

Ostatni (39) warunek brzegowy jest niewątpliwie spełniony. Równania (38) dają:

$$R_y = R_z = M_x = 0$$

$$\int N_x dF = O_x \quad \int z N_x dF = M_y \quad \int y N_x dF = -M_z$$

a przeto założenie powyższe może być słuszne tylko przy obciążeniu płytki *osiowem*, lub *zginającym*.

Trzy ostatnie równania spełnimy, biorąc najprostszą, linjową zależność

$$N_x = \frac{O_x}{F} - \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

jako że dla osi głównych Y, Z pola F przekroju pręta momenty statyczne i odśrodkowy (I. B. 7) są równe zeru. Podstawienie w (40) daje bezpośrednio:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{O_x}{F} \right) + X = 0 \quad \frac{dM_y}{dx} = \frac{dM_z}{dx} = 0 \quad Y = Z = 0 \quad (42)$$

warunki konieczne słuszności poczynionych założeń.

C. Część trzecia.

1. Odształcenie podłużne. Wydłużenia główne:

$$e_1 = e_x \quad e_2 = e_3 = -\frac{e_x}{a} \quad a > 0$$

wyodrębniają *odkształcenie podłużne* w bieżącym punkcie. Przy tem odkształceniu wydłużenie *podłużne*, w kierunku osi głównej X kojarzy się z a -krotnie mniejszem wydłużeniem *poprzednem*, odwrotnego znaku, jednakowem we wszystkich kierunkach, prostopadłych do osi X . Łatwo to udowodnić, biorąc pod uwagę, że wzór (5) daje tu:

$$e = e_x \left(l^2 - \frac{1-l^2}{a} \right)$$

Rozszerzalność będzie:

$$e_0 = e_1 + e_2 + e_3 = \frac{a-2}{a} e_x$$

zatem przy odkształceniu podłużnem, objętość się nie zmienia gdy:

$$a = 2$$

Przy $a > 2$ rozszerzalność ma znak wydłużenia e_x : wydłużenie w kierunku osi głównej X kojarzy się z przyrostem objętości w bieżącym punkcie ciała odkształconego i naodwrot.

Wreszcie $-e_0, e_x$ są różnych znaków przy $a < 2$, zatem skróceniu w kierunku osi głównej X towarzyszy przyrost objętości i naodwrot.

2. Odkształcenie kątowe. Składowe odkształceń:

$$e_x = e_y = e_z = g_x = g_y = 0$$

cechują *odkształcenie kątowe* w bieżącym punkcie. Ze wzoru (5) wypływa:

$$e = g_z l m$$

Równanie (7):

$$e^3 - \frac{1}{4} g_z^2 e = 0$$

daje wydłużenia główne:

$$e_1 = \frac{1}{2} g_z \quad e_2 = -\frac{1}{2} g_z \quad e_3 = 0$$

przynależne kierunkom głównym:

$$l^2 = m^2 = \frac{1}{2} \quad n = 0$$

Wynika to wprost ze wzorów (9).

Rozszerzalność:

$$e_0 = e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

zatem odkształcenie kątowe nie daje zmian objętości miejscowych.

3. Płaski układ odkształceń. Dla płaskiego układu odkształceń

$$e_z = g_x = g_y = 0$$

nadto:

$$l = \cos \alpha \quad m = \sin \alpha \quad n = 0$$

zatem:

$$e = e_x \cos^2 \alpha + e_y \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} g_z \sin 2\alpha$$

Równanie: (7):

$$e^3 - (e_x + e_y) e^2 + (e_x e_y - \frac{1}{4} g_z^2) e = 0$$

daje naprężenia główne:

$$e_1 = \frac{1}{2} [e_x + e_y + \sqrt{(e_x - e_y)^2 + g_z^2}]$$

$$e_2 = \frac{1}{2} [e_x + e_y - \sqrt{(e_x - e_y)^2 + g_z^2}]$$

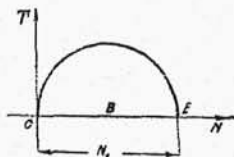
$$e_3 = 0$$

o kierunkach, czyniących zadość (9), stąd:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{g_z}{e_x - e_y}$$

4. Układ naprężeń osiowych. Naprężenia główne:

$$N_1 = N_x \quad N_2 = N_3 = 0$$



Rys. 22.

wyodrębniają układ *naprężeń osiowych*. Na wykresie (Rys. 22) Mohr'a punkty *K* leżą wszystkie na obwodzie półkola *OE*.

Na poletku *dF* o współczynnikach kierunkowych *l, m, n* panuje naprężenie:

$$p = p_x = N_x l$$

o składowych: normalnej i stycznej:

$$N = N_x l^2 \quad T = N_x l \sqrt{1 - l^2}$$

Skrajne naprężenie styczne:

$$T_0 = \pm \frac{1}{2} N_x$$

przynależą współczynnikom kierunkowym:

$$l = m = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad n = 0$$

lub też:

$$l = n = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad m = 0$$

5. Układ naprężeń stycznych. Składowe naprężenia:

$$N_x = N_y = N_z = T_x = T_y = 0$$

cechują układ *naprężeń stycznych* T_z . Poletku dF o współczynnikach kierunkowych l, m, n przynależy naprężenie o składowych osiowych:

$$p_x = T_z m \quad p_y = T_z l \quad p_z = 0$$

To naprężenie

$$p = T_z \sqrt{1 - n^2}$$

ma składowe: normalną i styczną:

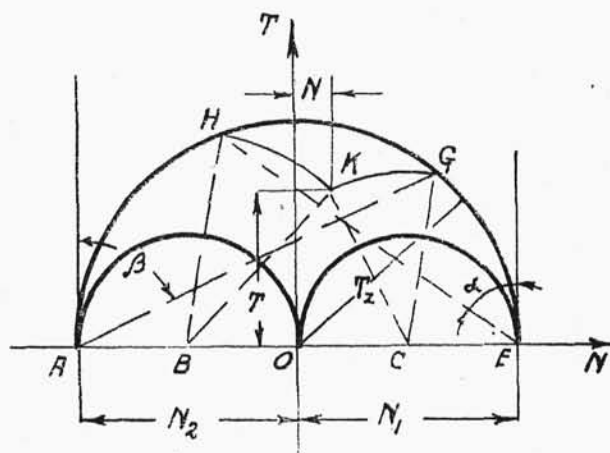
$$N = 2T_z l m \quad T = T_z \sqrt{1 - n^2 - 4l^2 m^2}$$

Równanie (33);

$$N^3 - T_z^2 N = 0$$

daje naprężenia główne:

$$N_1 = T_z \quad N_2 = -T_z \quad N_3 = 0$$



Rys. 23.

przynależne współczynnikom kierunkowym:

$$l^2 = m^2 = \frac{1}{2} \quad n = 0$$

Wykres Mohr'a (Rys. 23) jest symetryczny względem osi OT . Jego duże półkole AE o promieniu T_z ma środek w O . Dwa symetryczne półkole mniejsze, oparte są na T_z jako na średnicach.

Skrajne naprężenie styczne:

$$T_0 = \pm T_z$$

ma współczynniki kierunkowe:

$$l = m = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad n = 0$$

6. Płaski układ naprężeń. Dla płaskiego układu naprężeń:

$$N_z = T_x = T_y = 0$$

Na poletku o współczynnikach kierunkowych:

$$l = \cos \alpha \quad m = \sin \alpha \quad n = 0$$

panuje naprężenie p o składowych:

$$p_x = N_x \cos \alpha + T_z \sin \alpha \quad p_y = T_z \cos \alpha + N_y \sin \alpha \quad p_z = 0$$

Jego składowe: normalna i styczna:

$$\begin{aligned} N &= N_x \cos^2 \alpha + N_y \sin^2 \alpha + T_z \sin 2\alpha = \\ &= \frac{1}{2} (N_x + N_y) + \frac{1}{2} (N_x - N_y) \cos 2\alpha + T_z \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$T = -\frac{1}{2} (N_x - N_y) \sin 2\alpha + T_z \cos 2\alpha$$

Równanie (33):

$$N^3 - (N_x + N_y) N^2 + (N_x N_y - T_z^2) N = 0$$

daje naprężenia główne:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{N_x + N_y}{2} + \sqrt{\frac{(N_x - N_y)^2}{4} + T_z^2} \\ N_2 &= \frac{N_x + N_y}{2} - \sqrt{\frac{(N_x - N_y)^2}{4} + T_z^2} \\ N_3 &= 0 \end{aligned}$$

przynależne współczynnikom kierunkowym, czyniącym zadość (35)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2T_z}{N_x - N_y}$$

Skrajne naprężenie styczne:

$$T_0 = \pm \sqrt{\frac{(N_x - N_y)^2}{4} + T_z^2}$$

ma współczynniki kierunkowe:

$$l = m = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad n = 0$$

7. Układ de Saint Venant'a. Układ ten wyodrębniają zerowe naprężenia:

$$T_x = N_y = N_z = 0$$

Na poletku o współczynnikach kierunkowych l, m, n panuje naprężenie p o składowych:

$$p_x = N_x l + T_z m + T_y n \quad p_y = T_z l \quad p_z = T_y l$$

Jego składowa normalna:

$$N = N_x l^2 - 2T_z lm + 2T_y ln$$

Równanie (33):

$$N^3 - N_x N^2 - (T_y^2 + T_z^2) = 0$$

daje naprężenia główne:

$$N_1 = \frac{1}{2} N_x + \sqrt{\frac{1}{4} N_x^2 + T_y^2 + T_z^2}$$

$$N_2 = \frac{1}{2} N_x - \sqrt{\frac{1}{4} N_x^2 + T_y^2 + T_z^2}$$

$$N_3 = 0$$

przynależne współczynnikom kierunkowym, czyniącym zadość (35):

$$\frac{N_x l + T_z m + T_y n}{l} = T_z \frac{l}{m} = T_y \frac{l}{n}$$

Skrajne naprężenie tnące:

$$T_0 = \sqrt{\frac{1}{4} N_x^2 + T_y^2 + T_z^2}$$

ma współczynniki kierunkowe:

$$l = m = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad n = 0$$

8. Wykres Mohr'a. W układzie osi X, Y, Z , wyprowadzonych z punktu bieżącego w kierunkach naprężeń głównych: N_1, N_2, N_3 tego punktu, poletko dF ma odpowiednie współczynniki kierunkowe: l, m, n . Na tym poletku panują naprężenia: normalne N i styczne T ; ze wzorów:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad N_1 l^2 + N_2 m^2 + N_3 n^2 = N$$

$$N_1^2 l^2 + N_2^2 m^2 + N_3^2 n^2 = N^2 + T^2$$

otrzymamy:

$$l^2 = \frac{(N_2 - N)(N_3 - N) + T^2}{(N_2 - N_1)(N_3 - N_1)}$$

$$m^2 = \frac{(N_3 - N)(N_1 - N) + T^2}{(N_3 - N_2)(N_1 - N_2)}$$

$$n^2 = \frac{(N_1 - N)(N_2 - N) + T^2}{(N_1 - N_3)(N_2 - N_3)}$$

W układzie osi prostokątnych N, T , stałej wartości l odpowiada:

$$\begin{aligned} [N - \frac{1}{2}(N_2 + N_3)]^2 + T^2 &= (N_2 - N_1)(N_3 - N_1)l^2 - N_2N_3 + \\ &+ \frac{1}{4}(N_2 + N_3)^2 = r^2 \end{aligned}$$

— koło HK o promieniu r , jak to łatwo dostrzec (Rys. 21) zważywszy, że:

$$\overline{HE} = (N_1 - N_3) \sin \alpha = M$$

$$\overline{BE} = \frac{1}{2}(N_1 - N_2) + \frac{1}{2}(N_1 - N_3) = m$$

$$r^2 = m^2 + M^2 - 2mM \sin \alpha$$

Chcąc wykreślić łuk, przynależny stałej wartości, dajmy na to, l , budujemy prostopadłe do osi N — wspólną styczną EF kół zatoczonych promieniami:

$$\pm \frac{1}{2}(N_1 - N_2) \quad \pm \frac{1}{2}(N_1 - N_3)$$

Z punktu styczności E prowadzimy cięciwę EH pod kątem:

$$\alpha = \arccos l$$

aż do przecięcia się z jednym z tych dwóch kół. Przez punkt przecięcia przechodzi szukany łuk, zatoczony z końca odciętej:

$$\frac{1}{2}(N_2 + N_3)$$

jako ze środka.

To samo dotyczy współczynników kierunkowych: m, n . Uwagi powyższe są najzupełniej ogólne.

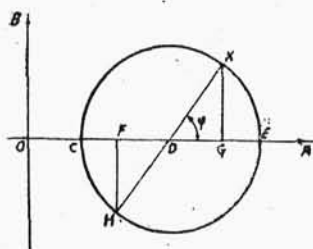
W szczególnym przypadku płaskiego układu naprężeń, lepiej się nadaje uproszczony wykres Mohr'a (Rys. 24). Wobec możliwości przemianowania osi, zakładamy, że $N_x > N_y$ i odcinamy:

$$\overline{OG} = N_x \quad \overline{OF} = N_y \quad \overline{FH} = \overline{GK} = T_z$$

Koło, średnicy HK odetnie:

$$\begin{aligned} \overline{OE} &= \overline{OD} + \overline{DK} = \frac{1}{2}(N_x + N_y) + \\ &+ \sqrt{\frac{1}{4}(N_x - N_y)^2 + T_z^2} = N_1 \quad \overline{OC} = N_2 \end{aligned}$$

Nadto, jak widać z rysunku:



Rys. 24.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2T_z}{N_x - N_y}$$

zatem połowa kąta φ daje współczynnik kierunkowy naprężeń głównych. Naodwrot, gdy $N_1 > N_2$, odetniemy

$$\overline{OE} = N_1 \quad \overline{OC} = N_2$$

Promień \overline{DK} , poprowadzony pod kątem φ da składowe

$$\overline{OG} = N \quad \overline{GT} = T$$

poletka pochylonego ku osi N_1 pod kątem:

$$\alpha = \frac{1}{2} \varphi$$

Ten sam uproszczony wykres Mohr'a służy i do wyznaczania momentów. Dane są momenty $J_{x_0}, J_{y_0}, J_{x_{y_0}}$ względem osi środkowych, prostokątnych — znaleźć momenty główne J_x, J_y i kąt kierunkowy α ich osi prostokątnych. I tu również zakładamy, że $J_{x_0} > J_{y_0}$ i odcinamy:

$$\overline{OG} = J_{x_0} \quad \overline{OF} = J_{y_0} \quad \overline{FG} = \overline{GK} = J_{x_{y_0}}$$

Koło wykresu, jak wyżej, da

$$\overline{OE} = J_x \quad \overline{OC} = J_y \quad \varphi = 2\alpha$$

Naodwrot, gdy $J_x > J_y$, odcinamy:

$$\overline{OE} = J_x \quad \overline{OC} = J_y$$

Średnica KH , poprowadzona pod kątem φ da

$$\overline{OG} = J_{x_0} \quad \overline{OF} = J_{y_0} \quad \overline{GK} = J_{xy_0}$$

dla osi środkowych, obróconych względem osi głównych o kąt

$$\alpha = \frac{1}{2} \varphi$$

9. Składowe naprężenia stycznych. W układzie osi, równoległych do naprężeń głównych: N_1, N_2, N_3 , składowe naprężenia p poletka dF , przynależnego współczynnikom kierunkowym: l, m, n , będą odpowiednio:

$$p_1 = N_1 l \quad p_2 = N_2 m \quad p_3 = N_3 n$$

Składowa normalna, czyli normalne naprężenie poletka:

$$N = N_1 l^2 + N_2 m^2 + N_3 n^2$$

ma składowe:

$$n_1 = N l \quad n_2 = N m \quad n_3 = N n$$

zatem składowe naprężenia stycznego będą:

$$t_1 = (N_1 - N) l = [(N_1 - N_2) m^2 + (N_1 - N_3) n^2] l$$

$$t_2 = (N_2 - N) m = [(N_2 - N_3) n^2 + (N_2 - N_1) l^2] m$$

$$t_3 = (N_3 - N) n = [(N_3 - N_1) l^2 + (N_3 - N_2) m^2] n$$

a samo naprężenie styczne:

$$T = \sqrt{p^2 - N^2}$$

po uwzględnieniu zależności:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

będzie miało wzór:

$$T^2 = (N_1 - N_2)^2 l^2 m^2 + (N_2 - N_3)^2 m^2 n^2 + (N_3 - N_1)^2 n^2 l^2$$

W układzie osi prostokątnych, przynależnych składowym naprężeniom $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$, składowe naprężenia stycznego będą odpowiednio:

$$t_x = (N_x - N) l + T_z m + T_y n$$

$$t_y = T_z l + (N_y - N) m + T_x n$$

$$t_z = T_y l + T_x m + (N_z - N) n$$

10. Niezmiennik. W układzie osi równoległych do naprężeń głównych: N_1, N_2, N_3 punktu bieżącego, współśrodkowe prostokątne osie X, Y, Z mają odpowiednie współczynniki kierunkowe: $l_x, m_x, n_x, l_y, m_y, n_y, l_z, m_z, n_z$, przyczem niewątpliwie:

$$l_x^2 + m_x^2 + n_x^2 = l_y^2 + m_y^2 + n_y^2 = l_z^2 + m_z^2 + n_z^2 = 1$$

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

Oznaczmy odpowiednio przez:

$$p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$$

naprężenia, panujące na poletkach: $dy dz, dz dx, dx dy$.

Dodając:

$$p_{yz}^2 = N_1^2 l_x^2 + N_2^2 m_x^2 + N_3^2 n_x^2$$

$$p_{zx}^2 = N_1^2 l_y^2 + N_2^2 m_y^2 + N_3^2 n_y^2$$

$$p_{xy}^2 = N_1^2 l_z^2 + N_2^2 m_z^2 + N_3^2 n_z^2$$

otrzymamy:

$$p_{yz}^2 + p_{zx}^2 + p_{xy}^2 = N_1^2 + N_2^2 + N_3^2$$

suma kwadratów naprężeń, panujących na trzech prostopadłych poletkach jest niezmiennikiem.

W zależności od składowych naprężeń, przynależnych osiom X, Y, Z mamy:

$$p_{yz}^2 = N_x^2 + T_{xy}^2 + T_{xz}^2 = N_x^2 + T_z^2 + T_y^2$$

$$p_{zx}^2 = N_y^2 + T_{yz}^2 + T_{yx}^2 = N_y^2 + T_x^2 + T_z^2$$

$$p_{xy}^2 = N_z^2 + T_{xz}^2 + T_{zy}^2 = N_z^2 + T_y^2 + T_x^2$$

a przeto suma:

$$N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 + 2(T_x^2 + T_y^2 + T_z^2)$$

jest również niezmiennikiem.

11. Funkcje naprężeń. W szczególnym przypadku zerowych wielkości składowych

$$X = Y = Z = 0$$

sił zewnętrznych, możemy uczynić zadość warunkom (29) równowagi, wyrażając składowe naprężeń w zależności od sześciu funkcji: $F_x, F_y, F_z, H_x, H_y, H_z$ spółrzędnych w postaci:

$$N_x = \frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2}$$

$$N_y = \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2}$$

$$N_z = \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2}$$

$$T_x = -\frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right)$$

$$T_y = -\frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right)$$

$$T_z = -\frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} - \frac{\partial H_z}{\partial z} \right)$$

Wzory powyższe mają kształt wzorów (10) i (11). Czyniąc w nich:

$$F_x = F_y = 0 \quad F_z = f(x, y)$$

otrzymamy wyniki, w (II. B.2) dla płaskiego układu naprężeń.