



IX. ROZDZIAŁ DZIEWIĄTY.

ODKSZTAŁCONE.

A. Część pierwsza.

1. Układ osi. Rozpatrujemy jednolite pręty proste, bezwładnościowo jednorodne (I. B. 10), przeważnie poziome. Początek stałych osi współrzędnych obieramy pośrodku prawej ścianki czołowej pręta nieodkształconego, wspartego na podpórach poziomo. Dodatnią oś X układamy na pierwotnej prostej osi pręta. Pionową dodatnią oś Y leży pod osią X , zatem oś X ma zwrot w lewo, oś Y — w dół. Dodatnią oś Z pozioma leży poza płaszczyznę XY . Główne osie Y wszystkich przekrojów pręta leżą w jego płaszczyźnie głównej XY bezwładności, główne osie Z — w płaszczyźnie głównej XZ .

2. Obciążenie zginające. Obciążenie zewnętrzne zginające rodzi równoważące przeciwdziałania podpór, zwane *odporami*, i, łącznie z nimi, stanowi układ sił skupionych, obciążeń ciągłych i momentów. Składową na osi X siły skupionej nazwiemy *siłą podłużną*; składowe, prostopadłe do tej osi — siłami poprzecznymi, pionowymi i poziomymi, leżącymi odpowiednio w płaszczyznach głównych XY i XZ .

Miejscowy nacisk warstwy obciążenia ciągłego, wyrażony w jednostkach siły na bieżącą jednostkę długości osi pierwotnej pręta, stanowi tak zwane *obciążenie jednostkowe*, w ogólnym przypadku ukośne. Jego składowa na osi X zwie się *obciążeniem jednostkowym podłużnym* p ; składowa prostopadła do X — *obciążeniem jednostkowym poprzecznym* q . Obie te składowe mogą być uważane za stałe w odcinku dx , zatem wszelkie obciążenie ciągłe można zastąpić szeregiem sił jednostkowych podłużnych $p dx$ i poprzecznych $q dx$.

Momenty obciążenia zewnętrznego, zawsze prostopadłe do osi X , nie dają składowych podłużnych, to jest momentów skręcających.

3. Obciążenia płaskie. W ogólnym przypadku obciążenie zewnętrzne, łącznie z odporami, może być sprowadzone do punktów, leżących na osi podłużnej pręta i rozłożone na trzy *składowe obciążenia*: jedno *podłużne*, złożone z sił podłużnych na osi X i dwa *poprzeczne obciążenia płaskie*.

Pionowe obciążenie płaskie, zawarte w płaszczyźnie głównej XY bezwładności pręta, obejmuje: pionowe siły skupione, pary sił momentów zewnętrznych, oraz — pionowe warstwy ciągłych obciążeń: *Poziome obciążenie płaskie*, zawarte w płaszczyźnie głównej XZ , obejmuje: poziome siły skupione, pary sił momentów zewnętrznych, oraz — poziome warstwy obciążeń ciągłych.

4. Kierunek (w). Siły skupione i jednostkowe oraz momenty zewnętrznego obciążenia pręta należy poznać kolejnymi wskaźnikami, posuwając się wzdłuż osi X w *kierunku (w)* — *wzrostu* sił osiowych, ścinających lub momentów zginających, przyczem:

Suma sił podłużnych skupionych i jednostkowych kolejno w kierunku (w) branych od końca pręta aż do środka bieżącego przekroju wyłącznie — *zwie się siłą osiową O_x tego przekroju*.

Suma sił poprzecznych skupionych i jednostkowych kolejno w kierunku (w) branych od końca pręta aż do środka bieżącego przekroju wyłącznie — *nosi miano siły ścinającej Q tego przekroju*.

Suma momentów zewnętrznych oraz momentów sił skupionych i jednostkowych względem środka bieżącego przekroju pręta, jako bieguna, kolejno w kierunku (w) branych od końca pręta aż do środka owego przekroju wyłącznie — *nazywa się momentem zginającym M_g tego przekroju*.

5. Zmiana kierunku (w). Odcięta x wyodrębnia środek bieżącego przekroju pręta nieodkształconego. Działają nań: siła osiowa O_x , oraz składowe: pionowe Q_y , M_y i poziome Q_z , M_z siły ścinającej Q i momentu zginającego M_g . Nadto do tego środka mogą być przyłożone: siła podłużna O_b , oraz składowe: pionowe P_y , N_y i poziome P_z , N_z siły poprzecznej P_b i momentu N_b obciążenia zewnętrznego, lub oddziaływania podpory w tym punkcie.

Przy zmianie kierunku (w) na odwrotny otrzymamy odpowiednio: O_x' , Q_y' , Q_z' , M_y' , M_z' , jako wypadkowe obciążenia zewnętrznego drugiej części pręta, — wogóle różne od poprzednich. Równowaga wymaga spełnienia warunków:

$$\begin{aligned} O_x + O_b + O_x' &= 0 & Q_y + P_y + Q_y' &= 0 & Q_z + P_z + Q_z' &= 0 \\ M_y + N_y + M_y' &= 0 & M_z + N_z + M_z' &= 0 \end{aligned} \quad (106)$$

uzależniających nowe wypadkowe od starych, przy zmianie kierunku (w).

6. Pochodne składowych siły ścinającej i momentu zginającego. Przy niezmiennym kierunku (w) przekrój, sąsiedni bieżącemu, odległy jest odeń o dx , gdy kierunki (w) i osi X są zgodne; lub też o $-dx$, gdy sprzeczne.

W ogólnym przypadku pośrodku przekroju bieżącego niema obciążenia zewnętrznego, wyraźniej mówiąc:

$$O_b = P_b = N_b = 0$$

natomiast znikomy odcinek $\pm dx$ pokryty jest obciążeniem jednostkowym poprzecznem o składowych q_y , q_z . Zatem w przekroju sąsiednim składowe momentu zginającego i siły ścinającej będą odpowiednio:

$$\begin{aligned} M_y + dM_y &= M_y \pm Q_z dx + \frac{1}{2} q_z (dx)^2 & Q_y + dQ_y &= Q_y \pm q_y dx \\ M_z + dM_z &= M_z \pm Q_y dx + \frac{1}{2} q_y (dx)^2 & Q_z + dQ_z &= Q_z \pm q_z dx \end{aligned}$$

stąd bezpośrednio:

$$\frac{dM_y}{dx} = \pm Q_z \quad \frac{dM_z}{dx} = \pm Q_y \quad \frac{dQ_y}{dx} = \pm q_y \quad \frac{dQ_z}{dx} = \pm q_z \quad (107)$$

w tych wzorach dx oznacza długostkę pierwotnej prostej osi pręta. Górny znak brać należy przy jednozwrrotnym kierunku (w) z tą osią, przy różnozwrrotnym — dolny.

7. Znak składowych sił ścinających i momentów zginających. Z rozważań powyższych wypływa, że składowe siły ścinających, jednozwrótne z równoległymi osiami głównymi przekroju należy znakować dodatnio, różnozwrótne — ujemnie. Dla patrzącego na płaszczyznę główną XY w kierunku osi Z , składowe M_z prawoskrętne są dodatnie, a lewoskrętne — ujemne przy jednozwrrotnym kierunku (w) z osią X ; naodwrot: lewoskrętne są dodatnie, a prawoskrętne — ujemne w razie kierunków sprzecznych. Dla patrzącego na płaszczyznę główną XZ z góry w kierunku osi Y składowe M_y lewoskrętne są dodatnie, a prawoskrętne — ujemne

przy jednozrotnym kierunku (w) z osią X ; naodwrot prawoskrętne są dodatnie, a lewoskrętne — ujemne w razie kierunków sprzecznych, przyczem, dla oka, patrzącego na moment od strony strzałki — kierunek obrotu pary sił, zgodny z kierunkiem biegu wskazówek zegara — wyróżnia moment prawoskrętny, przeciwny — lewoskrętny.

8. Równania różniczkowe odkształconej. W układzie osi stałych (IX. A. 1) odciętej x przynależą rzędne y, z rzutów odkształconej na płaszczyzny główne XY i XZ , a nadto — kąty:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad z' = \frac{dz}{dx}$$

pochylenia ich stycznych ku osi X .

Ogólne równanie (103) odkształconej, stręczące duże trudności przy całkowaniu, można wydatnie uprościć. Można w niem przedewszystkiem odrzucić wyraz, zależny od siły osiowej, jako znikomy wobec jedności w ogólnym przypadku. Łatwo to dostrzec, zważywszy, że iloraz siły osiowej, dzielonej przez pole przekroju, nie przekracza naprężenia dopuszczalnego, małego w stosunku do E . Tak uproszczone równanie (103) w obranym układzie osi rozpada się na dwa równania:

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_z}{E J_z} \quad \frac{z''}{[1 + (z')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_y}{E J_y} \quad \dots \quad (108)$$

rzutów odkształconej w płaszczyznach głównych XY i XZ .

Nadto, praktycznie dopuszczalne ugięcia prętów — w ogólnym przypadku są nieznaczne, można przeto pominąć drugie potęgi y', z' wobec jedności i pisać wprost:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{M_z}{E J_z} \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = z'' = \frac{M_y}{E J_y} \quad \dots \quad (109)$$

przy podaniem wyżej znakowaniu składowych momentów. Istotnie — w obszarze dodatnich rzędnych y lub z , dodatnie składowe M_y , lub M_z dają niewątpliwie odkształcone, wypukłe względem osi X , co odpowiada dodatnim y'' , lub z'' i naodwrot.

Dla pręta o stałym przekroju otrzymamy, różniczkując:

$$\begin{aligned} E J_z y''' = \frac{dM_z}{dx} = \pm Q_y & \quad E J_z y'''' = \frac{d^2 M_z}{dx^2} = \pm \frac{dQ_y}{dx} = q_y \\ E J_y z''' = \frac{dM_y}{dx} = \pm Q_z & \quad E J_y z'''' = \frac{d^2 M_y}{dx^2} = \pm \frac{dQ_z}{dx} = q_z \end{aligned} \quad (110)$$

9. Wpływ sił ścinających. Środki O i O' przekrojów: bieżącego i sąsiedniego leżą na osi X pręta nieodkształconego w odległości dx . Pod działaniem składowej siły ścinającej Q_y , lub Q_z , przesunięcie środka O' względem O będzie odpowiednio równe (VI. B. 7):

$$t \frac{Q_y}{GF} dx \quad t \frac{Q_z}{GF} dx$$

Zatem, pod działaniem składowych Q_y, Q_z pierwotnie prosta oś pręta zegnę się w punkcie O pod nieznacznym kątem, stanie się odkształconą. W rzucie na płaszczyzny główne XY, XZ punkt O da punkty O_y, O_z . W tych punktach rzuty odkształconej tworzyć będą kąty:

$$t \frac{Q_y}{GF} \quad t \frac{Q_z}{GF}$$

a przeto krzywizna rzutów odkształconej będzie w tych punktach równa:

$$\frac{t}{GF} \frac{dQ_y}{dx} = \pm \frac{t}{GF} \frac{d^2 M_z}{dx^2} \quad \frac{t}{GF} \frac{dQ_z}{dx} = \pm \frac{t}{GF} \frac{d^2 M_y}{dx^2}$$

Stąd ostateczne równania:

$$y'' = \frac{M_z}{EJ_z} \pm \frac{t}{GF} \frac{d^2 M_z}{dx^2} \quad z'' = \frac{M_y}{EJ_y} \pm \frac{t}{GF} \frac{d^2 M_y}{dx^2} \quad (111)$$

rzutów odkształconej na płaszczyzny główne XY, XZ przy wyżej podanem znakowaniu składowych momentów. Górne znaki w tych wzorach należy brać, gdy kierunki (w) i osi X są zgodne, dolne znaki, — gdy sprzeczne.

10. Całkowe równania odkształconych. Nadal rozpatrywać będziemy tylko już jeden rzut odkształconej — na płaszczyznę główną XY , ze względu na zupełną tożsamość wyników: każdy wzór będzie zarazem słuszny i dla płaszczyzny głównej XZ , o ile w nim zmienimy: y, y' na z, z' . Nadto będziemy pisali wprost: M, J , zamiast M_z, J_z we wzorach dla y, y' , oraz — zamiast M_y, J_y — we wzorach dla z, z' .

Składowe M_y, M_z zależą niewątpliwie tylko od x -ów — t. j. odciętych pręta nieodkształconego i, przy odkształceniach nieznaczących, praktycznie jedynie dopuszczalnych — mogą uchodzić za niezmiennie przy odkształceniu. Wpływ sił ścinających pominiemy i nadal pomijać będziemy, jako znikomy wobec dzia-

łania momentów zginających. Całkując (109) dwukrotnie otrzymamy:

$$\begin{aligned} y' &= \int \frac{M}{EJ} dx + A & y &= \int dx \int \frac{M}{EJ} dx + Ax + B = \\ & & &= x \int \frac{M}{EJ} dx - \int \frac{Mx}{EJ} dx + Ax + B. \end{aligned}$$

Gdziekolwiek na odkształconej wybieramy *punkt wytyczny*. Przyjmijmy mu:

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0, \quad y'_0, \quad z'_0$$

spełnią powyższe równania. Odejmując dwa ostatnie, wypisane dla x i x_0 , pozbedziemy się stałej B . Drugą stałą całkowania A wyrugujemy przez podstawienie z pierwszych równań, wypisanych dla x_0 i x . Tą drogą otrzymamy równania całkowite:

$$y' - y'_0 = \int_{x_0}^x \frac{M}{EJ} dx \quad y - y_0 = y'_0 (x - x_0) + x \int_{x_0}^x \frac{M}{EJ} dx - \int_{x_0}^x \frac{Mx}{EJ} dx$$

$$y' = \frac{y - y_0}{x - x_0} + \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{M(x - x_0)}{EJ} dx \quad . \quad . \quad (112)$$

rzutu odkształconej na płaszczyznę główną XY .

11. Łańcuchowe równanie odkształconej. Idąc w kierunku $\langle w \rangle$ wzrostu momentów zginających M płaskiego obciążenia pionowego, dzielimy pierwotną oś X pręta na *obszary jednolitej zmienności* M i J , zależnych od x . Wszelka przerwa ciągłości M , lub J stanowi granicę dwóch obszarów różnych zmienności rzędnych odkształconej. Zatem dla dwóch kolejnych obszarów: $(i), (i+1)$:

$$y_i'' = \frac{M_i}{EJ_i} \quad y_{i+1}'' = \frac{M_{i+1}}{EJ_{i+1}}$$

Dwukrotne całkowanie da rządne:

$$y_i, \quad y_i', \quad y_{i+1}, \quad y_{i+1}'$$

a nadto stałe całkowania

$$C_l, D_l, C_{l+1}, D_{l+1}$$

Ciągłość odkształconej wymaga, aby w punkcie granicznym tych dwóch obszarów:

$$y_l = y_{l+1} \quad y'_l = y'_{l+1}$$

Z tych dwóch równań warunkowych wyznaczymy C_{l+1}, D_{l+1} . Stałe całkowania C_1, D_1 pierwszego obszaru określimy z warunków unieruchomienia pręta na podporach.

12. Moment łańcuchowy. Idąc w kierunku (w) wzrostu momentów zginających M płaskiego obciążenia pionowego, dzielimy pierwotną oś X pręta na obszary jednolitej zmienności M . Zatem granicę dwóch sąsiednich obszarów stanowi leżący na osi X punkt przyłożenia zewnętrznej siły skupionej, momentu, lub — przerwy ciągłości obciążenia jednostkowego q . Moment zginający może być przeto wyrażony:

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_w \quad (113)$$

stąd dla pręta o stałym przekroju:

$$E J y' = c_1 + \int M_1 dx + U_2 + \dots + U_w \quad (114)$$

$$E J y = D_1 + C_1 x + \int dx \int M_1 dx + V_2 + \dots + V_w$$

gdzie:

$$U_n = C_n + \int M_n dx \quad V_n = D_n + C_n x + \int dx \int M_n dx$$

Te wzory łańcuchowe należy brać tylko do *pierwszej* kreski podziałowej dla *pierwszego* obszaru, do *drugiej* — dla *drugiego* i t. d. cały zaś wzór dla ostatniego obszaru jednolitej zmienności M . Pomocnicze stałe całkowania: $C_2, D_2, \dots, C_w, D_w$ otrzymamy z równań warunkowych:

$$\left(C_n + \int M_n dx \right)_{x=x_n} = 0 \quad \left(D_n + C_n x + \int dx \int M_n dx \right)_{x=x_n} = 0$$

dla:

$$n=2, 3, \dots, w$$

Tutaj x_n oznacza odciętą początkowego punktu obszaru (n); przynależnego M_n .

W założeniu kierunków (w) i osi X *sprzecznych*:

a. punkt x_i przyłożenia siły pionowej P_i stanowi początek obszaru, gdzie:

$$M_i = P_i(x_i - x) \quad U_i = -\frac{1}{2} P_i(x_i - x)^2 \quad V_i = \frac{1}{6} P_i(x_i - x)^3$$

b. punkt x_i przyłożenia momentu zewnętrznego N_i stanowi początek obszaru, gdzie:

$$M_i = N_i \quad U_i = -N_i(x_i - x) \quad V_i = -\frac{1}{2} N_i(x_i - x)^2$$

c. punkt początkowy x_i i końcowy x_j warstwy prostokątnej stałego obciążenia jednostkowego q_i — stanowią początki dwóch nowych obszarów (i), (j), gdzie:

$$M_i = \frac{1}{2} q_i(x_i - x)^2 \quad U_i = -\frac{1}{6} q_i(x_i - x)^3 \quad V_i = \frac{1}{24} q_i(x_i - x)^4$$

$$M_j = -\frac{1}{2} q_i(x_j - x)^2 \quad U_j = \frac{1}{6} q_i(x_j - x)^3 \quad V_j = -\frac{1}{24} q_i(x_j - x)^4$$

d. punkt x_i *początkowego* ostrza trójkątnej warstwy obciążenia jednostkowego q , oraz punkt *końcowy* x_j , gdzie q osiąga swą wielkość największą p_j — stanowią początki obszarów (i), (j). Odciętej x odpowiada:

$$q = p_j \frac{x_i - x}{x_i - x_j} \quad x_i \geq x \geq x_j$$

a przeto:

$$M_i = \frac{1}{6} p_j \frac{(x_i - x)^3}{x_i - x_j} \quad U_i = -\frac{1}{24} p_j \frac{(x_i - x)^4}{x_i - x_j} \quad V_i = \frac{1}{120} p_j \frac{(x_i - x)^5}{x_i - x_j}$$

$$M_j = -\frac{1}{2} p_j (x_j - x)^2 - \frac{1}{6} p_j \frac{(x_j - x)^3}{x_i - x_j} \quad U_j = \frac{1}{6} p_j (x_j - x)^3 + \\ + \frac{1}{24} p_j \frac{(x_j - x)^4}{x_i - x_j} \quad V_j = -\frac{1}{24} p_j (x_j - x)^4 - \frac{1}{120} p_j \frac{(x_j - x)^5}{x_i - x_j}$$

e. Punkt x_j *końcowego* ostrza trójkątnej warstwy obciążenia jednostkowego q , oraz punkt *początkowy* x_i , gdzie q osiąga swą

wielkość największą p_i — stanowią początki obszarów (i) (j). Odciętej x odpowiada:

$$q = p_i \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad x_i \geq x \geq x_j$$

a przeto:

$$M_i = \frac{1}{2} p_i (x - x_j) \frac{(x_i - x)^2}{x_i - x_j} + \frac{1}{3} p_i \frac{(x_i - x)^3}{x_i - x_j}$$

$$U_i = -\frac{1}{6} p_i (x - x_j) \frac{(x_i - x)^3}{x_i - x_j} - \frac{1}{8} p_i \frac{(x_i - x)^4}{x_i - x_j}$$

$$V_i = \frac{1}{24} p_i (x - x_j) \frac{(x_i - x)^4}{x_i - x_j} + \frac{1}{30} p_i \frac{(x_i - x)^5}{x_i - x_j}$$

$$M_j = -\frac{1}{6} p_i \frac{(x_j - x)^3}{x_i - x_j} \quad U_j = \frac{1}{24} p_i \frac{(x_j - x)^4}{x_i - x_j} \quad V_j = -\frac{1}{120} p_i \frac{(x_j - x)^5}{x_i - x_j}$$

Stałe całkowania C_1, D_1 należy wyznaczyć z warunków unieruchomienia pręta na podporach.

B. Część druga.

1. **Belki.** Bezwładnościowo jednorodny pręt prosty, wsparty na podporach, zwie się belką. Podpory mają uniemożliwiać ruch, jaki mogłoby nadać belce obciążenie zewnętrzne, winny być przeto należycie dobrane i celowo użyte. Obciążenie belki wzbudza równoważące przeciwdziałania jej podpór, zwane *oporami*.

a. **Osadzenie** (Rys. 63), czyli unieruchomienie przekroju poprzecznego belki stanowi jej *podpora stała* s . Do środka tego przekroju — *punktu podparcia* na osi belki przyłożone są odpory. Obciążenie płaskie wzbudza w nim trzy odpory: *siłę podłużną*, *poprzeczną*, obie w płaszczyźnie obciążenia, i *moment* do tej płaszczyzny prostopadły. Podpora stała, nieodkształcająca się może być tylko skrajną — przekrój unieruchomiony stanowić może tylko czołową ściankę belki. Przy zupełnem unieruchomieniu przekroju pośredniego — belka rozpada się na dwie belki, o wspólnej osadzonej ściance czołowej.



Rys. 63.