

Wszystkie, wyżej udowodnione twierdzenia o pracy sprężystej, oparte na linjowym kształcie zależności (154, 155 i 156) zawodzą, gdy warunki: a, b punktu czwartego nie są spełnione, a nadto, gdy poszczególne siły obciążenia zewnętrznego zależą od parametrów zmienności ustroju.

B. Część druga.

1. **Ustrój prętowy.** *Ustrojem prętowym zwie się układ prętów, powiązanych na węzłach.* Podłużne osie prętów ustroju przecinają się w *punktach węzłowych*: pręt ciągnie się tylko od węzła — do węzła; wsporniki nie są prętami ustroju. Międzywęzłowy odcinek prostej stanowi *oś węzłową* pręta, łączonego na tych węzłach. Oś węzłowa pokrywa się z osią podłużną pręta prostego. Punkty węzłowe i osie węzłowe tworzą pierwotny szkielet ustroju nieodkształconego.

Szkielet ten, jako całość niezmienna, może przemieszczać się względem obranego układu odniesienia, a nadto — ulegać wewnętrznym zmianom w stosunku do swej postaci pierwotnej. Inaczej mówiąc, ustrój unieruchomiony na podporach, może być zmiennym wewnątrznie przy niedostatecznem powiązaniu na węzłach: może ulegać *przekształceniom*, czyli zmianom swej postaci pierwotnej, nieskojarzonym z odkształceniami prętów. Nadto zarówno ustrój zmienny, jak i niezmienny, a więc *stały* — może ulegać *odkształceniom*, pochodnym odkształceń prętów ustroju.

Pręty mogą być łączone na węzłach przegubowo — przegubami cylindrycznemi, kardanowskimi, lub kulistemi. Mogą być również łączone sztywnie: nitowane lub spawane końcami. Ustrój prętowy podparty jest na węzłach: jego punkty podparcia leżą w obranych odpowiednio punktach węzłowych. Punkt podparcia, gdziekolwiek na osi pręta stanowi punkt węzłowy, dzielący ów pręt na dwa pręty ustroju. Podpory mogą być przegubowe i stałe.

Pod obciążeniem zewnętrznem ustrój prętowy działa na podpory, wywołując ich przeciwdziałania, zwane odporami. Odpory stanowią dodatkowy układ sił, równoważących obciążenie zewnętrzne, są przeto niewiadomemi równań statyki. Ustrój stały, unieruchomiony na podporach, zwie się *izostatycznym zewnętrznem*, gdy wszystkie jego odpory można wyznaczyć z tych równań. Zatem, gdy liczba (o) odporów ustroju przekracza

liczbę (r) warunkowych równań równowagi całego ustroju — ustrój jest *hyperstatyczny zewnętrznie* $[(o) - (r)]$ -krotnie.

Obciążenie zewnętrzne, łącznie z odporami stanowi zrównoważony układ sił zewnętrznych. Jego siły rodzą wtórny układ sił wewnętrznych — wzajemnego oddziaływania prętów na węzłach. Każdy pręt ustroju podlega działaniu sił i momentów — wypadkowych oddziaływania prętów sąsiednich, związanych z nim węzłowo. Równoważące przeciwdziałanie pręta stanowi o równowadze węzła ustroju: wypadkowe wzajemnego oddziaływania prętów, łączonych węzłowo, wzajemnie się znoszą na węźle.

Nadto — obustronne obciążenie węzłowe każdego pręta równoważy przynależną mu część obciążenia zewnętrznego, a przeto równowaga stałego ustroju prętowego, unieruchomionego na podporach, wymaga spełnienia dwóch układów równań warunkowych: równowagi prętów i węzłów. Ustrój jest *izostyczny wewnętrznie*, gdy wszystkie jego siły wewnętrzne oddziaływania wzajemnego prętów mogą być wyrażone z tych równań. Niedomiar równań cechuje ustrój *hyperstatyczny* — nadmiar — wskazuje na zmienność wewnętrzną ustroju.

2. Ustrój prętowy płaski. Ustrój prętowy jest płaski, gdy osie wszystkich jego prętów nie wychodzą poza płaszczyznę ustroju. Jego pręty mogą być łączone na węzłach przegubami cylindrycznymi o przegubowej osi do tej płaszczyzny prostopadłej. Mogą być również łączone sztywnie, należy przeto różnicować pręty: *pp* — *obu końcami łączone przegubowo*, *ps* — *jednym końcem łączone sztywnie, drugim — przegubowo*, wreszcie — pręty *ss* — *obu końcami sztywnie łączone na węzłach*.

Dalej mamy *wp* — węzły przegubowe, wiążące pręty na przeguby współosiowe — o jednej osi wspólnej, przecinającej płaszczyznę ustroju w punkcie węzłowym prostopadle. Połączmy sztywnie dwa, trzy, lub więcej, a nawet — wszystkie pręty węzła przegubowego, a otrzymamy — *ws* — węzeł sztywny ustroju.

Równania równowagi prętów: *pp*, *ps*, lub *ss* zawierają jedną, dwie, lub trzy hyperstatyczne siły oddziaływania prętów ustroju. Nadto — podpory dają (o) niewiadomych odporów. Warunki równowagi węzła *wp* dają dwa, a warunki węzła *ws* — trzy równania, wiążące owe niewiadome, a przeto *iloczynność* h hyperstatyczności płaskiego ustroju prętowego, stałego, unieruchomionego na podporach możemy wyrazić wzorem:

$$h = (pp) + 2(ps) + 3(ss) + (o) - 2(wp) - 3(ws) \quad \dots \quad (169)$$

w którym nawiasami oznaczono odpowiednie ilości prętów: pp , ps , ss , węzłów: wp , ws i odporów ustroju (L. K. Przegląd Techniczny 1925 r., str. 57).

Podpory płaskiego ustroju prętowego zazwyczaj są: posuwne (r), przegubowe (p), lub stałe (s), a przeto:

$$(o) = (r) + 2(p) + 3(s)$$

stąd — ilokrotność hyperstatyczności zewnętrznej i wewnętrznej:

$$(o) - 3$$

$$h - (o) + 3$$

ustroju prętowego stałego, unieruchomionego na podporach.

3. Obliczanie ustrojów prętowych. Dany jest pierwotny szkielet ustroju prętowego z wyszczególnieniem rodzaju łączy węzłowych, podpór i kształtu prętów. Dane są siły zewnętrzne, uogólnione, lub zwykłe, ich osie, zwroty i punkty przyłożenia. Dane są wreszcie cechy wytrzymałościowe i naprężenia dopuszczalne tworzywa — trzeba wyznaczyć właściwe wymiary poprzeczne wszystkich prętów i znaleźć odkształcenia ustroju.

Chcąc to zadanie rozwiązać, musimy przedewszystkiem upewnić się, ilekrotnie ustrój jest hyperstatyczny zewnętrznie i wewnętrznie. Do tego celu służą warunkowe równania ustroju, jako całości niezmiennej, jego węzłów i prętów. Po wyróżnieniu hyperstatycznych odporów i sił wewnętrznych wzajemnego oddziaływania prętów ustroju — otrzymamy wyniki ostateczne, stosując odpowiednie twierdzenia o pracy sprężystej.

Niejaką trudność może stanowić właściwe wyróżnienie sił wewnętrznych na węzłach ustroju. Wyodrębnijmy np. jeden z prętów *prostych* ustroju *płaskiego*. Długość pręta oznaczamy przez l , oś węzłową przez X . Odciętej l przynależy *początkowy* punkt węzłowy tego pręta. Oddziaływania prętów, związanych z nim w tym punkcie, dają wypadkowe: *siłę osiową* S , *siłę poprzeczną* R , *prostopadłą do osi węzłowej* i *moment* N , *prostopadły do płaszczyzny ustroju*. W *końcowym* punkcie węzłowym wyodrębnionego pręta leży początek osi Y , *prostopadłej do* X . Wypadkowe oddziaływania prętów w tym punkcie będą odpowiednio: S_0 , R_0 , N_0 .

Składowe siły skupionych i jednostkowych płaskiego obciążenia zewnętrznego, leżące na osi węzłowej oznaczamy przez U , *prostopadłe do tej osi* przez V , przez W — *momenty zewnętrzne* i *momenty sił obciążenia zewnętrznego*, *prostopadłe do płasz-*

czyzny ustroju. W punkcie bieżącym osi węzłowej, przynależnym odciętej x panować będą: siła osiowa, ścinająca i moment zginający:

$$S + \sum_x^l U \quad R + \sum_x^l V \quad N + R(l - x) + \sum_x^l W$$

Nadto, z równań statyki otrzymamy:

$$S_0 = -S - \sum_0^l U \quad R_0 = -R - \sum_0^l V$$

$$N_0 = -N - Rl - \sum_0^l W$$

a przeto każdy pręt pp daje jedną hyperstatyczną siłę S — osiową, każdy pręt ps — dwie: S, R , każdy pręt ss — trzy: S, R, N , jako że dla pręta pp :

$$N = N_0 = 0 \quad R = -\frac{1}{l} \sum W \quad R_0 = \frac{1}{l} \sum W - \sum_0^l V$$

a dla pręta ps :

$$N = 0$$

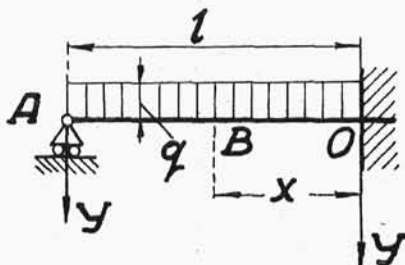
4. Twierdzenia Castigliano i Menabrea uzupełniają się wzajemnie. Mają zastosowania wielorakie.

a. Odpory hyperstatyczne. Po wyróżnieniu odporów hyperstatycznych O_h w równaniach warunkowych równowagi całego ustroju, możemy hyperstatyczne podpory, dające owe O_h , odrzucić, a działania ich zastąpić siłami O_h zewnętrznymi. Praca sprężysta, jako funkcja sił zewnętrznych, będzie zależna i od tych dodatkowych sił zewnętrznych, a przeto drugie twierdzenie Castigliano daje dla podpory sztywnej i sprężystej:

$$\frac{\partial H}{\partial O_h} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial O_h} = -a_h O_h$$

gdzie przez a_h oznaczono odpowiedni współczynnik sprężystości podpory. Te zależności, łącznie z warunkowymi równaniami równowagi całego ustroju — dadzą wszystkie odpory.

Tak, np. (Rys. 96) pręt ps o stałym przekroju obciążono na całej długości w stosunku q kg na centymetr bieżący. Prawa stała podpora O stanowi węzeł ws , lewa — posuwna — węzeł wp , a przeto po podstawieniu we wzór dla h , przekonamy się, że ustrój jest hyperstatyczny zewnętrznie jednokrotnie. Zatem, po odrzuceniu lewej podpory i przyłożeniu niewiadomej siły Y równej O_h , otrzymamy dla bieżącego przekroju B — moment zginający:



Rys. 96.

$$M = Y(l-x) + \frac{1}{2} q(l-x)^2$$

Praca sprężysta całego pręta:

$$H = \frac{1}{2EJ} \int_0^l \left[Y(l-x) + \frac{1}{2} q(l-x)^2 \right]^2 dx$$

skąd bezpośrednio:

$$\frac{\partial H}{\partial Y} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left[Y(l-x) + \frac{1}{2} q(l-x)^2 \right] dx = 0 \quad Y = -\frac{3}{8} q l$$

dla podpory A — sztywnej.

b. Hyperstatyczne siły węzłowe. Praca sprężysta ustroju zależy również od hyperstatycznych sił węzłowych K_h wzajemnego oddziaływania prętów, a przeto pierwsze twierdzenie Menabrea da:

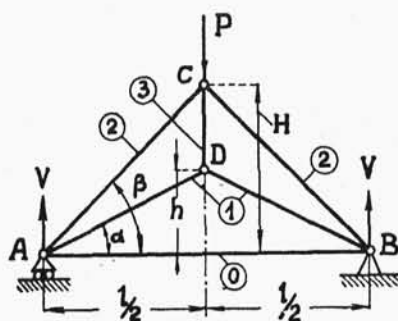
$$\frac{\partial H}{\partial K_h} = 0 \quad h = 1, 2, \dots$$

Ten układ dodatkowych zależności, łącznie z warunkami równań równowagi węzłów da wszystkie hyperstatyczne siły węzłowe ustroju.

Tak np. (Rys. 97) więzar stanowi układ sześciu nieważkich prętów pp , związanych na czterech węzłach przegubowo. Po

podstawieniu we wzór dla h , przekonamy się, że ustrój jest hyperstatyczny wewnątrznie jednokrotnie. Równania statyki całego ustroju dadzą przy odporze poziomej, równej zero, odpory pionowe:

$$V = -\frac{1}{2}P$$



Rys. 97.

wa pręta dolnego, poziomego. Załóżmy, że ten pręt jest rozciągany i wyłączmy go z ustroju wraz z obciążeniem dwóch sił X rozciągających, przyłożonych do punktów węzłowych — na przegubach. Oddziaływanie tego pręta na węzły ustroju należy niewątpliwie przytem zastąpić dwiema siłami X różnozwrotnymi, uciepionymi w punktach węzłowych A, B . Siły te leżą na linii AB i są zwrócone ku sobie.

Zwykłymi sposobami statyki (Technik II w. I t. 215 str. i nast.) otrzymamy następujące zestawienie, gdzie pod właściwym numerem pręta podano: jego stały przekrój F_l , pierwotną długość l_l , odpowiedni współczynnik sprężystości E_l , siłę osiową S_l i jej pochodną względem hyperstatycznej X :

Nr	F_l	l_l	E_l	S_l	$\frac{\partial S_l}{\partial X}$
0	F_0	l	E_0	X	1
1	F_1	$\frac{l}{2 \cos \alpha}$	E_1	$\frac{P \cos \beta - 2 X \sin \beta}{2 \sin (\beta - \alpha)}$	$-\frac{\sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}$
2	F_2	$\frac{l}{2 \cos \beta}$	E_2	$-\frac{P \cos \alpha - 2 X \sin \alpha}{2 \sin (\beta - \alpha)}$	$\frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}$
3	F_3	$\frac{l \sin (\beta - \alpha)}{2 \cos \alpha \cos \beta}$	E_3	$\frac{P \cos \beta - 2 X \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} \sin \alpha$	$-\frac{2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}$

Zatem, na mocy pierwszego twierdzenia Menabrea:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial X} = \sum \frac{S}{EF} \frac{\partial S}{\partial X} = & \frac{Xl}{E_0 F_0} - \frac{P \cos \beta - 2X \sin \beta}{2 \sin^2(\beta - \alpha)} \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \frac{l}{E_1 F_1} - \\ & - \frac{P \cos \alpha - 2X \sin \alpha}{2 \sin^2(\beta - \alpha)} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \frac{l}{E_2 F_2} - \\ & - \frac{P \cos \beta - 2X \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} \frac{\sin^2 \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \frac{l}{E_3 F_3} = 0 \end{aligned}$$

równanie, dające bezpośrednio X .

c. Odkształcenia ustroju. Punkt przyłożenia siły zewnętrznej P przemieszcza się przy odkształceniach ustroju. Chcąc to przemieszczenie wyznaczyć, wyrażamy pracę sprężystą ustroju w zależności od składowych: P_x, P_y, P_z tej siły i pozostałych sił obciążenia zewnętrznego. Drugie twierdzenie Castigliano da:

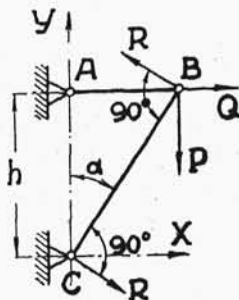
$$\frac{\partial H}{\partial P_x} = p_x \quad \frac{\partial H}{\partial P_y} = p_y \quad \frac{\partial H}{\partial P_z} = p_z$$

składowe szukanego przemieszczenia.

Zupełnie tak samo wyznaczyć możemy przemieszczenie dowolnie obranego punktu ustroju, czyniąc zeń punkt przyłożenia *dodatkowej* siły P . Składowe owego przemieszczenia otrzymamy z tych samych wzorów, trzeba w nich jednak, po znalezieniu pochodnych cząstkowych, — nadać dodatkowej sile P , w istocie nieistniejącej — właściwą wartość — równą zeru. Gdy P oznacza moment, jako uogólnioną siłę zewnętrzną ustroju, składowe posunięcia p_x, p_y, p_z dają znikome obroty długostek, wyprowadzonych z punktu przyłożenia tego momentu prostopadłe do osi jego składowej odpowiedniej.

Tak np. (Rys. 98) ustrój, złożony z dwóch nieważkich prętów pp i trzech węzłów wp jest izostatyczny. Na węzeł B działa pionowa siła P . Chcemy znaleźć posunięcia tego węzła: pionowe p i poziome q , a nadto — kąt n obrotu pręta CB około przegubu C . W tym celu przykładamy do węzła B poziomą siłę Q — do węzłów C, B pręta CB dwie różn zwrotne siły R , do tego pręta prostopadłe, dające moment:

$$N = \frac{Rh}{\cos \alpha}$$



Rys. 98.

Jak wyżej, zwykłymi sposobami statyki otrzymamy:

PRĘT	Nr	F_l	l_l	E_l	S_l
AB	1	F_1	$h \operatorname{tg} \alpha$	E_1	$Q + P \operatorname{tg} \alpha - \frac{R}{\cos \alpha} = Q + P \operatorname{tg} \alpha - \frac{N}{h}$
BC	2	F_2	$\frac{h}{\cos \alpha}$	E_2	$-\frac{P}{\cos \alpha} + R \operatorname{tg} \alpha = -\frac{P}{\cos \alpha} + \frac{N \sin \alpha}{h}$

skąd bezpośrednio:

$$H = \left(Q + P \operatorname{tg} \alpha - \frac{N}{h} \right)^2 \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{2 E_1 F_1} + \left(-\frac{P}{\cos \alpha} + \frac{N \sin \alpha}{h} \right)^2 \frac{h}{2 E_2 F_2 \cos \alpha}$$

i ostatecznie:

$$p = \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_0 = \frac{Ph}{E_1 F_1} \operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{Ph}{E_2 F_2 \cos^3 \alpha} \quad q = \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \right)_0 = \frac{Ph}{E_1 F_1} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$n = \left(\frac{\partial H}{\partial N} \right)_0 = - \left(\frac{P \operatorname{tg}^2 \alpha}{E_1 F_1} + \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{E_2 F_2 \cos \alpha} \right)$$

gdzie dolny zerowy wskaźnik oznacza przynależność pochodnych, w nawiasy ujętych, — zerowym wielkościom sił dodatkowych Q, N . Ujemny znak ostatniego wzoru wskazuje na różnozwrotność obrotu n i obranej pary sił R -lewoskrętnej: znikomy obrót pręta CB jest prawoskrętny — z biegiem wskazówki zegara.

5. **Twierdzenia Betti i Mohr'a** dają również praktycznie nader cenne wyniki.

a. **Odpory hyperstatyczne.** Po wyróżnieniu odpórów hyperstatycznych O_h z warunkowych równań równowagi całego ustroju, hyperstatycznego zewnątrznie, możemy podpory, dające owe O_h odrzucić, a działania ich zastąpić siłami O_h zewnątrznie, narazie niewiadomymi. Zatem podstawowy układ obciążenia obejmuje: m niezależnych sił zewnętrznych P_l i dodatkowych a zastępczych sił O_h . Posunięcia sił P_l oznaczamy przez p_l ; posunięcia sił O_h , zerowe dla podpór sztywnych, dla sprężystych równe są:

$$-o_h O_h$$

gdzie o_h oznacza odpowiedni współczynnik sprężystości podpory. Dla sztywnej — o_h jest równe zero.