

Biorąc pod uwagę współrzędne punktów podparcia, otrzymamy:

$$C + M_A L = 0 \quad D + CL + \frac{1}{2} M_A L^2 = 0$$

$$C - \frac{1}{2} V_A L^2 - \frac{1}{2} P l^2 = 0 \quad D + \frac{1}{6} V_A L^3 + \frac{1}{6} P l^3 = 0$$

Stąd bezpośrednio:

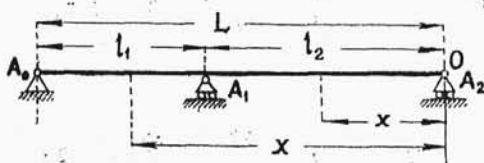
$$C = -\frac{Pl^2}{L}(L-l) \quad D = \frac{Pl^2}{2}(L-l)$$

$$V_A = -\frac{P}{L^3} l^2 (3L-2l) \quad M_A = \frac{P}{L^2} l^2 (L-l)$$

Tuż przed punktem przyłożenia siły P panuje skrajny moment zginający:

$$M_p = M_A + V_A(L-l) = -\frac{2Pl^2}{L^3}(L-l)^2$$

6. Belka dwuprzęsłowa o stałym przekroju (Rys. 74) na podporach: przegubowej i dwóch posuwnych. Obciążenie pionowe



Rys. 74.

płaskie. Kierunek (w) wzrostu jego wypadkowych — różnowrotny z osią X . Belka nie wystaje poza skrajne punkty podparcia.

a. Podpory niesprężyste. Punkty podparcia na jednym poziomie. Stałe obciążenie q jednostkowe na całej długości L belki. Wobec zerowych wielkości skrajnych momentów M_0 i M_2 wzór (125) daje:

$$0 = 2LM_1 - \frac{1}{4} q(l_1^3 + l_2^3)$$

$$M_1 = \frac{q}{8L}(l_1^3 + l_2^3) = V_0 l_1 + \frac{1}{2} q l_1^2 \quad V_0 = -\frac{q}{8l_1}(3l_1^2 + l_1 l_2 - l_2^2)$$

$$M_1 = V_2 l_2 + \frac{1}{2} q l_2^2 \quad V_2 = \frac{q}{8l_2}(l_1^2 - l_1 l_2 - 3l_2^2)$$

Nadto wzór (131) daje

$$V_1 = -\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) M_1 - \frac{1}{2} qL = -\frac{qL}{8l_1 l_2}(L^2 + l_1 l_2)$$

Wzory (123—125) wypisane dla przęseł: $(L-x)$, $(x-l_2)$, (l_2-x) lub (x) dadzą rzędne y, y' bieżącego punktu odkształconej.

Ta sama belka, lecz inaczej obciążona: w przęśle (1) działa siła P w poziomej odległości a od lewego punktu podparcia. W przęśle (2) działa moment N w poziomej odległości b od — prawego. Zatem wzór Clapeyron'a (125) daje:

$$0 = 2LM_1 - \frac{P}{l_1} a (l_1^2 - a^2) - \frac{N}{l_2} (l_2^2 - 3b^2)$$

Z równań statyki mamy:

$$V_0 = \frac{M_1}{l_1} - \frac{P}{l_1} (l_1 - a) \quad V_1 = -\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) M_1 - \frac{P}{l_1} a - \frac{N}{l_2}$$

$$V_2 = \frac{M_1}{l_2} + \frac{N}{l_2}$$

b. Podpory niesprężyste. Punkty podparcia na różnych poziomach. Obciążenie pionowe w płaszczyźnie głównej XY bezwładności belki. Dla takiej samej belki, o tych samych punktach podparcia, lecz nie na jednym poziomie, przy tem samem obciążeniu — wzór (122) lub (125) daje:

$$0 = 2LM_1 + S$$

gdzie przez S oznaczono dalsze wyrazy, zależne tylko od obciążenia zewnętrznego i odległości poziomych. Zatem S się nie zmienia, gdy rzędne y_0, y_1, y_2 punktów podparcia znikomo się różnią od zera. W tym ogólniejszym przypadku ten sam wzór da:

$$6EJ \left(\frac{y_0 - y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_1}{l_2} \right) = 2L(M_1 + M_1') + S$$

Stąd przyrost:

$$M_1' = \frac{3EJ}{L} \left(\frac{y_0 - y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_1}{l_2} \right)$$

zależny tylko od rzędnych punktów podparcia.

Siły odporowe pionowe również będą miały przyrosty, zależne tylko od M_1' :

$$V_0 = \frac{M_1'}{l_1} \quad V_1 = -\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) M_1' \quad V_2 = \frac{M_1'}{l_2}$$

e. Podpory sprężyste. Punkty podparcia na różnych poziomach pierwotnych: $(y_0)_0, (y_1)_0, (y_2)_0$. Obciążenie pionowe

w płaszczyźnie głównej XY bezwładności belki. Tutaj więc:

$$6 EJ \left(\frac{y_0 - y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_1}{l_2} \right) = 2 LM_1 + S$$

a nadto z równań statyki oraz (132): otrzymamy wszystkie nie-
wiadome. Tak np. belka o stałym przekroju, pozioma, końcami
wsparta na podporach niesprężystych: lewej posuwnej i prawej
przegubowej. Pośrodku belki pionowa siła P działa na punk-
cie podparcia podpory posuwnej, sprężystej. Zatem:

$$y_0 = y_2 = 0 \quad l_1 = l_2 = \frac{1}{2} L \quad y_1 = (y_1)_0 - \frac{V_1}{c}$$

$$6 EJ \left(\frac{-y_1}{\frac{1}{2} L} + \frac{-y_1}{\frac{1}{2} L} \right) = 2 LM_1$$

Stąd bezpośrednio:

$$y_1 = -\frac{L^2}{12 EJ} M_1 = (y_1)_0 - \frac{V_1}{c} \quad V_1 = -\left(\frac{1}{\frac{1}{2} L} + \frac{1}{\frac{1}{2} L} \right) M_1 - P$$

$$M_1 = -\frac{P}{\frac{4}{L} + \frac{cL^2}{12 EJ}} \quad V_1 = \frac{(y_1)_0 - \frac{PL^3}{48 EJ}}{c + \frac{L^3}{48 EJ}} \quad V_0 = V_2 = 2 \frac{M_1}{L}$$

Siła odporowa V_1 środkowej podpory *jednostronnego działa-*
nia od spodu może być tylko ujemna, zatem — środkowy punkt
odkształconej jest istotnym punktem podparcia tylko wtedy, gdy:

$$(y_1)_0 < \frac{PL^3}{48 EJ}$$

Łatwo to dostrzec, zważywszy, że prawa część tej nierówności
stanowi wyraz środkowego skrajnego ugięcia belki — bez środ-
kowej podpory.

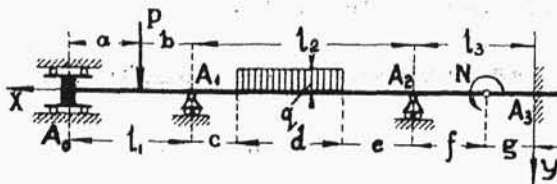
7. Belka trójpłaszczyznowa (Rys. 75) o stałym przekroju. Pod-
pory niesprężyste: prawa — stała, lewa — łożyskowa, obie pośred-
nie — posuwne. Wszystkie punkty podparcia leżą na osi X .
Moment odporowy lewy oznaczmy przez W_0 — prawy przez W_3 .
Zatem:

$$M_0 = W_0 \quad M_3 + W_3 = 0$$

Wzór Clere'a (124), wypisany dla przęsła (1) daje:

$$0 = 2l_1M_0 + l_1M_1 - \frac{Pb}{l_1}(l_1^2 - b^2)$$

Wzór Clere'a (123), wypisany dla przęsła (3):



Rys. 75.

$$0 = l_3M_2 + 2l_3M_3 - \frac{N}{l_3}(3f^2 - l_3^2)$$

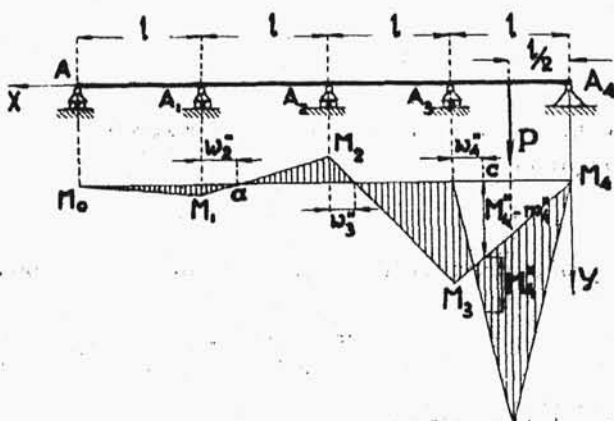
Równanie Clapeyron'a (125), wypisane dla przęsła: (1) i (2) oraz (2) i (3) daje:

$$0 = l_1M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2M_2 - \frac{P}{l_1}a(l_1^2 - a^2) - \frac{q}{4l_2}[(d + e)^2 - e^2][2l_2^2 - (d + e)^2 - e^2]$$

$$0 = l_2M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 + l_3M_3 - \frac{N}{l_3}(l_3^2 - 3g^2) - \frac{q}{4l_3}[(c + d)^2 - c^2][2l_3^2 - (c + d)^2 - c^2]$$

Z powyższych równań wyznaczymy: M_0, M_1, M_2, M_3 . Siły odporowe — z równań statyki. Rzędne y, y' odkształconej — z równań Clere'a i Clapeyron'a.

8. Belka czteroprzęsłowa. (Rys. 76) o stałym przekroju. Podpory niesprężyste: prawa przegubowa — pozostałe — posuwne. Punkty podparcia na osi X . Pozioma długość wszystkich przęseł międzypodporowych jednokowa: l . Inaczej mówiąc punkty podparcia, lub podpory są równo odległe. Pośrodku przęsła prawego działa pionowa siła P .



Rys. 76.

Wzór Clapeyron'a (125), wypisany kolejno dla przęseł (1) i (2), (2) i (3) oraz (3) i (4) da:

$$\begin{aligned} M_0 = M_4 = 0 \quad 0 = 4IM_1 + IM_2 \quad 0 = IM_1 + 4IM_2 + IM_3 \\ 0 = IM_2 + 4IM_3 - \frac{P}{l} \frac{l}{2} \left(l^2 - \frac{l^2}{4} \right) \end{aligned}$$

Stąd bezpośrednio:

$$M_1 = \frac{3}{448} Pl \quad M_2 = -\frac{3}{112} Pl \quad M_3 = \frac{45}{448} Pl$$

Równania statyki dadzą:

$$\begin{aligned} V_0 = \frac{3}{448} P \quad V_1 = -\frac{9}{224} P \quad V_2 = \frac{9}{56} P \\ V_3 = -\frac{163}{224} P \quad V_4 = -\frac{179}{448} P \end{aligned}$$

To samo otrzymamy ze wzoru (135). Lewy punkt podparcia będzie wytycznym dla przęsła (1). Następne wytyczne punkty a, b, c przęseł (2), (3), (4) otrzymamy kolejno ze wzoru:

$$\begin{aligned} w_1' = l \quad l + \frac{l^2}{w_2''} = 6l \quad w_2'' = \frac{1}{5} l \\ w_2' = \frac{4}{5} l \quad \frac{5l}{4} + \frac{l^2}{w_3''} = 6l \quad w_3'' = \frac{4}{19} l \\ v_3' = \frac{15}{19} l \quad \frac{19l}{15} + \frac{l^2}{w_4''} = 6l \quad w_4'' = \frac{15}{71} l \end{aligned}$$

Wobec braku zewnętrznego obciążenia w trzech pierwszych przęsłach:

$$M_2'' = M_3'' = m_2'' = m_3'' = 0$$

a przeto wzór (135), wypisany dla dwóch ostatnich przęseł da:

$$0 = \frac{M_4'' - m_4''}{w_4''} l^2 - \frac{P}{l} \frac{l}{2} \left(l^2 - \frac{l^2}{4} \right)$$

Stąd bezpośrednio:

$$M_4'' - m_4'' = \frac{45}{568} Pl$$

Nadto z podobieństwa trójkątów wykresu momentów:

$$M_3 = \frac{M_4'' - m_4''}{l - w_4''} l = \frac{45}{448} Pl \quad M_2 = -M_3 \frac{w_3''}{l - w_3''} = -\frac{3}{112} Pl$$

$$M_1 = -M_2 \frac{w_2''}{l - w_2''} = \frac{3}{448} Pl$$

9. **Belki wieloprzęsłowe na podporach niesprężystych.** Punkty podparcia, uszeregowane mniej—więcej poziomo w pierwotnych, zresztą znikomych odległościach $(y_i)_0$ od poziomej osi X belki nieodkształconej. Obciążenie pionowe w płaszczyźnie głównej XY bezwładności belki. Kierunek (w) wzrostu jego wypadkowych — różnozwrotny z osią X .

Wyznaczanie niewiadomych odporów momentów i rzędnych odkształconej sprowadza się, jak wiemy, do rozwiązywania układu równań Clerc'a i Clapeyron'a. Równania Clerc'a wiążące po dwa niewiadome momenty nie dają żadnych trudności; równania Clapeyron'a — są zawsze żmudne, zwłaszcza przy większej liczbie przęseł międzypodporowych belki.

Wyodrębnijmy dwa sąsiednie przęsła $(i), (i+1)$ międzypodporowe i wypiszmy dla nich wzór Clapeyron'a:

$$F(i) = a_i M_{i-1} + 2b_i M_i + M_{i+1} = Y_i + S_i$$

gdzie przez Y_i oznaczono wyrazy, zależne tylko od rzędnych: $(y_{i-1})_0, (y_i)_0, (y_{i+1})_0$ punktów podparcia: $i-1, i, i+1$; przez S_i — wyrazy, zależne bezpośrednio, od obciążenia zewnętrznego obu przęseł. Lewa część wzoru stanowi funkcję liniową trzech kolejnych momentów zginających. Moment M_i , panujący tuż przed punktem podparcia i wyrażamy wzorem ogólnym:

$$M_i = Ar^i + B s^i + C_i$$

gdzie przez A, B oznaczono dowolne stałe. Po podstawieniu otrzymamy:

$$F(i) = A(r^2 + 2b_i r + a_i) r^{i-1} + B(s^2 + 2b_i s + a_i) s^{i-1} +$$

$$+ a_i C_{i-1} + 2b_i C_i + C_{i+1} = Y_i + S_i$$

Temu równaniu niewątpliwie zadosyć uczynimy, biorąc:

$$r = -b_i + \sqrt{b_i^2 - a_i} \quad s = -b_i - \sqrt{b_i^2 - a_i}$$

$$a_i C_{i-1} + 2b_i C_i + C_{i+1} = Y_i + S_i$$

Zatem r, s spełniają równanie:

$$x^2 + 2b_1 x + a_1 = 0$$

a układ wszystkich C_i stanowi jakiekolwiek szczególne rozwiązanie równań Clapeyron'a, wypisanych dla całej belki.

a. Belka o stałym przekroju na niesprężystych podporach równoodległych. Wszystkie podpory posuwne z wyjątkiem *prawej* — przegubowej. Punkty podparcia leżą na osi X belki nieodkształconej. Belka obustronnie kończy się w skrajnych punktach podparcia i dźwiga na całej długości — stałe obciążenie jednostkowe q .

Idąc w kierunku (w) wzrostu wypadkowych tego obciążenia oznaczamy kolejne punkty podparcia od *zerowego* skrajnego lewego do skrajnego *prawego* w . Wzór Clapeyron'a dla przęseł (i), ($i+1$) daje:

$$F(i) = M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{1}{2} q l^2$$

gdzie przez l oznaczono stałą długość przęseł międzypodporowych.

Ogólny wzór:

$$M_i = A r^i + B s^i + C_i$$

daje dla skrajnych punktów podparcia:

$$M_0 = A + B + C_0 = 0 \quad M_w = A r^w + B s^w + C_w = 0$$

równania, określające stałe A, B . Nadto ze wzoru Clapeyron'a:

$$r = -2 + \sqrt{3} \quad s = -2 - \sqrt{3}$$

$$C_{i-1} + 4C_i + C_{i+1} = \frac{1}{2} q l^2$$

Najprostsze rozwiązanie szczególne układu równań Clapeyron'a otrzymamy, biorąc:

$$C_i = \frac{1}{12} q l^2$$

a przeto:

$$M_i = \frac{1}{12} q l^2 \left(1 - \frac{r^i + r^{w-i}}{r^w + 1} \right)$$

Ze wzoru (128):

$$V_i = (M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}) \frac{1}{l} = q l$$

otrzymamy po uwzględnieniu równania Clapeyron'a:

$$V_i = -\frac{1}{2}ql - \frac{6}{l}M_i$$

a nadto:

$$V_0 = V_w = \frac{M_1}{l} - \frac{1}{2}ql$$

Powyższe wzory dają:

w	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	Liczby obok podane mpożyć przez ql^2	
10	$\frac{153}{1448}$	$\frac{14}{181}$	$\frac{123}{1448}$	$\frac{15}{181}$	$\frac{121}{1448}$		
9	$\frac{28}{265}$	$\frac{41}{530}$	$\frac{9}{106}$	$\frac{22}{265}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{8}$	2
8	$\frac{41}{388}$	$\frac{15}{194}$	$\frac{33}{388}$	$\frac{8}{97}$	$-\frac{11}{10}$	$-\frac{2}{5}$	3
7	$\frac{15}{142}$	$\frac{11}{142}$	$\frac{6}{71}$	$-\frac{13}{14}$	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{11}{28}$	4
6	$\frac{11}{104}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{9}{104}$	$-\frac{37}{38}$	$-\frac{43}{38}$	$-\frac{15}{38}$	5
5	$\frac{2}{19}$	$\frac{3}{38}$	$-\frac{53}{52}$	$-\frac{25}{26}$	$-\frac{59}{52}$	$-\frac{41}{104}$	6
4	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{14}$	$-\frac{143}{142}$	$-\frac{137}{142}$	$-\frac{161}{142}$	$-\frac{28}{71}$	7
3	$\frac{1}{10}$	$-\frac{193}{194}$	$-\frac{98}{97}$	$-\frac{187}{194}$	$-\frac{110}{97}$	$-\frac{153}{388}$	8
2	$\frac{1}{8}$	$-\frac{529}{530}$	$-\frac{107}{106}$	$-\frac{511}{530}$	$-\frac{601}{530}$	$-\frac{209}{530}$	9
Mno- żyć przez ql	$-\frac{725}{724}$	$-\frac{361}{362}$	$-\frac{731}{724}$	$-\frac{349}{362}$	$-\frac{821}{724}$	$-\frac{571}{1448}$	10
	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1	V_0	w

b. Belka ta sama, lecz inaczej obciążona. Jedno z jej przęseł „zerowe“ dźwiga pionowe obciążenie płaskie. Punkty podparcia tego przęsła oznaczamy: lewy przez 0, prawy przez 0', dalsze *lewe* kolejno przez 1, 2, ..., aż do skrajnego m ; dalsze *prawe* przez: 1', 2', ..., aż do skrajnego n . Wobec braku obciążenia zewnętrznego we wszystkich przęsłach, prócz zerowego — zakładamy, że wszystkie C_i, C_i' mają wartości zerowe, a przeto:

$$M_i = Ar^i + Bs^i \quad i = m, m-1, \dots, 2, 1, 0$$

$$M_i' = A'r^i + B's^i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$$

zatem dla skrajnych punktów podparcia:

$$\begin{aligned} M_m = Ar^m + Bs^m & \quad M_n = A'r^n + B's^n & B = -A \frac{r^m}{s^m} \\ B' = -A' \frac{r^n}{s^n} \end{aligned}$$

Wzór Clapeyron'a (125) wypisany dla przęseł (1), (0) oraz (0), (1') da:

$$M_1 + 4M_0 + M_0' = S \quad M_0 + 4M_0' + M_1' = R$$

Tutaj przez lR, lS oznaczono dalsze wyrazy, zależne tylko od obciążenia przęsła zerowego, jednego z dwóch objętych wzorem: S — jako *prawego*, R — jako *lewego*.

Ten sam wzór daje dla przęseł pozostałych:

$$M_{i+1} + 4M_i + M_{i-1} = 0 \quad M_{i-1}' + 4M_i' + M_{i+1}' = 0$$

a przeto:

$$\begin{aligned} R = M_0 - M_{-1}' &= A + B - A'r^{-1} - B's^{-1} = -A \frac{r^m - s^m}{s^m} + \\ &+ A' \frac{r^{n+1} - s^{n+1}}{s^n} \\ S = M_0' - M_{-1} &= A' + B' - Ar^{-1} - B's^{-1} = A \frac{r^{m+1} - s^{m+1}}{s^m} - \\ &- A' \frac{r^n - s^n}{s^n} \end{aligned}$$

Stąd ostatecznie dla momentów lewych i prawych:

$$M_l = \frac{R(r^{n+1} - s^{n+1}) + S(r^{n+1} - s^{n+1})}{(r^{n+1} - s^{n+1})(r^{n+1} - s^{n+1}) - (r^m - s^m)(r^n - s^n)} (s^{m-l} - r^{m-l})$$

$$M_l' = \frac{R(r^{m+1} - s^{m+1}) + S(r^m - s^m)}{(r^{m+1} - s^{m+1})(r^{n+1} - s^{n+1}) - (r^m - s^m)(r^n - s^n)} (s^{n-l} - r^{n-l})$$

Tak np. dla siły pionowej P , działającej w poziomej odległości al od lewego punktu podparcia przesła zerowego, oraz bl — od prawego:

$$S = -\frac{P}{l^2} bl(l^2 - b^2 l^2) = -Plb(1 - b^2)$$

$$R = -\frac{P}{l^2} al(l^2 - a^2 l^2) = -Pla(1 - a^2)$$

Dla stałego obciążenia jednostkowego q , pokrywającego całe przesło zerowe:

$$S = R = -\frac{1}{4}ql^2$$

Nadto, jak wyżej:

$$r = -2 + \sqrt{3} \quad s = -2 - \sqrt{3}$$

przyczem:

$$\begin{aligned} r - s &= 2\sqrt{3} & r^2 - s^2 &= -8\sqrt{3} & r^3 - s^3 &= 30\sqrt{3} \\ r^4 - s^4 &= -112\sqrt{3} & r^5 - s^5 &= 418\sqrt{3} & r^6 - s^6 &= -1560\sqrt{3} \\ r^7 - s^7 &= 5822\sqrt{3} & r^8 - s^8 &= -21728\sqrt{3} & r^9 - s^9 &= 81090\sqrt{3} \\ r^{10} - s^{10} &= -302632\sqrt{3} \end{aligned}$$

e. Belka nieskończenie długa o stałym przekroju na niesprężystych podporach równoodległych. Wszystkie podpory posuwne — z wyjątkiem jednej — przegubowej. Punkty podparcia leżą na osi X — belki nieodkształconej. Jedno z przesła „zerowe“ dźwiga pionowe obciążenie płaskie. Punkty podparcia tego przesła oznaczamy: lewy przez 0, prawy przez 0'; dalsze lewe przez: 1, 2, ..., ∞ dalsze prawe przez: 1', 2', ..., ∞ .

W skrajnych punktach podparcia momenty zginające są niewątpliwie równe zeru, a przeto wzory ogólne dla lewych i prawych momentów:

$$M_l = Ar^l \quad M_l' = A'r^l \quad i = 1, 2, \dots, \infty$$

nie mogą mieć wyrazów, zawierających:

$$s^i = (-2 - \sqrt{3})^i$$

a więc rosnących wraz z i nieograniczenie. Stałe B i B' są przeto równe zeru.

Wzór Clapeyron'a wypisany dla przęseł (1) i (0) oraz (0) i (1') daje:

$$M_1 + 4M_0 + M_0' = M_0' - M_{-1} = A' - Ar^{-1} = S$$

$$M_0 + 4M_0' + M_1' = M_0 - M_{-1}' = A - A'r^{-1} = R$$

i ostatecznie dla momentów zginających, lewych i prawych:

$$M_l = \frac{Rr + S}{r^2 - 1} r^{l+1} \quad M_l' = \frac{R + Sr}{r^2 - 1} r^{l+1}$$

gdzie, jak wyżej:

$$r = -2 + \sqrt{3}$$

$$r^2 = 7 - 4\sqrt{3} \quad r^3 = 15\sqrt{3} - 26 \quad r^4 = 97 - 56\sqrt{3}$$

$$r^5 = 209\sqrt{3} - 362 \quad r^6 = 1351 - 780\sqrt{3} \quad r^7 = 2911\sqrt{3} - 5042$$

$$r^8 = 18817 - 10864\sqrt{3} \quad r^9 = 40545\sqrt{3} - 70226$$

$$r^{10} = 262087 - 151316\sqrt{3}$$

10. Belki wieloprzęsłowe na podporach sprężystych. Punkty podparcia uszeregowane mniejwięcej poziomo w pierwotnych, zresztą znikomych odległościach $(y_l)_0$ od poziomej osi X belki nieodkształconej. Obciążenie pionowe w płaszczyźnie głównej XY bezwładności belki. Kierunek (w) wzrostu jego wypadkowych jest różnowrotny z osią X belki nieodkształconej.

a. Belka dwuprzęsłowa o stałym przekroju, końcami wsparta na sprężystych podporach — przegubowej i posuwnej. Trzecia sprężysta podpora — posuwna. Pionowa siła P działa w drugim przęśle w odległości bl_2 od skrajnego prawego punktu podparcia. Wzór Clapeyron'a (125) daje tu:

$$M_0 = M_2 = 0 \quad 6EJ \left(\frac{y_0 - y_1}{L_1} + \frac{y_2 - y_1}{L_2} \right) = 2(L_1 + L_2)M_1 - \\ - Plb(1 - b^2)$$

Nadto:

$$y_0 = (y_0)_0 - \frac{V_0}{c_0} \quad y_1 = (y_1)_0 - \frac{V_1}{c_1} \quad y_2 = (y_2)_0 - \frac{V_2}{c_2}$$

przezem:

$$V_0 = \frac{M_1}{l_1} \quad V_1 = -\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)M_1 - Pb \quad V_2 = \frac{M_1}{l_2} - P(1-b)$$

b. Belka o stałym przekroju na sprężystych podporach równoodległych. Wszystkie podpory są posuwne z wyjątkiem prawej — przegubowej. Punkty podparcia leżą początkowo na osi X belki nieodkształconej. Belka kończy się obustronnie w skrajnych punktach podparcia. Jedno z jej przęseł „zerowe“ dźwiga pionowe obciążenie w płaszczyźnie XY . Punkty podparcia tego przęsła oznaczamy: lewy przez 0 i prawy przez 0'. Dalsze lewe oznaczamy kolejno przez 1, 2, ... aż do skrajnego n ; dalsze prawe — przez 1', 2', ... aż do skrajnego p .

Tuż przed punktami podparcia panują momenty zginające lewe M_l i prawe M'_l , przyczem niewątpliwie:

$$M_n = M'_p = 0$$

Wzór Clapeyron'a (125) daje kolejno:

$$\frac{6 EJ}{l^2}(y_n - 2 y_{n-1} + y_{n-2}) = 4 M_{n-1} + M_{n-2}$$

$$\frac{6 EJ}{l^2}(y_{n-1} - 2 y_{n-2} + y_{n-3}) = M_{n-1} + 4 M_{n-2} + M_{n-3}$$

$$\frac{6 EJ}{l^2}(y_{l+1} - 2 y_l + y_{l-1}) = M_{l+1} + 4 M_l + M_{l-1}$$

$$\frac{6 EJ}{l^2}(y_1 - 2 y_0 + y_{0'}) = M_1 + 4 M_0 + M_0' + S$$

$$\frac{6 EJ}{l^2}(y_0 - 2 y_{0'} + y_{1'}) = M_0 + 4 M_0' + M_1' + R$$

$$\frac{6 EJ}{l^2}(y_{p-3'} - 2 y_{p-2'} + y_{p-1'}) = M'_{p-3} + 4 M'_{p-2} + M'_{p-1}$$

$$\frac{6 EJ}{l^2}(y_{p-2'} - 2 y_{p-1'} + y_{p'}) = M'_{p-2} + 4 M'_{p-1}$$

Tutaj, jak wyżej, przez lR, lS oznaczono wyrazy, zależne od obciążenia przęsła zerowego, jednego z dwóch, objętych wzorem Clapeyron'a: przytem lR — jako *lewego*, lS — jako *prawego*.

Równania statyki dadzą przy współczynniku sprężystości c — stałym dla wszystkich podpór:

$$V_n = -cy_n = \frac{M_{n-1}}{l} \quad V_{n-1} = -cy_{n-1} = -\frac{2}{l} M_{n-1} + \frac{M_{n-2}}{l}$$

$$V_l = -cy_l = \frac{M_{l+1}}{l} - \frac{2}{l} M_l + \frac{M_{l-1}}{l}$$

$$V_0 = -cy_0 = \frac{M_1}{l} - \frac{2}{l} M_0 + \frac{M_0'}{l} + v_0$$

$$V_0' = -cy_0' = \frac{M_0}{l} - \frac{2}{l} M_0' + \frac{M_1'}{l} + v_0'$$

$$V_l' = -cy_l' = \frac{M_{l+1}'}{l} - \frac{2}{l} M_l' + \frac{M_{l-1}'}{l}$$

$$V_{p-1} = -cy_{p-1} = \frac{M_{p-2}}{l} - \frac{2}{l} M_{p-1} \quad V_p' = -cy_{p'} = \frac{M_{p-1}'}{l}$$

Tutaj przez v_0 i v_0' oznaczono pionowe siły odporowe lewego i prawego punktu podparcia przęsła zerowego, wyciętego z belki i ustawionego na podporach: przegubowej i posuwnej — z zachowaniem tego samego obciążenia pionowego płaskiego.

Zatem, po wprowadzeniu oznaczenia:

$$m = \frac{cl^3}{6 EJ}$$

i wyrugowaniu rzędnych wszystkich punktów podparcia otrzymamy:

$$2(2m+3)M_{n-1} + (m-4)M_{n-2} + M_{n-3} = 0$$

$$(m-4)M_{n-1} + 2(2m+3)M_{n-2} + (m-4)M_{n-3} + M_{n-4} = 0$$

$$F(i) = M_{l+2} + (m-4) M_{l+1} + 2(2m+3) M_l + \\ + (m-4) M_{l-1} + M_{l-2} = 0$$

$$M_3 + (m-4) M_2 + 2(2m+3) M_1 + (m-4) M_0 + M_0' = -lv_0 \\ M_2 + (m-4) M_1 + 2(2m+3) M_0 + (m-4) M_0' + M_1' = \\ = 2lv_0 - lv_0' - mS \\ M_1 + (m-4) M_0 + 2(2m+3) M_0' + (m-4) M_1' + M_2' = \\ = 2lv_0' - lv_0 - mR \\ M_0 + (m-4) M_0' + 2(2m+3) M_1' + (m-4) M_2' + M_3' = -lv_0'$$

$$F'(i) = M'_{l+2} + (m-4) M'_{l+1} + 2(2m+3) M'_l + \\ + (m-4) M'_{l-1} + M'_{l-2} = 0$$

$$M'_{p-4} + (m-4) M'_{p-3} + 2(2m+3) M'_{p-2} + (m-4) M'_{p-1} = 0 \\ M'_{p-3} + (m-4) M'_{p-2} + 2(2m+3) M'_{p-1} = 0$$

Biorąc ogólne wzory dla momentów lewych i prawych:

$$M_l = [A \sin(ri) + B \cos(ri)] e^{-st} + [C \sin(ri) + D \cos(ri)] e^{st} \\ M'_l = [A' \sin(ri) + B' \cos(ri)] e^{-st} + [C' \sin(ri) + D' \cos(ri)] e^{st}$$

uczynimy zadość równaniom $F(i)$, $F'(i)$ przy zupełnie dowolnych stałych $A, B, C, D, A', B', C', D'$ o ile r, s wyznaczymy z równań:

$$\cos(2r) \coth(2s) + (m-4) \cos(r) \coth(s) + 2m+3 = 0 \\ \sin(2r) \sinh(2s) + (m-4) \sin(r) \sinh(s) = 0$$

Łatwo się o tem przekonać, zbierając wyrazy z $A, B, C, D, A', B', C', D'$ po podstawieniu M_l lub M'_l w $F(i)$ lub $F'(i)$.

Drugie równanie, wobec

$$\sinh(2s) = \frac{e^{2s} - e^{-2s}}{2} = 2 \frac{e^s + e^{-s}}{2} \frac{e^s - e^{-s}}{2} = 2 \coth(s) \sinh(s)$$

daje po skróceniu przez $\sin(r) \sinh(s)$:

$$\cos(r) \coth(s) = 1 - \frac{1}{4} m$$

a przeto z pierwszego:

$$\cos(2r) \operatorname{coh}(2s) = \frac{1}{4} m^2 - 4m + 1$$

Dalej mamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} m^2 - 4m + 1 &= [2 \cos^2(r) - 1][2 \operatorname{coh}^2(s) - 1] = 4 \cos^2(r) \operatorname{coh}^2(s) - \\ &- 2[\cos^2(r) + \operatorname{coh}^2(s)] + 1 = \frac{1}{4}(m - 4)^2 + 1 - 2[\cos^2(r) + \operatorname{coh}^2(s)] \end{aligned}$$

Stąd bezpośrednio:

$$\cos^2(r) + \operatorname{coh}^2(s) = m + 2$$

i ostatecznie:

$$\begin{aligned} \cos(r) &= \sqrt{1 + \frac{1}{8}m} - \sqrt{\frac{3}{8}m} \\ \operatorname{coh}(s) &= \sqrt{1 + \frac{1}{8}m} + \sqrt{\frac{3}{8}m} \end{aligned}$$

Do wyznaczenia ośmiu stałych $A, B, C, D, A', B', C', D'$ potrzeba tyluż równań warunkowych. Przedewszystkiem, wobec braku współników belki:

$$M_n = M_p = 0$$

Następnie, uwzględniając równanie: $F(n-1), F'(p-2)$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} 2(2m+3)M_{n-1} + (m-4)M_{n-2} + M_{n-3} &= \\ &= -(m-4)M_n - M_{n+1} = 0 \\ 2(2m+3)M'_{p-1} + (m-4)M'_{p-2} + M'_{p-3} &= \\ &= -(m-4)M'_p - M'_{p+1} = 0 \end{aligned}$$

Wreszcie, uwzględniając równania $F(1), F(0), F'(0), F'(1)$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} M'_0 - M_{-1} &= -lv_0 \quad (m-4)(M'_0 - M_{-1}) + \\ &+ M'_1 - M_{-2} = 2lv_0 - lv'_0 - mS \\ (m-4)(M_0 - M'_{-1}) + M_1 - M'_{-2} &= 2lv'_0 - lv_0 - mR \\ M_0 - M'_{-1} &= -lv'_0 \end{aligned}$$

Stąd ostatecznie — ośm równań warunkowych:

$$\begin{aligned} M_{n+1} = M_n = 0 & \quad M_0' - M_{-1} = -lv_0 \\ M_1' - M_{-2} = (m-2)lv_0 - lv_0' - mS \\ M_{p+1}' = M_p' = 0 & \quad M_0 - M_{-1}' = -lv_0' \\ M_1 - M_{-2}' = (m-2)lv_0' - lv_0 - mR \end{aligned}$$

z których wyznaczymy A, B, C, D, A', B', C' i D' .

c. Belka nieskończenie długa o stałym przekroju leży na sprężystych podporach równoodległych. Wszystkie podpory są posuwne, z wyjątkiem jednej — przegubowej. Punkty podparcia początkowo leżą na osi X belki nieodkształconej. Jedno z przęseł, „zerowe”, dźwiga pionowe obciążenia w płaszczyźnie głównej XY leżące. Punkty podparcia tego przęsła zerowego oznaczamy: lewy — przez 0, prawy — przez $0'$. Dalsze lewe kolejno przez: 1, 2 . . . ∞ dalsze prawe — przez: $1', 2' . . . \infty$.

Tuż przed punktami podparcia panują momenty lewe i prawe:

$$M_l = [A \sin(ri) + B \cos(ri)] e^{-st} \quad M_l' = [A' \sin(ri) + B' \cos(ri)] e^{-st}$$

Oba te wzory nie mogą mieć wyrazów zawierających e^{st} , jako rosnących wraz z i nieograniczenie. Stałe C, D, C' i D' są przeto równe zeru. Pozostałe, jak wyżej — wyznaczymy z równań warunkowych:

$$\begin{aligned} M_0' - M_{-1} = -lv_0 & \quad M_1' - M_{-2} = (m-2)lv_0 - lv_0' - mS \\ M_0 - M_{-1}' = -lv_0' & \quad M_1 - M_{-2}' = (m-2)lv_0' - lv_0 - mR \end{aligned}$$

w postaci:

$$\begin{aligned} A &= \frac{Be^s \cos(r) - B' - lv_0}{e^s \sin(r)} & A' &= \frac{B'e^s \cos(r) - B - lv_0'}{e^s \sin(r)} \\ B &= \frac{1}{8 \sinh(s)} \left(\frac{U}{\cosh(s) - \cos(r)} + \frac{V}{\cosh(s) + \cos(r)} \right) \\ B' &= \frac{1}{8 \sinh(s)} \left(\frac{U}{\cosh(s) - \cos(r)} - \frac{V}{\cosh(s) + \cos(r)} \right) \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} U &= [2e^s \cos(r) + e^{-2s} + m - 3]l(v_0 + v_0') - m(R + S) \\ V &= [2e^s \cos(r) + e^{-2s} + m - 1]l(v_0 - v_0') + m(R - S) \end{aligned}$$

Tak np. dla siły pionowej P , działającej w odległości al i bl od punktu podparcia 0 i 0':

$$v_0 = -Pb \quad v_0' = -Pa \quad S = -Plb(1-b^2) \quad R = -Pla(1-a^2)$$

(Przegląd Techniczny. R. 1926 str. 715).

P. Inż. Z. Wasiutyński ogłosił drukiem (P. T. r. 1927 str. 570) tablicę momentów, wystarczającą do obliczenia szyn.

11. Belki na sprężystym podłożu. Przekrój belki — stały. Stały współczynnik a sprężystości podłoża. Pierwotna oś X belki — pozioma. Obciążenie pionowe w płaszczyźnie głównej XY bezwładności belki. Kierunek (w) wzrostu jego wypadkowych różnowrotny z osią X .

Oznaczmy przez l odcięta punktu odkształconej, gdzie przyłożono siłę P pionową i poziomy moment N obciążenia zewnętrznego. Nadto w tym punkcie — granicznym dwóch obszarów: poprzedniego (p) i następnego (n) — obciążenia jednostkowe stałe q_p i q_n tych obszarów tworzą skończony skok: $q_p - q_n$. Ciągłość odkształconej wymaga, aby w punkcie granicznym (137):

$$y_p = Y_p + \frac{q_p}{a} = y_n = Y_n + \frac{q_n}{a}$$

$$y_p' = Y_p' + \frac{1}{a} \frac{dq_p}{dx} = y_n' = Y_n' + \frac{1}{a} \frac{dq_n}{dx}$$

Nadto (IX.A.8) przy przekraczaniu tego punktu w kierunku (w) siła ścinająca nagle wzrasta o P , a moment zginający o N ; a przeto:

$$y_p'' = \frac{M}{EJ} = \frac{4n^4}{a} M \quad y_n'' = \frac{M+N}{EJ} = \frac{4n^4}{a} (M+N)$$

$$y_p''' = -\frac{Q}{EJ} = -\frac{4n^4}{a} Q \quad y_n''' = -\frac{Q+P}{EJ} = -\frac{4n^4}{a} (Q+P)$$

Stąd ostatecznie odejmując:

$$Y_n - Y_p = \frac{1}{a} (q_p - q_n) \quad Y_n' - Y_p' = \frac{1}{a} \frac{d}{dx} (q_p - q_n)$$

$$y_n'' - y_p'' = \frac{4n^4}{a} N \quad y_n''' - y_p''' = -\frac{4n^4}{a} P$$