

Zatem, chcąc pręt ten założyć ponownie, musimy odpowiednio zmienić pierwotną odległość punktów węzłowych  $A$  obu górnych prętów ustroju, działając na te punkty siłami poziomymi. Po założeniu pręta, ustali się właściwy przyrost  $w_1$  pierwotnej długości  $l$  tego pręta, obciążonego osiowo siłami  $X$  poziomymi na węzłach. Istotne jego wydłużenie będzie więc:

$$w_2 = c l(t - t_0) - w_1$$

Te same siły  $X$ , lecz różnozwrotne, stanowią obciążenie węzłowe górnych prętów. Zatem ich praca sprężysta:

$$H_1 = \frac{X^2 l}{2 \cos \alpha} \left( \frac{\cos^2 \alpha}{EF} + \frac{l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{12 EJ} \right)$$

pręta dolnego:

$$H_2 = \frac{X^2 l}{2 E_0 F_0}$$

całego ustroju:

$$H = H_1 + H_2$$

a przeto, na mocy drugiego twierdzenia Castigliano:

$$c l(t - t_0) = w_1 + w_2 = \frac{\partial H_1}{\partial X} + \frac{\partial H_2}{\partial X} = \frac{\partial H}{\partial X}$$

skąd ostatecznie:

$$X = \frac{c(t - t_0)}{\frac{1}{E_0 F_0} + \frac{\cos \alpha}{EF} + \frac{l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{12 EJ \cos \alpha}}$$

### C. Część trzecia.

#### 1. Belki proste hyperstatyczne.

a. Belka dwuprzęsłowa (Rys.104) o stałym przekroju:

Obciążenie podstawowe:	siły i odpory:	$A$	$X$	$P$	$B$
	ich posunięcia:	0	0	$p$	0
Obciążenie pokrewne I:	siły i odpory:	$a$	1	0	$b$
	ich posunięcia:	0	$x_1$	$p_1$	0

przyczem dla obciążenia pokrewnego odrzucono podporę pośrednią.

Twierdzenie Betti daje:

$$Xx_1 + Pp_1 = 1 \times 0 = 0$$

$$X = P \frac{p_1}{x_1}$$

Posunięcia  $p_1$ ,  $x_1$  otrzymamy, stosując wzór Clapeyron'a dla przęseł  $(a, l-a)$ :

$$6EJ \left( \frac{-x_1}{a} + \frac{-x_1}{l-a} \right) = 2l \left( -1 \frac{l-a}{l} a \right)$$

oraz dla przęseł  $(l-c, c)$ :

$$6EJ \left( \frac{-p_1}{l-c} + \frac{-p_1}{c} \right) = 2l \left[ -1 \frac{l-a}{l} (l-c) + 1 b \right] - \frac{1}{l-c} a [(l-c)^2 - a^2]$$

b. Belka trójpzęsłowa (Rys. 105) o stałym przekroju:

Obciążenie podstawowe:	siły i odpory:	$A$	$X$	$Y$	$P$	$B$
	ich posunięcia:	0	0	0	$p$	0
Obciążenie pokrewne I:	siły i odpory:	$a_1$	1	0	0	$b_1$
	ich posunięcia:	0	$x_1$	$y_1$	$p_1$	0
Obciążenie pokrewne II:	siły i odpory:	$a_2$	0	1	0	$b_2$
	ich posunięcia:	0	$x_2$	$y_2$	$p_2$	0

Twierdzenie Betti daje:

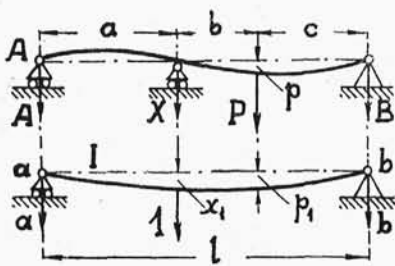
$$Xx_1 + Yy_1 + Pp_1 = 1 \times 0 = 0$$

$$Xx_2 + Yy_2 + Pp_2 = 1 \times 0 = 0$$

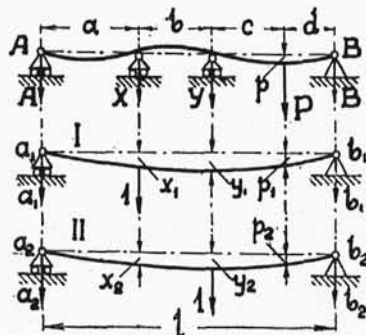
skąd bezpośrednio:

$$X = -P \frac{p_1 y_2 - p_2 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

$$Y = P \frac{p_1 x_2 - p_2 x_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$



Rys. 104.



Rys. 105.

Posunięcia  $x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2$  wyznaczymy, jak wyżej, stosując wzór Clapeyron'a.

## 2. Ustroje prętowe hyperstatyczne.

a. Rama (Rys. 106) złożona z dwóch bliźniaczych prętów  $ps$  pionowych o stałym przekroju i poziomego górnego pręta  $ss$  również o stałym przekroju. Dwa górne węzły  $ws$ , dolne —  $wp$ . Obie podpory przegubowe. Ustrój jest jednokrotnie hyperstatyczny zewnątrz. Równania statyki dają odpory pionowe:

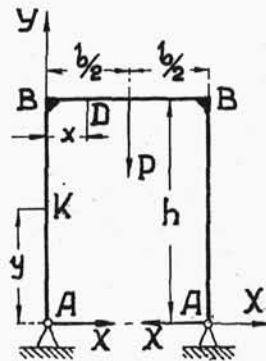
$$V = -\frac{1}{2}P$$

Poziomą hyperstatyczną siłę odporową oznaczamy przez  $X$ . Wobec zupełnej symetrii rozpatrujemy tylko lewą połowę ustroju. W przekroju bieżącym  $K$  pręta piono-

wego panuje siła osiowa ściskająca  $\frac{1}{2}P$ , siła ścinająca  $X$  i moment zginający  $Xy$ . W bieżącym przekroju  $D$  połowy górnego pręta panuje siła osiowa ściskająca  $X$ , siła ścinająca  $\frac{1}{2}P$  i moment zginający:

$$Xh - \frac{1}{2}Px$$

Pomijając, jak zwykle, działanie sił ścinających, otrzymamy:



Rys. 106.

$$H = \frac{P^2 h}{4EF} + \int_0^h \frac{X^2 y^2}{EJ} dy + \frac{X^2 b}{2E_0 F_0} + \int_0^{\frac{1}{2}b} \frac{\left(Xh - \frac{1}{2}Px\right)^2}{E_0 J_0} dx$$

Zatem, na mocy twierdzenia Menabrea:

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{2X}{EJ} \int_0^h y^2 dy + \frac{Xb}{E_0 F_0} + \frac{2h}{E_0 J_0} \int_0^{\frac{1}{2}b} \left(Xh - \frac{1}{2}Px\right) dx = 0$$

skąd bezpośrednio:

$$X = \frac{P}{8 \left( \frac{h}{b} + \frac{J_0}{F_0 h b} + \frac{2}{3} \frac{E_0 J_0}{E J} \frac{h^2}{b^2} \right)}$$

gdzie dolne wskazówki zerowe dotyczą pręta górnego.

b. Rama (Rys. 107) złożona z dwóch bliźniaczych prętów *ss* pionowych o stałym przekroju, jednego poziomego pręta *ss* górnego, również o stałym przekroju, czterech węzłów *ws* i dwóch podpór stałych, jest w ogólnym przypadku trzykrotnie hyperstatyczna zewnątrz. Ze względu jednak na symetrię obciążenia, a więc i odporów, odrazu możemy wyznaczyć siły odporowe pionowe:

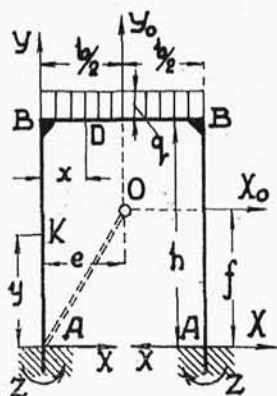
$$V = -\frac{1}{2} q b$$

Zatem, w bieżącym przekroju *K* pręta pionowego panuje siła osiowa ściskająca *V*, ścinająca *X* i moment zginający:

$$Z + Xy$$

W przekroju bieżącym *D* połowy górnego pręta panuje: siła osiowa ściskająca *X*, ścinająca *V* i moment zginający:

$$Z + Xh + Vx + \frac{1}{2} q x^2$$



Rys. 107.

W powyższych wzorach przez *X*, *Z* oznaczyliśmy odpowiednio: poziomą siłę odporową i moment odporowy lewej podpory stałej.

Pomijając, jak zwykle, działanie sił ścinających, otrzymamy dla pracy sprężystej:

$$H = \frac{V^2 h}{E F} + \int_0^h \frac{(Z + Xy)^2}{E J} dy + \frac{X^2 b}{2 E_0 F_0} + \int_0^{\frac{1}{2} b} \frac{(Z + Xh + Vx + \frac{1}{2} q x^2)^2}{E_0 J_0} dx$$

zatem twierdzenie Menabrea da układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial X} &= \frac{2}{EJ} \int_0^h (Z + Xy) y dy + \frac{Xb}{E_0 F_0} + \\ &+ \frac{2h}{E_0 J_0} \int_0^{\frac{1}{2}b} \left( Z + Xh + Vx + \frac{1}{2} qx^2 \right) dx = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial Z} &= \frac{2}{EJ} \int_0^h (Z + Xy) dy + \frac{2}{E_0 J_0} \int_0^{\frac{1}{2}b} \left( Z + Xh + Vx + \frac{1}{2} qx^2 \right) dx = 0 \end{aligned}$$

z którego wyznaczymy oba hyperstatyczne odpory.

c. Wiązar (Rys. 108), złożony z prętów o stałym przekroju: bliźniaczych dwóch *ps* górnych, bliźniaczych dwóch *pp* — dolnych i środkowego *pp*. Jeden sztywny węzeł w punkcie *K*, pozostałe — przegubowe. Lewa podpora posuwna, prawa — przegubowa. Ustrój jednokrotnie hyperstatyczny wewnętrznie.

Wyłączmy zeń pręt *CK* i oznaczmy przez *X* jego siły rozciągające osiowe. Długość tego pręta jest równa:

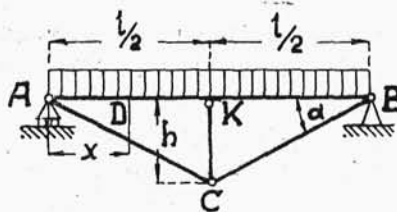
$$\frac{1}{2} l \operatorname{tg} \alpha$$

Te same siły *X*, lecz różnozwrotne, a więc skierowane ku sobie, przykładamy do punktów węzłowych *K* i *C*, zatem oba pręty dolne *AC* i *CB* będą ściskane osiowymi siłami:

$$-\frac{X}{2 \sin \alpha}$$

Ich długość jest równa:

$$\frac{l}{2 \cos \alpha}$$



Rys. 108.

W przekroju bieżącym  $D$  górnego pręta, przynależnym odciętej  $x$  panuje siła osiowa rozciągająca  $O_x$ , ścinająca  $Q_x$  i moment zginający  $M_x$ :

$$O_x = \frac{X}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad Q_x = -\frac{1}{2}(X + ql)$$

$$M_x = -\frac{1}{2}(X + ql)x + \frac{1}{2}qx^2$$

a przeto, pomijając działanie sił ścinających otrzymamy dla pracy sprężystej ustroju:

$$H = \frac{X^2 l \operatorname{tg} \alpha}{4 E_0 F_0} + \frac{X^2 l}{8 E_1 F_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha} + \frac{X^2 l}{8 E F \operatorname{tg}^2 \alpha} + \\ + \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{\left[ -\frac{1}{2}(X + ql)x + \frac{1}{2}qx^2 \right]^2}{EJ} dx$$

W tym wzorze pierwszy wyraz dotyczy pręta  $CK$ , drugi — bliźniaczych prętów  $AC$  i  $CB$ , dwa pozostałe — prętów  $AK$  i  $KB$ , stanowiących wistocie jeden pręt ciągły  $AB$ . Stąd bezpośrednio na mocy twierdzenia Menabrea:

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{Xl \operatorname{tg} \alpha}{2 E_0 F_0} + \frac{Xl}{4 E_1 F_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha} + \frac{Xl}{4 E F \operatorname{tg}^2 \alpha} - \\ - \frac{1}{2 EJ} \int_0^{\frac{1}{2}l} \left[ -\frac{1}{2}(X + ql)x + \frac{1}{2}qx^2 \right] x dx = 0$$

równanie, dające hyperstatyczną  $X$ .

d. Rama (Rys. 109) złożona z prętów o stałym przekroju: dwóch bliźniaczych pionowych  $ps$  i jednego poziomego  $pp$ . Górne węzły  $wp$ , dolne —  $ws$ . Obie podpory — stałe. Ustrój jest jednokrotnie hyperstatyczny wewnątrznie. Odrzućmy górny hyperstatyczny pręt poziomy i założmy, że ten pręt jest rozciągany siłami osiowymi  $X$ , zatem jego wydłużenie jest równe:

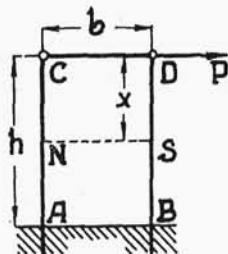
$$\frac{Xb}{E_0 F_0}$$

Oddziaływanie tego pręta na węzły  $C, D$  możemy zastąpić dwiema siłami  $X$ , poziomymi, zwróconymi ku sobie. W odległości  $x$  od węzłów  $C, D$  wyodrębniamy przekrój bieżący  $N$  lewego i  $S$  — prawego pręta. W pierwszym panuje siła ścinająca  $X$  i moment zginający  $Xx$ , w drugim — siła ścinająca  $P - X$  i moment zginający:

$$(P - X)x$$

Siły ścinające, jak zawsze, pomijamy; momentom zginającym przynależą posunięcia:

$$d\varphi = \frac{Xx}{EJ} dx \quad d\varphi = \frac{P - X}{EJ} x dx$$



Rys. 109.

— czyli przyrosty kątów odchylenia od pionu — odpowiednich stycznych odkształconych.

Obciążenie pokrewne stanowią dwie siły węzłowe  $X$ , równe jedności przy sile  $P$ , równej zeru. Przynależny im układ sił wewnętrznych obejmuje siły ścinające, równe jedności, które, jak zwykle, pomijamy, oraz momenty zginające różnoskrętne:

$$1x \quad -1x$$

przekrojów bieżących  $N, S$ . Zatem na mocy twierdzenia Mohr'a:

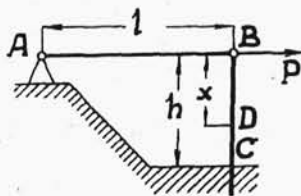
$$\int_0^h \frac{Xx^2}{EJ} dx - \int_0^h \frac{P - X}{EJ} x^2 dx = -1 \frac{Xb}{E_0 F_0}$$

skąd bezpośrednio:

$$X = \frac{P}{2 + 3 \frac{EJ}{E_0 F_0} \frac{b}{h^3}}$$

e. Ustrój (Rys. 110) złożony z prętów o stałym przekroju: pionowego  $ps$  i poziomego  $pp$ . Ustrój jest hyperstatyczny jednokrotnie, możemy przeto górny pręt odrzucić i założyć, że ten pręt jest rozciągany siłami osiowymi  $X$ . Jego wydłużenie jest równe:

$$\frac{Xl}{E_0 F_0}$$



Rys. 110.

W odległości  $x$  od węzła  $B$ , w przekroju bieżącym pręta pionowego panuje siła ścinająca  $P - X$ , którą pomijamy i moment zginający:

$$(P - X)x$$

Jego posunięcie:

$$d\varphi = \frac{P - X}{EJ} x dx$$

stanowi przyrost kąta odchylenia od pionu odpowiedniej stycznej odkształconej.

Pokrewny układ obciążenia stanowią dwie siły  $X$ , równe jedności, przyłożone do węzłów  $A$  i  $B$ . Prawej—przynależy układ sił wewnętrznych pręta pionowego: sił ścinających, które pominiemy—i momentów zginających:

$$-1x$$

Zatem twierdzenie Mohr'a da:

$$-\int_0^h \frac{P - X}{EJ} x^2 dx = -1 \frac{Xl}{E_0 F_0}$$

skąd bezpośrednio:

$$X = \frac{P}{1 + 3 \frac{EJ}{E_0 F_0} \frac{l}{h^3}}$$

### 3. Przykład liczbowy.

a. Wiązar (Rys. 111) złożony z prętów  $pp$  o stałym przekroju i węzłów  $wp$ . Lewa podpora posuwna, prawa—przegubowa. Ustrój jest izostatyczny. Rozpiętość wiązaru—4 m, wysokość—1,5 m, a przeto:

$$L = AC = CB = 250 \text{ cm}, \quad \sin \alpha = 0,6, \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,75, \quad \cos \alpha = 0,8$$

Siła zewnętrzna  $P$ , dwunastotonna daje osiowe siły ścisające:

$$-\frac{P}{2 \sin \alpha} = 10000 \text{ kg}$$



obu bliźniaczych prętów górnych, oraz siłę osiową rozciągającą:

$$\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} = 8000 \text{ kg}$$

pręta dolnego.

Licząc z pewnością czterokrotną otrzymamy siłę wybaczającą dla prętów górnych:

$$Q_e = 4 \times 10000 = 40000 \text{ kg}$$

zatem, po kilku próbach znajdziemy, że dla dwóch kątowników:

$$75 \times 75 \times 8 \text{ mm}$$

ustawionych obok siebie tak, aby stanowiły złożony przekrój teowy:

$$F = 2 \times 11,5 = 23 \text{ cm}^2, \quad J = 2 \times 58,9 = 117,8 \text{ cm}^4 \quad i = 2,27 \text{ cm}$$

Dla wiotkości:

$$w = \frac{250}{2,27} = 110$$

i stali miękkiej mamy:

$$N_e = 1711 \text{ kg/cm}^2 \quad Q_e = 1711 \times 23 = 39355 \simeq 40 \text{ t}$$

Dla pręta dolnego, rozciąganego i stali miękkiej wybieramy:

$$k_r = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad F_0 = \frac{8000}{1000} = 8 \text{ cm}^2$$

a przeto wystarczą dwa kątowniki:

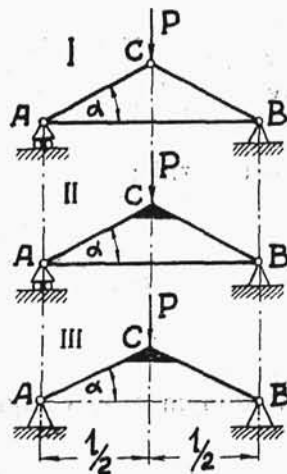
$$45 \times 45 \times 5 \text{ mm}$$

ustawione obok siebie tak, aby stanowiły złożony przekrój teowy:

$$F_0 = 2 \times 4,3 = 8,6 \text{ cm}^2$$

Ostatecznie więc w górnych prętach panować będzie naprężenie ściskające:

$$N_e = \frac{10000}{23} = 435 \text{ kg/cm}^2$$



Rys. 111, 112, 113

w dolnym pręcie — rozciągające :

$$N_r = \frac{8000}{8,6} = 930 \text{ kg/cm}^2$$

b. Wiązar (Rys. 112). Jak zmieniają się te naprężenia, gdy górny węzeł usztywnimy? Oznaczmy przez  $X$  hyperstatyczne siły osiowe rozciągające dolnego pręta. Te same siły, lecz różnozwrotne, należy przyłożyć do węzłów  $A, B$ , zatem — w bieżącym przekroju pręta  $AC$ , obranym w odległości  $z$  od węzła  $A$  panować będzie siła osiowa ściskająca  $O_z$ , ścinająca  $Q_z$  i moment zginający  $M_z$ :

$$O_z = - \left( X \cos \alpha + \frac{1}{2} P \sin \alpha \right) \quad Q_z = X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha$$

$$M_z = \left( X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha \right) z$$

Działanie sił ścinających pomijamy. Praca sprężysta ustroju:

$$H = \frac{X^2 l}{2EF_0} + \frac{\left( X \cos \alpha + \frac{1}{2} P \sin \alpha \right)^2}{EF} L + \int_0^L \frac{\left( X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha \right)^2}{EJ} z^2 dz$$

Stąd na mocy twierdzenia Menabrea:

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{Xl}{EF_0} + \frac{X \cos \alpha + \frac{1}{2} P \sin \alpha}{EF} L + \int_0^L \frac{2 X \sin^2 \alpha - P \sin \alpha \cos \alpha}{EJ} z^2 dz = 0$$

i ostatecznie:

$$X = \frac{P F_0}{2 F} \frac{\left( \frac{Fl^2}{12 J \cos^2 \alpha} - 1 \right) \sin \alpha}{1 + \frac{F_0}{F} \cos \alpha + \frac{F_0 l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{12 J \cos \alpha}} = 7932 \text{ kg}$$

W dolnym pręcie naprężenie rozciągające będzie równe:

$$N_r = \frac{7932}{8,6} = 922 \text{ kg/cm}^2$$

zmniejszy się przeto o 0,86 %. Skrajny moment pręta górnego:

$$M_m = \left( X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha \right) L = -10200 \text{ cm kg}$$

panuje tuż przed węzłem C. Jest prawoskrętny, jak na to wskazuje jego znak ujemny, a przeto daje naprężenie ściskające w górnej prostolinjowej skrajnej warstwie przekroju teowego, odległej od środka przekroju o 2,13 cm. Nadto siła osiowa ściskająca:

$$O_x = X \cos \alpha + \frac{1}{2} P \sin \alpha = 9945,5 \text{ kg}$$

a przeto skrajne naprężenie ściskające górnego pręta:

$$N_m = -\frac{9945,5}{23} - \frac{10200}{117,8} 2,13 = 617 \text{ kg/cm}^2$$

jest o 41,82 % wyższe.

c. Wiązar (Rys. 113). Spróbujmy jeszcze inaczej. Odzućmy pręt dolny i zmieńmy lewą podpórę posuwą—na przegubową. Hyperstatyczny odpór poziomy oznaczmy przez  $X$ , a przeto, jak wyżej:

$$H = \frac{\left( X \cos \alpha + \frac{1}{2} P \sin \alpha \right)^2}{EF} L + \int_0^L \frac{\left( X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha \right)^2}{EJ} z^2 dz$$

Stąd, na mocy twierdzenia Menabrea:

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{X \cos \alpha + \frac{1}{2} P \sin \alpha}{EF} l + \int_0^L \frac{2X \sin^2 \alpha - P \sin \alpha \cos \alpha}{EJ} z^2 dz = 0$$

i ostatecznie:

$$X = \frac{P}{2} \frac{\frac{Fl^2}{12J \cos^2 \alpha} - 1}{\frac{Fl^2 \tan^2 \alpha}{12J \cos^2 \alpha} + 1} \tan \alpha = 7978 \text{ kg}$$

zatem, jak wyżej:

$$M_m = -3300 \text{ cm kg} \quad O_x = -9982,5 \text{ kg}$$

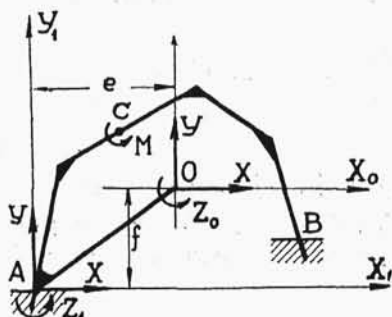
$$N_m = -\frac{9982,5}{23} - \frac{3300}{117,8} 2,13 = 493,5 \text{ kg/cm}^2$$

a więc o 13,45% więcej niż dla izostatycznego ustroju.

4. Łamana (Rys. 114), utworzona z prętów prostych, sztywno na węzłach połączonych. Obie podpory  $A, B$  — stałe. Z lewego punktu podparcia  $A$  wyprowadzamy poziomą oś  $X$  w prawo, pionową —  $Y$  do góry. Do środka:

$$C(x, y)$$

bieżącego przekroju łamanej sprowadzamy jej obciążenie zewnętrzne, działające w odcinku  $BC$ , przyczem wypadkowe siły:



Rys. 114.

osiową i ścinającą pomijamy, biorąc tylko pod uwagę moment zginający  $M$ . Oznaczmy przez  $M_0$  ten sam moment zginający tego samego obciążenia, jakiby panował w  $C$  gdyby prawa podpora łamanej była posuwna, a lewa — przegubowa. Wyznaczanie  $M_0$  odbywa się bez trudności: równania statyki dają siły odporowe: pionową podpory prawej, oraz

pionową  $V_0$  i pionową  $U_0$  podpory lewej.

W rzeczywistości podpora  $A$  jest stała, nieprzegubowa, a przeto daje siły odporowe: poziomą:  $U_0 + X$ , pionową:  $V_0 + Y$ , a nadto moment odporowy  $Z_1$  — lewoskrętny. Zatem:

$$M = M_0 + Z_1 + Xy_1 - Yx_1$$

Odrzućmy lewą podporę i dodajmy jeden sztywny pręt  $AO$ , złączony sztywnie w punkcie węzłowym  $A$  z pierwszym prętem łamanej. Z nowego punktu podparcia:

$$O(e, f)$$

wyprowadzamy równoległe i jednozwrótne osie  $X_0, Y_0$ , przypisując tej nowej podporze stałej te same siły odporowe hyperstatyczne: poziomą  $X$  i pionową  $Y$ , a nadto — moment odporowy:

$$Z_0 = Z_1 + Xf - Ye$$

Zatem moment zginający w bieżącym punkcie  $C$ :

$$M = M_0 + Z_1 + X(y_0 + f) - Y(x_0 + e) = M_0 + Z_0 + Xy_0 - Yx_0$$

a więc i praca sprężysta łamanej:

$$H = \int \frac{M^2 ds}{2 EJ} = \int \frac{(M_0 + Z_0 + Xy_0 - Yx_0)^2}{2 EJ} ds$$

gdzie  $ds$  oznacza osiową grubość płytki bieżącej kolejnych prętów łamanej. Zatem, na mocy twierdzenia Menabrea:

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \int \frac{My_0}{EJ} ds = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial Y} = - \int \frac{Mx_0}{EJ} ds = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial Z_0} = \int \frac{M}{EJ} ds = 0$$

Pomnóżmy te równania przez obrany iloczyn  $E_0 J_0$  i oznaczmy:

$$dc = \frac{E_0 J_0}{EJ} ds = n ds$$

Przypisując płytce bieżącej ciężar  $dc$  otrzymamy wypadkową:

$$C = \int dc = n \int ds$$

czyli ciężar łamanej. Spółrzędne punktu przyłożenia tej wypadkowej będą odpowiednio:

$$\frac{1}{C} \int x dc \quad \frac{1}{C} \int y dc$$

Załóżmy, żeśmy obrali początek nowych osi spółrzędnych — właśnie w tym punkcie, to jest, że:

$$e = \frac{1}{C} \int x dc \quad f = \frac{1}{C} \int y dc$$

Zatem dla wszelkich osi prostokątnych  $X_0, Y_0$ , wyprowadzonych ze środka  $O$ , całki:

$$\int x_0 dc = \int y_0 dc = 0$$

a dla środkowych osi głównych  $X, Y$ :

$$\int x dc = \int y dc = \int xy dc = 0$$

Nadto dla osi głównych:

$$J_x = \int y^2 dc \qquad J_y = \int x^2 dc$$

a przeto z równań, wyżej wypisanych otrzymamy:

$$\int M_0 y dc + X \int y^2 dc = \int M_0 x dc - Y \int x^2 dc = \int M_0 dc + Z_0 \int dc = 0$$

i ostatecznie:

$$X = -\frac{1}{J_x} \int M_0 y dc \qquad Y = \frac{1}{J_y} \int M_0 x dc \qquad Z_0 = -\frac{1}{C} \int M_0 dc$$

Całki tych wzorów najlepiej wyznaczać wykreślnie.

Jako przykład ponownie rozpatrzmy ramę (Rys. 107). Wobec symetrii obciążenia:

$$U_0 = 0 \qquad V_0 = -\frac{1}{2} qb$$

Oznaczmy przez:

$$n = \frac{EJ}{E_0 J_0}$$

zatem dla pręta górnego:

$$dc = dx$$

dla obu prętów pionowych:

$$dc = n dy$$

a przeto:

$$c = \int_0^b dx + 2n \int_0^h dy = b + 2nh$$

$$\int x dc = \int_0^b x dx + n \int_0^h 0 dy + nb \int_0^h dy = \frac{1}{2} b(b + 2nh)$$

$$\int y dc = h \int_0^b dx + 2n \int_0^h y dy = h(b + nh)$$

i ostatecznie:

$$e = \frac{1}{2} b \quad f = \frac{b + nh}{b + 2nh} h$$

Punkt  $O$  przyłożenia ciężaru  $C$  leży na pionowej osi symetrii ramy w odległości  $f$  od podstawy  $AA$ . W układzie nowych osi  $X_0, Y_0$  równoległych i jednozwnrotnych, z tego punktu wyprowadzonych,  $M_0$  ma wielkość zerową dla obu pionowych prętów. Dla poziomego:

$$M_0 = V_0 \left( \frac{1}{2} b + x_0 \right) + \frac{1}{2} q \left( \frac{1}{2} b + x_0 \right)^2 = \frac{1}{2} q \left( x_0^2 - \frac{1}{4} b^2 \right)$$

a przeto:

$$\int M_0 dc = \frac{1}{2} q \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \left( x_0^2 - \frac{1}{4} b^2 \right) dx_0 = -\frac{1}{12} qb^3$$

$$\int M_0 x_0 dc = \frac{1}{2} q \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \left( x_0^3 - \frac{1}{4} b^2 x_0 \right) dx_0 = 0$$

$$\int M_0 y_0 dc = (h-f) \int M_0 dc = -\frac{1}{12} q b^3 (h-f)$$

i ostatecznie:

$$Z_0 = Z + Xf = \frac{q b^3}{12(b+2nh)} \quad Y = 0$$

Zerowa wielkość  $Y$  wskazuje, że siły odporowe pionowe obu stałych podpór ramy:

$$V = V_0 + Y = -\frac{1}{2} qb$$

Chcąc znaleźć  $X$  wyznaczamy:

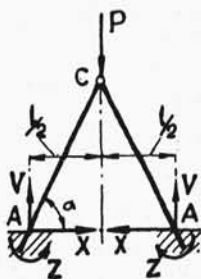
$$\begin{aligned} J_x &= \int y_0^2 dc = (h-f)^2 \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dx + 2n \int_{-f}^{h-f} y^2 dy = \\ &= \frac{2n}{3} [(h-f)^3 + f^3] + (h-f)^2 b \end{aligned}$$

a zatem:

$$X = \frac{q b^3 (h-f)}{8n[(h-f)^3 + f^3] + 12b(h-f)^2}$$

**5. Wpływ sił osiowych.** Pomijanie pracy sprężystej sił ścinających nie daje wyraźnego błędu, przekraczającego wymaganą dokładność obliczeń praktycznych. W pewnych przypadkach natomiast praca sprężysta sił osiowych zmienia wyniki ostateczne, nie może przeto być pominięta.

Weźmy np. (Rys. 115) ramę, złożoną z dwóch bliźniaczych prętów  $ps$  stałego przekroju. Oba dolne węzły  $ws$ , górny —  $wp$ . Podpory obie stałe. Ustrój jest dwukrotnie hyperstatyczny zewnętrznie. Wobec zupełnej symetrii rozpatrujemy tylko jego połowę lewą. Pionowe siły odporowe obu podpór stałych:



Rys. 115.

$$V = -\frac{1}{2} P$$

Hyperstatyczną siłę odporową poziomą lewej podpory oznaczamy przez  $X$ , a moment odporowy lewoskrętny — przez  $Z$ .



W bieżącym przekroju pręta, wyodrębnionym w osiowej odległości  $s$  od punktu podparcia  $A$  panuje siła osiowa  $O_s$ , ścinająca  $Q_s$  i moment zginający  $M_s$ :

$$O_s = - \left( X \cos \alpha + \frac{1}{2} P \sin \alpha \right) \quad Q_s = X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha$$

$$M_s = \left( X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha \right) s + Z$$

W punkcie węzłowym  $C$  moment zginający jest niewątpliwie równy zeru, a przeto:

$$Z = - \left( X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha \right) L \quad L = \frac{l}{2 \cos \alpha}$$

i ostatecznie:

$$M_s = \left( X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha \right) \left( s - \frac{l}{2 \cos \alpha} \right)$$

Stąd bezpośrednio:

$$H = \frac{\left( X \cos \alpha + \frac{1}{2} P \sin \alpha \right)^2}{EF} L + \int_0^L \frac{\left( X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha \right)^2}{EJ} (s - L)^2 ds$$

zatem, na mocy twierdzenia Menabrea:

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{X \cos \alpha + \frac{1}{2} P \sin \alpha}{EF} l + \frac{2 X \sin^2 \alpha - P \sin \alpha \cos \alpha}{24 EJ \cos^3 \alpha} l^3 = 0$$

a przeto, gdybyśmy pominęli pracę sił osiowych, to jest odrzucili pierwszy wyraz z lewej strony równania, to otrzymalibyśmy:

$$X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha = Z = 0$$

niewątpliwie sprzecznie z rzeczywistością. Nie powinno to dziwić: pominęliśmy działanie sił osiowych, inaczej mówiąc, założyliśmy, zresztą najzupełniej dowolnie, że oba pręty ustroju nie ulegają skróceniu, że górny przegub nie obniża się pod działaniem siły zewnętrznej. Przy tych założeniach wygięcie prętów jest zgoła niemożliwe. Zatem należy owo pomijanie pracy sił osiowych stosować nader oględnie.