

Jak wyżej, zwykłymi sposobami statyki otrzymamy:

PRĘT	$Nr$	$F_l$	$l_l$	$E_l$	$S_l$
$AB$	1	$F_1$	$h \operatorname{tg} \alpha$	$E_1$	$Q + P \operatorname{tg} \alpha - \frac{R}{\cos \alpha} = Q + P \operatorname{tg} \alpha - \frac{N}{h}$
$BC$	2	$F_2$	$\frac{h}{\cos \alpha}$	$E_2$	$-\frac{P}{\cos \alpha} + R \operatorname{tg} \alpha = -\frac{P}{\cos \alpha} + \frac{N \sin \alpha}{h}$

skąd bezpośrednio:

$$H = \left( Q + P \operatorname{tg} \alpha - \frac{N}{h} \right)^2 \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{2 E_1 F_1} + \left( -\frac{P}{\cos \alpha} + \frac{N \sin \alpha}{h} \right)^2 \frac{h}{2 E_2 F_2 \cos \alpha}$$

i ostatecznie:

$$p = \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_0 = \frac{Ph}{E_1 F_1} \operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{Ph}{E_2 F_2 \cos^3 \alpha} \quad q = \left( \frac{\partial H}{\partial Q} \right)_0 = \frac{Ph}{E_1 F_1} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$n = \left( \frac{\partial H}{\partial N} \right)_0 = - \left( \frac{P \operatorname{tg}^2 \alpha}{E_1 F_1} + \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{E_2 F_2 \cos \alpha} \right)$$

gdzie dolny zerowy wskaźnik oznacza przynależność pochodnych, w nawiasy ujętych, — zerowym wielkościom sił dodatkowych  $Q, N$ . Ujemny znak ostatniego wzoru wskazuje na różnozwrotność obrotu  $n$  i obranej pary sił  $R$ -lewoskrętnej: znikomy obrót pręta  $CB$  jest prawoskrętny — z biegiem wskazówki zegara.

5. Twierdzenia Betti i Mohr'a dają również praktycznie nader cenne wyniki.

a. Odpory hyperstatyczne. Po wyróżnieniu odporów hyperstatycznych  $O_h$  z warunkowych równań równowagi całego ustroju, hyperstatycznego zewnątrznie, możemy podpory, dające owe  $O_h$  odrzucić, a działania ich zastąpić siłami  $O_h$  zewnątrznie, narazie niewiadomymi. Zatem podstawowy układ obciążenia obejmuje:  $m$  niezależnych sił zewnętrznych  $P_l$  i dodatkowych  $a$  zastępczych sił  $O_h$ . Posunięcia sił  $P_l$  oznaczamy przez  $p_l$ ; posunięcia sił  $O_h$ , zerowe dla podpór sztywnych, dla sprężystych równe są:

$$-o_h O_h$$

gdzie  $o_h$  oznacza odpowiedni współczynnik sprężystości podpory. Dla sztywnej —  $o_h$  jest równe zeru.

Nadto obieramy  $a$  układów pokrewnych obciążenia. Każdy z nich obejmuje tylko jedną siłę hyperstatyczną  $O_j$ , równą jedności, przy pozostałych siłach  $O_h, P_i$  — równych zeru. Ta siła  $O_j$ , wobec odrzucenia podpór hyperstatycznych, wzbudza tylko izostatyczne odpory — pozostałych podpór ustroju, a nadto, jako odkształcająca, daje przemieszczenia punktów przyłożenia sił  $O_h, P_i$  podstawowego obciążenia. Rzuty owych przemieszczeń na osie tych sił stanowią posunięcia:  $p_{ij}, p_{hj}$ .

Zatem twierdzenie Betti daje  $a$  zależności:

$$\sum_{i=1}^m P_i p_{ij} + \sum_{h=1}^a O_h p_{hj} = -o_j O_j \quad j = 1, 2, \dots, a$$

z których wyznaczymy wszystkie  $O_h$ , o ile z równań zmienności ustroju zdołamy wyznaczyć posunięcia  $p_{ij}, p_{hj}$ .

Tak, np. (Rys. 96) podstawowy układ obciążenia obejmuje: siłę  $Y$  hyperstatycznego oporu odrzuconej lewej podpory — oraz siły jednostkowe  $q dx$  stałego obciążenia  $q$ . Dla pokrewnego układu siła  $Y$  jest równa jedności przy wszystkich  $q dx$  równych zeru. Wzór Clerc'a (123) wypisany dla przęsła ( $x$ ) daje:

$$0 = 6 EJ \frac{y}{x} - x(l-x) - 2lx$$

stąd rzędna  $y$  odkształconej, przynależna odciętej  $x$ , oraz — końcowe ugięcia  $f$  pręta:

$$y = \frac{3l-x}{6 EJ} x^2 \quad f = \frac{l^3}{3 EJ}$$

Zatem, chcąc zastosować twierdzenie Betti, mnożymy siły podstawowego układu przez odpowiednie posunięcia układu pokrewnego; suma tych iloczynów:

$$q \sum y dx + Yf = \frac{q}{6 EJ} \int_0^l (3l-x)x^2 dx + \frac{Yl^3}{3 EJ}$$

winna być równa sumie iloczynów sił układu pokrewnego przez odpowiednie posunięcia układu podstawowego. Jest więc równa zeru, a przeto mamy:

$$Y = -\frac{3}{8} ql$$

Możemy również do wyznaczania odporów  $O_h$  hyperstatycznych użyć twierdzenia Mohr'a. Podstawowe obciążenie ustroju zewnętrznie hyperstatycznego obejmuje:  $m$  niezależnych sił  $P_i$  zewnętrznych i  $a$  zastępczych sił  $O_h$ . Przynależy mu układ  $u$  sił węzłowych  $K_v$ .

Siła  $O_j$  układu pokrewnego, równa jedności, da  $u$  węzłowych sił  $b_{jv}$ , a przeto dla ustroju linjowo-zmiennego:

$$K_v = b_{ov} + \sum_{h=1}^a O_h b_{hv}$$

gdzie  $b_{ov}$  oznacza siłę węzłową, zależną tylko od układu sił  $P_i$ . Oznaczmy przez  $w_v$  posunięcie węzłowej siły  $K_v$ ; twierdzenie Mohr'a da  $a$  zależności:

$$-1 \cdot O_j \cdot O_j = \sum_{v=1}^u b_{jv} w_v \quad j=1, 2, \dots, a$$

z których wyznaczmy hyperstatyczne odpory  $O_h$ , o ile zdołamy, posilując się równaniami statyki i wytrzymałości — wyznaczyć wszystkie  $w_v$  w zależności od  $P_i$  i  $O_h$ .

Tak, np. (Rys. 96) pręt  $ps$  może być rozpatrywany, jako ustrój, złożony z ciągłego szeregu płytek, grubości  $dx$ . Węzłowe obciążenie tych znikomo krótkich prętów stanowią: siły ścinające, które, jak zwykle, pomijamy, oraz — momenty zginające:

$$M = Y(l-x) + \frac{1}{2} q(l-x)^2$$

Uogólnionej sile  $M$  przynależy posunięcie:

$$d\varphi = \frac{M}{EJ} dx$$

kąt znikomego pochylenia względnego dwóch sąsiednich przekrojów poprzecznych pręta. Posunięcie hyperstatycznego odporu  $Y$  lewej sztywnej podpory jest niewątpliwie równe zero.

Dla pokrewnego układu obciążenia obieramy siłę  $Y$ , równą jedności, wszystkie zaś siły jednostkowe  $q dx$  — równe zero. Pomijając, jak zwykle, siły ścinające, uwzględnimy tylko momenty zginające:

$$1(l-x)$$

jako siły węzłowe układu pokrewnego. Zatem twierdzenie Mohr'a da:

$$\sum 1(l-x) d\varphi = \int_0^l \left[ Y(l-x)^2 + \frac{1}{2} q(l-x)^3 \right] dx = 1 \times 0 = 0$$

$$Y = -\frac{3}{8} ql$$

b. Hyperstatyczne siły węzłowe. W równaniach warunkowych równowagi prętów i węzłów ustroju wewnątrznie hyperstatycznego wyróżniamy hyperstatyczne siły węzłowe  $K_h$  i, po rozcięciu odpowiednich węzłów, wyłączamy pręty, przynależne siłom  $K_h$ , zastępując działanie tych prętów na węzły odpowiednio dobranymi siłami. Układ tych dodatkowych sił zewnętrznych obejmuje  $a$  sił węzłowych  $K_h$  hyperstatycznych, pozostałe jego siły  $K_l$  zależą od zewnętrznego obciążenia poszczególnych prętów, wyłączonych z ustroju. Te same siły  $K_l, K_h$ , lecz różnozwrotne, utrzymują w równowadze pręty, wyłączone z ustroju, możemy przeto znaleźć zawsze ich posunięcia, a więc i posunięcia  $p_h$  hyperstatycznych sił  $K_h$ .

Podstawowy układ obciążenia obejmuje więc:  $m$  sił niezależnych zewnętrznych  $P_l$  i  $a$  sił zastępczych  $K_h$ , narazie niewiadomych. Każda z sił  $K_h$  występuje bliźniaczo, na obu węzłach wyłączonego pręta, i różnozwrotnie: jej posunięcie  $p_h$  jest przeto względne. Posunięcia sił  $P_l$  oznaczamy odpowiednio przez  $p_l$  i obieramy  $a$  układów pokrewnych obciążenia. Każdy z nich obejmuje tylko dwie bliźniacze, różnozwrotne siły  $K_j$  węzłowe, obie równe jedności; wszystkie pozostałe siły  $K_h$  i  $P_l$  czynimy równe zeru. Siły  $K_j$  obciążenia pokrewnego stanowią układ zrównoważony, możemy przeto odrzucić podpory, jako zbędne. Obciążenie pokrewne daje przemieszczenia punktów przyłożenia sił  $P_l, K_h$  podstawowego układu. Rzuty owych przemieszczeń na osie tych sił—stanowią posunięcia  $p_{lj}, p_{hj}$ . Zatem twierdzenie Betti da  $a$  zależności:

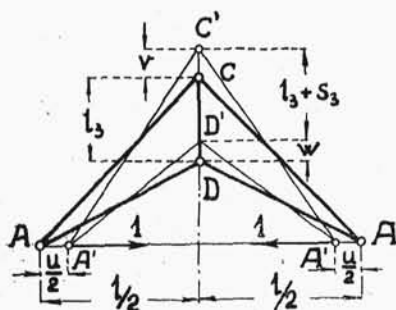
$$\sum_{l=1}^m P_l p_{lj} + \sum_{h=1}^a K_h p_{hj} = -K_j p_j \quad j = 1, 2, \dots, a$$

z których wyznaczymy siły węzłowe hyperstatyczne, o ile z równań zmienności ustroju zdołamy otrzymać wszystkie  $p_{lj}, p_{hj}$ .

Tak np. (Rys. 97) dolny hyperstatyczny pręt odrzucamy, a działanie jego na węzły  $A, B$  zastępujemy siłami  $X$ , leżącymi na osi  $AB$ , zwróconymi ku sobie. Wyłączony pręt jest przeto *rozciągany* różnozwrotnymi siłami  $X$ . Jego wydłużenie:

$$\frac{Xl}{E_0 F_0}$$

wzięte ze znakiem ujemnym stanowi posunięcie uogólnionej siły  $X$ , złożonej z dwóch węzłowych sił  $X$  bliźniaczych, różnozwrotnych. Układ pokrewny



Rys. 99.

(Rys. 99) otrzymamy, biorąc siły  $X$  równe jedności, przy sile  $P$  równej zeru. Podpory, jako zbędne, odrzucamy. Pod działaniem tego obciążenia dolne węzły  $A$  posuną się ku sobie. Ich posunięcie poziome względne oznaczamy przez  $u$ , przez:  $s_1, s_2, s_3$  — odpowiednie przyrosty pierwotnych długości:  $l_1, l_2, l_3$  prętów —  $AD, AC, CD$ , wreszcie przez:  $v, w$  — pionowe posu-

nięcia górnych węzłów  $C$  i  $D$ , przyczem, jak widać z rysunku:

$$v + l_3 = w + l_3 + s_3 \quad w = v - s_3$$

Nadto mamy:

$$(l_1 + s_1)^2 = (h + w)^2 + \frac{1}{4}(l - u)^2$$

$$(l_2 + s_2)^2 = (h + l_3 + v)^2 + \frac{1}{4}(l - u)^2$$

oraz, po odrzuceniu małych wyższych rzędów i uwzględnieniu pierwotnego kształtu ustroju:

$$l_1 s_1 = hw - \frac{1}{4}lu = hv - hs_3 - \frac{1}{4}lu \quad l_2 s_2 = hv + l_3 v - \frac{1}{4}lu$$

stąd bezpośrednio:

$$v = \frac{l_2 s_2 - l_1 s_1 - h s_3}{l_3} \quad u = 4 \frac{h + l_3}{l} v - 4 \frac{l_2 s_2}{l} = 2 v \operatorname{tg} \beta - \frac{2 s_2}{\cos \beta}$$

Zatem na mocy wzorów, wyżej, w punkcie czwartym otrzymanych, będziemy mieli:

$$s_1 = \frac{S_1 l_1}{E_1 F_1} = - \frac{l \sin \beta}{2 E_1 F_1 \cos \alpha \sin (\beta - \alpha)}$$

$$s_2 = \frac{S_2 l_2}{E_2 F_2} = - \frac{l \sin \alpha}{2 E_2 F_2 \cos \beta \sin (\beta - \alpha)}$$

$$s_3 = \frac{S_3 l_3}{E_3 F_3} = - \frac{l \sin \alpha \sin \beta}{E_3 F_3 \cos \alpha \cos \beta} = - \frac{l}{E_3 F_3} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$$

i ostatecznie:

$$v = \frac{l \sin \beta \cos \beta}{2 E_1 F_1 \cos \alpha \sin^2 (\beta - \alpha)} + \frac{l \sin \alpha \cos \alpha}{2 E_2 F_2 \cos \beta \sin^2 (\beta - \alpha)} +$$

$$+ \frac{l \sin^2 \alpha \sin \beta}{E_3 F_3 \cos \alpha \sin (\beta - \alpha)}$$

Zatem na mocy twierdzenia Betti:

$$Xu - Pv = -1 \frac{Xl}{E_0 F_0}$$

skąd, po podstawieniu, otrzymamy dla niewiadomej  $X$  ostateczny wzór, podany wyżej w punkcie czwartym. Ujemny znak iloczynu  $Pv$  jest konieczny ze względu na różnozwrotność siły  $P$  i posunięcia  $v$ .

Możemy również do wyznaczania hyperstatycznych sił węzłowych  $K_h$  użyć twierdzenia Mohr'a. Podstawowe obciążenie ustroju hyperstatycznego wewnątrznie obejmuje:  $m$  niezależnych sił zewnętrznych i  $a$  zastępczych sił  $K_h$ . Przynależy mu układ pozostałych izostatycznych  $u$  węzłowych sił  $K_v$ .

Siła  $K_j$  układu pokrewnego, równa jedności, da  $u$  węzłowych sił  $b_{jv}$ , a przeto dla ustroju linjowo-zmiennego:

$$K_v = b_{ov} + \sum_{h=1}^a K_h b_{hv}$$

gdzie  $b_{ov}$  oznacza siłę węzłową, zależną tylko od układu sił  $P_i$ . Oznaczmy przez  $w_v$  posunięcie siły węzłowej  $K_v$ , zatem twierdzenie Mohr'a da  $a$  zależności:

$$-1 w_j = \sum_{v=1}^u b_{jv} w_v \quad j=1, 2, \dots, a$$

z których wyznaczymy siły hyperstatyczne  $K_h$ , o ile zdołamy, posilując się równaniami statyki i wytrzymałości, wyznaczyć wszystkie  $w$ , w zależności od  $P_l, K_h$ .

Tak np. (Rys. 97) podstawowe obciążenie obejmuje: siłę  $P$  i dwie siły  $X$  osiowe, zwrócone ku sobie, przyłożone do węzłów  $A, B$  wzamian odrzuconego pręta. To obciążenie daje węzłowe siły osiowe  $S_l$  prętów  $pp$  ustroju. Ich posunięcia względne oznaczamy przez  $s_l$ . Wydłużenie odrzuconego pręta, niewątpliwie *rozciągane*go siłami  $X$ :

$$\frac{Xl}{E_0 F_0}$$

wzięte z ujemnym znakiem, stanowi posunięcie względne uogólnionej siły  $X$ , działającej na węzły  $A, B$ .

Układ pokrewny obciążenia (Rys. 99) uogólnionej siły  $X$  równej jedności daje osiowe siły węzłowe  $b_l$ . Zwykle równania statyki dadzą tu, jak wyżej:

PRĘT	$l_l$	$S_l$
1	$\frac{l}{2 \cos \alpha}$	$\frac{P \cos \beta - 2 X \sin \beta}{2 \sin (\beta - \alpha)}$
2	$\frac{l}{2 \cos \beta}$	$-\frac{P \cos \alpha - 2 X \sin \alpha}{2 \sin (\beta - \alpha)}$
3	$\frac{l \sin (\beta - \alpha)}{2 \cos \alpha \cos \beta}$	$\frac{P \cos \beta - 2 X \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} \sin \alpha$
PRĘT	$s_l$	$b_l$
1	$\frac{P \cos \beta - 2 X \sin \beta}{2 E_1 F_1 \sin (\beta - \alpha)} \frac{l}{\cos \alpha}$	$-\frac{\sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}$
2	$-\frac{P \cos \alpha - 2 X \sin \alpha}{2 E_2 F_2 \sin (\beta - \alpha)} \frac{l}{\cos \beta}$	$\frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}$
3	$\frac{P \cos \beta - 2 X \sin \beta}{2 E_3 F_3 \cos \alpha \cos \beta} l \sin \alpha$	$-\frac{2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}$

Zatem, na mocy twierdzenia Mohr'a:

$$-1 \frac{Xl}{E_0 F_0} = \sum b_i s_i$$

skąd, po podstawieniu otrzymamy równanie, podane wyżej w punkcie czwartym.

c. Odkształcenia ustroju. Po wyznaczeniu hyperstatycznych odporów i sił węzłowych, każdy pręt ustroju może być rozpatrywany jako całość, odkształcona pod obciążeniem przynależnych jej sił zewnętrznych i węzłowych. Można więc ograniczyć się do badania posunięć punktów węzłowych ustroju. Posunięcie węzła  $p$  przypisujemy sile zewnętrznej  $P$ , przyłożonej do punktu węzłowego, współosiowo z  $p$ . Znikomy obrót  $p$  węzła około osi, przechodzącej przez punkt węzłowy, daje posunięcie momentu  $P$  — siły uogólnionej, leżącej na tej osi.

Oznaczmy przez  $p_i$  — posunięcia  $m$  sił  $P_i$  niezależnych, tworzących, łącznie z  $P$  — podstawowy układ obciążenia zewnętrznego. Układ pokrewny otrzymamy, biorąc siłę  $P$ , równą jedności przy wszystkich  $P_i$ , równych zeru. Ten układ da posunięcie  $p'$  punktu węzłowego, przynależne sile  $P$ , a nadto da posunięcia  $p'_i$  punktów przyłożenia sił  $P_i$  układu podstawowego — współosiowe z temi siłami. Zatem na mocy twierdzenia Betti otrzymamy wprost:

$$1 p = P p' + \sum_{i=1}^m P_i p'_i$$

o ile z równań zmienności ustroju zdołamy wyznaczyć wszystkie posunięcia:  $p', p'_i$ .

Tak, np. (Rys. 98) chcąc wyznaczyć posunięcia węzła  $B$ , oznaczamy w układzie osi  $X, Y$  składowe tego posunięcia odpowiednio przez  $u, v$ , przez  $s_1, s_2$  przyrosty długości:  $l_1, l_2$  górnego pręta  $AB$  i pochylego  $CB$ . Zatem będziemy mieli niewątpliwie:

$$(l_1 + s_1)^2 = (l_1 + u)^2 + (h + v - h)^2 \quad (l_2 + s_2)^2 = (l_1 + u)^2 + (h + v)^2$$

skąd, po odrzuceniu małych wyższego rzędu i uwzględnieniu pierwotnej postaci ustroju:

$$u = s_1 = \frac{S_1 l_1}{E_1 F_1} \quad l_2 s_2 = l_1 u + h v \quad s_2 = \frac{S_2 l_2}{E_2 F_2}$$



i ostatecznie:

$$u = S_1 \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{E_1 F_1} \quad v = -S_1 \frac{h \operatorname{tg}^2 \alpha}{E_1 F_1} + S_2 \frac{h}{E_2 F_2 \cos^2 \alpha}$$

gdzie przez  $S_1, S_2$  oznaczono siły osiowe prętów ustroju. Chcąc znaleźć pionowe posunięcie węzła  $B$ , przynależne istotnie działającej sile  $P$ , obieramy układ pokrewny: pionową siłę  $P$ , równą jedności. Da ona:

$$S_1 = \operatorname{tg} \alpha \quad S_2 = -\frac{1}{\cos \alpha} \quad v = -\frac{h \operatorname{tg}^3 \alpha}{E_1 F_1} - \frac{h}{E_2 F_2 \cos^3 \alpha}$$

zatem, na mocy twierdzenia Betti:

$$-Pv = 1p \quad p = \frac{Ph}{E_1 F_1} \operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{Ph}{E_2 F_2 \cos^3 \alpha}$$

Zkolei, chcąc znaleźć poziome posunięcie  $q$  węzła  $B$  obieramy układ pokrewny: siły  $P$ , równej zeru, oraz — poziomej siły  $Q$  równej jedności. To obciążenie daje:

$$S_1 = 1 \quad S_2 = 0 \quad v = -\frac{h \operatorname{tg}^2 \alpha}{E_1 F_1}$$

a przeto, na mocy twierdzenia Betti:

$$-Pv = 1q \quad q = \frac{Ph}{E_1 F_1} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Możemy również wyznaczyć kąt obrotu  $n$  pręta  $CB$ , czyli przyrost kąta  $\alpha$ , przynależny działaniu siły  $P$ . W tym celu obieramy układ pokrewny, obejmujący, prócz siły  $P$ , równej zeru — dwie bliźniacze siły  $R$ , różnowrotne, prostopadłe do pręta  $BC$  i przyłożone do punktów węzłowych  $A, B$ . Ich moment  $Rl_2$  ma być równy jedności, a przeto:

$$R = \frac{\cos \alpha}{h} \quad S_1 = -\frac{\cos \alpha}{h} \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{1}{h} \quad S_2 = \frac{\cos \alpha}{h} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{h}$$

$$v = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{E_1 F_1} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{E_2 F_2 \cos \alpha}$$

Stąd ostatecznie, na mocy twierdzenia Betti:

$$-Pv = 1n \quad n = -\left(\frac{P \operatorname{tg}^2 \alpha}{E_1 F_1} + \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{E_2 F_2 \cos \alpha}\right)$$

We wszystkich wzorach powyższych ujemny znak iloczynu  $Pv$  jest konieczny ze względu na różnozwrotność siły  $P$  i posunięcia  $v$ .

Możemy również do wyznaczania posunięć  $p$  węzłowych użyć twierdzenia Mohr'a. Podstawowe obciążenie ustroju, jak wyżej, obejmuje:  $m$  niezależnych sił zewnętrznych  $P_i$  i siłę  $P$ , przynależną posunięciu  $p$ . Podstawowemu obciążeniu odpowiada układ  $u$  sił węzłowych  $K_v$  i ich posunięć  $w_v$ . Siła  $P$  układu pokrewnego, równa jedności, daje  $u$  węzłowych sił  $b_v$ , a przeto dla ustroju linjowo-zmiennego:

$$K_v = b_{ov} + b_v$$

gdzie  $b_{ov}$  oznacza siłę węzłową, zależną tylko od układu sił  $P_i$ . Twierdzenie Mohr'a da tu wprost:

$$1p = \sum_{v=1}^u b_v w_v$$

o ile zdołamy, posilkując się równaniami statyki i wytrzymałości, wyznaczyć wszystkie posunięcia  $w_v$  w zależności od  $P, P_i$ .

Tak np. (Rys. 98) chcemy znaleźć posunięcia: pionowe  $p$  i poziome  $q$  węzła  $B$ , a nadto—obróć pręta  $CB$  około osi przegubu  $C$ . Obciążenie podstawowe siłą pionową  $P$  daje siły osiowe:

$$S_1 = P \operatorname{tg} \alpha \quad S_2 = -\frac{P}{\cos \alpha}$$

prętów ustroju. Zatem ich posunięcia:

$$s_1 = \frac{S_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{Ph}{E_1 F_1} \operatorname{tg}^2 \alpha \quad s_2 = \frac{S_2 l_2}{E_2 F_2} = -\frac{Ph}{E_2 F_2 \cos^2 \alpha}$$

Dla pierwszego pokrewnego układu, czynimy siłę  $P$  równą jedności. To obciążenie da siły osiowe prętów:

$$b_1 = 1 \operatorname{tg} \alpha \quad b_2 = -\frac{1}{\cos \alpha}$$

a przeto na mocy twierdzenia Mohr'a:

$$1p = b_1 s_1 + b_2 s_2 = \frac{Ph}{E_1 F_1} \operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{Ph}{E_2 F_2 \cos^3 \alpha}$$

Dla drugiego pokrewnego układu czynimy siłę  $P$  równą zeru, a nadto do węzła  $B$  przykładamy poziomą siłę  $B$  równą jedności. Da ona siły osiowe prętów:

$$b_1 = 1 \quad b_2 = 0$$

a przeto na mocy twierdzenia Mohr'a:

$$1q = b_1 s_1 + b_2 s_2 = \frac{Ph}{E_1 F_1} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Wreszcie dla trzeciego pokrewnego układu czynimy siłę  $P$  równą zeru, a nadto w punktach węzłowych  $C, B$  przykładamy dwie różnozwrotne siły  $R$ , prostopadłe do pręta  $CB$ , dające moment:

$$N = \frac{Rh}{\cos \alpha} = 1$$

To obciążenie daje siły osiowe prętów:

$$b_1 = -\frac{R}{\cos \alpha} = -\frac{1}{h} \quad b_2 = R \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{h}$$

a przeto na mocy twierdzenia Mohr'a:

$$1n = b_1 s_1 + b_2 s_2 = -\left( \frac{P \operatorname{tg}^2 \alpha}{E_1 F_1} + \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{E_2 F_2 \cos \alpha} \right)$$

**6. Ustrój prętowy izostatyczny.** Z warunkowych równań równowagi całego ustroju wyznaczymy wszystkie odpory: obciążenie zewnętrzne obejmie  $m$  niezależnych sił  $P_i$ . Przynałży mu układ  $v$  sił węzłowych izostatycznych  $K_i$ , czyli sił sprężystości  $Q_i$ .

Wobec izostatyczności ustroju liczba  $w$  parametrów jego zmienności *linjowej* równa jest  $v$ , a przeto, utożsamiając owe parametry z niezależnymi posunięciami  $q_i$  sił  $Q_i$ , otrzymamy  $v$  warunkowych równań:

$$K_j = Q_j = \sum_{i=1}^m P_i \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \quad j = 1, 2, \dots, v \quad (170)$$

Cząstkowe pochodne tych wzorów wyznaczymy z zależności (154):

$$V(p, q) = 0$$

w postaci stałych współczynników *wpływu* poszczególnych sił  $P_i$  na  $Q_j$ , o ile jacobian:

$$J \frac{V_1, V_2, \dots, V_m}{P_1, P_2, \dots, P_m}$$

nie jest równy zeru dla początkowych zerowych posunięć  $p_i, q_i$ . Jego zerowej wielkości przynależy punkt osobliwy zmienności ustroju. Równania (170) służą do wyznaczania sił węzłowych  $Q_i$ .

Tak np. (Rys. 100)—ustrój płaski, złożony z dwóch bliźniaczych prętów prostych  $pp$  o stałym przekroju i trzech węzłów  $wp$  jest izostatyczny. Oznaczmy przez  $q$  przyrosty długości  $L$  obu prętów, przez  $p$ —posunięcie pionowej siły zewnętrznej  $P$ . Wobec zupełnej symetrii ustroju i obciążenia mamy:

$$V(p, q) = (L + q)^2 - (h - p)^2 - \frac{1}{4}l^2 = 2hp - p^2 + 2Lq + q^2 = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial q} = -\frac{L + q}{h - p}$$

Równanie podstawowe (157) daje tu:

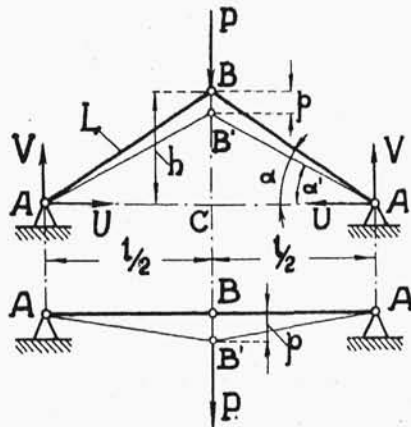
$$\begin{aligned} 2Q\delta q - P\delta p &= 0 \\ Q &= -\frac{1}{2}P\frac{L+q}{h-p} = \\ &= -\frac{P}{2\sin\alpha'} \simeq -\frac{P}{2\sin\alpha} \end{aligned}$$

gdzie przez  $\alpha$  i  $\alpha'$  oznaczono odpowiednio kąty:  $BAC$  i  $B'AC$ .

Przy początkowej zerowej wielkości posunięcia  $p$  jacobian:

$$J = \frac{\partial V}{\partial p} = 2(h - p)$$

równy jest  $2h$ , a przeto osobliwy punkt zmienności ustroju istnieje tylko wtedy, gdy  $h$  jest równe zeru (Rys. 101).



Rys. 100 i 101.

W tym szczególnym przypadku skończona siła  $P$  daje nieskończenie wielkie siły  $Q$  — osiowe prętów ustroju.

W ogólnym przypadku zależności (155) (156) są linjowe:

$$q = r \qquad q = \frac{QL}{EF}$$

natomiast trzecia (154) występuje w kształcie nielinjowym. Mimo to jednak ustrój może być uważany za linjowo zmienny — w przybliżeniu, gdy  $h$  jest różne od zera, jako że w tym przypadku, przy odkształceniach znikomych, praktycznie jedynie dopuszczalnych, możemy drugie potęgi pominąć i pisać wprost:

$$V(p, q) = 2hp + 2Lq = 0$$

**7. Odkształcenia pierwotne i ciepłne.** Sprężyste odkształcenia pierwotne mogą się pojawiać w ustroju stałym, nieobciążonym siłami zewnętrznymi. Mogą powstawać łącznie z wymuszonymi posunięciami poszczególnych punktów ustroju i wywoływać zrównoważone układy węzłowych sił sprężystości, rodzących *naprężenia pierwotne* w odkształconych ogniwach ustroju.

Układy posunięć wymuszonych, sprowadzające się do zmian położenia ustroju, jako całości, nie dają odkształceń i naprężeń pierwotnych. Nie dają ich również i posunięcia względne od siebie niezależnych wewnętrznych sił węzłowych ustroju, nieobciążonego siłami zewnętrznymi. Łatwo to dostrzec, choćby ze wzoru (170).

A przeto posunięcia punktów podparcia ustroju stałego, nieobciążonego, izostatycznego zewnątrz, oraz — posunięcia względne węzłowe — ustroju izostatycznego wewnątrz i zewnątrz — nie dają początkowych naprężeń. Te naprężenia mogą więc tylko powstawać w ustrojach hyperstatycznych.

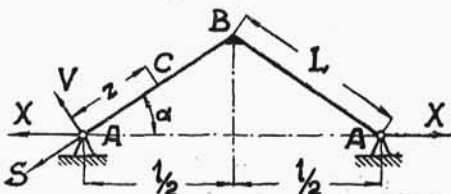
Oznaczmy przez  $p_h$  wymuszone posunięcia hyperstatycznych podpór nieobciążonego ustroju stałego. Odrzućmy te podpory i wzamian — przyłożmy odpowiednio dobrane siły zewnętrzne  $P_h$ , przynależne posunięciom  $p_h$ . Drugie twierdzenie Castigliano da układ równań:

$$\frac{\partial H}{\partial P_h} = p_h$$

z którego wyznaczymy odpory  $P_h$ , a, co za tem idzie, i wszystkie siły węzłowe ustroju.

Te same wyniki otrzymamy, stosując twierdzenie Betti, lub Mohr'a.

Tak np. (Rys. 102) ustrój prętowy, złożony z dwóch bliźniaczych prętów  $ps$ , dwóch węzłów  $wp$  przegubowych podpór  $A$  i jednego węzła  $ws$  — górnego — jest hyperstatyczny zewnętrznie jednokrotnie. Izostatyczne pionowe posunięcia punktów podparcia nie dają zmian ustroju: pierwotne naprężenia mogą jedynie powstać przy posunięciach poziomych. Zatem po zdjęciu ustroju z przegubów — rozsuwamy nieco podpory: pierwotna odległość  $l$  punktów podparcia wzrasta o dany przyrost  $p$ . Chcąc ustrój ponownie podeprzeć — zmuszeni jesteśmy rozciągnąć go siłami poziomymi  $X$  tak, aby odległość punktów węzłowych  $A$  wzrosła do  $l+p$ . Zatem węzłowe siły obu prętów obejmują: siłę podłużną  $S$  i poprzeczną  $V$ , a przeto w przekroju bieżącym  $C$  pręta, przynależnym odciętej  $z$  panuje siła osiowa  $O_z$ , ścinająca  $Q_z$  i moment zginający  $M_z$ :



Rys. 102.

$$O_z = X \cos \alpha \quad Q_z = X \sin \alpha \quad M_z = Xz \sin \alpha$$

Pomijając, jak zwykle, pracę sił ścinających, mamy:

$$H = \frac{X^2 L \cos^2 \alpha}{EF} + \int_0^L \frac{X^2 \sin^2 \alpha}{EJ} z^2 dz = \frac{X^2 l}{2 E \cos \alpha} \left( \frac{\cos^2 \alpha}{F} + \frac{l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{12 J} \right)$$

Zatem na mocy drugiego twierdzenia Castigliano:

$$\frac{\partial H}{\partial X} = p \quad X = \frac{Ep \cos \alpha}{\left( \frac{\cos^2 \alpha}{F} + \frac{l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{12 J} \right) l}$$

W przypadku nieobciążonego ustroju stałego hyperstatycznego wewnątrznie odrzucamy ogniwa lub wieży hyperstatyczne, zastępując ich działanie siłami  $K_h$ , przynależnymi wymuszonym posunięciom względnym  $w_h$  — węzłowym. Drugie twierdzenie Castigliano da układ równań:

$$\frac{\partial H}{\partial K_h} = w_h$$

z którego wyznaczymy siły węzłowe  $K_h$  hyperstatyczne, a więc i pozostałe siły węzłowe ustroju.

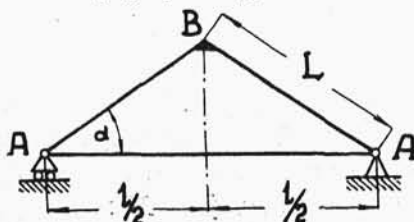
Te same wyniki da twierdzenie Betti, lub Mohr'a.

Tak, np. (Rys. 103) ustrój prętowy obejmuje dwa proste bliźniacze pręty  $ps$ , sztywno związane u góry węzłem  $ws$ , u dołu — przegubowo złączone z poziomym prętem prostym  $pp$ , na węzłach  $wp$  — lewej podpory posuwnej i prawej przegubowej. Ustrój ten jest wewnętrznie hyperstatyczny jednokrotnie.

Odrzućmy dolny pręt i założmy wzamian inny — nieco mniejszej długości:

$$l' = l - w$$

rozciągnawszy go uprzednio do właściwej długości  $l$ . Po założeniu dolny pręt ściągnie ku sobie przeguby  $A$  prętów górnych,



Rys. 103.

zbliży punkty podparcia, działając na nie siłami poziomymi  $X$ , osiowymi, zwróconymi ku sobie. Oznaczmy przez  $w_1$  zbliżenie punktów węzłowych. Dwie siły bliźniacze, lecz różnozwrotne, stanowią obciążenie osiowe

rozciągające dolnego pręta, dają więc jego wydłużenie:

$$w_2 = w - w_1$$

Praca sprężysta obu górnych prętów będzie jak wyżej:

$$H_1 = \frac{X^2 l}{2 \cos \alpha} \left( \frac{\cos^2 \alpha}{EF} + \frac{l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{12 EJ} \right)$$

dolnego pręta:

$$H_2 = \frac{X^2 l}{2 E_0 F_0}$$

całego ustroju:

$$H = H_1 + H_2$$

a przeto na mocy drugiego twierdzenia Castigliano:

$$w = w_1 + w_2 = \frac{\partial H_1}{\partial X} + \frac{\partial H_2}{\partial X} = \frac{\partial H}{\partial X}$$

stad ostatecznie:

$$X = \frac{w}{\left( \frac{1}{E_0 F_0} + \frac{\cos \alpha}{EF} + \frac{l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{12 EJ \cos \alpha} \right) l}$$

Wyżej rozpatrywane posunięcia wymuszone, rodzące naprężenia pierwotne, mogą powstawać przypadkowo: pochodzić z niedokładności zbiórki lub osiadania podpór. Mogą być również wywoływane rozmyślnie, w celu uzyskania pożądanych zmian w układzie naprężeń poszczególnych ogniów ustroju. Tak czy inaczej powstałe naprężenia pierwotne ustroju naogół są niezmiennie.

Nadto wszelkiego rodzaju zmiany cieplne w ustroju stałym również dają układy posunięć wymuszonych, a przeto, w myśl rozważań ogólnych, — mogą wywołać siły odporowe lub węzłowe ustrojów hyperstatycznych, nieobciążonych siłami zewnętrznymi. Tym siłom odporowym, lub węzłowym przynależą *naprężenia cieplne* ogniów ustroju, zazwyczaj okresowo zmienne, a więc dość niebezpieczne naogół dla trwałości ustroju.

Aby te naprężenia cieplne wyznaczyć, lub ocenić, odrzucamy hyperstatyczne podpory, czyniąc ustrój — swobodnie rozszerzalnym, — zaczem — po wprowadzeniu żądanych zmian temperatury, sprowadzamy punkty podparcia odrzuconych podpór do położenia właściwego, zapomocą działania sił zewnętrznych, zastępujących hyperstatyczne odrzucone podpory.

Oznaczmy przez  $p_h$  posunięcia odporów hyperstatycznych  $P_h$ , przyłożonych wzamian owych podpór odrzuconych. Drugie twierdzenie Castigliano da układ równań:

$$\frac{\partial H}{\partial P_h} = p_h$$

z których wyznaczymy odpory  $P_h$ , a zatem i siły węzłowe, rodzące naprężenia cieplne ustroju.

Tak np. (Rys. 102) ustrój, nieobciążony siłami zewnętrznymi oczywiście nie działa na podpory przy pierwotnej jednostajnej temperaturze  $t_0$  zbiórki, możemy go przeto swobodnie zdjąć z przegubów podpór i doprowadzić do jednostajnej temperatury  $t$ , przyczem pierwotna odległość  $l$  dolnych punktów węzłowych wzrośnie do:

$$l[1 + c(t - t_0)]$$



gdzie przez  $c$  oznaczono współczynnik rozszerzalności cieplnej linjowej jednolitego tworzywa obu prętów.

Zatem, chcąc ustrój ponownie podeprzeć, zmuszeni jesteśmy przywrócić pierwotną odległość  $l$  węzłów  $A$ , działając na te węzły poziomymi siłami  $X$ . Praca sprężysta, tym siłom przynależna:

$$H = \frac{X^2 l}{2 \cos \alpha} \left( \frac{\cos^2 \alpha}{EF} + \frac{l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{12 EJ} \right)$$

a przeto, na mocy drugiego twierdzenia Castigliano:

$$\frac{\partial H}{\partial X} = cl(t - t_0) \qquad X = \frac{Ec(t - t_0)}{\frac{\cos \alpha}{EF} + \frac{l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{12 EJ \cos \alpha}}$$

W przypadku nieobciążonego ustroju stałego, wewnątrznie hyperstatycznego, odrzucamy ogniwa, lub więzy hyperstatyczne, czyniąc ustrój swobodnie rozszerzalnym, zaczem, po uzyskaniu żądanych zmian temperatury, sprowadzamy węzły odrzuconych ogniw, lub więzów do właściwego położenia lub kształtu zapomocą sił zewnętrznych, zastępujących działanie odrzuconych ogniw, lub więzów. Oznaczmy przez  $w_h$  posunięcie względne owych hyperstatycznych zastępczych sił węzłowych  $K_h$ . Drugie twierdzenie Castigliano da układ równań:

$$\frac{\partial H}{\partial K_h} = w_h$$

z których wyznaczmy owe siły  $K_h$ , a więc i pozostałe siły węzłowe ustroju. Te same wyniki otrzymamy, stosując twierdzenie Betti lub Mohr'a.

Tak np. (Rys. 103) siły węzłowe ustroju nieobciążonego są niewątpliwie równe zeru przy pierwotnej jednostajnej temperaturze  $t_0$  zbiórki. Możemy przeto swobodnie zdjąć z przegubów dolny pręt i doprowadzić go do jednostajnej temperatury  $t$ , przyczem pierwotna odległość  $l$  jego punktów węzłowych będzie równa:

$$l[1 + c(t - t_0)]$$

gdzie  $c$  oznacza współczynnik linjowej rozszerzalności cieplnej tworzywa pręta.

Zatem, chcąc pręt ten założyć ponownie, musimy odpowiednio zmienić pierwotną odległość punktów węzłowych  $A$  obu górnych prętów ustroju, działając na te punkty siłami poziomymi. Po założeniu pręta, ustali się właściwy przyrost  $w_1$  pierwotnej długości  $l$  tego pręta, obciążonego osiowo siłami  $X$  poziomymi na węzłach. Istotne jego wydłużenie będzie więc:

$$w_2 = c l(t - t_0) - w_1$$

Te same siły  $X$ , lecz różnozwrotne, stanowią obciążenie węzłowe górnych prętów. Zatem ich praca sprężysta:

$$H_1 = \frac{X^2 l}{2 \cos \alpha} \left( \frac{\cos^2 \alpha}{EF} + \frac{l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{12 EJ} \right)$$

pręta dolnego:

$$H_2 = \frac{X^2 l}{2 E_0 F_0}$$

całego ustroju:

$$H = H_1 + H_2$$

a przeto, na mocy drugiego twierdzenia Castigliano:

$$c l(t - t_0) = w_1 + w_2 = \frac{\partial H_1}{\partial X} + \frac{\partial H_2}{\partial X} = \frac{\partial H}{\partial X}$$

skąd ostatecznie:

$$X = \frac{c(t - t_0)}{\frac{1}{E_0 F_0} + \frac{\cos \alpha}{EF} + \frac{l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{12 EJ \cos \alpha}}$$

### C. Część trzecia.

#### 1. Belki proste hyperstatyczne.

a. Belka dwuprzęsłowa (Rys.104) o stałym przekroju:

Obciążenie podstawowe:	siły i odpory:	$A$	$X$	$P$	$B$
	ich posunięcia:	0	0	$p$	0
Obciążenie pokrewne I:	siły i odpory:	$a$	1	0	$b$
	ich posunięcia:	0	$x_1$	$p_1$	0