

## VII. ROZDZIAŁ SIÓDMY.

# SKRĘCANI E.

### A. Część pierwsza.

1. **Wzory podstawowe.** Pręt prosty (I. B. 4) jest skręcany, gdy obciążenia jego płytek (I. B. 11) są skręcające (II. B. 7). W układzie osi (II. B. 5) pręta bezwładnościowo-jednorodnego (I. B. 10) wyodrębniamy z pręta odkształconego płytkę obciążoną momentami:

$$M_0 \quad M_0' = M_0 + dM_0$$

różnoskrętnemi, leżącemi na osi  $X$  pręta, a więc prostopadłemi do ścianek:

$$F \quad F' = F + dF$$

płytki. Załóżmy, że pręt jest nieważki i że na bocznej powierzchni płytki niema obciążenia zewnętrznego. W tem założeniu przyrost  $dM_0$  musi być równy zeru: wymaga tego równowaga płytki. Nadto, wobec:

$$R_x = R_y = R_z = M_y = M_z = 0$$

wzór (41) daje:

$$N_x = 0$$

a przeto, z warunków równowagi (29), w myśl założenia St. Venant'a: (II. B. 9):

$$\begin{aligned} T_x = N_x = N_y = N_z = 0 \\ \frac{\partial T_z}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial T_y}{\partial x} = \frac{\partial T_z}{\partial x} = 0 \quad . . . . (83) \end{aligned}$$

Układ naprężeń, czyniący zadość powyższym zależnościom i warunkowi brzegowemu (39) spełnia pięć równań (38). Szóste — daje nowy warunek:

$$\int_F (y T_y - z T_z) dF = M_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

Składowe odkształceń:

$$e_x = e_y = e_z = 0$$

$$g_x = 0 \quad g_y = \frac{T_y}{G} \quad g_z = \frac{T_z}{G}$$

czynią zadość czterem pierwszym równaniom warunkowym (I. A. 4). Dwa ostatnie dają:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{\partial T_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{\partial T_z}{\partial z} \right) = 0$$

skąd bezpośrednio:

$$\frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{\partial T_z}{\partial z} = \text{const.}$$

**2. Skręcenie jednostkowe.** Zerowa wartość  $g_x$  wskazuje, że elementy  $dy, dz$ , leżące w polu  $F$  bieżącej płytki, nie pochyłają się ku sobie przy odkształceniu: każdy z nich obraca się jednak około osi  $X$  pręta o kąt:

$$o_x = \frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial z}$$

Wypływa to wprost ze wzorów (3 i 4).

Te same elementy  $dy, dz$  sąsiedniej ścianki  $F'$  płytki obróca się niewątpliwie o kąt:

$$o_x' = o_x + \frac{\partial o_x}{\partial x} dx$$

około tejże osi  $X$ .

Zatem przekrój  $F'$  obróci się względem sąsiedniego przekroju  $F$  o kąt:

$$\frac{\partial o_x}{\partial x} dx = \delta dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx$$

skąd bezpośrednio:

$$2\delta = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Kąt jednostkowy:

$$\delta = \frac{\partial o_x}{\partial x}$$

zwie się *skręceniem jednostkowym pręta*, stanowi bowiem kąt względnego obrotu około osi pręta — dwóch sąsiednich przekrojów, poprowadzonych w odległości jednostki długości tej osi. Po uwzględnieniu wzorów (3) i podstawieniu, otrzymamy:

$$\frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{\partial T_z}{\partial z} = 2G\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

**3. Wyznaczanie naprężeń.** Przy obrocie przekroju  $F$  pręta, promień wodzący  $\rho$  punktu bieżącego:  $(y, z)$  tego przekroju, pochylony pod kątem  $\theta$  ku osi głównej  $Y$ , obróci się również o kąt:  $o_x$ , a punkt  $(y, z)$  — posunie się po kole promienia  $\rho$  o łuk:

$$o_x \rho$$

Składowe tego posunięcia na osiach  $Y, Z$  będą odpowiednio:

$$v = -o_x \rho \sin \theta = -o_x z \quad w = o_x \rho \cos \theta = o_x y$$

a przeto, po uwzględnieniu wzorów (3):

$$T_y = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \delta y \right) \quad T_z = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \delta z \right)$$

Podstawienie spełnia warunek (85) tożsamościowo. Warunek (84) da:

$$\delta = \frac{M_0}{GJ_0} - \frac{1}{J_0} \int_F \left( y \frac{\partial u}{\partial z} - z \frac{\partial u}{\partial y} \right) dF. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

gdzie przez  $J_0$  oznaczono moment biegunowy bieżącego przekroju pręta.

Wreszcie z warunków (83) mamy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

należy przeto dobrać taką funkcję  $u$  zmiennych:  $y, z$ , spełniającą powyższe równanie, aby, po wyznaczeniu  $\delta$  z (86) składowe  $T_y, T_z$  czyniły zadość warunkowi brzegowemu (39) na całym obwodzie bieżącego przekroju.

Układ naprężeń, w ten, lub inny sposób wyznaczony słuszny jest dla pręta o stałym przekroju i przy niezmiennym momencie  $M_0$ . Praktycznie — jest nadto wystarczająco przybliżony dla pręta o przekroju nader powolnie zmiennym i przy:

$$dM_0 \neq 0$$

4. **Wzory ostateczne.** a. Przekrój kołowy o promieniu  $R$ . Tutaj:

$$T_y = \frac{M_0}{J_0} y \quad T_z = -\frac{M_0}{J_0} z \quad T = \sqrt{T_y^2 + T_z^2} = \frac{M_0}{J_0} \rho \quad \delta = \frac{M_0}{GJ_0}$$

gdzie:

$$J_0 = \frac{1}{2} \pi R^4$$

Naprężenia skręcające  $T$ , prostopadłe do promieni wodzących  $\rho$  — rosną wraz z nimi proporcjonalnie od zera do naprężenia najwyższego:

$$T_0 = \frac{M_0}{W_0}$$

na obwodzie. Iloraz:

$$W_0 = \frac{J_0}{R}$$

zwie się *momentem wytrzymałości* na skręcanie przekroju kołowego.

b. Przekrój kołowy pierścieniowy o promieniu zewnętrznym  $R$  i wewnętrznym  $r$ . Kształt wzorów jest ściśle taki sam, jak dla przekroju kołowego pełnego, z wyjątkiem:

$$J_0 = \frac{1}{2} \pi (R^4 - r^4)$$

Naprężenia skręcające  $T$ , prostopadłe do promienia wodzącego  $\rho$  — rosną wraz z nim proporcjonalnie do naprężenia najmniejszego:

$$T_{mln} = \frac{M_0}{J_0} r$$

panującego na obwodzie wewnętrznym promienia  $r$ , aż do najwyższego:

$$T_0 = \frac{M_0}{W_0}$$

na obwodzie zewnętrznym przekroju.

Posunięcie osiowe:

$$u = 0$$

dla przekrojów kołowych; inaczej mówiąc, przy skręcaniu przekrój bieżący pręta o przekroju kołowym pełnym, lub pierścieniowym nie wicherzy się — pozostaje płaskim. Łatwo można udowodnić, że wszystkie inne przekroje nie mają tej własności.

c. Przekrój eliptyczny. Główna jego oś  $Y$  leży na półosi  $b$ , druga oś główna  $Z$  — na półosi  $c$ . Tutaj:

$$\begin{aligned} u &= \frac{M_0 (c^2 - b^2)}{G \pi b^3 c^3} yz & \delta &= \frac{M_0 (b^2 + c^2)}{G \pi b^3 c^3} \\ T_y &= \frac{2 M_0}{\pi b^3 c} y & T_z &= -\frac{2 M_0}{\pi b c^3} z \end{aligned}$$

Najwyższe naprężenie skręcające:

$$T_0 = \pm \frac{2 M_0}{\pi b^2 c}$$

prostopadłe do osi  $Y$ , panuje w punktach przecięcia się tej osi z obwodem, a więc na końcach jego małej osi.

d. Przekrój prostokątny. Główna jego oś  $Y$  jest równoległa do wysokości  $h$ , druga główna oś  $Z$  — do podstawy  $b$  przyczem  $h \geq b$ . Tutaj:

$$u = \delta \left[ -yz + \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{2n+1}{b} \pi y\right)}{\cosh\left(\frac{2n+1}{2b} \pi h\right)} \sin\left(\frac{2n+1}{b} \pi z\right) \right]$$

Stąd skręcenie jednostkowe:

$$\delta = i \frac{M_0}{G b^3 h}$$

oraz największe naprężenie skręcające:

$$T_0 = j \frac{M_0}{b^3 h}$$

prostopadłe do osi  $Z$ . Panuje ono w punktach przecięcia się tej osi z obwodem. Spółczynniki obu wzorów podane są w następującym zestawieniu

$h:b$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,75
$i:$	7,1134	6,4943	6,0197	5,6475	5,3504	5,1083	4,9082	4,6668
$j:$	4,8037	4,6744	4,5620	4,4813	4,3989	4,3296	4,2675	4,1848

$h:b$	1,8	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	10,0	$\infty$
$i:$	4,5992	4,3729	4,0096	3,7977	3,5611	3,4323	3,2020	3,0000
$j:$	4 1594	4,0670	3,8817	3,7425	3,5504	3,4305	3,2020	3,0000

**5. Bezpośrednie wyznaczanie naprężeń.** Warunkowi brzegowemu (39) możemy uczynić zadość, biorąc:

$$T_y = \frac{\partial}{\partial y}(mK) \quad T_z = -\frac{\partial}{\partial z}(mK)$$

Tutaj przez  $m$  oznaczono niewiadomą narazie funkcję zmiennych:  $y, z$ , przez  $K$  — funkcję tych samych zmiennych — równania obwodu. Łatwo to dostrzec, zważywszy, że na obwodzie:

$$K(y, z) = 0$$

a przeto:

$$T_{y0} = (m)_0 \left( \frac{\partial K}{\partial y} \right)_0 \quad T_{z0} = - (m)_0 \left( \frac{\partial K}{\partial z} \right)_0$$

stąd dzieląc otrzymamy warunek (39).

Wyżej podane  $T_y, T_z$  spełniają równania (83), zatem funkcję  $m$  należy dobrać tak, aby czyniła zadość warunkowi (85):

$$\frac{\partial^2(mK)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(mK)}{\partial z^2} = 2 G \delta$$

Tą drogą otrzymane składowe naprężeń skręcających zawierać będą stałą  $\delta$ , którą należy wyznaczyć z warunku (84):

$$\int_F \left[ y \frac{\partial (mK)}{\partial y} + z \frac{\partial (mK)}{\partial z} \right] dF = M_0$$

W szczególnym przypadku stałej wartości:

$$\Delta_2 K = \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} = C$$

funkcja  $m$  również ma stałą wartość:

$$m_0 = \frac{M_0}{\int_F \left( y \frac{\partial K}{\partial y} + z \frac{\partial K}{\partial z} \right) dF} \quad . . . . . (87)$$

zatem:

$$T_y = m_0 \frac{\partial K}{\partial y} \quad T_z = -m_0 \frac{\partial K}{\partial z} \quad \delta = \frac{Cm_0}{2G}$$

W ogólnym przypadku zmiennego  $\Delta_2 K$ , wartość  $m_0$ , wyznaczona z (87) da przybliżone wzory dla  $T_y$ ,  $T_z$ , przeważnie wystarczająco ściśle dla praktyki.

**6. Wzór St. Vénant'a** stosuje się do przekrojów *pełnych*. Daje on w przybliżeniu skrócenie jednostkowe:

$$\delta = n \frac{J_0 M_0}{G F^4}$$

gdzie przez  $F$  oznaczono pole przekroju, przez  $J_0$  jego biegunowy moment bezwładności. Spółczynnik liczbowy  $n$  wynosi średnio 40.

**7. Przykłady:** a. Przekrój kołowy pełny o promieniu  $R$ . Równanie obwodu:

$$K = y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

daje:

$$\frac{\partial K}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial K}{\partial z} = 2z \quad \Delta_2 K = C = 4$$

możemy więc założyć, że  $m$  jest stałą:

$$m_0 = \frac{M_0}{2 \int_F (y^2 + z^2) dF} = \frac{M_0}{2J_0}$$

Tą drogą otrzymane wzory:

$$T_y = \frac{M_0}{J_0} y \quad T_z = -\frac{M_0}{J_0} z \quad \phi = \frac{M_0}{GJ_0}$$

są ściśle.

b. Przekrój prostokątny. Wysokość jego  $h$  jest równoległa do osi głównej  $Y$ , podstawa  $b$  do osi  $Z$ . Równanie obwodu:

$$K = -\left(y^2 - \frac{1}{4}h^2\right)\left(z^2 - \frac{1}{4}b^2\right)$$

daje:

$$\frac{\partial K}{\partial y} = -2y\left(z^2 - \frac{1}{4}b^2\right) \quad \frac{\partial K}{\partial z} = -2z\left(y^2 - \frac{1}{4}h^2\right)$$

$$\Delta_2 K = -2\left(y^2 + z^2 - \frac{b^2 + h^2}{4}\right)$$

zatem stała wartość funkcji  $m$  może dać tylko wzory przybliżone. Wobec:

$$\begin{aligned} & \int_F \left( y \frac{\partial K}{\partial y} + z \frac{\partial K}{\partial z} \right) dF = \\ & = \int_F \left( \frac{1}{2}b^2 y^2 + \frac{1}{2}h^2 z^2 - 4y^2 z^2 \right) dF = \frac{1}{18}b^3 h^3 \end{aligned}$$

mamy:

$$m_0 = \frac{18 M_0}{b^3 h^3}$$

skąd bezpośrednio:

$$T_y = \frac{9 M_0}{b^3 h^3} (b^2 - 4z^2) y \quad T_z = -\frac{9 M_0}{b^3 h^3} (h^2 - 4y^2) z$$

Te wzory, w założeniu  $h \geq b$  dają najwyższe naprężenie skręcające:

$$T_0 = \pm 4,5 \frac{M_0}{b^2 h}$$

prostopadłe do osi  $Z$ . Panuje ono w punktach przecięcia się tej osi z obwodem.



## B. Część druga.

1. **Skręcenie jednostkowe.** Pręt prosty, obustronnie osiowo osadzony w uchwytach, ma przekrój poprzeczny — stały na całej międzyuchwytowej długości  $L$ . Ta część pręta — przy względnym obrocie uchwytów ulega *skręceniu* — względnemu obrotowi poprzecznych przekrojów około osi  $X$  pręta.

Pomiar tych obrotów wymaga użycia skreťomierza. Jego dwa zaciskowe ostrza odcinają pierwotną pomiarową długość  $l$  — część całkowitej długości  $L$  międzyuchwytowej. Ich obrót względny około osi  $X$  pręta, mierzony w znacznem powiększeniu daje *skręcenie* pręta na długości  $l$ .

Wielkość tego skręcenia jest wogóle zależna od miejsca odcięcia  $l$  na  $L$ . Może być jednak niezależna, a nadto — proporcjonalna do  $l$ , a wtedy odpowiada jej *skręcenie jednostkowe*  $\delta$  — stałe na całej długości  $L$ . Stanowi ono kąt obrotu względnego, około osi pręta — dwóch przekrojów poprzecznych wyodrębnionych w odległości jednostki długości tej osi. Skręcenie pręta na długości  $L$  międzyuchwytowej będzie więc:

$$\hat{O} = \delta L$$

w tym przypadku. Dla pręta o przekroju stałym jednolitym skręcenie jednostkowe jest stałe w dość znacznym obszarze zmienności obciążenia zewnętrznego, skręcającego.

2. **Naprężenia skręcające.** Oznaczmy przez  $M_o$  *moment skręcający* obciążenia zewnętrznego uchwytów. Dla pręta nieważkiego moment  $M_o$  stanowi zarazem obciążenie zewnętrzne przekroju bieżącego, prostopadłe doń, środkowe. Inaczej mówiąc moment  $M_o$  równoważy wypadkową naprężeń skręcających przekroju bieżącego.

W przekroju bieżącym  $F$  pręta nieodkształconego o stałym przekroju kołowym promienia  $R$ , wyodrębniamy punkt o współrzędnych biegunowych  $\rho, \theta$  i przynależne mu poletko:

$$dF = \rho d\rho d\theta$$

Rzut na sąsiedni przekrój  $F'$ , poprowadzony w osiowej odległości  $dx$ , da odpowiedni punkt o *tych samych* współrzędnych  $\rho, \theta$ , a więc i takie samo poletko:

$$dF' = \rho d\rho d\theta$$

Przekroje  $F, F'$  wyodrębniają z pręta płytkę bieżącą; poletka — jej cząstkę objętościową sześcienną — o przeciwległych ściankach  $dF$  i  $dF'$  i wysokości  $dx$ . Po odkształceniu przekrój  $F'$  obróci się około osi  $X$  pręta względem przekroju  $F$  o kąt  $\delta dx$ , przyczem oczywiście ścianka  $dF'$  przesunie się względem ścianki  $dF$  w kierunku prostopadłym do  $\rho$  o —

$$\rho \delta dx$$

Stąd przesunięcie jednostkowe  $\rho \delta$ , przynależne naprężeniu stycznemu  $T$ , prostopadłemu do  $\rho$ .

W obszarze sprężystości i proporcjonalności, według prawa Hooke'a:

$$T = G \rho \delta$$

gdzie  $G$  oznacza *spółczynnik sprężystości poprzecznej*. *Naprężenia skręcające*  $T$  dają układ znikomych momentów:

$$T \rho dF$$

o wypadkowej:

$$\int_F G \delta \rho^2 dF = G \delta \int_F \rho^2 dF = M_o$$

Stąd bezpośrednio:

$$\delta = \frac{M_o}{G J_o} \quad T = \frac{M_o}{J_o} \rho$$

Najwyższe naprężenie skręcające:

$$T_o = \frac{M_o}{W_o}$$

jest stałe na całym obwodzie i prostopadłe do  $R$ . We wzorach powyższych:

$$J_o = \frac{1}{2} \pi R^4$$

oznacza biegunowy moment bezwładności przekroju kołowego,

$$W_o = \frac{J_o}{R}$$

jego *moment wytrzymałości* na skręcanie.

**3. Wzory ściśle i przybliżone dla największych naprężeń skręcających  $T_0$  i skręceń jednostkowych  $\delta$ :**

a. Przekrój kołowy pełny średnicy  $D$ :

$$T_0 = \frac{16 M_0}{\pi D^3} \quad \delta = \frac{32 M_0}{G \pi D^4}$$

b. Przekrój kołowy pierścieniowy średnicy zewnętrznej  $D$ , wewnętrznej  $d$ :

a) grubościenny:

$$T_0 = \frac{16 M_0 D}{\pi (D^4 - d^4)} \quad \delta = \frac{32 M_0}{G \pi (D^4 - d^4)}$$

β) cienkościenny: średnica średnia  $d_0 = \frac{1}{2} (D + d)$   
 $s$  — grubość ścianki znikoma:

$$T_0 = \frac{M_0}{1,57 d_0^2 s} \quad \delta = \frac{1,28 M_0}{G d_0^3 s}$$

γ) cienkościenny rozcięty w jednym miejscu radialnie.

$$T_0 = \frac{M_0}{1,05 d_0^2 s} \quad \delta = \frac{M_0}{1,05 G d_0 s^3}$$

c. Przekrój eliptyczny:  $a$  — półos wielka,  $b$  — mała

$$T_0 = \frac{2 M_0}{\pi a b^2} \quad \delta = \frac{M_0 (a^2 + b^2)}{G \pi a^3 b^3}$$

d. Przekrój eliptyczny pierścieniowy:  $B$  — mała półos obwodu zewnętrznego,  $H = nB$  — wielka;  $b$  — mała półos obwodu wewnętrznego,  $h = nb$  — wielka

$$T_0 = \frac{2 M_0 B}{\pi n (B^4 - b^4)} \quad \delta = \frac{(n^2 + 1) M_0}{G n^3 (B^4 - b^4)}$$

e. Trójkąt:

a) prawidłowy:  $b$  — jego bok

$$T_0 = \frac{20 M_0}{b^3} \quad \delta = \frac{46,188 M_0}{G b^4}$$

- β) równoramienny:  $h$  — wysokość,  $b$  podstawa; kąt pomiędzy równymi bokami nie przekracza  $15^\circ$

$$T_0 = \frac{12 M_0}{h^3 - 1,26 b^3} \quad \delta = \frac{12 M_0}{G b (h^3 - 1,26 b^3)}$$

- f. Sześciobok prawidłowy:  $b$  — jego bok

$$T_0 = \frac{1,024 M_0}{b^3} \quad \delta = \frac{0,965 M_0}{G b^4}$$

- g. Ośmiobok prawidłowy:  $b$  — jego bok

$$T_0 = \frac{0,384 M_0}{b^3} \quad \delta = \frac{0,273 M_0}{G b^4}$$

- h. Przekrój, złożony z wysmukłych prostokątów:

$$T_0 = \frac{3 M_0 b}{n \sum (b_i^3 h_i)} \quad \delta = \frac{3 M_0}{n \sum (b_i^3 h_i)}$$

Znak sumy obejmuje wszystkie składowe prostokąty przekroju,  $b_i$  oznacza grubość,  $h_i$  — długość prostokąta  $i$ ; przez  $b$  oznaczono największą z pośród  $b_i$ . Spółczynnik  $n=1$  — dla *kątownika*, 1,17 — dla *krzyżownika*, 1,3 — dla *dwuteownika*, dla *ceownika* zaś od 1,0 do 1,3.

- i. Przekrój skrzynkowy cienkościenny. Średnia długość boków: krótszych  $b$ , dłuższych  $h$ . Grubość boków krótszych  $s_b$ , dłuższych  $s_h$ . Przez  $s$  oznaczono *mniej*szą z dwóch ostatnich grubości:

$$T_0 = \frac{M_0}{2 b h s} \quad \delta = \frac{M_0}{4 G b^2 h^2} \left( \frac{b}{s_b} + \frac{h}{s_h} \right)$$

4. Praca sprężysta. W układzie osi (II. B. 5) pręta bezwładnościowo jednorodnego (I. B. 10) praca sprężysta dla płytki bieżącej (59):

$$dH = \frac{dx}{2G} \int_F (T_y^2 + T_z^2) dF$$

gdzie przez  $T_y$ ,  $T_z$  oznaczono składowe naprężenia skręcających. Całkowaniem należy objąć pierwotny przekrój bieżący  $F$  pręta. Stąd dla odcinka  $x$  pierwotnej długości  $l$  pręta:

$$H_x = \int_0^x \frac{dx}{2G} \int_F (T_y^2 + T_z^2) dF$$

a dla całego pręta:

$$H = \int_0^l \frac{dx}{2G} \int_F (T_y^2 + T_z^2) dF$$

W szczególnym przypadku pręta o przekroju  $F$  kołowym pełnym, lub pierścieniowym:

$$H_x = \int_0^x \frac{dx}{2G} \int_F \frac{M_0^2}{J_0^3} \varrho^2 dF = \int_0^x \frac{M_0^2 dx}{2GJ_0}$$

. . . . . (88)

$$H = \int_0^l \frac{M_0^2 dx}{2GJ_0}$$

Wszystkie powyższe wzory są słuszne tylko w obszarze sprężystości i proporcjonalności tworzywa przy skręcaniu.

**5. Granice  $S_0$ ,  $P_0$ .** Międzyuchwytowa część próbki ma przekrój kołowy, promienia  $R$ , stały na całej pomiarowej długości  $L$ . Zaciskowe ostrza skrotomierza, ustawione w odległości  $L$ , zaopatrzone są w lusterka, odbijające podziałkę skali w lunecie. Różnica odczytów daje kąt względnego obrotu skrajnych przekrojów długości  $L$ , — jako miarę skręcenia próbki na tej długości. Ten kąt dzielony przez  $L$  daje *skręcenie jednostkowe*  $\phi$ , mnożony zaś przez  $R$  — *przesunięcie* względne owych przekrojów, jako łuk obwodu.

Dzieląc to przesunięcie przez  $L$  otrzymamy *przesunięcie jednostkowe* na obwodzie:

$$g_0 = \phi R = \frac{M_0 R}{GJ_0}$$

przynależne skrajnemu naprężeniu skręcającemu:

$$T_0 = \frac{M_0 R}{J_0}$$

panującemu również na obwodzie. Stąd dzieląc, mamy:

$$g_0 = \frac{T_0}{G}$$

W obszarze sprężystości stopniowym obciążeniom momentami skręcającymi  $M_0$  — do skrajnych naprężeń  $T_0$  — przynależą sprężyste przesunięcia:

$$g_0 L$$

ginące bez śladu po stopniowym odciążeniu próbki. Pierwsze różne od zera przesunięcie *niesprężyste* odpowiada skrajnemu naprężeniu skręcającemu, zwanemu *granica sprężystości*  $S_0$  tworzywa przy skręcaniu. Po stopniowym obciążeniu do tej granicy, lub ponad nią i następnym stopniowym odciążeniu pozostaje przesunięcie niesprężyste:

$$g_{on} L$$

Zatem w obszarze niesprężystości skrajnemu naprężeniu skręcającemu:

$$T_0 \geq S_0$$

przynależy przesunięcie jednostkowe  $g_0$  mieszane, złożone z części  $g_{os}$  sprężystej, ginącej wraz z obciążeniem, i części  $g_{on}$ , niesprężystej, pozostającej po odciążeniu. Przesunięcia niesprężyste:

$$g_{on} < 0,00001$$

praktycznie są równe zeru, a przeto *granica sprężystości tworzywa przy skręcaniu stanowi skrajne naprężenie skręcające*  $S_0$ , *przynależne niesprężystemu przesunięciu jednostkowemu 0,00001 na obwodzie stałego kołowego przekroju próbki.*

W obszarze proporcjonalności naprężenia  $T_0$ , zawarte w granicach:

$$P_0 \geq T_0 \geq 0$$

są proporcjonalne do posunięć jednostkowych  $g_0$  sprężystych, lub do sprężystych części  $g_{os}$  przesunięć  $g_0$  mieszanych. Naj-

wyższe naprężenie  $P_0$  tego obszaru zwie się *granicą proporcjonalności* tworzywa przy skręcaniu. Zatem w obszarze proporcjonalności *spółczynnik sprężystości poprzecznej*  $G$  ma wartość stałą i może być mierzony zapomocą skreťomierza tak, (III. C. 4), jak  $E$  zapomocą ekstensometra.

**6. Próba na skręćanie.** Swoisty przyrząd maszyny probierczej samoczynnie kreśli wykres tworzywa przy próbie na skręćanie. Podstawowa oś wykresu daje w skali: skręćenia jednostkowe  $\delta$ , lub przesunięcia jednostkowe  $g_0$  na obwodzie stałego kołowego przekroju próbki. Druga oś prostopadła—daje skrajne naprężenia skręćające  $T_0$ .

W obszarze sprężystości i proporcjonalności krzywa wykresu jest *prostą*, poza nim—nieznacznie się wygina, i zlekka pochyla ku podstawie wykresu. Górną granicę tego obszaru stanowi  $P_0$ , gdy  $S_0 > P_0$ . W tym przypadku pomiędzy  $P_0$  i  $S_0$  leży obszar sprężystych przesunięć jednostkowych, nieproporcjonalnych do  $T_0$ .

Poza  $S_0$  poczyna się obszar niesprężystości — przesunięć jednostkowych mieszanych, zrazu nieznacznych, potem — coraz szybciej rosnących wraz z obciążeniem. Zatem w *początkowym obszarze niesprężystości* linja wykresu nieznacznie odbiega od prostej, zlekka chyląc się ku podstawie wykresu, natomiast w *końcowym obszarze niesprężystości* linja ta pochyla się ku niej coraz bardziej przy wzroście obciążenia, i przy najwyższem skrajnem naprężeniu skręćającym  $R_0$  urywa się zagną. Próbka ulega ukręćeniu. To naprężenie  $R_0$ , niszczące—zwie się *wytrzymałością* tworzywa na skręćanie. Zatem — przy bezpośredniem przejściu obszaru niesprężystości pierwotnego — w końcowy — krzywa wykresu jest ciągłą, a skręćenie jednostkowe — jednostajne na całej długości pomiarowej  $L$  próbki.

Przy przejściu pośredniem — początkowy obszar niesprężystości zagną się kończy na *granicy podatności*  $Q_0$  tworzywa na skręćanie, stanowiącej zarazem początek pośredniego *obszaru podatności*. Obciążenie, przynależne  $Q_0$  sprawia miejscowy nagły przyrost skręćenia jednostkowego  $\delta$ , przyczem linja wykresu cofa się gwałtownie w tem miejscu, lub bieży równolegle do podstawy. Przy dalszem działaniu obciążenia, owo skupione, znaczne skręćenie rozszerza się—pokrywa całą długość próbki. Kończy się obszar podatności — zaczyna końcowy obszar niesprężystości i trwa aż do ukręćenia próbki.

Kąt względnego obrotu skrajnych przekrojów długości  $L$  próbki ukręćonej, zmierzony po dokładnem zetknięciu powierzchni

pęknięcia, stanowi miarę całkowitego skręcenia. Ten kąt, dzielony przez  $L$  daje *ukręcenie*  $O_0$ .

Zatem próba tworzywa na skręcanie daje właściwe mu *cechy wytrzymałościowe*:

$$G, S_0, Q_0, R_0, O_0$$

Przy bezpośrednim przejściu początkowego obszaru niesprężystości w końcowy, *nieistniejącą granicę podatności* można ustalić sztucznie, jak przy próbie na rozciąganie (IV. B. 2).

**7. Naprężenia dopuszczalne.** Na zestawieniu podano *dopuszczalne skrajne naprężenia skręcające*  $k_0$  w  $\text{kg/cm}^2$ , a nadto wytrzymałość na rozciąganie  $R_r$  w  $\text{kg/cm}^2$ . Naprężenia dopuszczalne uzależniono od rodzaju obciążenia: trwałego, powtarzanego i przemennego:

ZESTAWIENIE.

OBCIĄŻENIE:		TRWAŁE	POWTA- RZANE	PRZE- MIENNE
NAPRĘŻENIE:	$R_r$	$k_0$	$k_0$	$k_0$
Żeliwo . . . . .	1300—1800	300— 350	180— 230	100—180
Żeliwo kowalne . . .	2000—3000	300— 400	200— 270	100—130
Stal zgrzewna . . . .	3000—4500	350— 500	220— 320	120—180
Stal zlewna . . . . .	3000—4500	600—1200	350— 800	200—600
Stal „ . . . . .	4500—7000	900—1400	550— 950	300—700
Stal tyglowa . . . . .	4500—9000	900—2000	600—1350	300—650
Stal niklowa . . . . .	4500—9000	900—1500	600— 950	300—480
Stal lana . . . . .	3500—6000	480— 950	300— 650	150—450
Miedź . . . . .	2000—2700	300— 450	200— 300	100—150
Bronz . . . . .	2000—2500	300— 400	200— 250	100—130
Bronz fosforowy . . .	3000—4500	450— 700	300— 450	150—230
Spiż . . . . .	1800—2200	240— 320	150— 200	80—100
Mosiądz . . . . .	2000—3000	320— 480	200— 320	110—160
Mosiądz przedni . . .	3500—6000	480— 800	300— 500	160—270
Glin lany . . . . .	900—1200	110— 150	70— 100	40— 60
Dąb (drewno) . . . .	350— 500	8 — 16	5 — 11	3 — 5
Sosna, jodła . . . . .	250— 400	8 — 14	5 — 9	2 — 4



Skrajne naprężenie skręcające  $T_o$  w każdym przekroju pręta prostego nie może przekroczyć  $k_o$  przy obciążeniu trwałem, lub zmiennem. Największa wielkość  $T_m$  naprężeń skrajnych  $T_o$  wyodrębnia *przekrój niebezpieczny*. Jego wymiary należy dobrać tak, aby:

$$T_m = k_o$$

Spełnienie tego warunku zabezpiecza pręt wytrzymałościowo: układ naprężeń skręcających nie wykracza poza obszar sprężystości i proporcjonalności.

### C. Część trzecia.

1. **Siły niszczące.** Pręt prosty ulega *ukręceniu* w przekroju niebezpiecznym, gdy skrajne naprężenie skręcające  $T_m$  tego przekroju staje się równem wytrzymałości  $R_o$  tworzywa na skręcanie. Naprężenie niszczące:

$$T_m = R_o$$

przynależy *momentowi ukręcającemu*, — jedynej składowej obciążenia zewnętrznego przekroju niebezpiecznego. To obciążenie zawsze można wyznaczyć ze wzorów ogólnych.

Tak, dla nieważkiego pręta prostego o stałym przekroju kołowym średnicy  $D$ , przekrój niebezpieczny przynależy największemu momentowi skręcającemu, a przeto moment ukręcający:

$$M_u = M_m = \frac{1}{16} \pi D^3 R_o$$

Tak, np. dla stali o wytrzymałości  $40 \text{ kg/mm}^2$  na skręcanie — moment ukręcający pręt dwucentymetrowej średnicy wynosi 628 kg. mm.

2. **Pręt prosty, jednorodnie zbudowany.** Środek  $O$  czołowej jego ścianki stanowi początek osi współrzędnych; oś  $X$  pokrywa się z osią pręta. Odciętej  $x$  przynależy przekrój bieżący. Ten przekrój dzieli pręt na dwie części; po sprowadzeniu obciążenia zewnętrznego jednej z nich do środka owego przekroju otrzymamy moment skręcający  $M_x$  na osi  $X$ . Przynależy mu skrajne naprężenie skręcające  $T_x$ . Największe z nich  $T_m$  — wyodrębnia