

B. Część druga.

1. **Równanie odkształconej.** Weźmy pod uwagę (Rys. 117) pierwotną płytkę $ABCD$ pręta krzywego płaskiego. Zawarty w niej odcinek OO' nieodkształconej osi pręta:

$$ds = r_0 d\varphi$$

Pod działaniem obciążenia zginającego płaskie ścianki AB , CD pochylają się o kąt $\delta d\varphi$ obrotu około linii obojętnej L' , tworząc płytkę odkształconą $AB'C'D'$. Zawarty w niej odcinek OO'' odkształconej pręta:

$$ds' = r(d\varphi + \delta d\varphi)$$

Im większy jest pierwotny promień krzywizny r_0 pręta, tem bliżej środka O'' leży linia obojętna. Zatem dla prętów o małej krzywiznie:

$$ds \simeq ds'$$

a przeto:

$$r_0 d\varphi = r(d\varphi + \delta d\varphi)$$

oraz, na mocy (172):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \left(1 + \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \right) = \frac{1}{r_0} + \frac{M}{EJ_z}$$

Stąd — równanie odkształconej pręta o małej krzywiznie:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{M}{EJ_z} \quad (175)$$

gdzie przez r i r_0 oznaczono promienie krzywizny: odkształconej i pierwotnej osi pręta krzywego płaskiego, przez M — moment zginający, przez J_z główny moment bezwładności przekroju bieżącego — względem osi, prostopadłej do płaszczyzny krzywizny pręta.

Dla pręta o znacznej krzywiznie:

$$ds' = ds + a \delta d\varphi = r_0 d\varphi + a \delta d\varphi$$

jako, że linia obojętna leży w odległości a od środka przekroju. Zatem:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi + \delta d\varphi}{r_0 d\varphi + a \delta d\varphi}$$

Odejmując, otrzymamy:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{d\varphi + \delta d\varphi}{r_0 d\varphi + a \delta d\varphi} - \frac{d\varphi}{r_0 d\varphi} = \frac{\left(1 - \frac{a}{r_0}\right) \delta d\varphi}{\left(1 + \frac{a}{r_0} \frac{\delta d\varphi}{d\varphi}\right) r_0 d\varphi}$$

oraz, na mocy (174):

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{1 - \frac{a}{r_0}}{1 + \frac{M}{EFr_0}} \frac{M}{EFar_0} \approx \frac{M}{EFar_0} \quad \dots \quad (176)$$

Oba powyższe wzory wymagają dodatniego znakowania momentów, zwiększających pierwotną krzywiznę pręta i naodwrot. Są bardzo niewygodne w użyciu. Dobre wyniki da drugie twierdzenie Castigliano, lub Menabrea.

2. Praca sprężysta. Płaskie obciążenie zewnętrzne pręta krzywego płaskiego obejmuje: siły skupione i jednostkowe, leżące w płaszczyźnie krzywizny pręta, oraz momenty zewnętrzne, do tej płaszczyzny prostopadłe. Po sprowadzeniu płaskiego obciążenia do środka bieżącego przekroju otrzymamy wypadkowe: siłę osiową S , ścinającą Q , i moment zginający M .

Posunięcia tych sił uogólnionych pręta o małej krzywiznie będą odpowiednio: (171), (172):

$$s = r_0 \Delta d\varphi = \frac{Sr_0}{EF} d\varphi = \frac{Sds}{EF} \quad q = t \frac{Qds}{GF}$$

$$m = \delta d\varphi = \frac{Mr_0}{EJ} d\varphi = \frac{Mds}{EJ}$$

gdzie przez ds oznaczono długość łuku pierwotnej osi pręta, przez J moment bezwładności przekroju bieżącego F względem osi, prostopadłej do płaszczyzny krzywizny pręta.

Z tych zależności linjowych, na mocy twierdzenia Clapeyron'a mamy pracę sprężystą dla płytki bieżącej:

$$dH = \left(\frac{S^2}{2EF} + t \frac{Q^2}{2GF} + \frac{M^2}{2EJ} \right) ds$$

Stąd, pomijając, jak zwykle działanie sił ścinających, otrzymamy pracę sprężystą dla całego pręta o małej krzywiznie:

$$H = \int_0^s \left(\frac{S^2}{2EF} + \frac{M^2}{2EJ} \right) ds \quad \dots \quad (177)$$

gdzie s oznacza całkowitą długość pierwotnej osi pręta.

Posunięcia uogólnionych sił sprężystości: S, Q, M pręta o znacznej krzywiznie będą odpowiednio:

$$s = r_0 \Delta d\varphi + a \delta d\varphi = \frac{Sr_0 d\varphi}{EF} + \frac{M d\varphi}{EF} \quad q = t \frac{Q ds}{GF}$$

$$m = \Delta d\varphi + \delta d\varphi = \frac{S d\varphi}{EF} + \frac{M d\varphi}{EFa}$$

a przeto, na mocy twierdzenia Clapeyron'a, praca sprężysta dla płytki bieżącej:

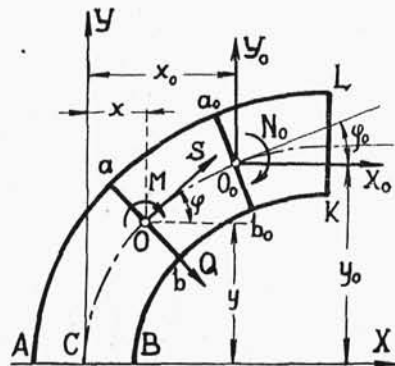
$$dH = \frac{1}{2} (Ss + Qq + Mm) = \frac{S^2 ds}{2EF} + \frac{SM ds}{EFr_0} + \frac{M^2 ds}{2EFa r_0} + t \frac{Q^2 ds}{2GF}$$

a dla całego pręta o znacznej krzywiznie:

$$H = \int_0^s \left(\frac{S^2}{2EF} + \frac{SM}{EFr_0} + \frac{M^2}{2EFa r_0} + t \frac{Q^2}{2GF} \right) ds \quad \dots \quad (178)$$

gdzie s oznacza całkowitą długość pierwotnej osi pręta.

3. Odkształcenia. Weźmy pod uwagę pręt krzywy płaski, (Rys. 119), płasko obciążony. Ze środka C dowolnie zresztą obranego przekroju AB , zazwyczaj jednego ze skrajnych, osadzonych lub podpartych, wyprowadzamy stałe osie współrzędnych, tak, aby oś X stanowiła normalną, a oś Y — styczną pierwotnej osi pręta w C . Chcąc zdać sobie sprawę, jak pręt się odkształca, wyodrębniamy jeden z poprzecznych przekrojów $a_0 b_0$ pręta nieodkształconego. Współrzędne jego środka O_0 oznaczamy odpowiednio przez: x_0, y_0 , — przez φ_0 — kąt nachylenia ku osi X — stycznej odkształconej, wyprowadzonej z O_0 , jako punktu styczności.



Rys. 119.

Po odkształceniu środek O_0 będzie miał współrzędne:

$$x_0 + u \qquad y_0 + v$$

przekrój $a_0 b_0$ pochyli się ku osi X pod kątem:

$$\varphi_0 + w$$

Chcąc znaleźć posunięcia: u, v, w , przykładamy do środka O_0 siły, tym posunięciom przynależne: X_0, Y_0 , równoległe do osi X, Y i moment N_0 , prostopadły do głównej płaszczyzny XY pręta, dodatni, bo zwiększający jego krzywiznę pierwotną.

Nadto — wyodrębnimy przekrój bieżący ab , nachylony pod kątem φ ku osi X , i sprowadzimy do jego środka:

$$O(x, y)$$

obciążenie zewnętrzne części $abKL$ pręta, zawierającej ów przekrój $a_0 b_0$. Siły zewnętrzne dadzą wypadkowe: siłę osiową S_0 , ścinającą Q_0 i moment zginający M_0 , prostopadły do XY .

Zatem po dodatkowym uwzględnieniu sił X_0, Y_0 i N_0 — otrzymamy w środku O wypadkowe: siłę osiową S , ścinającą Q i moment zginający M , przyczem niewątpliwie:

$$S = S_0 + X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi \qquad Q = Q_0 + X_0 \sin \varphi - Y_0 \cos \varphi$$

$$M = M_0 + N_0 + X_0 (y_0 - y) - Y_0 (x_0 - x)$$

Drugie twierdzenie Castigliano da dla pręta o znacznej krzywiznie:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial X_0} \right)_0 = u &= \int_0^s \left[\frac{S_0 \cos \varphi}{EF} + \frac{S_0 (y_0 - y)}{EF r_0} + \frac{M_0 \cos \varphi}{EF r_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_0 (y_0 - y)}{EF a r_0} + t \frac{Q_0 \sin \varphi}{GF} \right] ds \\ \left(\frac{\partial H}{\partial Y_0} \right)_0 = v &= \int_0^s \left[\frac{S_0 \sin \varphi}{EF} - \frac{S_0 (x_0 - x)}{EF r_0} + \frac{M_0 \sin \varphi}{EF r_0} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{M_0 (x_0 - x)}{EF a r_0} - t \frac{Q_0 \cos \varphi}{GF} \right] ds \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial N_0}\right)_0 = w = \int_0^s \left(\frac{S_0}{EF r_0} + \frac{M_0}{EF a r_0} \right) ds$$

gdzie uwzględniono istotne, zerowe wielkości dodatkowych sił: X_0, Y_0, N_0 .

Dla pręta o małej krzywiznie otrzymamy, pomijając, jak zwykle, pracę sił ścinających:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial X_0}\right)_0 = u = \int_0^s \left[\frac{S_0 \cos \varphi}{EF} + \frac{M_0 (y_0 - y)}{EJ} \right] ds$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial Y_0}\right)_0 = v = \int_0^s \left[\frac{S_0 \sin \varphi}{EF} + \frac{M_0 (x_0 - x)}{EJ} \right] ds$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial N_0}\right)_0 = w = \int_0^s \frac{M_0 ds}{EJ}$$

i tu — ujęcie pochodnych w nawiasy z dolnym zerowym wskaźnikiem oznacza konieczność uwzględnienia istotnych wielkości sił dodatkowych:

$$X_0 = Y_0 = N_0 = 0$$

4. Łuki. Pręt krzywy płaski, końcami wsparty na podporach zwie się *łukiem*. Z lewego punktu podparcia wyprowadzamy osie współrzędnych: poziomą X — w prawo, pionową Y do góry. Na osi X leży drugi punkt podparcia, przynależny odciętej l — zwanej *rozpiętością* łuku. Środek C bieżącego przekroju ma współrzędne: x, y . Styczna pierwotnej osi łuku, wyprowadzona z tego środka, jako punktu styczności, tworzy kąt φ z osią X . Rzędna f środkowego punktu D osi stanowi *wysokość* łuku.

a. Łuk dwuprzegubowy — ma obie (Rys. 120. I) podpory A, B przegubowe. Przy obciążeniu płaskim, z równań statyki łuku otrzymamy obie siły odporowe pionowe: V, V_1 i jedną poziomą, np. X_1 ; — druga, X — stanowi odpór hyperstatyczny.

Obciążenie zewnętrzne odcinka AC łuku, łącznie z izostaticznym odporem V , po sprowadzeniu do środka C da: siłę osiową S_0 , siłę ścinającą Q_0 i moment zginający M_0 , zatem w C panować będą wypadkowe:

$$S = S_0 - X \cos \varphi \quad Q = Q_0 + X \sin \varphi \quad M = M_0 + Xy$$

W stosunku do promienia krzywizny — poprzeczne wymiary łuków są naogół nieznaczne, zatem dla łuku, jako pręta małej krzywizny:

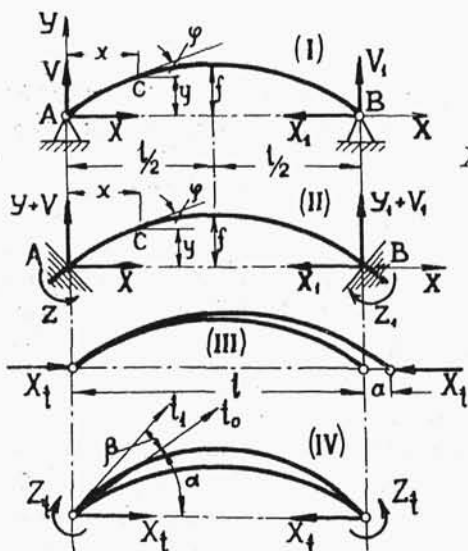
$$H = \int_0^s \left(\frac{S^2}{2EF} + \frac{M^2}{2EJ} \right) ds$$

skąd, na mocy twierdzenia Menabrea:

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \int_0^s \left(\frac{X \cos \varphi - S_0}{EF} \cos \varphi + \frac{M_0 + Xy}{EJ} y \right) ds = 0$$

i ostatecznie:

$$X = \frac{\int_0^s \left(\frac{S_0 \cos \varphi}{EF} - \frac{M_0 y}{EJ} \right) ds}{\int_0^s \left(\frac{\cos^2 \varphi}{EF} + \frac{y^2}{EJ} \right) ds} \quad (179)$$



Rys 120.

Łuk dwuprzegubowy nie może się swobodnie rozszerzać poziomo. Przy jednostajnem nagrzaniu na $(t-t_0)^0$, rozpiętość pierwotna l wzrosłaby do:

$$l + e_t l (t - t_0)$$

gdyby lewa podpora była posuwna. W tym wzorze przez e_t oznaczono współczynnik linjowej rozszerzalności cieplnej. Zatem, by wrócić do warunków istotnych, należałoby ów cieplny przyrost sprowadzić do zera,

działając na punkty podparcia odpowiednio dobranymi siłami poziomymi X_t .

W rzeczywistości jest jednak nieco inaczej: jednostajnie nagrany łuk rozpięra podpory poziomo, wywołując ich przeciwdziałanie — w postaci odporów poziomych X_t . Ich praca sprężysta:

$$H_t = \int_0^s \left(\frac{X_t^2 \cos^2 \varphi}{2EF} + \frac{X_t^2 y^2}{2EJ} \right) ds$$

Zatem, na mocy drugiego twierdzenia Castigliano:

$$\frac{\partial H_t}{\partial X_t} = \int_0^s \left(\frac{X_t \cos^2 \varphi}{EF} + \frac{X_t y^2}{EJ} \right) ds = e_t l(t - t_0)$$

Stąd bezpośrednio:

$$X_t = \frac{e_t l(t - t_0)}{\int_0^s \left(\frac{\cos^2 \varphi}{EF} + \frac{y^2}{EJ} \right) ds} \quad \dots \quad (180)$$

Przy łącznem działaniu jednostajnego nagrzania i obciążenia — siła odporowa pozioma lewej podpory jest równa $X + X_t$.

b. Łuk osadzony obustronnie (Rys. 120. II) dźwiga płaskie obciążenie zewnętrzne. Ten sam łuk, tak samo obciążony, lecz wsparty na podporach: lewej posuwnej i prawej — przegubowej, jest niewątpliwie izostatyczny. Jego równania statyki dadzą: siłę odporową pionową V lewej podpory, prawej — pionową V_1 i poziomą U_1 . Obciążenie zewnętrzne odcinka AC , łącznie z odporem V , po sprowadzeniu do środka C bieżącego przekroju pręta izostatycznego da: siłę osiową S_0 , siłę ścinającą Q_0 i moment zginający M_0 .

Wistocie jednak obie podpory są stałe: zatem lewa da siłę odporową poziomą X , pionową $Y + V$ i moment odporowy Z . Odpory prawej: $X_1, Y_1 + V_1, Z_1$ otrzymamy z równań statyki. W bieżącym przekroju łuku panować będą: siła osiowa S , siła ścinająca Q i moment zginający M , przyczem:

$$S = S_0 - X \cos \varphi - Y \sin \varphi \quad Q = Q_0 + X \sin \varphi - Y \cos \varphi$$

$$M = M_0 + Z + Xy - Yx$$

Dla łuku, jako pręta o małej krzywiznie:

$$H = \int_0^s \left(\frac{S^2}{2EF} + \frac{M^2}{2EJ} \right) ds$$

a więc na mocy twierdzenia Menabrea:

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{\partial H}{\partial Y} = \frac{\partial H}{\partial Z} = 0$$

i ostatecznie:

$$\begin{aligned} X \int_0^s \left(\frac{\cos^2 \varphi}{EF} + \frac{y^2}{EJ} \right) ds + Y \int_0^s \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{EF} - \frac{xy}{EJ} \right) ds + Z \int_0^s \frac{y ds}{EJ} = \\ = \int_0^s \left(\frac{S_0 \cos \varphi}{EF} - \frac{M_0 y}{EJ} \right) ds \\ X \int_0^s \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{EF} - \frac{xy}{EJ} \right) ds + Y \int_0^s \left(\frac{\sin^2 \varphi}{EF} + \frac{x^2}{EJ} \right) ds - Z \int_0^s \frac{x ds}{EJ} = \\ = \int_0^s \left(\frac{S_0 \sin \varphi}{EF} + \frac{M_0 x}{EJ} \right) ds \\ X \int_0^s \frac{y ds}{EJ} - Y \int_0^s \frac{x ds}{EJ} + Z \int_0^s \frac{ds}{EJ} = - \int_0^s \frac{M_0 ds}{EJ} \quad \dots \dots \dots (181) \end{aligned}$$

Całki powyższych wzorów najlepiej wyznaczać wykreślnie.

Łuk obustronnie osadzony, nie może rozszerzać się swobodnie. Odrzucmy obciążenie zewnętrzne, zmieńmy lewą podporę stałą — na przegubową, prawą — na posuwną. Przy jednostajnem nagrzeniu tego izostatycznego łuku na $(t - t_0)^0$, pierwotna jego rozpiętość l — wzrośnie do:

$$l + a = l + e_l l (t - t_0)$$

gdzie e_t oznacza współczynnik rozszerzalności linjowej. Wszystkie wymiary wzrosną przytem proporcjonalnie, nie zmienia się przeto kąt α — pochylenia ku osi X — skrajnych stycznych pierwotnej osi łuku. Wistocie jednak podpory A, B są stałe i niesprężyste, a rozpiętość l — niezmienna, zatem, by wrócić do warunków rzeczywistych, należy, przy stałym pochyleniu stycznych t_0 ku osi X — przywrócić pierwotną odległość l punktów podparcia A, B . W tym celu należy przyłożyć do tych punktów siły poziome X_t — oraz momenty Z_t , stopniowo i jednocześnie rosnące od zera do wielkości ostatecznych tak, aby wydłużenie α stopniowo zmalało do zera — przy niezmiennych kątach α .

Stąd wniosek, że siłom X_t przynależy posunięcie α , momentom Z_t — posunięcie 2β równe zeru (Rys. 120. IV). Dla łuku o małej krzywiznie:

$$H_t = \int_0^s \left[\frac{X_t^2 \cos^2 \varphi}{2EF} + \frac{(Z_t + X_t y)^2}{2EJ} \right] ds$$

a przeto, na mocy drugiego twierdzenia Castigliano:

$$\frac{\partial H_t}{\partial X_t} = X_t \int_0^s \left(\frac{\cos^2 \varphi}{EF} + \frac{y^2}{EJ} \right) ds + Z_t \int_0^s \frac{y ds}{EJ} = e_t l (t - t_0)$$

$$\frac{\partial H_t}{\partial Z_t} = X_t \int_0^s \frac{y ds}{EJ} + Z_t \int_0^s \frac{ds}{EJ} = 0$$

Z tych równań otrzymamy X_t, Z_t . Przy łącznem działaniu jednostajnego nagrzania i obciążenia, lewe odpory będą odpowiednio:

$$X + X_t \quad V + Y \quad Z + Z_t$$

c. Łuk paraboliczny o stałym przekroju. Dla parabolicznego łuku niskiego i płaskiego obciążenia pionowego:

$$y = 4 \frac{f}{l^2} (l - x)x \quad \cos \varphi \simeq 1 \quad \sin \varphi \simeq 0 \quad ds = dx \quad s = l$$

$$S_0 = 0 \quad \int_0^s ds = l \quad \int_0^s x ds = \frac{1}{2} l^2 \quad \int_0^s y ds = \frac{2}{3} lf$$

$$\int_0^s x^2 ds = \frac{1}{3} l^3 \quad \int_0^s xy ds = \frac{1}{3} l^2 f \quad \int_0^s y^2 ds = \frac{8}{15} lf^2$$

zatem dla łuku dwuprzegubowego (179):

$$X = - \frac{\int_0^l M_0 y dx}{\frac{8}{15} lf^2 + \frac{Jl}{F}} \simeq - \frac{15}{8} \frac{\int_0^l M_0 y dx}{lf^2}$$

Dla łuku osadzonego obustronnie otrzymamy (181):

$$\left(\frac{4}{5} f + \frac{3J}{2Ff} \right) X - \frac{1}{2} lY + Z = - \frac{3}{2lf} \int_0^l M_0 y dx$$

$$\frac{2}{3} fX - \frac{2}{3} lY + Z = - \frac{2}{l^2} \int_0^l M_0 x dx$$

$$\frac{2}{3} fX - \frac{1}{2} lY + Z = - \frac{1}{l} \int_0^l M_0 dx$$

Z tego układu wyznaczmy X, Y, Z .

Dla obciążenia jednostkowego pionowego q kg na cm bieżący rozpiętości l :

$$M_0 = - \frac{1}{2} q (l - x) x$$