2 (1 - g_2)}{m_2} \frac{A_2}{l_2} = \frac{F_2}{C_2 + D_2} \frac{A_2}{l_2}$$

$$V_1 = \frac{f_1 g_1}{n_1} \frac{A_1}{l_1} = \frac{F_1}{C_1 + D_1} \frac{A_1}{l_1}$$

Łatwo obliczyć rzędną:

$$T_{1,2} = \frac{F_1 A_1 + F_2 A_2}{(C_1 + D_1) l_1 + (C_2 + D_2) l_2}$$

Poprowadźmy przez punkt P_1 prostą dowolnego kierunku Rys. 4. Punkt przecięcia z prostą V niech będzie H_1 , a z prostą R (poprowadzoną pionowo przez podporę) punkt B_2 . Z H_1 poprowadźmy



Rys. 4.

prostą przez $T_{1,2}$ przecinającą prostą U sąsiedniego przęsła w punkcie H_2 . Łatwo dowieść, że punkt P_2 sprzężony z P_1 będzie leżał na odcinku $B_2 H_2$:

Jeżeli P_1, H_1 i B_2 leżą na jednej prostej, to:

$$h_1 = \frac{C_1}{C_1 + D_1} \frac{l_1}{x_1} y_1 + b \left(1 - \frac{C_1}{C_1 + D_1} \cdot \frac{l_1}{x_1} \right) \dots \quad (4)$$

Jeżeli B_2, P_2 i H_2 , leżą na jednej prostej, to:

$$h_2 = \frac{C_2}{C_2 + D_2} \frac{l_2}{x_2} y_2 + b \left(1 - \frac{D_2}{C_2 + D_2} \cdot \frac{l_2}{x_2} \right) \dots \quad (5)$$

Jeżeli $H_1, T_{1,2}$ i H_2 leżą na jednej prostej, to:

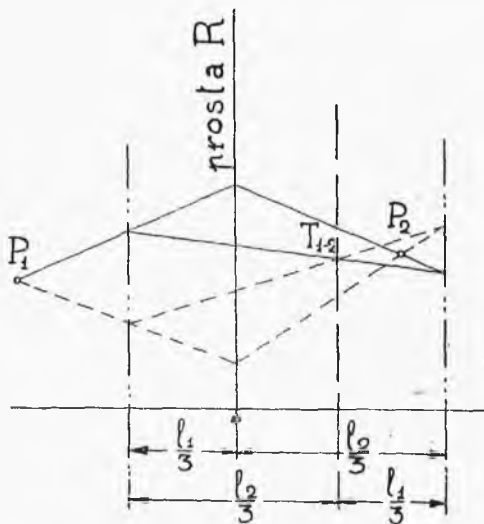
$$h_1 (C_1 + D_1) l_1 + h_2 (C_2 + D_2) l_2 = T_{1,2} [(C_1 + D_1) l_1 + (C_2 + D_2) l_2] \quad (6)$$

Podstawiając wartości h_1, h_2 do równania (6) otrzymamy:

$$\begin{aligned} & C_1 l_1^2 \frac{x_1}{y_1} + b \left[(C_1 + D_1) l_1 - \left(C_1 \frac{l_1^2}{x_1} \right) \right] + C_2 l_2^2 \frac{x_2}{y_2} + \\ & + b \left[(C_2 + D_2) l_2 - D_2 \frac{l_2^2}{x_2} \right] = T_{1,2} [(C_1 + D_1) l_1 + (C_2 + D_2) l_2] = \\ & = F_1 A_1 + F_2 A_2 \end{aligned}$$

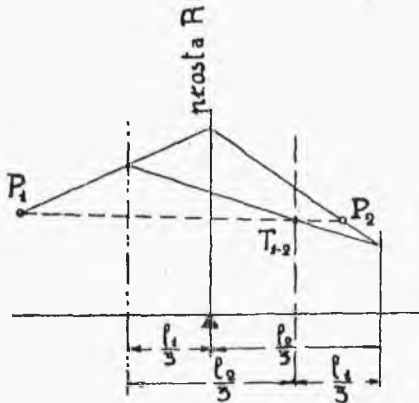
Równanie to spełnia zależność wyrażoną równaniem (2) i (3) [skreślając wyrażenia ze współczynnikiem b na zasadzie równania (2) otrzymujemy równanie (3)], czyli współrzędne x_1, y_1 i x_2, y_2 otrzymane z konstrukcji geometrycznej są współrzędnymi punktów sprzężonych.

Ponieważ rozumowanie zostało przeprowadzone dla dowolnie obranego wykresu $P_1 H_1 B_2 H_2$ (dowolny kierunek $P_1 H_1$), to każdy inny wykres przechodzący przez P_1 musi przecinać poprzedni w punkcie P_2 .

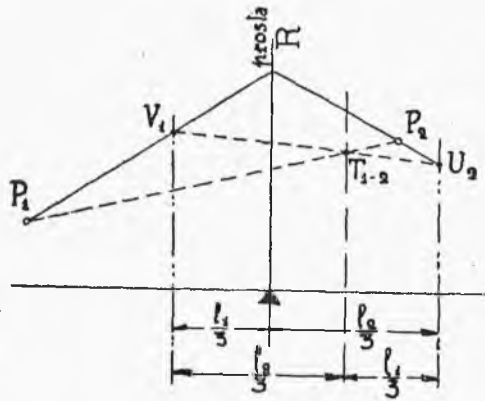


Rys. 5.

Jeżeli drugi wykres poprowadzimy tak, aby początkowy odcinek przechodził przez $T_{1,2}$, to wykres ten zredukuje się do prostej. Stąd: prosta $P_1 T_{1,2}$ przetnie każdy wykres w punkcie P_2 . Rys. 6.

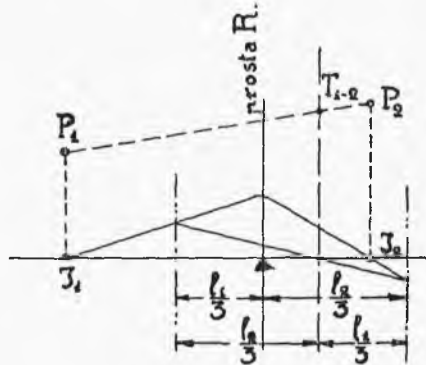


Rys. 6a.



Rys. 6b.

Ten sam wykres może służyć do wyznaczania punktów stałych, ponieważ spełnia zależność (2). Należy tylko założyć $y_1 = 0$ i $T_{1,2} = 0$. Rys. 7.



Rys. 7.

7. Zastosowanie metody punktów sprzężonych do wyznaczania momentów odporowych belek ciągłych.

Jeżeli znamy jeden punkt linii momentów, to metodą punktów sprzężonych możemy wyznaczyć kolejno w każdym przęśle po jednym punkcie leżącym na tej linii. Dwa znane punkty linii momentów pozwolą wyznaczyć w każdym przęśle po dwa punkty tej linii,

co wystarczy całkowicie do wyznaczenia wykresu momentów odporowych.

Dla belek ciągłych z końcami podpartymi przegubowo znanymi punktami, przez które przechodzi linja momentów, są oba końce belki ($M = 0$). Te punkty służą nam w tym wypadku, jako wyjściowe dla wyznaczenia z nimi sprzężonych punktów linii momentów.

Dla belek ciągłych z zamocowanymi końcami dwa takie punkty łatwo wyznaczyć, posługując się następującem rozumowaniem: uważajmy zamocowany koniec belki jako podparty przegubowo z momentem odporowym M_1 i dodajmy wyobrażalne przęsło o długości $l_0 = 0$ i momencie na końcu $M_0 = 0$. Dla tego wyobrażalnego przęsła i sąsiedniego rzeczywistego napiszmy równanie trzech momentów:

$$(C_1 M_1 + D_1 M_2) l_1 = - F_1 A_1 \quad \dots \quad (8)$$

gdzie:

$$C_1 = m_1 (1 - u_1) \quad D_1 = n_1 v_1 \quad F_1 = f_1 (1 - g_1)$$

Odlóżmy Rys. 12 na prostej U punkt U_1 o rzędnej:

$$U_1 = \frac{f_1 (1 - g_1) A_1}{m_1 l_1}$$

dowodziemy, że punkt ten leży na linii momentów. Z geometrycznych zależności wynika:

$$\frac{u_1 l_1}{l_1} = \frac{U_1 - M_1}{M_2 - M_1} \quad U_1 = u_1 M_2 + M_1 (1 - u_1) \quad \dots \quad (9)$$

z równania (8):

$$M_2 = - \frac{E_1 A_1}{l_1 D_1} - \frac{C_1 M_1}{D_1} \quad \dots \quad (10)$$

Podstawiając (10) do równania (9), a zamiast współczynników C_1, D_1, F_1 ich oznaczenia otrzymujemy:

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1 \left[- \frac{f_1 (1 - g_1) A_1}{m_1 u_1 l_1} - \frac{m_1 (1 - u_1) M_1}{m_1 u_1} \right] + M_1 (1 - u_1) = \\ &= \frac{f_1 (1 - g_1) A_1}{m_1 l_1} \end{aligned}$$

dowodzi to, że wartości U_1 spełnia równanie trzech momentów to znaczy punkt U_1 leży na linii momentów. Analogiczny punkt znajdziemy przy drugim zamocowanym końcu belki. Punkty te będą

punktami wyjściowymi dla wyznaczenia z nimi sprzężonych punktów linii momentów.

Przykład 1. Belka trójprzęsłowa, moment bezwładności stały na całej długości belki, końce zamocowane przegubowo, obciążenie symetryczne w każdym przęśle, wymiary przęseł i wartości obciążenia wskazane na rysunku. Rys. 8.

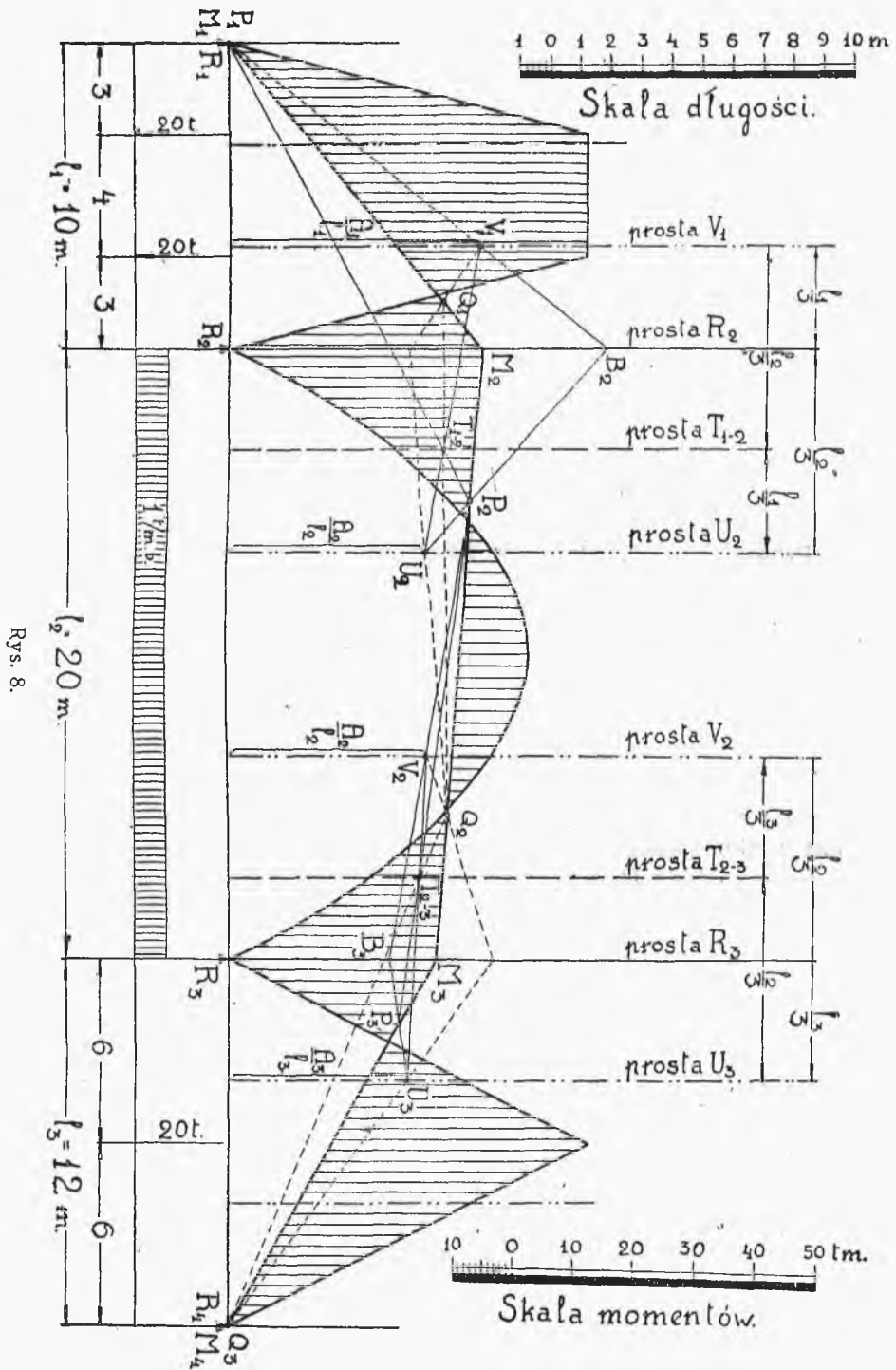
Traktując przęsła, jako belki wolnopodparte, rysujemy wykresy momentów gnących A_1, A_2, A_3 . Wyznaczamy: proste U w odległości $\frac{l}{3}$ od lewych końców przęseł i proste V w odległości $\frac{l}{3}$ od prawych końców przęseł. Na prostych U i V odkładamy średnie rzędne wykresów A_1, A_2, A_3 , otrzymując w ten sposób punkty:

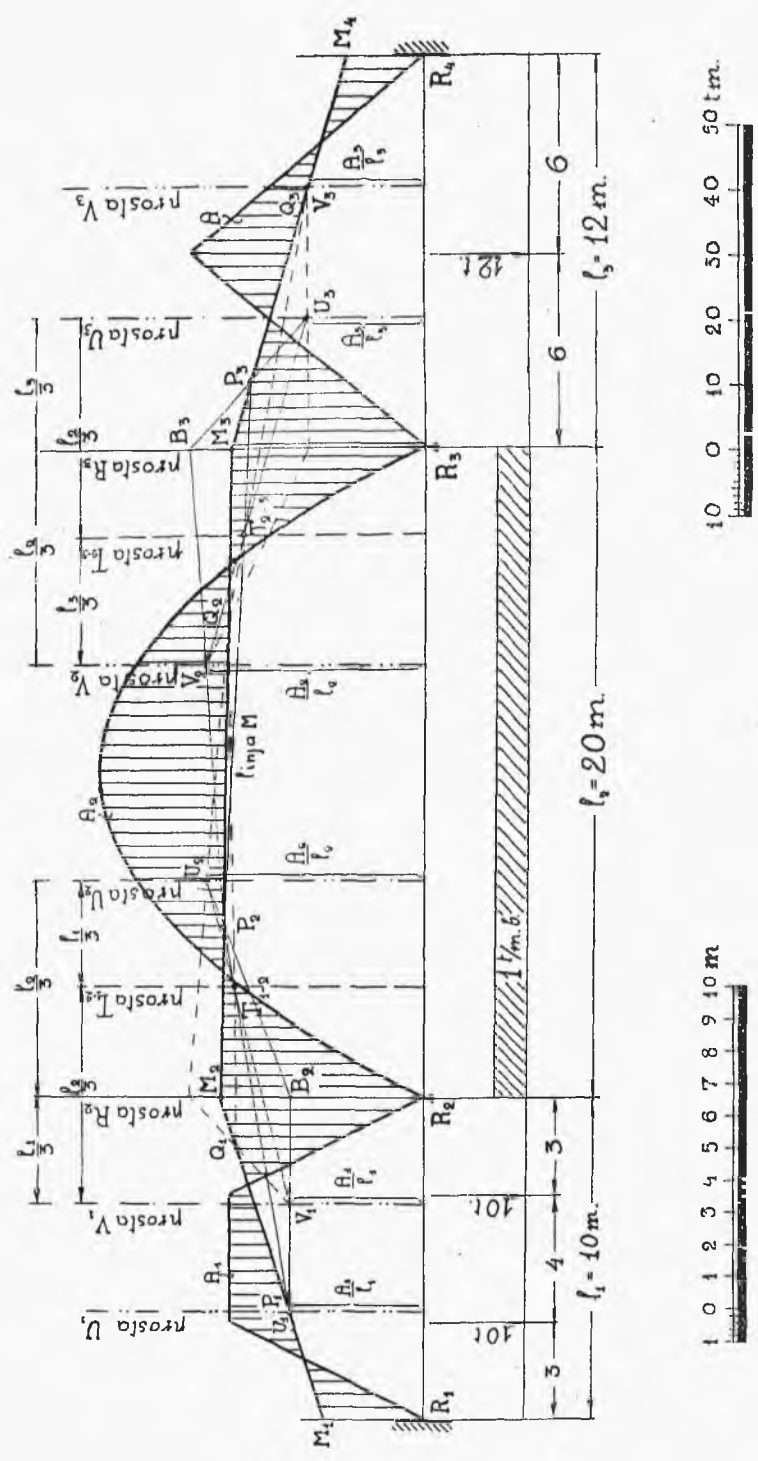
$$U_1 = V_1 = \frac{A_1}{l_1} \quad U_2 = V_2 = \frac{A_2}{l_2} \quad U_3 = V_3 = \frac{A_3}{l_3}$$

Prowadzimy prostą $T_{1,2}$ w odległości $\frac{l_2}{3}$ od prostej V_1 i $\frac{l_1}{3}$ od prostej U_2 . Podobnie poprowadzimy prostą $T_{2,3}$ w odległości $\frac{l_2}{3}$ od prostej U_3 i $\frac{l_3}{3}$ od prostej V_2 . Łącząc punkty V_1 i U_2 w przecięciu z prostą $T_{1,2}$ znajdujemy punkt $T_{1,2}$. Analogicznie, łącząc punkty V_2 i U_3 wyznaczamy punkt $T_{2,3}$. Traktując punkt R_1 jako znany punkt linii momentów P_1 , wyznaczamy w sąsiednim przęśle punkt z nim sprzężony P_2 : przez P_1, V_1 poprowadzimy prostą do przecięcia z prostą R_2 w punkcie B_2, B_2 łączymy z U_2 . Prosta $P_1 T_{1,2}$ w przecięciu z $B_2 U_2$ wyznaczy szukany punkt P_2 . Analogicznie wyznaczamy punkt P_3 sprzężony z P_2 . W podobny sposób, uważając punkt R_1 jako znany punkt linii momentów Q_3 znajdujemy punkty Q_1 i Q_2 . Przez wyznaczone punkty prowadzimy linię momentów podporowych M . Jeżeli konstrukcja była wykonana dokładnie, to odcinki linii momentów wyznaczone w poszczególnych przęsłach przetną się na prostych R .

Zakreskowane pole na rysunku przedstawia wykres momentów gnących rozpatrywanej belki.

Przykład 2. Belka ciągła trójprzęsłowa, moment bezwładności stały na całej długości belki, końce zamocowane nieruchomo, obciążenie symetryczne w każdym przęśle, wymiary przęseł i wartości obciążenia wskazane na rysunku. Rys. 9.





Rys. 9.

Linje U, V, T i punkty $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3, T_{1,2}$ wyznaczamy jak w poprzednim przykładzie. Traktując punkt U_1 , jako pierwszy punkt linii momentów P_1 wyznaczamy jak poprzednio punkty P_2 i P_3 . Podobnie wychodząc z punktu V_3 otrzymujemy punkty Q_2 i Q_1 . Łącząc wyznaczone punkty otrzymujemy linię momentów podporowych.

Przykład 3. Belka ciągła trójprzęsłowa, moment bezwładności stały na całej długości belki, jeden z końców zamocowany nieruchomo, drugi przegubowo, obciążenie niesymetryczne, wymiary przęseł i wartości obciążenia wskazane na rysunku. Rys. 10.

Konstrukcja linii U i V , jak w poprzednim przykładzie. Prowadzimy proste C przez środki przęseł oraz proste G przez środki ciężkości wykresów momentów gnących A_1, A_2, A_3 . Punkty U_1 i V_1 wyznaczamy korzystając z pomocniczego punktu O_1 o rzędnej $\frac{A_1}{l_1}$.

Prowadząc prostą $O_1 R_1$ do przecięcia z prostą G_1 znajdujemy rzędną punktu V_1 , prowadząc prostą $O_1 R_2$ do przecięcia z prostą G_1 znajdujemy U_1 . Analogicznie wyznaczamy punkty U_2, V_2 i U_3, V_3 .

Dalsze postępowanie jak w przykładzie poprzednim.

Przykład 4. Belka trójprzęsłowa, moment bezwładności w każdym przęśle stały (wartości J_1, J_2, J_3), jeden z końców zamocowany nieruchomo drugi przegubowo, obciążenie niesymetryczne, wymiary przęseł i wartości obciążenia wskazane na rysunku. Rys. 11.

Proste U, V, C, G , punkty $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3$ wyznaczamy jak w przykładzie poprzednim. Prostą $T_{1,2}$ prowadzimy tak, aby odległość od prostej V_1 do prostej U_2 została podzielona w stosunku $\frac{l_2}{J_2} : \frac{l_1}{J_1}$.

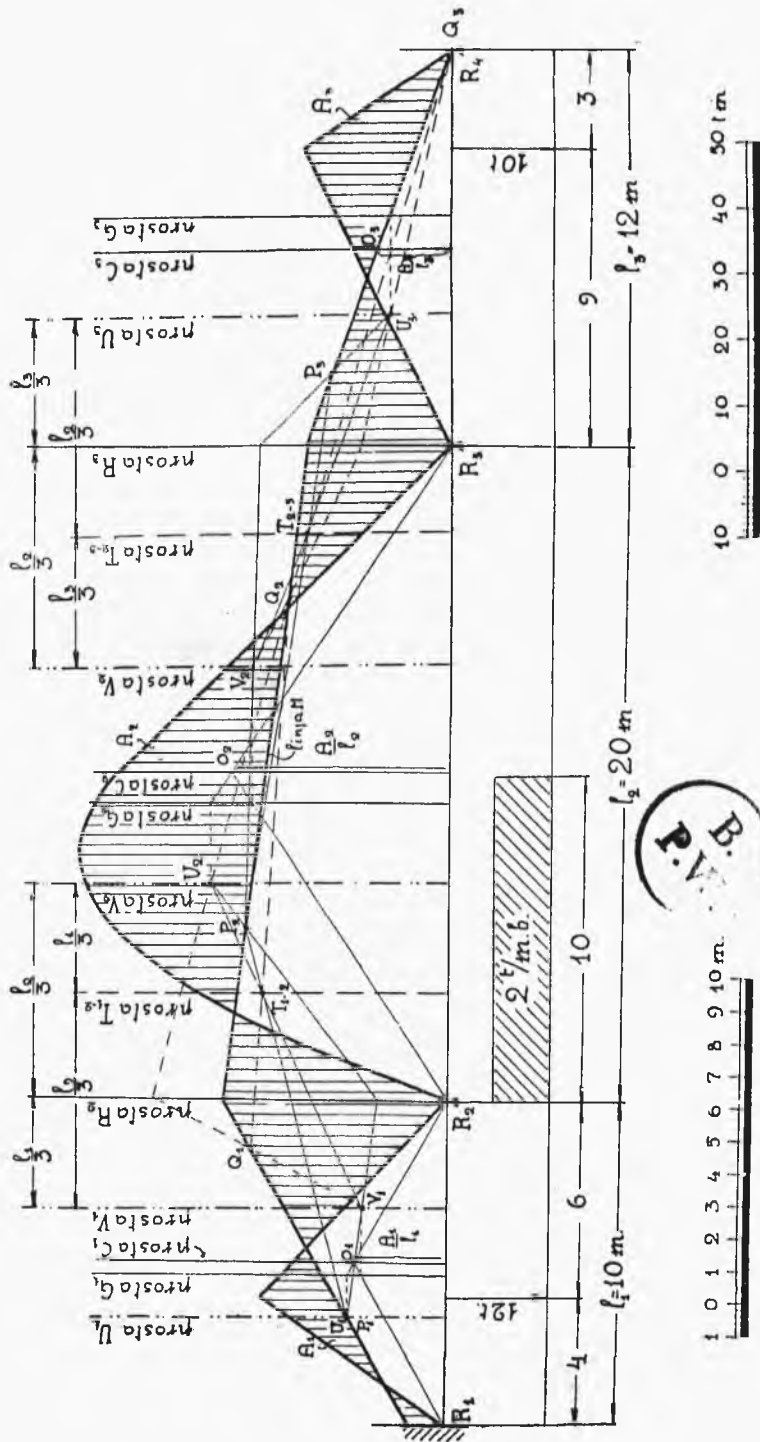
Analogicznie wyznaczamy prostą $T_{2,3}$.

Dalsza konstrukcja jak w przykładach poprzednich.

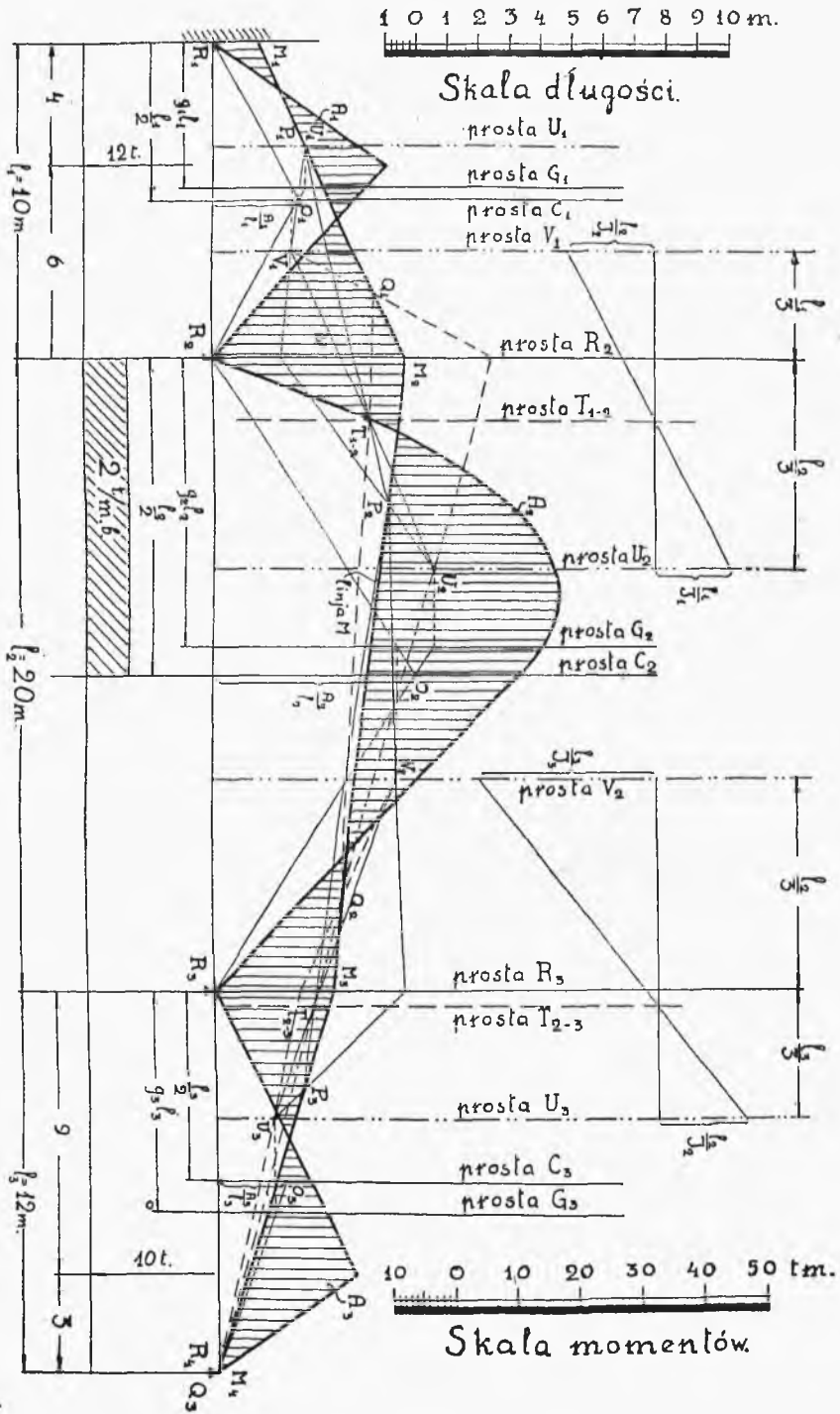
Przykład 5. Belka ciągła dwuprzęsłowa. Kształt belki o zmiennym momencie bezwładności, wartości obciążenia wskazane na rysunku. Rys. 12.

Obliczamy wartości m, n, f (patrz pt. 2). Obliczenie zestawiamy w poniższej tabliczce.

Belkę dzielimy na odcinki 0,5 m. Rubryka 1 zawiera odległości od środków tych odcinków do lewych podpór Rubryka 2 zawiera odpowiednie wysokości belki. Rubryka 3, zawiera momenty bezwładności, przy założeniu szerokości = 1. Rubryka 4 zawiera rzędne zredukowanego (jednostkowego) wykresu trójkąta M_1 . Rubryka 5 zredukowane rzędne tegoż trójkąta. Rubryka 6 zawiera

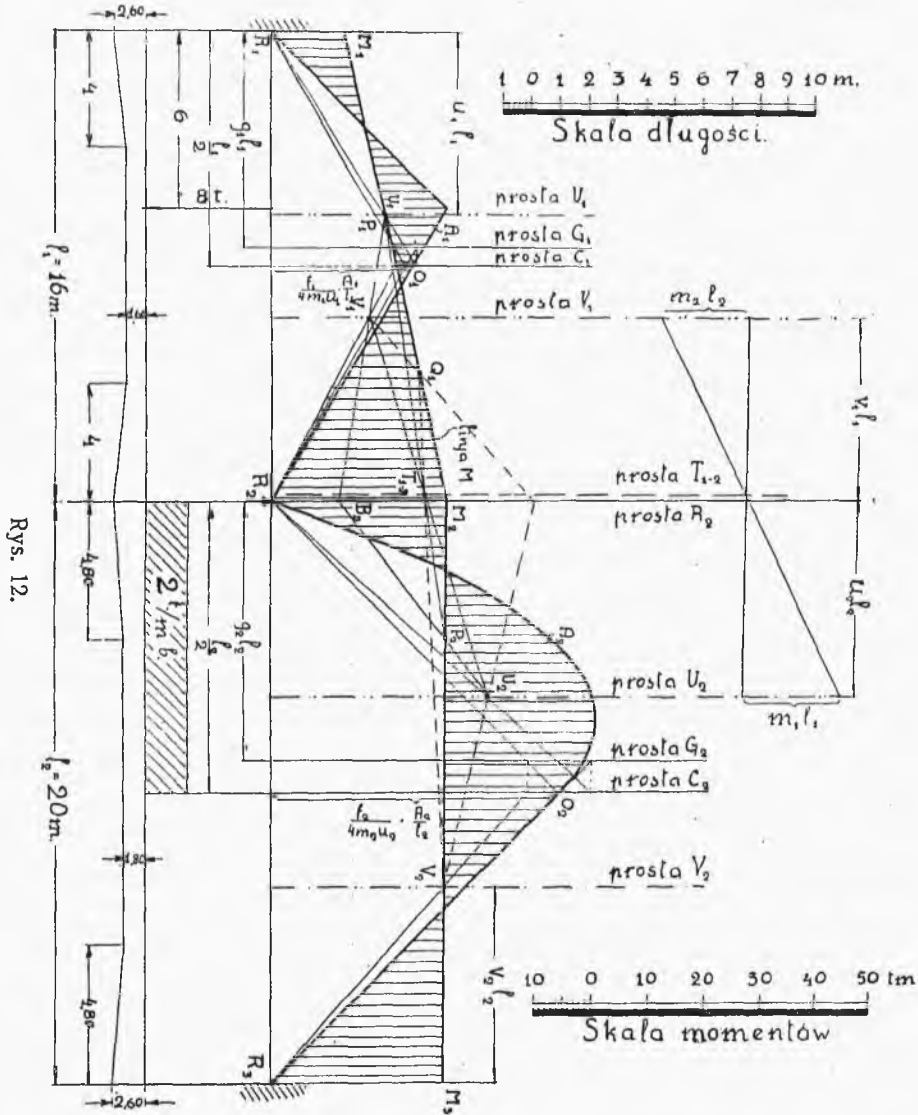


Rys. 10.



Rys. 11.

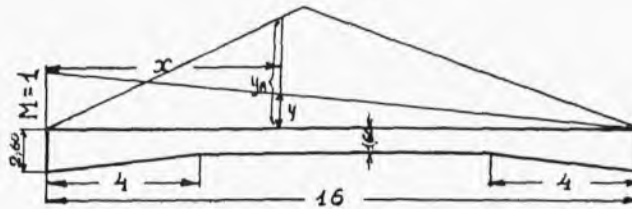
momenty statyczne odcinków pola zredukowanego wykresu trójkąta jednostkowego; suma rubryki 6 wyznacza moment statyczny pola tego wykresu. Rubryka 7 zawiera rzędne wykresu A w skali $\frac{A}{l} = 1$.



Rys. 12.

Rubryka 8 zawiera rzędne zredukowanego wykresu A . Rubryka 9 zawiera momenty statyczne odcinków pola zredukowanego wykresu A , suma rubryki 9 wyznacza moment statyczny pola zredukowanego wykresu A .

PRZESŁO 1.

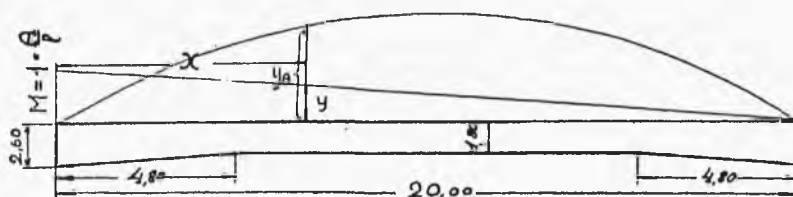


x	d	$J = \frac{d^3}{12}$	y	$\frac{y}{J}$	$\frac{y \cdot x}{J}$	y_A	$\frac{y_A}{J}$	$\frac{y_A \cdot x}{J}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,25	2,54	1,363	0,985	0,722	0,184	0,083	0,061	0,015
0,75	2,41	1,168	0,954	0,817	0,613	0,250	0,149	0,112
1,25	2,29	1,001	0,923	0,923	1,353	0,416	0,415	0,519
1,75	2,16	0,893	0,892	1,000	1,750	0,583	0,653	1,143
2,25	2,04	0,707	0,860	1,218	2,740	0,750	1,071	2,410
2,75	1,91	0,581	0,829	1,426	3,920	0,916	1,576	4,334
3,25	1,79	0,477	0,797	1,670	5,425	1,083	2,645	8,596
3,75	1,66	0,382	0,766	2,005	7,520	1,249	3,270	12,262
4,25	1,60	0,341	0,735	2,155	9,170	1,416	4,151	17,641
4,75	1,60	0,341	0,703	2,061	9,800	1,583	4,642	22,049
5,25	1,60	0,341	0,672	1,970	10,320	1,749	5,125	26,906
5,75	1,60	0,341	0,640	1,880	10,800	1,916	5,620	32,315
6,25	1,60	0,341	0,609	1,785	11,150	1,950	5,720	35,750
6,75	1,60	0,341	0,578	1,695	11,430	1,850	5,422	36,598
7,25	1,60	0,341	0,547	1,602	11,620	1,750	5,130	37,192
7,75	1,60	0,341	0,516	1,512	11,720	1,650	4,840	37,510
8,25	1,60	0,341	0,484	1,420	11,710	1,550	4,549	37,187
8,75	1,60	0,341	0,453	1,330	11,620	1,450	4,250	37,187
9,25	1,60	0,341	0,422	1,235	11,420	1,350	3,960	36,630
9,75	1,60	0,341	0,390	1,142	11,140	1,250	3,665	35,734
10,25	1,60	0,341	0,359	1,082	11,100	1,150	3,370	34,542
10,75	1,60	0,341	0,328	0,961	10,320	1,050	3,080	33,110
11,25	1,60	0,341	0,297	0,872	9,800	0,950	2,788	31,365
11,75	1,60	0,341	0,266	0,780	9,170	0,850	2,492	29,281
12,25	1,66	0,382	0,234	0,613	7,520	0,750	1,965	24,071
12,75	1,79	0,477	0,303	0,455	5,820	0,650	1,362	17,365
13,25	1,91	0,581	0,172	0,296	3,923	0,550	0,955	12,654
13,75	2,04	0,707	0,141	0,199	2,760	0,450	0,637	8,759
14,25	2,16	0,893	0,109	0,123	1,753	0,350	0,392	5,586
14,75	2,29	1,001	0,078	0,078	1,150	0,250	0,250	3,687
15,25	2,41	1,168	0,047	0,040	0,610	0,150	0,127	1,937
15,75	2,54	1,363	0,016	0,012	0,189	0,050	0,037	0,583
				35,079	219,520		84,369	625,372

$$m_1 = n_1 = \frac{35,079 \times 0,5}{16} = 1,096 \quad u_1 = v_1 = \frac{219,520}{16 \times 35,079} = 0,391$$

$$f_1 = \frac{84,369 \times 0,5}{16} = 2,636 \quad g_1 = \frac{625,372}{16 \times 84,369} = 0,463$$

PRZESŁO 2.



x	d	$J = \frac{d^3}{12}$	y	$\frac{y}{J}$	$\frac{y \cdot x}{J}$	y_A	$\frac{y_A}{J}$	$\frac{y_A \cdot x}{J}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,25	2,56	1,398	0,985	0,707	0,177	0,111	0,079	0,020
0,75	2,47	1,255	0,962	0,766	0,574	0,321	0,255	0,191
1,25	2,39	1,137	0,937	0,824	1,030	0,516	0,454	0,567
1,75	2,31	1,027	0,912	0,888	1,554	0,696	0,678	1,186
2,25	2,22	0,911	0,887	0,923	2,189	0,861	0,945	2,126
2,75	2,14	0,816	0,862	1,056	2,904	1,011	1,239	3,407
3,25	2,06	0,728	0,837	1,150	3,852	1,146	1,574	5,115
3,75	1,98	0,647	0,812	1,255	4,806	1,266	1,956	7,335
4,25	1,89	0,562	0,787	1,400	5,950	1,371	2,439	10,366
4,75	1,81	0,494	0,762	1,542	7,324	1,461	2,957	14,046
5,25	1,80	0,486	0,737	1,516	7,959	1,536	3,160	16,590
5,75	1,80	0,486	0,712	1,465	8,424	1,596	3,284	18,883
6,25	1,80	0,486	0,687	1,413	8,831	1,641	3,376	21,100
6,75	1,80	0,486	0,662	1,362	9,193	1,671	3,438	23,206
7,25	1,80	0,486	0,637	1,311	9,505	1,686	3,469	25,150
7,75	1,80	0,486	0,612	1,259	9,757	1,686	3,469	26,885
8,25	1,80	0,486	0,587	1,209	9,974	1,671	3,438	28,363
8,75	1,80	0,486	0,562	1,156	10,115	1,641	3,376	29,540
9,25	1,80	0,486	0,537	1,105	10,221	1,596	3,284	30,377
9,75	1,80	0,486	0,512	1,053	10,267	1,536	3,160	30,810
10,25	1,80	0,486	0,487	1,002	10,270	1,462	3,008	30,832
10,75	1,80	0,486	0,462	0,951	10,223	1,387	2,854	30,680
11,25	1,80	0,486	0,437	0,899	10,113	1,312	2,700	30,375
11,75	1,80	0,486	0,412	0,848	9,964	1,237	2,545	29,904
12,25	1,80	0,486	0,387	0,796	9,751	1,162	2,391	29,290
12,75	1,80	0,486	0,362	0,745	9,499	1,087	2,237	28,522
13,25	1,80	0,486	0,337	0,693	9,182	1,012	2,082	27,586
13,75	1,80	0,486	0,312	0,642	8,827	0,937	1,928	26,510
14,25	1,80	0,486	0,287	0,590	8,407	0,862	1,774	25,279
14,75	1,80	0,486	0,262	0,539	7,950	0,787	1,619	23,880
15,25	1,81	0,494	0,237	0,480	7,320	0,712	1,441	21,975
15,75	1,89	0,562	0,212	0,377	5,938	0,637	1,133	17,845
16,25	1,98	0,647	0,187	0,289	4,696	0,562	0,869	14,121
16,75	2,06	0,728	0,162	0,222	3,718	0,487	0,669	11,206
17,25	2,14	0,816	0,137	0,168	2,898	0,412	0,505	8,711
17,75	2,22	0,911	0,112	0,123	2,183	0,337	0,370	6,567
18,25	2,31	1,027	0,087	0,084	1,533	0,262	0,255	4,653
18,75	2,39	1,137	0,062	0,054	1,012	0,187	0,164	3,073
19,25	2,47	1,255	0,037	0,029	0,558	0,112	0,089	1,173
19,75	2,56	1,398	0,012	0,008	0,158	0,037	0,026	0,513
				32,948	248,806		74,689	667,968

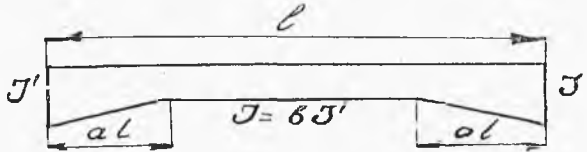
$$m_2 = n_2 = \frac{32,948 \times 0,5}{20} = 0,824 \quad u_2 = v_2 = \frac{248,806}{20 \times 32,948} = 0,377$$

$$f_2 = \frac{74,689 \times 0,5}{20} = 1,867 \quad g_2 = \frac{667,968}{20 \times 74,689} = 0,447$$

Korzystając z wyżej obliczonych współczynników, prowadzimy proste U w odległości ul od lewych końców przęseł, proste V w odległości vl od prawych końców przęseł, proste G w odległości gl od lewych końców przęseł, proste C przez środki przęseł. Punkty U i V wyznaczamy posługując się punktem $O = \frac{f}{4m} \frac{A}{l}$

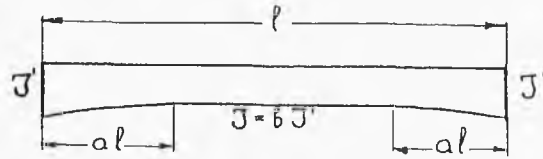
jak na rysunku. Prosta $T_{1,2}$ dzieli odległości od prostej V_1 do prostej U_2 w stosunku $m^2 l_2 : n_1 l_1$. Dalsza konstrukcja pozostaje jak w poprzednich przykładach.

Uwaga. Następujące tabliczki ułatwią obliczenie współczynników dla belek symetrycznych z ukosami prostymi lub parabolicznymi.



b	a =				
	0,25	0,30	0,35	0,40	0,50
0,05	0,425	0,434	0,441	0,444	0,434
	0,313	0,276	0,238	0,201	0,126
0,06	0,422	0,431	0,437	0,440	0,430
	0,318	0,282	0,245	0,209	0,136
0,08	0,416	0,425	0,430	0,431	0,422
	0,327	0,292	0,258	0,223	0,154
0,10	0,412	0,419	0,424	0,425	0,416
	0,335	0,302	0,269	0,236	0,170
0,12	0,407	0,415	0,419	0,420	0,410
	0,342	0,310	0,279	0,248	0,184
0,15	0,402	0,408	0,412	0,412	0,403
	0,352	0,322	0,292	0,263	0,203
0,20	0,395	0,400	0,402	0,402	0,394
	0,366	0,339	0,312	0,286	0,232
0,30	0,382	0,385	0,387	0,387	0,380
	0,390	0,367	0,346	0,324	0,279
0,60	0,356	0,360	0,358	0,357	0,359
	0,444	0,439	0,422	0,411	0,392
1,00	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333
	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500

Górne wartości stanowią $v = u$
dolne podzielone przez $J, m = n$



b	a =				
	0,25	0,30	0,35	0,40	0,50
0,05	0,406	0,415	0,423	0,428	0,433
	0,359	0,331	0,302	0,274	0,218
0,06	0,403	0,412	0,419	0,425	0,429
	0,364	0,336	0,309	0,282	0,227
0,08	0,398	0,407	0,413	0,418	0,422
	0,372	0,346	0,320	0,295	0,243
0,10	0,395	0,403	0,408	0,413	0,416
	0,378	0,354	0,330	0,306	0,257
0,12	0,392	0,398	0,404	0,408	0,411
	0,385	0,362	0,338	0,316	0,270
0,15	0,387	0,393	0,399	0,402	0,405
	0,393	0,371	0,350	0,328	0,286
0,20	0,381	0,386	0,390	0,393	0,395
	0,404	0,385	0,366	0,392	0,308
0,30	0,371	0,375	0,378	0,380	0,382
	0,422	0,407	0,392	0,376	0,345
0,60	0,351	0,353	0,354	0,355	0,355
	0,462	0,454	0,447	0,439	0,424
1,00	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333
	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500

Górne wartości stanowią $v = u$

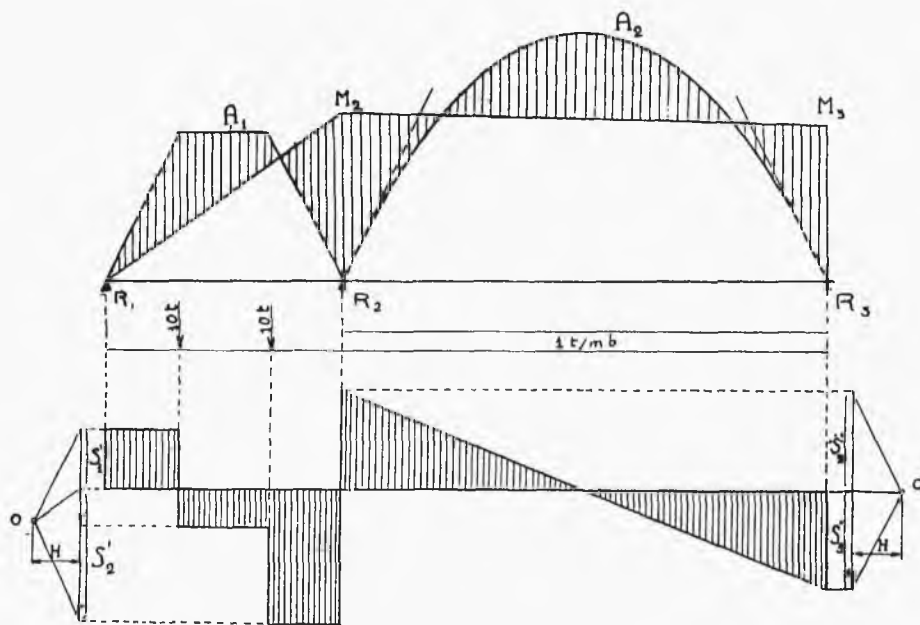
dolne podzielone przez $J, m = n$.

8. Wykreślne wyznaczenie sił tnących i reakcyj podpór.

Po wyznaczeniu linii momentów podporowych, określenie reakcyj podpór i sił tnących nie nastęrcza żadnych trudności.

Konstrukcja wykreślna wskazana na Rys. 13. Dla każdego przęśła w biegunowym wieloboku sił, odpowiadającym wykresowi momentów belki wolnopodpartej, prowadzimy równoległą do odpowiedniego odcinka linii momentów odporowych. Równoległa ta, podzieli obciążenie w biegunowym wieloboku sił na dwie części, które wyznaczają siły tnące na końcach przęśła. Wartość reakcji

dla każdej podpory otrzymamy jako sumę algebraiczną sił tnących obliczonych z dwóch sąsiednich przęseł. Proste poziome poprowadzone przez punkty podziału obciążenia w biegunowym wieloboku sił, przecinają pionowe sił, wyznaczając wykres sił tnących.



Rys. 13.

9. Zastosowanie metody punktów sprzężonych do wyznaczenia dodatkowych momentów powstałych przez obniżenie podpór belki ciągłej.

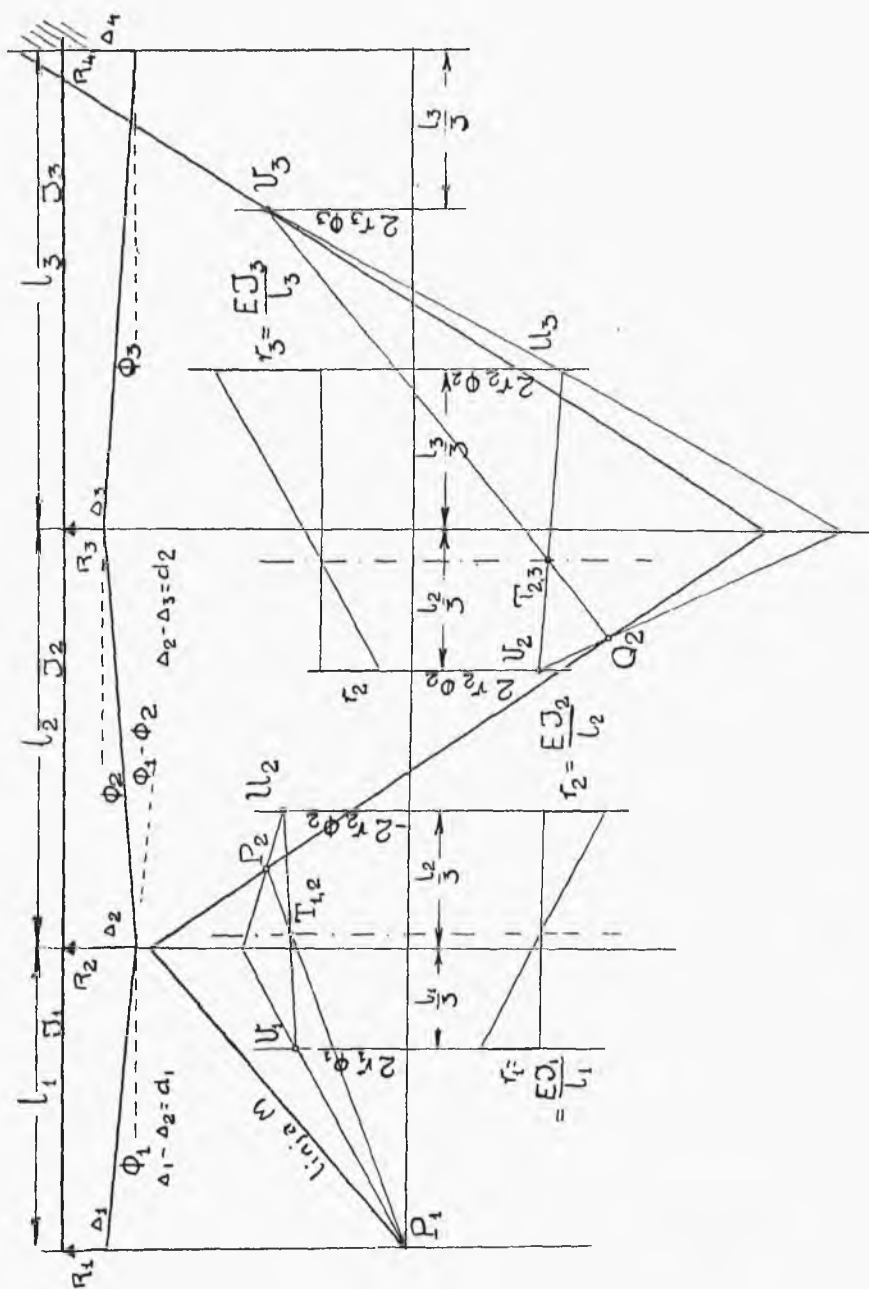
Niech d_1 Rys. 14 będzie obniżeniem prawej podpory przęsla l_1 w stosunku do lewej podpory. Nachylenie tego przęsla wyrazi się wtedy

$\Phi_1 = \frac{d_1}{l_1}$. Podobnie dla sąsiedniego przęsla możemy napisać $\Phi_2 =$

$\frac{d_2}{l_2}$. Rozumując analogicznie jak przy wyprowadzeniu twierdzenia

o trzech momentach, otrzymamy:

$$(C_1 M_1 + D_1 M_2) l_1 + (C_2 M_2 + D_2 M_3) l_2 = -(\Phi_1 - \Phi_2) \quad (11)$$



Rys. 14.

Lub w wypadku stałych momentów bezwładności dla każdego przęsła i stałego E dla całej belki:

$$(M_1 + 2 M_2) \frac{l_1}{J_1} + (M_3 + 2 M_2) \frac{l_2}{J_2} = -6 (\Phi_1 - \Phi_2) \quad (11')$$

przy $J_1 = J_2$:

$$(M_1 + 2 M_2) l_1 + (M_3 + 2 M_2) l_2 = -6 E J (\Phi_1 - \Phi_2) \quad (11'')$$

Równania te są równaniami trzech momentów belki ciągłej powstałych przez obniżenie podpór. Lewa strona jest identyczna z uprzednio wyprowadzoną, prawa zawiera wyrazy obniżenia podpór zamiast obciążenia. Wynika stąd, że do wyznaczenia momentów M_1, M_2, M_3 może być zastosowana ta sama konstrukcja wykreslna, jeżeli rzędną punktu $T_{1,2}$ określimy: $T_{1,2} = 2 \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{e_1 + e_2}$ gdzie e_1 i e_2 są „stałymi gięcia“ odpowiednich przęseł:

$$e_1 = \frac{l_1}{E J_1} \quad e_2 = \frac{l_2}{E J_2}$$

Rzędne punktów U i V określimy odpowiednio:

$$U = -2 \frac{\Phi}{e} \quad V = +2 \frac{\Phi}{e}$$

Linja $T_{1,2}$ przechodzi, dzieląc odległość od V_2 do U_1 w stosunku $e_2 : e_1$. Konstrukcja wykreslna wskazana na rys. 14.

10. Zastosowanie metody punktów sprzężonych do rozwiązań ram sztywnych.

Rozwiązanie ram sztywnych polega na sprowadzeniu rozpatrywania tych konstrukcyj do rozwiązań belek ciągłych.

I. Ramy proste, w kształcie symetrycznych portali prostokątnych, przy symetrycznym obciążeniu możemy traktować jako belki ciągłe, umieszczając podpory w miejscach węzłów. Rozwiązanie takich ram nie będzie się niczem różniło od wyżej rozpatrzonego rozwiązania belek ciągłych.

Przykład 1. Rys. 15. Rama prostokątna. Słupy zamocowane przegubowo. Obciążenie symetryczne dwoma siłami skupionymi. Rozwiązanie graficzne wskazane na rysunku (porównaj rys. 8).

Przykład 2. Rama prostokątna. Słupy zamocowane nieruchomo. Obciążenie symetryczne ciągłe. Rozwiązanie graficzne wskazane na rysunku. Rys. 16 (porównaj rys. 9).

II. Przy niesymetrycznym obciążeniu lub niesymetrycznej konstrukcji Rys. 20, traktując ramę jako belkę ciągłą, pomijamy dodatkowe momenty powstałe z powodu przesunięcia środkowego pręta przy odkształceniu ramy. Dla dokładnych obliczeń należy wprowadzić poprawki, które można obliczyć, jeżeli zauważymy, że przesunięcia boczne środkowego pręta, można traktować jako obniżenie środkowych podpór belki ciągłej.

Zakładając dowolne równe obniżenie podpór, znajdujemy punkty przegięcia w każdym przęśle (punkty w których moment powstały z powodu obniżenia = 0).

Położenie tych punktów jest niezależne od wielkości założonego obniżenia (przesunięcia bocznego). Stąd wynika, że punkty te są rzutami takich punktów linii momentów, na które obniżenie podpór (przesunięcia boczne) nie wpływa i przez które musi przechodzić poprawiona linja momentów. Przy obciążeniu pionowym reakcje poziome na końcach słupów są sobie równe. Stąd łatwo znaleźć zależność:

$$\frac{h_1}{h_3} = \frac{M_2 - M_1}{M_3 - M_4} \dots \dots \dots (12)$$

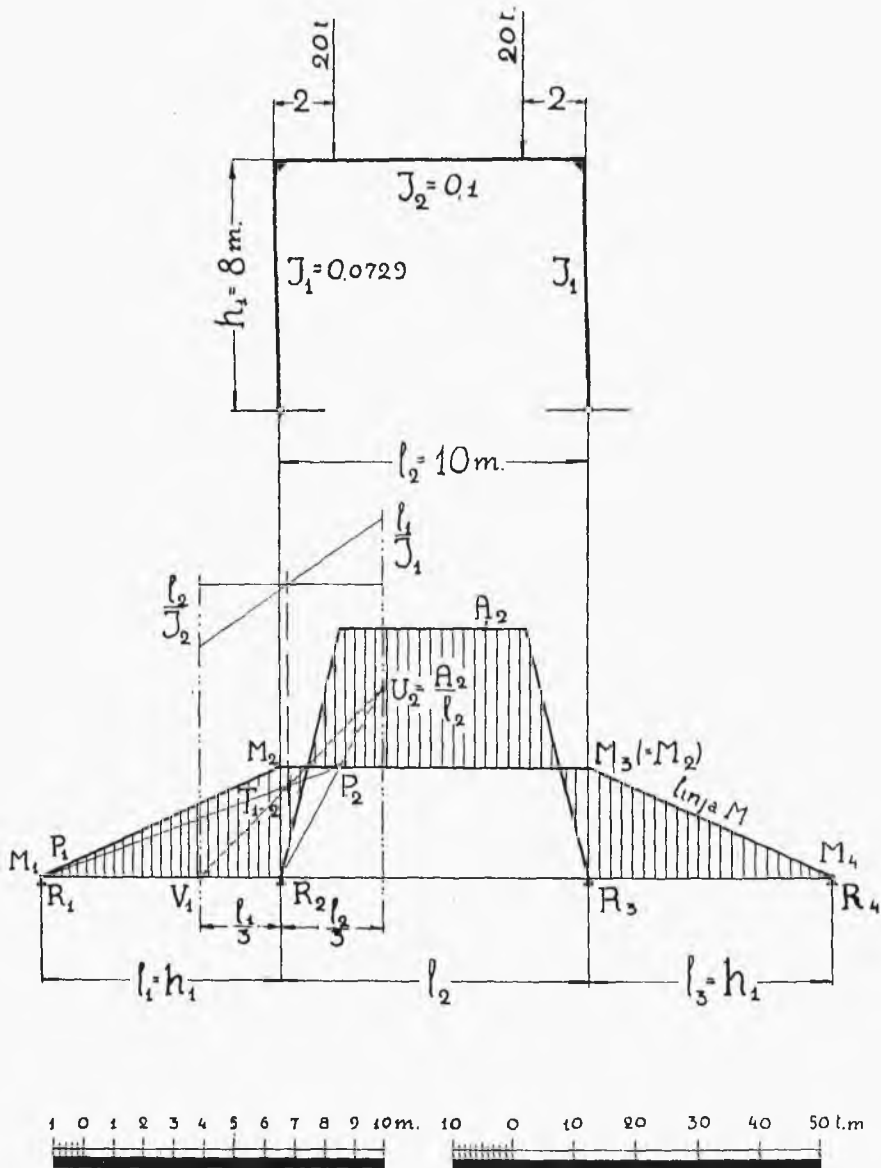
Zależność ta powoli w każdym wypadku obrócić linję momentów w poszczególnych przęsłach koło wyznaczonych punktów do właściwego jej położenia.

Przykład 1. Rys. 17. Rama symetryczna. Słupy zamocowane przegubowo. Obciążenie niesymetryczne siłą pionową P . Punkt przegięcia środkowego przęsła H_2 przy przesunięciu bocznym leży po środku tego przęsła. Z zależności (12) wynika:

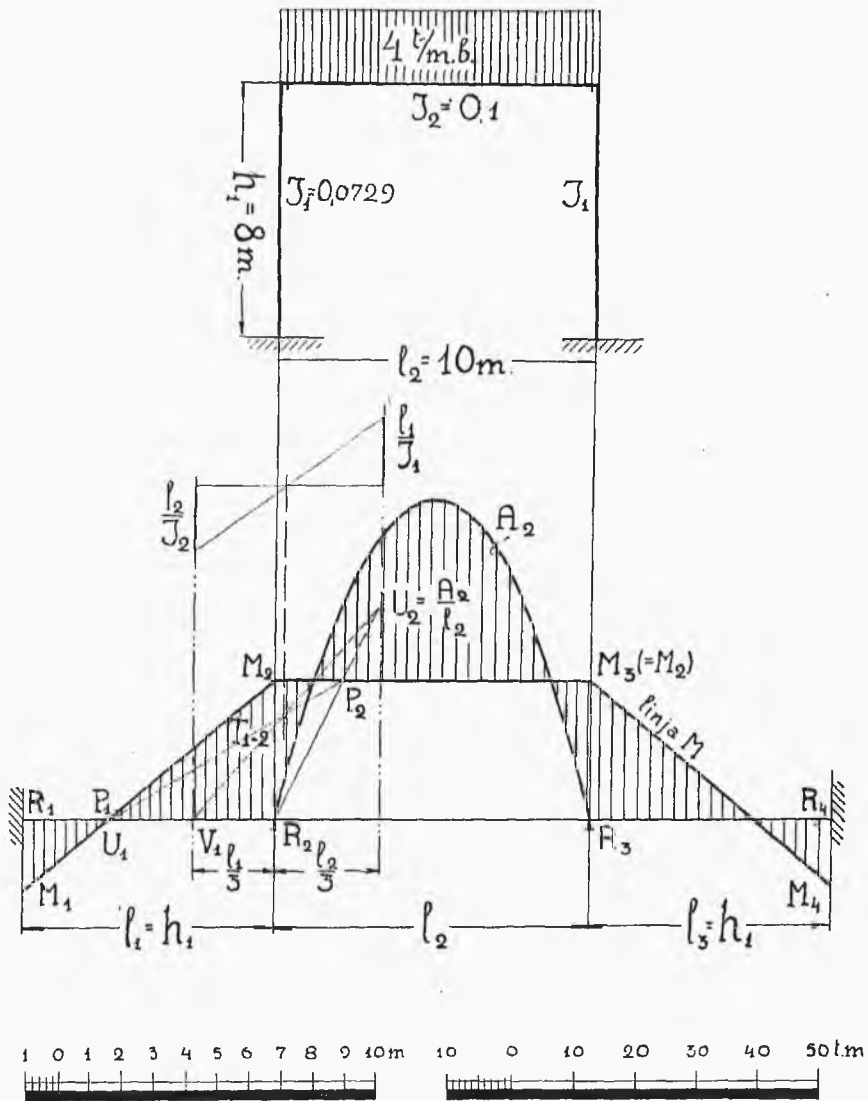
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{M_2}{M_1} = 1$$

t. zn. linja momentów w środkowym przęśle jest pozioma.

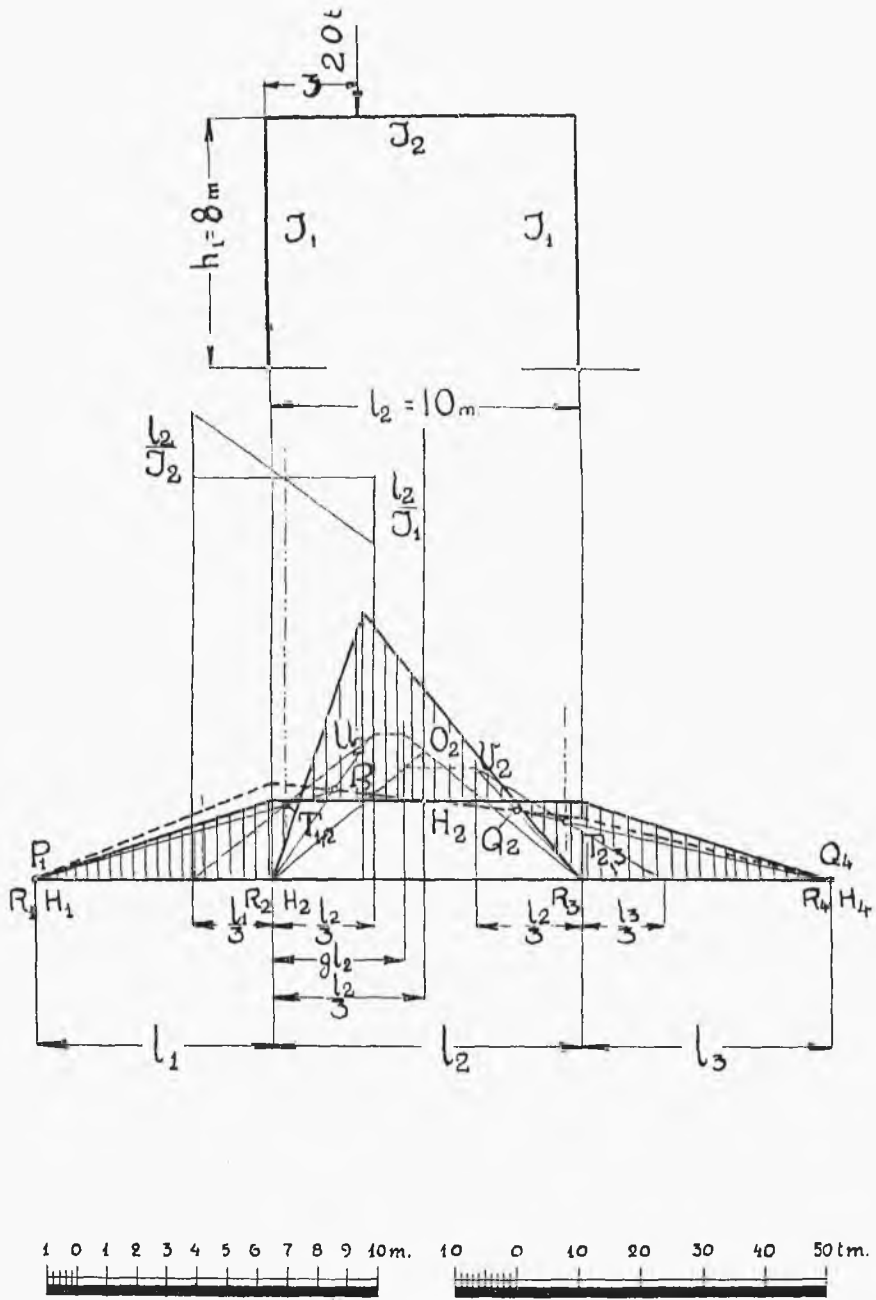
Przykład 2. Rys. 18. Rama symetryczna. Słupy zamocowane nieruchomo. Obciążenie niesymetryczne siłą pionową P .



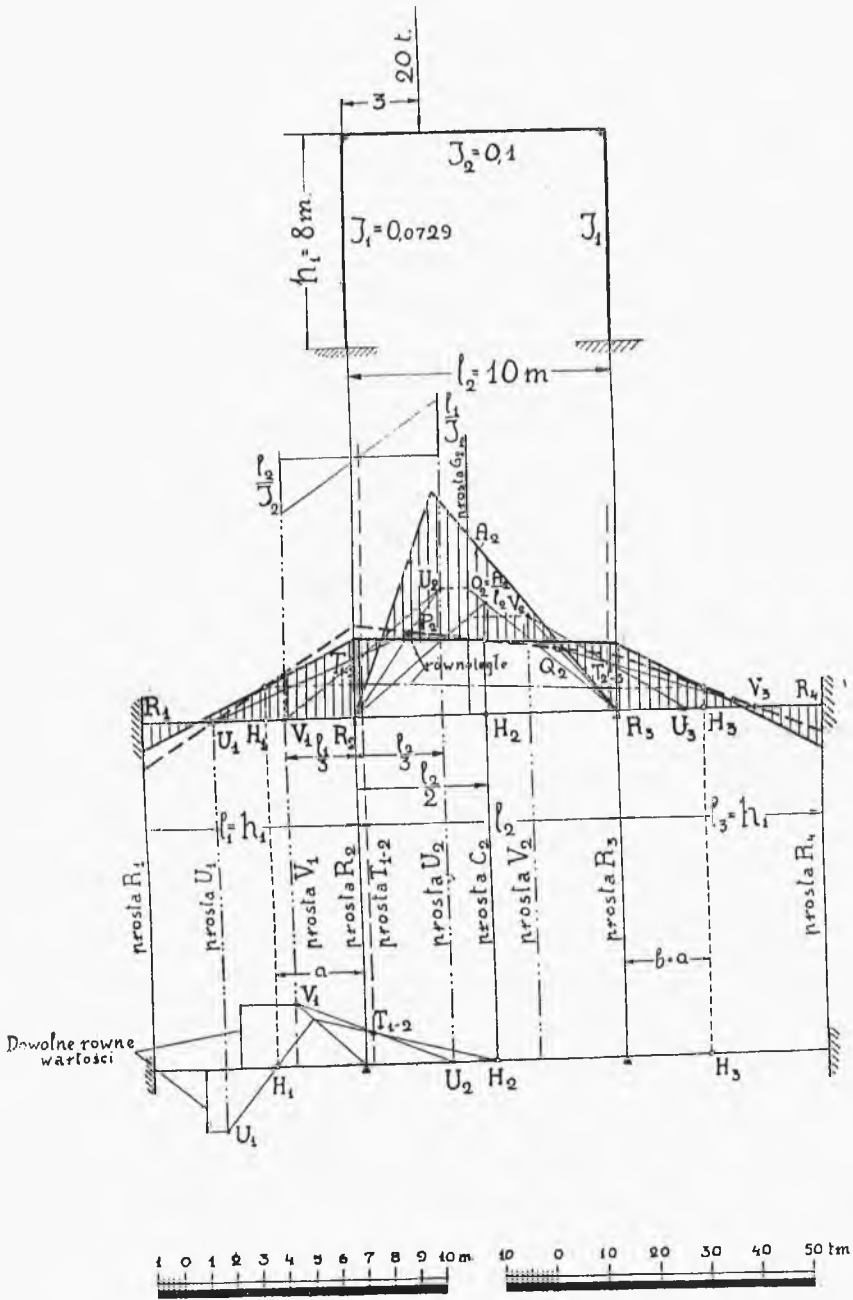
Rys. 15.



Rys. 16.



Rys. 17.



Rys. 18.

Punkt przegięcia środkowego przęsła H_2 leży po środku przęsła. Punkty przegięcia bocznych przęseł (symetryczne względem siebie) wyznaczamy graficznie, zakładając dowolne obniżenie środkowych podpór. Z zależności (12) wynika: $M_2 - M_1 = M_3 - M_4$. Poprawiona linja momentów spełnia ten warunek.

Przykład 3. Rys. 19. Rama niesymetryczna. Słupy zamocowane przegubowo. Obciążenie niesymetryczne siłą pionową P .

Punkty przegięcia H_1, H_2, H_3 wyznaczamy graficznie zakładając obniżenie środkowych podpór. Z zależności (12) wynika $\frac{h_2}{h_1} = \frac{M_2}{M_1}$. Poprawiona linja momentu spełnia ten warunek. Konstrukcja graficzna wskazana na rysunku.

Przykład 4. Rys. 20. Rama niesymetryczna. Słupy zamocowane nieruchomo. Obciążenie niesymetryczne siłą pionową P .

Punkty przegięcia H_1, H_2, H_3 wyznaczamy graficznie. Z zależności (12) wynika $\frac{h_1}{h_2} = \frac{M_2 - M_1}{M_3 - M_4}$. Warunek ten spełnia poprawiona linja momentów. Konstrukcja graficzna wskazana na rysunku.

III. Przypadki bardziej skomplikowane, ramy, które w jednym punkcie łączą kilka prętów można też sprowadzić do rozpatrywania belek ciągłych. Sposób postępowania polega na wprowadzeniu wyobraźnego pręta zastępczego, tak aby pręt ten pod działaniem momentu = sumie momentów przenoszonych przez pręty zamienione, nie zmienił odkształcenia kąтового węzła.

Przykład 1. Kształt ramy i obciążenie uwidocznione na Rys. 21.

Zamiast prętów l i h wprowadzamy pręt zastępczy o momencie bezwładności J_0 długości l_0 , na końcach zamocowany przegubowo.

Aby odkształcenie węzła pozostało bez zmiany musi być

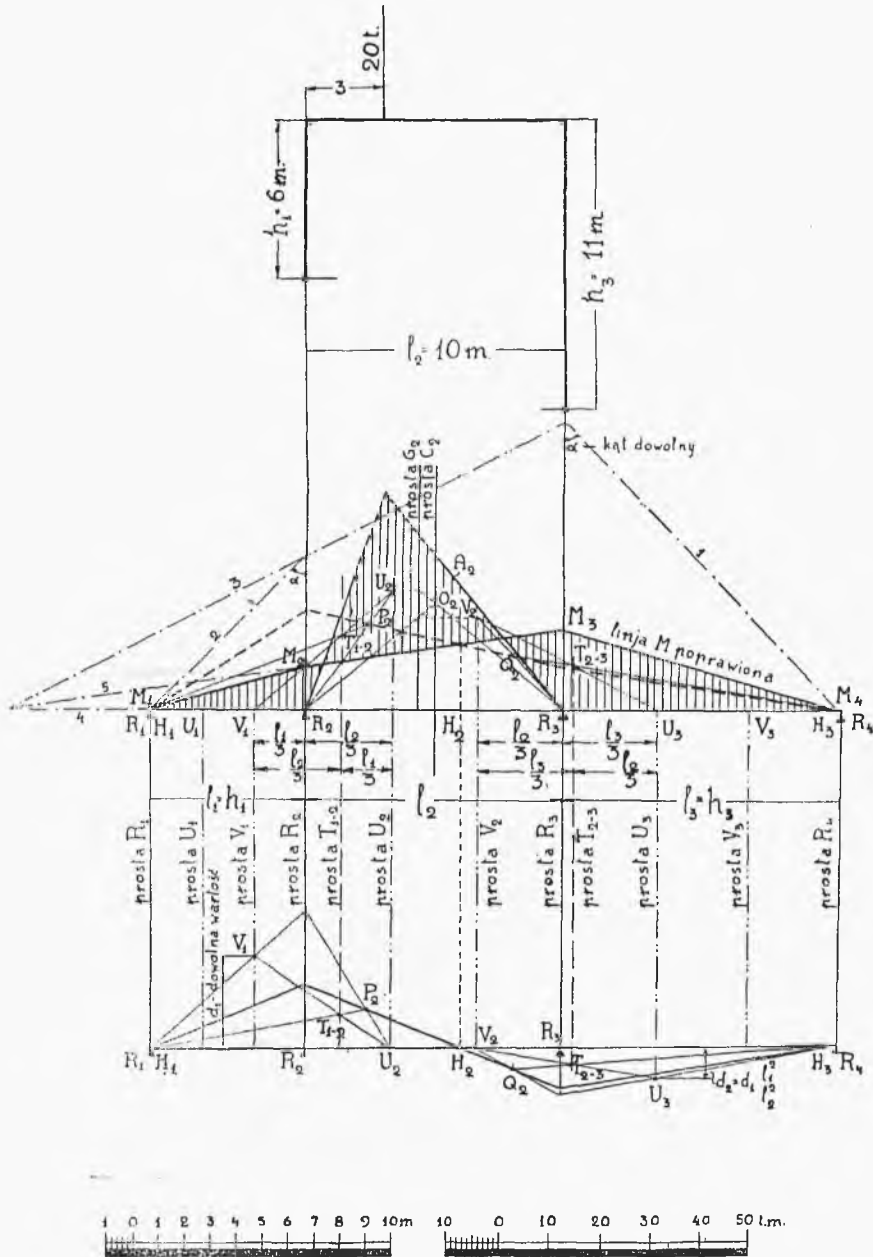
$$\frac{M_l l_l}{3 E J_l} = \frac{M_h l_h}{4 E J_h} = \frac{M_0 l_0}{3 E J_0} \dots \dots \dots (13)$$

gdzie

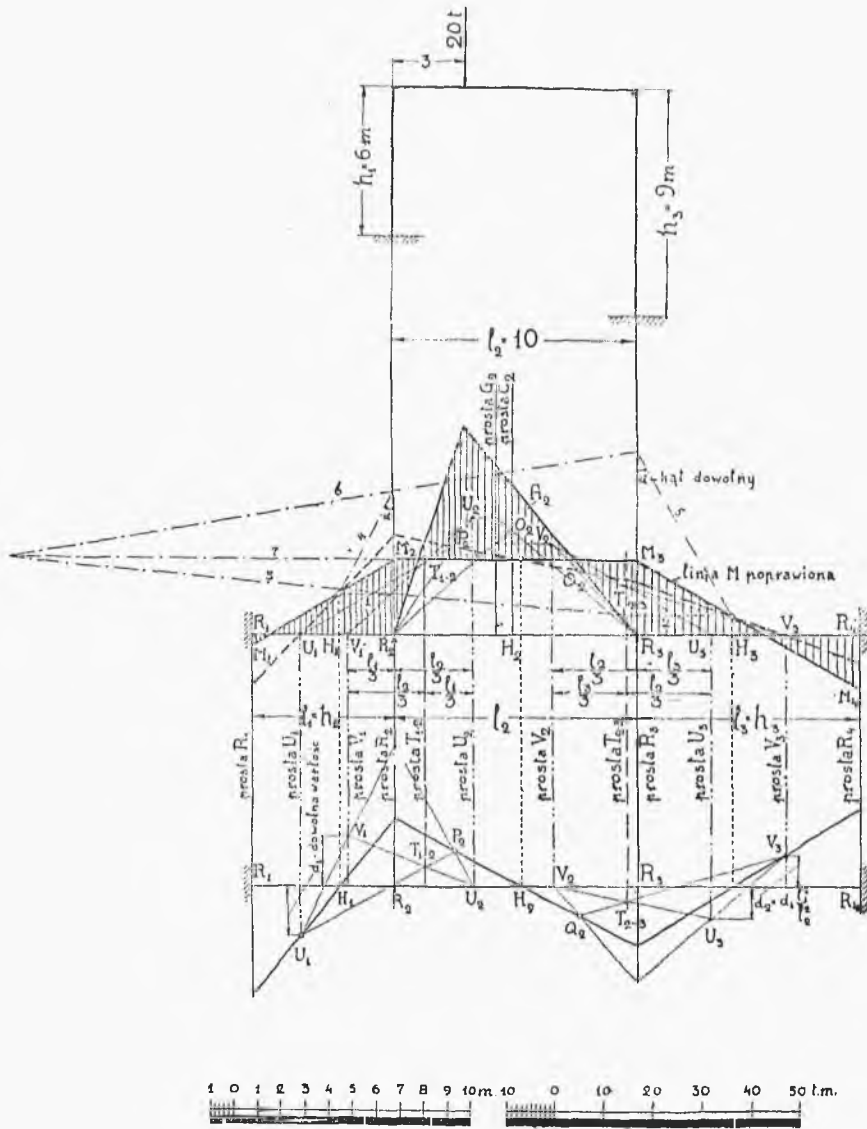
$$M_0 = M_h + M_l$$

stąd:

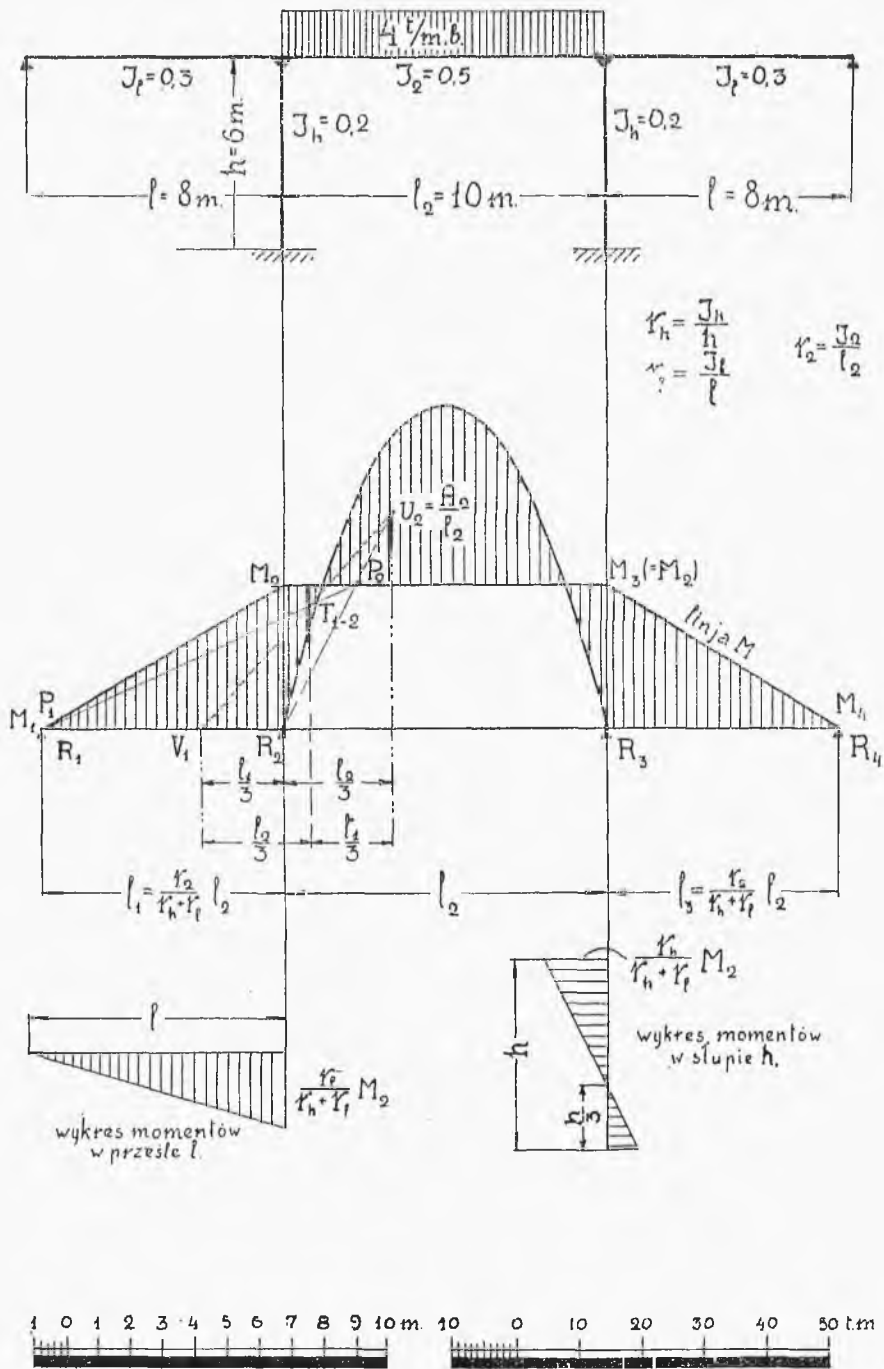
$$\frac{J_0}{l_0} = \frac{4}{3} \frac{J_h}{l_h} + \frac{J_l}{l_l}$$



Rys. 19.



Rys. 20.



Rys. 21.

lub oznaczając:

$$\frac{J_0}{l_0} = r_0 \quad \frac{4}{3} \frac{J_h}{l_h} = r_h \quad \frac{J_l}{l_l} = r_l$$

otrzymamy:

$$r_0 = r_h + r_l \quad (15)$$

$$M_h = M_0 \frac{r_h}{r_0} \quad (16)$$

$$M_l = M_0 \frac{r_l}{r_0} \quad (17)$$

Zakładając $J_0 = J_2$ i oznaczając $\frac{J_2}{l_2} = r_2$ otrzymamy długość za-

$$\text{stępczego przęsła } l_0 = \frac{J_2}{r_0} = \frac{r_2}{r_0} l_2.$$

Określiwszy moment bezwładności oraz długość pręta zastępczego, rozwiązujemy ramę jak belkę ciągłą. Konstrukcja wykreslna wskazana na rysunku.

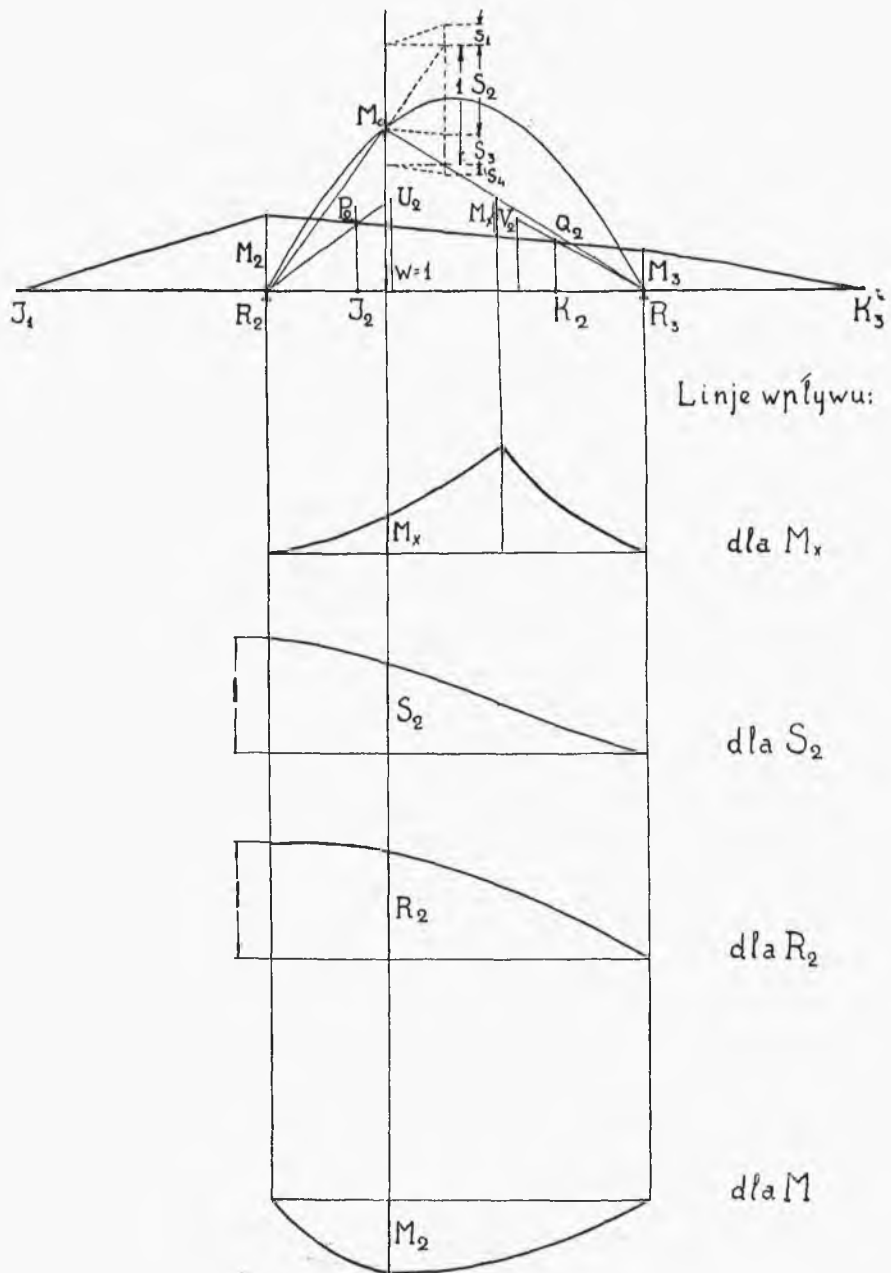
11. Zastosowanie metody punktów sprzężonych do wyznaczania linii wpływu belek ciągłych.

Przy założeniu jednostkowego obciążenia skupionego możemy wyżej opisaną metodą wyznaczyć wartości momentów, sił tnących i odpór. Wartości te, obliczone dla szeregu położenia siły $W = 1$ pozwolą wyznaczyć odpowiednie linie wpływu. Następujące uwagi posłużą do uproszczenia konstrukcji graficznej. Rys. 22.

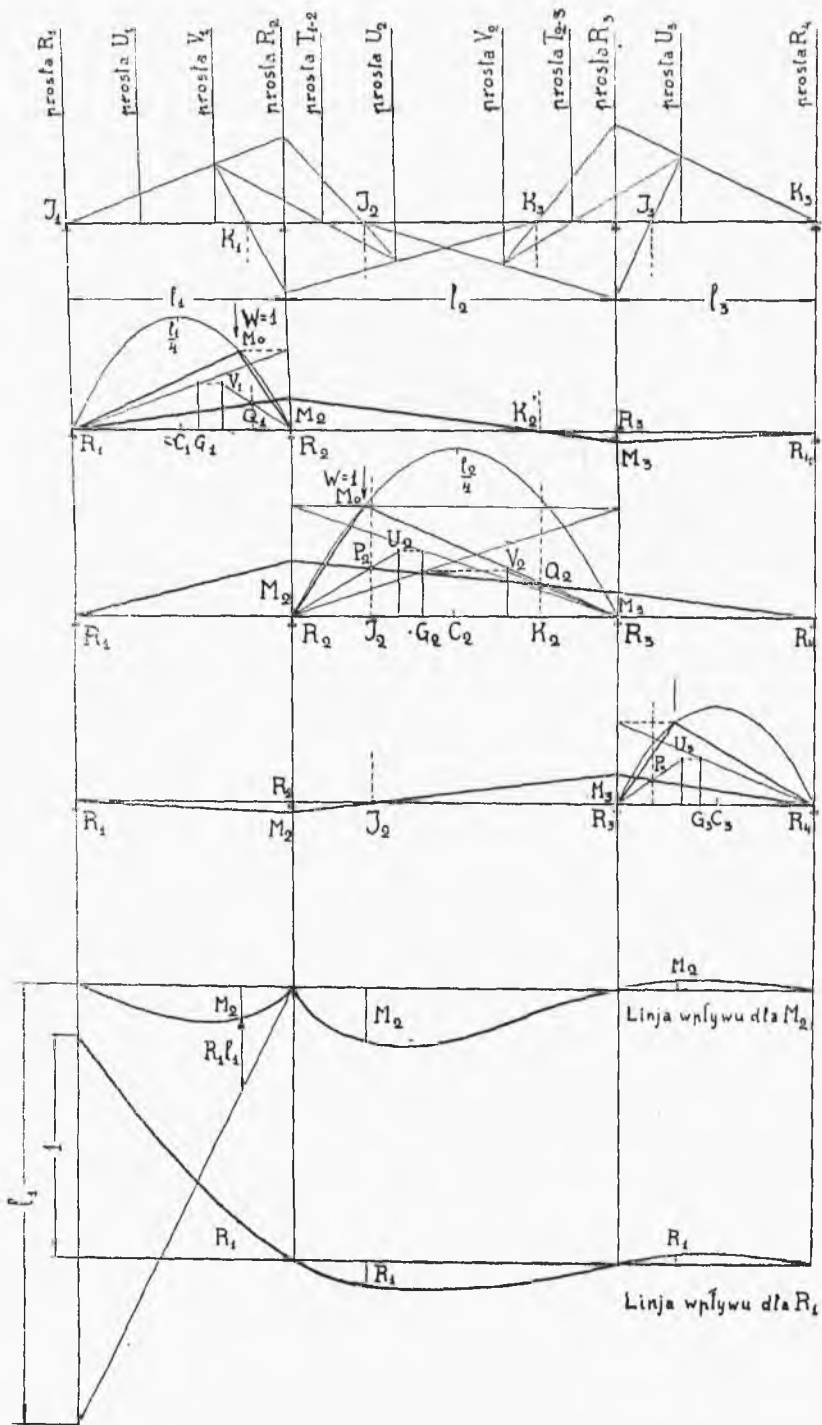
1) Wykres momentów gnących obciążonego przęsła jest trójkątem o wierzchołku M_0 . Miejscem geometrycznym punktów M_0 , odpowiadającym różnym położeniom siły W (w obrębie przęsła) jest parabola symetryczna o wysokości $\frac{l}{4}$.

2) Przyjmując wierzchołek M_0 jako biegun wieloboku sił wykreślamy ten wielobok dla siły $W = 1$. Promień równoległy do linii momentów obciążonego przęsła wyznaczy siły tnące na końcach tego przęsła S_2, S_3 . Równoległe do linii momentów nieobciążonych przęseł wyznaczają odpowiednio siły tnące na końcach tych przęseł. Wartości odpór otrzymujemy przez sumowanie:

$$R_1 = S_1 \quad R_2 = S_1 + S_2 \quad R_3 = S_3 + S_4$$



Rys. 22.



Rys. 23.

3) Punkty sprzężone linii momentów przy nieobciążonych przęsłach sąsiednich, leżą na przecięciu się prostych $U_2 R_2$ i $R_3 V_2$ z odpowiednimi pionowami przechodzącymi przez punkty stałe.

W nieobciążonych przęsłach linia momentów przechodzi przez punkty stałe.

4) Linia G (przechodzącą przez środek ciężkości trójkąta $R M_0 R$) leży na $\frac{1}{3}$ odległości od środka przęsła do punktu obciążenia.

Przykład. Belka ciągła trójprzęsłowa. Końce zamocowane przegubowo. Rys. 23. Wyznaczenie linii wpływu dla momentów podporowych.

Wyznaczamy punkty stałe, przez punkty te prowadzimy pionowe.

W pierwszym przęsle wykreślamy parabolę o wysokości $\frac{l}{4}$. Dla obra-

nego położenia siły $W = 1$ wyznaczamy punkt M_0 na wykreślonej paraboli. Z punktu M_0 prowadzimy poziomą do przecięcia z linią R_2 . Prosta łącząca R_1 z otrzymanym punktem przecięcia odetnie na prostej G_1 (przechodzącej przez środek ciężkości trójkąta $R_1 M_0 R_2$) rzędną punktu V_1 . Rzutując tę rzędną na prostą V_1 , otrzymujemy punkt V_1 . Punkt V_1 łączymy z R_2 i w przecięciu z pionową przechodzącą przez R_1 (punkt stały) otrzymujemy Q_1 . Znając położenie Q_1 prowadzimy linię momentów, z której odczytujemy wartości M_2 i M_3 . Analogicznie wyznaczamy szukane wartości momentów dla innych położenia siły $W = 1$ w obrębie przęsła l_1 . Podobnie przeprowadzamy konstrukcję dla położenia siły w obrębie innych przęseł. Z otrzymanych wartości momentów wykreślamy linię wpływu.

Z linii wpływu dla M_2 można łatwo otrzymać linię wpływu dla reakcji skrajnej podpory R_1 : w przęsle l_1 , jak to wskazane na rysunku odczytujemy wartości $R_1 \cdot l_1$, w przęsłach l_2 i l_3 wartości M_2 równe są odpowiednio $R_1 \cdot l_1$.

