

Nadal już pod słowem pręt będziemy rozumieli wyłącznie tylko pręt bezwładnościowo jednorodny, o przekroju stałym, lub nader powoli zmiennym. Wszelkie odchylenia będą każdorazowo omawiane i rozpatrywane oddzielnie.

11. Płytką. Dwa sąsiednie przekroje poprzeczne pręta nieodkształconego wyodrębniają zeń płytkę. Ich środki  $O, O'$  leżą na osi pręta, ich pola  $F, F'$  różnią się znikomą o  $dF$ . Boczna powierzchnia płytki stanowi część bocznej powierzchni pręta.

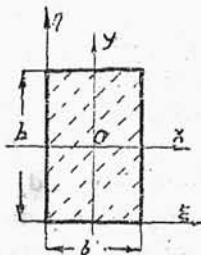
Po odkształceniu środki  $O, O'$  będą leżały na odkształconej osi pręta, zwanej wprost *odkształconą*. Pierwotnie płaskie ścianki płytki w ogólnym przypadku ulegną zwichrzeniu, a przeto nie dla wszelkich układów odkształceń słuszne jest tak zwane założenie Bernoulli, które głosi, że *płaskie przekroje poprzeczne pręta nie wichrzą się przy odkształceniu i są prostopadłe do odkształconej*.

### C. Część trzecia.

1. Prostokąt (Rys. 2). Dla osi wierzchołkowych mamy bezpośrednio:

$$J_{\xi} = \int_0^b d\xi \int_0^h \eta^2 d\eta = \frac{1}{3} b h^3 \quad J_{\eta} = \int_0^b \xi^2 d\xi \int_0^h d\eta = \frac{1}{3} b^3 h$$

$$J_{\xi\eta} = \int_0^b d\xi \int_0^h \eta d\eta = \frac{1}{4} b^2 h^2$$



Rys. 2.

Dla osi środkowych głównych:

$$J_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{1}{12} b h^3$$

$$J_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy = \frac{1}{12} b^3 h$$

2. Trójkąt prostokątny (Rys. 3). stanowi składową trójkąta, trapezu. W układzie osi prostokątnych  $\xi, \eta$ , wierzchołkowych, równanie obwodu:

$$K(\xi, \eta) = \left( \frac{\xi}{b} + \frac{\eta}{h} - 1 \right) \xi \eta = 0$$

daje granice całkowania:

$$\text{dla } \eta: 0, h(1 - \frac{\xi}{b})$$

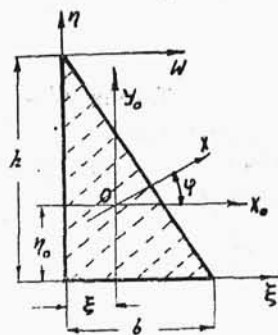
$$\text{dla } \xi: 0, b$$

Zatem dla osi wierzchołkowych:

$$J_{\xi} = \int_0^b d\xi \int_0^{h(1-\xi/b)} \eta^2 d\eta = \frac{1}{12} b h^3$$

$$J_{\eta} = \int_0^b \xi^2 d\xi \int_0^{h(1-\xi/b)} d\eta = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$J_{\xi\eta} = \int_0^b \xi d\xi \int_0^{h(1-\xi/b)} \eta d\eta = \frac{1}{24} b^2 h^2$$



Rys. 3.

Wzory (18) dadzą dla osi środkowych  $X_0, Y_0$ , równoległych:

$$J_{x_0} = J_{\xi} - \eta_0^2 F = \frac{1}{12} b h^3 - \left( \frac{1}{3} h \right)^2 \frac{1}{2} b h = \frac{1}{36} b h^3$$

$$J_{y_0} = J_{\eta} - \xi_0^2 F = \frac{1}{12} b^3 h - \left( \frac{1}{3} b \right)^2 \frac{1}{2} b h = \frac{1}{36} b^3 h$$

$$J_{x_0 y_0} = J_{\xi\eta} - \xi_0 \eta_0 F = \frac{1}{24} b^2 h^2 - \frac{1}{3} b \frac{1}{3} h \frac{1}{2} b h = -\frac{1}{72} b^2 h^2$$

Kąt kierunkowy osi głównych wyznaczymy ze wzoru:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 J_{x_0 y_0}}{J_{y_0} - J_{x_0}} = \frac{b h}{h^2 - b^2}$$

zatem ze wzorów (23) otrzymamy dla osi głównych  $X, Y$ :

$$J_x = \frac{1}{72} bh \left( a^2 + b^2 + \sqrt{(b^2 - a^2)^2 + a^2 b^2} \right)$$

$$J_y = \frac{1}{72} bh \left( a^2 + b^2 - \sqrt{(b^2 - a^2)^2 + a^2 b^2} \right)$$

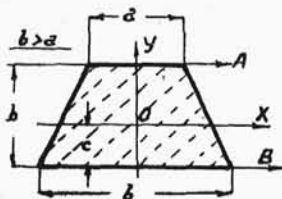
Dla osi  $W$ , wierzchołkowej, równoległej do podstawy  $b$ :

$$J_w = J_{x_0} + (h - \eta_0)^2 F = \frac{1}{36} bh^3 + \left( \frac{2}{3} h \right)^2 \frac{1}{2} bh = \frac{1}{4} bh^3$$

**3. Trapez równoboczny** (Rys. 4). Korzystając ze wzorów dla prostokąta i trójkąta, otrzymamy z łatwością momenty bezwładności względem równoległych boków  $a, b$ , jako osi, przy czym  $b > a$ :

$$J_a = \frac{1}{3} bh^3 - \frac{2}{12} h^3 \frac{b-a}{2} = \frac{1}{12} h^3 (a+3b)$$

$$J_b = \frac{1}{3} ah^3 + \frac{2}{12} h^3 \frac{b-a}{2} = \frac{1}{12} h^3 (3a+b)$$



Oś symetrii jest osią główną  $Y$ ; druga oś główna  $X$ , prostopadła, przechodzi przez środek przekroju w odległości

Rys. 4.

$$c = \frac{1}{3} h \frac{2a+b}{a+b}$$

od podstawy  $b$ . Zatem:

$$\begin{aligned} J_x &= J_b - c^2 F = \frac{h^3}{12} (3a+b) - \frac{h^2}{9} \left( \frac{b+2a}{a+b} \right)^2 \frac{h}{2} (a+b) = \\ &= \frac{1}{36} h^3 \left( a+b + \frac{2ab}{a+b} \right) \end{aligned}$$

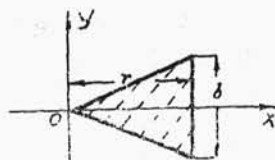
$$\begin{aligned} J_y &= \frac{h}{12} a^3 + 2 \left[ \frac{h}{36} \left( \frac{b-a}{2} \right)^3 + \left( \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \frac{b-a}{2} \right)^2 \frac{h}{2} \frac{b-a}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{48} h \frac{b^4 - a^4}{b-a} \end{aligned}$$

**4. Wielobok prawidłowy.** Liczbę boków oznaczamy przez  $m$ , przez  $b$  długość boku, przez  $R$  i  $r$  promienie kół: opisanego

i wpisanego. Łącząc końce boku  $b$  ze środkiem wieloboku otrzymamy trójkąt (Rys. 5). Dla osi  $X$  boku  $b$  i prostopadłej osi  $Y$ , wierzchołkowej:

$$J_x = \frac{2}{12} r \left( \frac{b}{2} \right)^3 = \frac{1}{48} r b^3$$

$$J_y = \frac{2}{4} \left( \frac{b}{2} \right) r^3 = \frac{1}{4} r^3 b$$



Rys. 5.

stąd moment biegunowy względem punktu  $O$ :

$$\frac{1}{48} r b (b^2 + 12 r^2)$$

oraz moment biegunowy całego przekroju względem środka  $O$ , jako bieguna:

$$J_0 = \frac{1}{48} m b r (b^2 + 12 r^2)$$

Wobec obojętności przekroju, moment bezwładności dla wszelkiej osi środkowej:

$$J = \frac{1}{2} J_0 = \frac{1}{96} m b r (b^2 + 12 r^2) = \frac{1}{12} m b r (R^2 + 2 r^2)$$

**5. Koło o promieniu  $R$ .** Moment biegunowy tego przekroju względem jego środka  $O$ , jako bieguna:

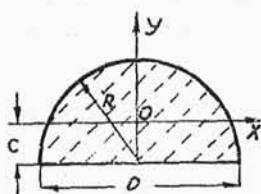
$$J_0 = \int \rho^2 dF = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} \pi R^4 = \frac{1}{32} \pi D^4$$

Kierunek osi głównych jest obojętny, zatem dla jakichkolwiek osi  $X, Y$  prostokątnych, środkowych:

$$J = J_x = J_y = \frac{1}{2} J_0 = \frac{1}{4} \pi R^4 = \frac{1}{64} \pi D^4$$

**6. Połowa koła (Rys. 6).** Moment bezwładności połowy koła względem podstawy, jako osi:

$$J_D = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \pi R^4 = \frac{1}{8} \pi R^4 = \frac{1}{128} \pi D^4$$



Rys. 6.

Oś symetrii tego przekroju stanowi jego główną oś Y, druga prostopadła oś główna X przechodzi przez środek O przekroju w odległości:

$$c = \frac{4R}{3\pi}$$

od podstawy D. Zatem:

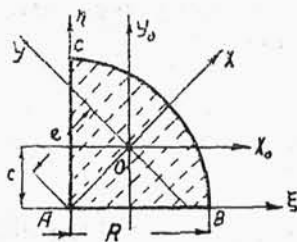
$$\begin{aligned} J_x = J_D - c^2 F &= \frac{1}{8} \pi R^4 - \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{1}{8} \pi R^4 \left( 1 - \frac{64}{9\pi^2} \right) = \\ &= \frac{1}{128} \pi D^4 \left( 1 - \frac{64}{9\pi^2} \right) \end{aligned}$$

$$J_y = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} \pi R^4 = \frac{1}{8} \pi R^4 = \frac{1}{128} \pi D^4$$

7. Ćwierć koła (Rys. 7). W układzie prostokątnych osi  $\xi, \eta$  wierzchołkowych, prostokątne współrzędne zależą od biegunowych:

$$\xi = \rho \cos \theta \quad \eta = \rho \sin \theta \quad dF = \rho d\rho d\theta$$

a przeto:



Rys. 7.

$$J_{\xi} = J_{\eta} = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta =$$

$$= \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{16} \pi R^4$$

$$J_{\xi\eta} = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{8} R^4$$

Oś symetrii tego przekroju stanowi jego oś główną X, druga prostopadła oś główna Y przechodzi przez środek O przekroju w odległości:

$$e = \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{R}{\pi}$$

od środka koła A.

Zatem, dla osi  $X_0$ ,  $Y_0$  środkowych, równoległych do wierzchołkowych osi  $\xi$ ,  $\eta$ , prostokątnych:

$$\begin{aligned} J_{x_0} = J_{y_0} = J_{\xi} - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \frac{1}{4} \pi R^2 &= \frac{1}{16} \pi R^4 \left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right) = \\ &= \frac{1}{8} R^4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{32}{9\pi}\right) \end{aligned}$$

$$J_{x_{y_0}} = J_{\xi\eta} - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{1}{8} R^4 \left(1 - \frac{34}{9\pi}\right)$$

Wzory (19) dają dla osi głównych:

$$J_x = \frac{1}{8} R^4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{32}{9\pi}\right) - \frac{1}{8} R^4 \left(1 - \frac{32}{9\pi}\right) = \frac{1}{8} R^4 \left(\frac{1}{2} \pi - 1\right)$$

$$J_y = \frac{1}{8} R^4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{32}{9\pi}\right) + \frac{1}{8} R^4 \left(1 - \frac{32}{9\pi}\right) = \frac{1}{8} R^4 \left(\frac{1}{2} \pi + 1 - \frac{64}{9\pi}\right)$$

**8. Wycinek koła** (Rys. 8). Główna oś  $X$  wycinka koła leży na jego osi symetrii. Druga, prostopadła główna oś  $Y$  przechodzi przez środek  $O$  tego przekroju w odległości

$$c = \frac{2R \sin \alpha^0}{3\alpha}$$

od środka koła  $A$ .

W tym wzorze i w następnych —  $R$  oznacza promień koła,  $2\alpha^0$  — środkowy kąt łuku wycinka w stopniach,

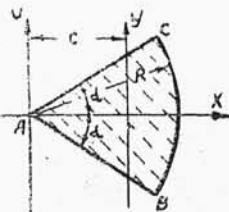
$$2\alpha = 0,017\ 453\ 292\ \alpha^0$$

ten sam kąt w radjanach.

Dla wierzchołkowej osi  $V$ , wyprowadzonej ze środka koła  $A$  prostopadle do osi  $X$ :

$$J_V = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2 \theta d\theta =$$

$$= \int_0^R \rho^3 d\rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{8} R^4 (2\alpha + \sin 2\alpha^0)$$



Rys. 8.

a przeto dla osi głównych:

$$J_x = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \Theta d\Theta = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\Theta) d\Theta =$$

$$= \frac{1}{8} R^4 (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

$$J_y = J_v - c^2 F = \frac{1}{8} R^4 (2\alpha + \sin 2\alpha) - \left( \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} \right)^2 \left( \frac{2\alpha}{2\pi} \pi R^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{8} R^4 \left( 2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{32 \sin^2 \alpha}{9\alpha} \right)$$

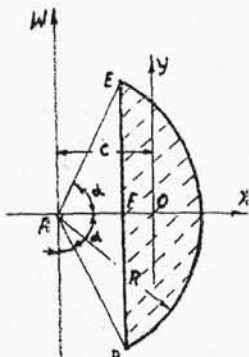
Moment biegunowy względem środka koła:

$$J_A = J_v + J_x = \frac{1}{2} R^4 \alpha$$

9. Odcinek koła (Rys. 9). Główna oś  $X$  odcinka koła leży na jego osi symetrii. Druga, prostopadła główna oś  $Y$  przechodzi przez środek  $O$  tego przekroju w odległości:

$$c = \frac{4}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$

od środka  $A$  koła.



Rys. 9.

W tym wzorze i w następnych  $R$  oznacza promień,  $2\alpha$  środkowy kąt łuku w stopniach,  $2\alpha$  — w radianach.

Dla wierzchołkowej osi  $W$ , wyprowadzonej ze środka  $A$  koła, prostopadłej do osi  $X$ , moment bezwładności wyrazimy, jako różnicę momentów: wycinka koła i trójkąta  $ABE$ . Zatem:

$$J_W = \frac{1}{8} R^4 (2\alpha + \sin 2\alpha) -$$

$$- \frac{2}{4} (R \cos \alpha)^3 R \sin \alpha = R^4 \left( \frac{\alpha}{4} - \frac{\sin 4\alpha}{16} \right)$$

Dla osi głównych otrzymamy w ten sam sposób:

$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{1}{8} R^4 (2\alpha - \sin 2\alpha^0) - \frac{2}{12} R \cos \alpha (R \sin \alpha)^3 = \\
 &= R^4 \left( \frac{\alpha}{4} - \frac{\sin 2\alpha^0}{6} - \frac{\sin 4\alpha^0}{48} \right) \\
 J_y &= J_w - c^2 F = R^4 \left( \frac{\alpha}{4} - \frac{\sin 4\alpha^0}{16} \right) - \\
 &- \left( \frac{4}{3} R \frac{\sin^3 \alpha^0}{2\alpha - \sin 2\alpha^0} \right)^2 \left( \frac{2\alpha}{2\pi} \pi R^2 - \frac{R \cos \alpha}{2} 2R \sin \alpha \right) = \\
 &= R^4 \left( \frac{\alpha}{4} - \frac{\sin 4\alpha^0}{16} - \frac{8}{9} \frac{\sin^6 \alpha^0}{2\alpha - \sin 2\alpha^0} \right)
 \end{aligned}$$

**10. Przekrój eliptyczny.** Półoś wielka  $a$  elipsy leży na osi  $X$ , mała  $b$  na osi  $Y$  — głównych osiach przekroju. Ze środka współrzędnych zatoczmy koło promieniem  $a$ , przekrój eliptyczny stanowi rzut tego przekroju kołowego, pochylonego pod kątem:

$$\arccos \left( \frac{b}{a} \right)$$

Zatem punktowi bieżącemu  $x, y$  i różniczce

$$dF = dx \cdot dy$$

pola  $F$  przekroju eliptycznego odpowiada bieżący punkt o współrzędnych

$$x_0 = x \quad y_0 = \frac{a}{b} y$$

oraz różniczka:

$$dF_0 = dx_0 dy_0 = \frac{a}{b} dF$$

pola  $F_0$  przekroju kołowego; stąd dla osi głównych przekroju eliptycznego:

$$J_x = \int_F y^2 dF = \frac{b^3}{a^3} \int_{F_0} y_0^2 dF_0 = \frac{b^3}{a^3} \frac{1}{4} \pi a^4 = \frac{1}{4} \pi a b^3$$

$$J_y = \int_F x^2 dF = \frac{b}{a} \int_{F_0} x_0^2 dF_0 = \frac{b}{a} \frac{1}{4} \pi a^4 = \frac{1}{4} \pi a^3 b$$



Moment biegunowy względem środka  $O$  przekroju eliptycznego:

$$J_0 = \frac{1}{4} \pi ab (a^2 + b^2)$$

**11. Przekrój pierścieniowy kołowy.** Promień zewnętrzny  $R$  średnica  $D$ , promień wewnętrzny  $r$  — średnica  $d$ . Kierunki główne są obojętne, zatem dla dowolnej osi środkowej:

$$J = \frac{1}{4} \pi R^4 - \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{4} \pi (R^4 - r^4) = \frac{1}{64} \pi (D^4 - d^4)$$

Moment biegunowy względem środka:

$$J_0 = \frac{1}{2} \pi (R^4 - r^4) = \frac{1}{32} \pi (D^4 - d^4)$$

**12. Odcinek paraboli** (Rys. 10). Główna oś  $X$  odcinka paraboli leży na jego osi symetrii. W układzie osi  $X$  i prostopadłej stycznej  $W$  wierzchołkowej równanie obwodu:

$$K(x, w) = (a - x) \left( w^2 - \frac{b^2}{a} x \right) = 0$$

daje granice całkowania:

$$\text{dla } w: \quad w_0 = -b \sqrt{\frac{x}{a}} \quad w_1 = b \sqrt{\frac{x}{a}}$$

$$\text{dla } x: \quad 0 \quad a$$

zatem dla osi  $W$ :

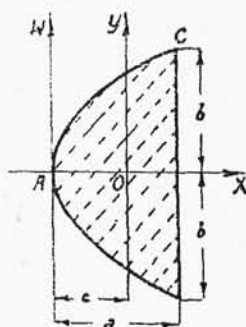
$$J_W = \int_0^a x^2 dx \int_{w_0}^{w_1} dw = \frac{4}{7} a^3 b.$$

Główna oś  $Y$ , prostopadła do głównej osi  $X$  przechodzi przez środek  $O$  przekroju w odległości

$$c = \frac{3}{5} a$$

od osi  $W$ . Zatem dla osi głównych:

$$J_x = \int_0^a dx \int_{w_0}^{w_1} w^2 dw = \frac{4}{15} ab$$



Rys. 10.

$$J_y = J_w - c^2 F = \frac{4}{7} a^3 b - \left( \frac{3}{5} a \right)^2 \left( \frac{4}{3} ab \right) = \frac{16}{175} a^3 b$$

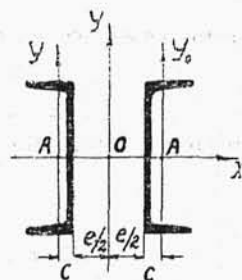
Nadto dla ciężki, jako osi:

$$J_b = J_y + (a - c)^2 F = \frac{16}{175} a^3 b - \left( \frac{2}{5} a \right)^2 \left( \frac{4}{3} ab \right) = \frac{32}{105} a^3 b$$

**13. Przekrój dwuceownikowy** (Rys. 11). Dwa ceowniki Nr. 26 ustawiono równolegle w odległości  $e$  tak, aby złożony przekrój był bezwładnościowo obojętny. Tablice dają moment bezwładności  $317 \text{ cm}^4$  dla osi  $Y_0$ , poprowadzonej przez środek  $A$  ceownika; dla drugiej głównej osi:  $4823 \text{ cm}^4$ . Pole ceownika  $F = 48,3 \text{ cm}^2$ , odległość środka  $A$  od tylnej ścianki:  $c = 2,36 \text{ cm}$ . Zatem dla przekroju złożonego:

$$J_x = 2 \times 4823 = 9646 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 2 \left[ J_{y0} + \left( \frac{1}{2} e + c \right)^2 F \right] = 2 \left[ 317 + 48,3 \left( \frac{1}{2} e + 2,36 \right)^2 \right]$$



Rys. 11.

Z warunku równości obu powyższych momentów otrzymamy:

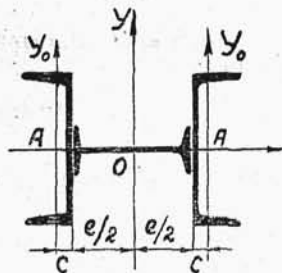
$$e = 14,6 \text{ cm}$$

**14. Przekrój** (Rys. 12), złożony z dwóch ceowników Nr. 20 i dwuteownika Nr. 20 — środka. Tablice dają dla ceownika:

$$J_x = 1911 \text{ cm}^4 \quad J_{y0} = 148 \text{ cm}^4 \\ F = 32,2 \text{ cm}^2 \quad c = 2,01 \text{ cm}$$

dla dwuteownika zaś:  $J_x = 117 \text{ cm}^4$ ,  $J_y = 2142 \text{ cm}^4$ ,  $e = 20 \text{ cm}$ . Zatem dla przekroju złożonego otrzymamy:

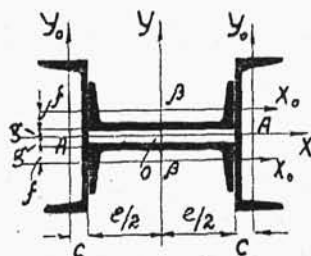
$$J_x = 2 \times 1911 + 117 = 3939 \text{ cm}^4 \\ J_y = 2142 + 2 [148 + (10 + 2,01)^2 \times 32,2] = 11727 \text{ cm}^4$$



Rys. 12.

15. Przekrój (Rys. 13), złożony z czterech ceowników Nr. 20.

Moment bezwładności ceownika względem jego osi symetrii — 1911 cm<sup>4</sup>, względem osi głównej prostopadłej — 148 cm<sup>4</sup>. Pole tego ceownika  $F = 32,2$  cm<sup>2</sup>, odległość środka ciężkości od tylnej ścianki



Rys. 13.

$$c = 2,01 \text{ cm}$$

Nadto niech będzie

$$g = 1,00 \text{ cm}$$

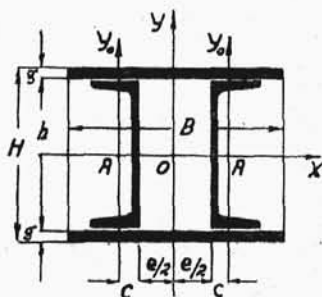
zatem, zważywszy, że:

$$e = 20,00 \text{ cm}$$

będziemy mieli dla przekroju złożonego:

$$J_x = 2 \times 1911 + 2[148 + (1 + 2,01)^2 \times 32,2] = 4701 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 2 \times 1911 + 2[148 + (10 + 2,01)^2 \times 32,2] = 13407 \text{ cm}^4$$



Rys. 14.

16. Przekrój (Rys. 14), złożony z ceowników z nakładkami. Obierzmy ceowniki Nr. 22; moment bezwładności względem osi symetrii tego przekroju jest według tablic: 2690 cm<sup>4</sup>, względem zaś prostopadłej drugiej osi głównej: 197 cm<sup>4</sup>. Pole tego ceownika  $F = 37,4$  cm<sup>2</sup>, odległość środka ciężkości od tylnej ścianki:

$$c = 2,14 \text{ cm}$$

Szerokość nakładek zależy od rozstawienia ceowników. Weźmy:

$$e = 12 \text{ cm} \quad g = 1 \text{ cm} \quad B = 30 \text{ cm}.$$

zatem dla głównych osi złożonego przekroju:

$$J_x = 2 \left[ 2690 + \frac{1}{12} \times 30 \times 1^3 + \left( \frac{1}{2} \times 22 + \frac{1}{2} \right)^2 (30 \times 1) \right] = 13320 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 2 \left[ \frac{1}{12} \times 1 \times 30^3 + 197 + \left( \frac{1}{2} \times 12 + 2,14 \right)^2 \times 37,4 \right] = 9850 \text{ cm}^4$$

17. Przekrój (Rys. 15), złożony z 4 kątowników równomier-  
nych  $90 \times 90 \times 9$ . Dla nich tablice dają:

$$J_{xo} = J_{yo} = 116 \text{ cm}^4 \quad F = 15,5 \text{ cm}^2 \quad c = 2,54 \text{ cm}$$

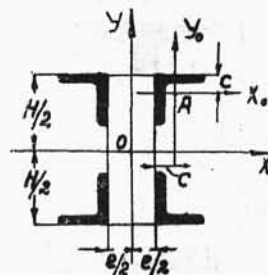
Weźmy:

$$H = 20 \text{ cm} \quad e = 10 \text{ cm}$$

a przeto dla osi głównych przekroju złożo-  
zonego:

$$J_x = 4 \left[ 116 + \left( \frac{1}{2} \times 20 - 2,54 \right)^2 \times \right. \\ \left. \times 15,5 \right] = 3914 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 4 \left[ 116 + \left( \frac{1}{2} \times 10 + 2,54 \right)^2 \times 15,5 \right] = 3989 \text{ cm}^4$$



Rys. 15

Przy obranych wymiarach przekrój jest obojętny.

18. Przekrój (Rys. 16) kwadratowy, złożony z czterech  
kątowników równoramiennych  $100 \times 100 \times 12$ .

Dla nich mamy z tablic:

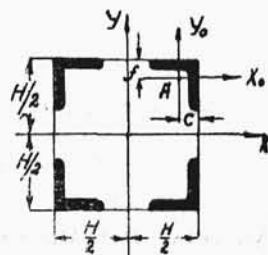
$$J_{xo} = J_{yo} = 207 \text{ cm}^4 \quad F = 22,7 \text{ cm}^2 \\ c = 2,9 \text{ cm}$$

Weźmy

$$H = 30 \text{ cm}$$

Przekrój złożony jest niewątpliwie obojęt-  
ny, zatem dla wszelkiej osi środkowej:

$$J = J_x = J_y = 4 \left[ 207 + \left( \frac{1}{2} \times 30 - 2,9 \right)^2 \times \right. \\ \left. \times 22,7 \right] = 14122 \text{ cm}^4$$



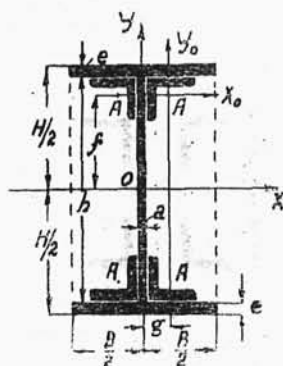
Rys. 16.

19. Blachownica (Rys. 17). Wymiary średnika:

$$h = 50 \text{ cm} \quad a = 1 \text{ cm}$$

Cztery kątowniki nierównoramienne  $80 \times 120 \times 10$  krótszemi ramionami przynitowano do środka. Dla nich tablice dają:

$$J_{x_0} = 98,2 \text{ cm}^4 \quad J_{y_0} = 276 \text{ cm}^4 \quad F = 19,1 \text{ cm}^2$$



Odległość środka ciężkości od dłuższego boku — 1,95 cm, od krótszego: 3,92 cm, zatem:

$$f = \frac{1}{2} \times 50 - 1,95 = 23,05 \text{ cm}$$

$$g = 0,5 + 3,92 = 4,42 \text{ cm}$$

Wymiary nakładek:

$$B = 28 \text{ cm} \quad e = 1 \text{ cm}$$

Rys. 17.

Zatem dla głównych osi blachownicy:

$$J_x = \frac{1}{12} \times 1 \times 50^3 + 4 \left[ 98,2 + \left( 23,05 \right)^2 \times 19,1 \right] + 2 \left[ \frac{1}{12} \times 28 \times 1^3 + \left( \frac{1}{2} \times 50 + \frac{1}{2} \right)^2 (28 \times 1) \right] = 87820 \text{ cm}^4$$

$$J_y = \frac{1}{12} \times 50 \times 1^3 + 4 \left[ 276 + \left( 4,42 \right)^2 \times 19,1 \right] + \frac{2}{12} \times 1 \times 28^3 = 6259 \text{ cm}^4$$

20. Blachownica (Rys. 18). Wymiary środników:

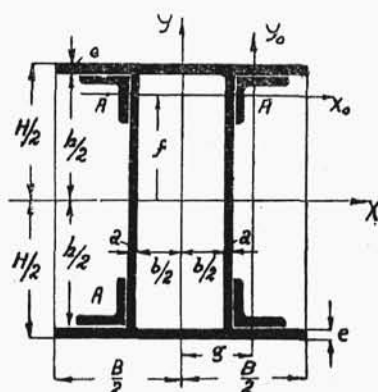
$$h = 50 \text{ cm} \quad a = 1 \text{ cm} \quad b = 20 \text{ cm}$$

Kątowniki nierównoramienne  $80 \times 120 \times 10$  krótszemi ramionami przynitowano do środników. Tablice dają dla tych kątowników:

$$J = 98,2 \text{ cm}^4 \quad J_{y_0} = 276 \text{ cm}^4 \quad F = 19,1 \text{ cm}^2$$

Odległość środka ciężkości tego przekroju od dłuższego boku — 1,95 cm, od krótszego — 3,92 cm, a przeto:

$$f = \frac{1}{2} \times 50 - 1,95 = 23,05 \text{ cm}$$



Rys. 18.

$$g = \frac{1}{2} \times 20 + 1 + 3,92 = 14,92 \text{ cm}$$

Wymiary wkładek:

$$B = 50 \text{ cm} \quad e = 1 \text{ cm}$$

Dla osi głównych blachownicy:

$$J_x = \frac{2}{12} \times 1 \times 50^3 + 4 \left[ 98,2 + \right. \\ \left. + (23,05)^2 + 19,1 \right] + 2 \left[ \frac{1}{12} \times 50 \times \right.$$

$$\times 1^3 + \left( \frac{1}{2} \times 50 + \frac{1}{2} \right)^2 (50 \times 1) \Big] = 126851 \text{ cm}^4$$

$$J_y = \frac{2}{12} \times 1 \times 50^3 + 4 \left[ 276 + (14,92)^2 \times 19,1 \right] + 2 \left[ \frac{1}{12} \times 50 \times 1^3 + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{2} \right)^2 (50 \times 1) \right] = 49978 \text{ cm}^4$$