

XII. ROZDZIAŁ DWUNASTY.

PRĘTY KRZYWE.

A. Część pierwsza.

1. **Pręty krzywe płaskie.** Rozpatrywać będziemy wyłącznie tylko pręty bezwładnościowo i wytrzymałościowo jednorodne o stałym, lub nader wolno zmiennym przekroju poprzecznym i pierwotnej krzywej osi, leżącej w płaszczyźnie *symetrii* pręta. Leżą w niej również promienie r_0 i środki V_0 krzywizny tej osi, a nadto—osie główne bezwładności Y przekrojów poprzecznych: płaszczyzna krzywizny jest zarazem *główną płaszczyzną* bezwładności pręta. Przecina ją prostopadle—wzdłuż nieodkształconej osi pręta—druga jego *główna powierzchnia* bezwładności, cylindryczna, zawierająca główne osie Z przekrojów.

Środki V_0 krzywizny osi nieodkształconej leżą zawsze po za prętem, na ujemnej osi Y bieżącego przekroju. Oś X stanowi styczną nieodkształconej. Dwa sąsiednie przekroje poprzeczne pręta krzywego płaskiego tworzą płytkę. Płaszczyzny tych sąsiednich przekrojów, czyli płaskich ścianek płytki przecinają się wzdłuż *osi krzywizny* pod kątem znikomym $d\varphi$. Oś krzywizny w przecięciu z płaszczyzną krzywizny pręta daje środek krzywizny V_0 , przynależny długości ds nieodkształconej osi pręta, zawartej pomiędzy środkami O i O' pól F i

$$F' = F + dF$$

owych sąsiednich przekrojów pręta, tworzących płytkę bieżącą. Odcinek OV_0 stanowi promień krzywizny r_0 nieodkształconej w bieżącym jej punkcie O . Zatem:

$$ds = r_0 d\varphi$$

2. **Obciążenie osiowe.** Załóżmy, jak dla prętów prostych, że siła osiowa S , leżąca na osi X , a więc środkowa i prostopadła do bieżącego przekroju pręta, daje naprężenie osiowe:

$$N_x = \frac{S}{F}$$

stałe dla całego pola F tego przekroju. Wyodrębnijmy z pręta odkształconego (Rys. 116) płytkę $ABC'D'$, pozostającą w równowadze pod obciążeniem sił osiowych: S i

$$S' = S + dS$$

oraz sił zewnętrznych, działających na płytkę bezpośrednio. Na płaskich ściankach płytki panować będą naprężenia osiowe:

$$N_x = \frac{S}{F} \quad N_x' = N_x + dN_x = \frac{S + dS}{F + dF} \simeq \frac{S}{F}$$

Pod działaniem tych naprężeń jakiejkolwiek łukowe włókno KK' obrane w odległości y od osi OO' ulegnie odkształceniu osiowemu. Jego pierwotna długość:

$$KK' = ds_y = (r_0 + y) d\varphi$$

wydłuży się lub skróci o łuk:

$$K'K'' = \delta ds_y$$

Stąd wydłużenie:

$$e = \frac{\delta ds_y}{ds_y} = \frac{N_x}{E} = \frac{S}{EF}$$

Zatem w obszarze sprężystości i proporcjonalności, a więc i niezmienności współczynnika sprężystości podłużnej E , wydłużenia jednostkowe wszystkich włókien są *jednakowe*, a wydłużenia bezwzględne:

$$\delta ds_y = e ds_y = \frac{S}{EF} (r_0 + y) d\varphi$$

proporcjonalne do odległości $r_0 + y$ od środka krzywizny V_0 pierwotnej osi pręta. To znaczy, że ścianka CD płytki pozostanie

płaską i po odkształceniu, obróci się jednak o kąt $\Delta d\varphi$ około osi krzywizny. Stąd bezpośrednio:

$$\delta ds_y = (r_0 + y) \Delta d\varphi$$

Siły osiowe nie zmieniają pierwotnej krzywizny pręta krzywego płaskiego, tylko go wydłużają lub skracają. Miara tych odkształceń osiowych może służyć wydłużenie włókna środkowego:

$$OO' = ds = r_0 d\varphi$$

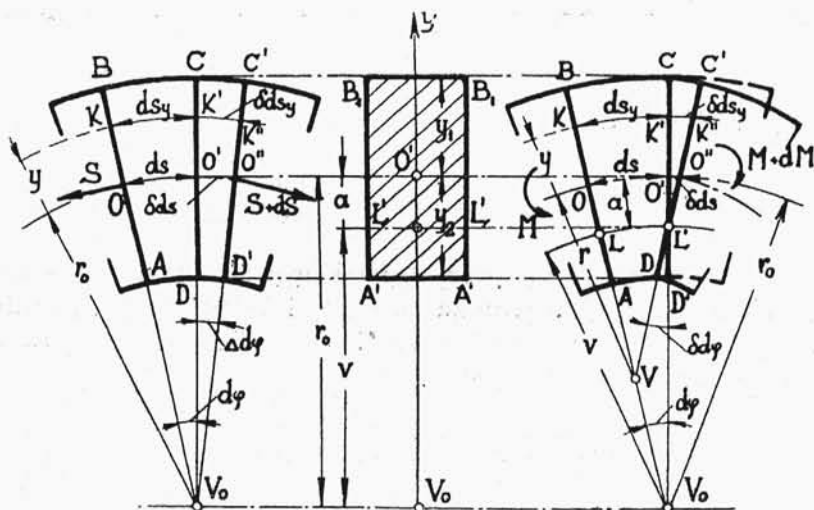
Jego wydłużenie:

$$\delta ds = e ds = \frac{S}{EF} r_0 d\varphi = r_0 \Delta d\varphi \quad \Delta d\varphi = \frac{S}{EF} d\varphi \quad . \quad (171)$$

3. Obciążenie ścinające. Przyłożmy (Rys. 116) do środka O siłę ścinającą Q dodatnią, to jest — leżącą na promieniu OV_0 i zwróconą ku V_0 . Do środka O' przeciwległej ścianki płytki $ABCD$ — różnozwrotną siłę:

$$Q' = Q + dQ$$

leżącą na promieniu V_0C . Zazwyczaj zakładamy, że to obciążenie ścinające bieżącej płytki pręta krzywego płaskiego nie różni się w działaniu od takiegoż obciążenia płytki pręta pro-



Rys. 116 i 117.

stęgo, a przeto wszystko to, cośmy wyłożyli (VI) wyżej stosuje się i tutaj bez zmiany. I tu więc posunięciem siły Q ścinającej będzie *przesunięcie* względne środków O i O' :

$$g ds = t \frac{Q}{GF} ds$$

a przeto *praca* sprężysta płytki:

$$dH = t \frac{Q^2 ds}{2 GF}$$

Przeważnie obciążenie ścinające prętów krzywych płaskich towarzyszy obciążeniom zginającym. Jego wpływ odkształcający jest wogóle nieznaczny, zwykle więc bywa pomijany.

4. Obciążenie zginające. Przylóżmy (Rys. 117) do środka O moment zginający M , prostopadły do głównej płaszczyzny krzywizny pręta, dodatni, lewoskrętny. Do środka O' ścianki przeciwległej — takż moment:

$$M' = M + dM$$

lecz różnoskrętny. Pod tem obciążeniem zginającym — pierwotnie płaskie ścianki AB, CD , niezwichrzone, — pochyla się ku sobie o kąt $\delta d\varphi$ obrotu około linii obojętnej L' , przecinającej prostopadle główną płaszczyznę bezwładności w punkcie L' . Tutaj więc założenie Bernoulli odpowiada dość ściśle wynikom prób bezpośrednich.

Płaszczyzny przeciwległych ścianek $AB, C'D'$ płytki odkształconej przetną się wzdłuż nowej osi krzywizny. Ta oś, prostopadła do głównej płaszczyzny pręta, w przecięciu z nią da nowy środek V krzywizny *odkształconej osi* pręta, a zarazem i promień

$$VO = r$$

krzywizny odkształconej.

Zatoczmy ze środka V_0 łuk LL' promieniem v . Ten łuk nie odkształca się przy obrocie ścianki CD około nowej osi krzywizny, natomiast łukowe włókienko KK' , wyodrębnione z pierwotnej płytki $ABCD$ w odległości y od osi OO' pręta, przy odkształceniu wydłuży się proporcjonalnie do odległości $a + y$ od osi obrotu $L'L'$. Wynika to bezpośrednio z poczynionych założeń.

Pierwotna długość włókna KK' jest równa:

$$ds_y = (r_0 + y) d\varphi$$

jej wydłużenie bezwzględne $K'K''$:

$$\delta ds_y = (a + y) \delta d\varphi$$

a zatem wydłużenie jednostkowe:

$$e = \frac{\delta ds_y}{ds_y} = \frac{a + y}{r_0 + y} \frac{\delta d\varphi}{d\varphi}$$

5. Naprężenia zginające. W obszarze sprężystości i proporcjonalności możemy uzależnić e od przynależnego mu naprężenia osiowego:

$$N_x = Ee = E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \frac{a + y}{r_0 + y}$$

Naprężenia N_x są dodatnie, rozciągające, gdy:

$$a + y > 0$$

ujemne, ściskające, gdy:

$$a + y < 0$$

i równe zeru na linii obojętnej LL' . Skrajne naprężenia:

$$N_1 = E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \frac{a + y_1}{r_0 + y_1} \quad N_2 = E \frac{\delta d\varphi}{\delta\varphi} \frac{a + y_2}{r_0 + y_2}$$

przynależą skrajnym rzędnym y_1, y_2 przekroju. W tych granicach naprężenia N_x zmieniają się hyperbolicznie.

Równowaga płytki wymaga spełnienia dwóch warunkowych równań:

$$\int N_x dF = E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{a + y}{r_0 + y} dF = 0$$

$$\int N_x (a + y) dF = E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{(a + y)^2}{r_0 + y} dF = 0$$

Pierwsze (1) służy do wyznaczania a , drugie daje $\delta d\varphi$.

Przy znacznym r_0 , a więc dla prętów o małej krzywiznie równanie pierwsze daje:

$$\frac{1}{r_0} \int (a + y) dF = \frac{a}{r_0} F = 0 \quad a \simeq 0$$

Linję obojętną stanowi oś Z , jak przy zginaniu właściwym prętów prostych.

Zatem, przy a bliskim zeru i znacznym r_0 — drugie równanie da:

$$\frac{M}{E} = \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \frac{1}{r_0} \int y^2 dF \simeq \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \frac{J_z}{r_0}$$

i ostatecznie:

$$\frac{\delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{EJ_z} r_0 \quad N_x = \frac{M}{EJ_z} y \quad (172)$$

Stąd wniosek, że dla prętów o małej krzywiznie wystarcza zwykła teoria zginania właściwego, poprzednio już wyłożona dla prętów prostych.

6. Pręty o znacznej krzywiznie. Pierwsze równanie:

$$\int \frac{a + y}{r_0 + y} dF = \int \frac{r_0 + y - r + a}{r_0 + y} dF = \int dF - (r_0 - a) \int \frac{dF}{r_0 + y} = 0$$

daje dla prętów o znacznej krzywiznie:

$$v = r_0 - a = \frac{F}{\int \frac{dF}{r_0 + y}} = \frac{F}{\int \frac{dF}{Y}} \quad (173)$$

gdzie:

$$Y = r_0 + y$$

Drugie równanie, po uwzględnieniu tożsamości:

$$\frac{(a + y)^2}{r_0 + y} = a + y - (r_0 - a) \frac{a + y}{r_0 + y}$$

oraz równania pierwszego, daje:

$$\frac{M}{E} = \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \int (a + y) dF$$

Całka tego wzoru stanowi moment statyczny przekroju F względem osi $L'L'$, równa jest więc Fa . Stąd ostatecznie:

$$\frac{\delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{EFa}$$

a przeto:

$$N_x = \frac{M}{Fa} \frac{a+y}{r_0+y} \quad e = \frac{N_x}{E} \quad \dots (174)$$

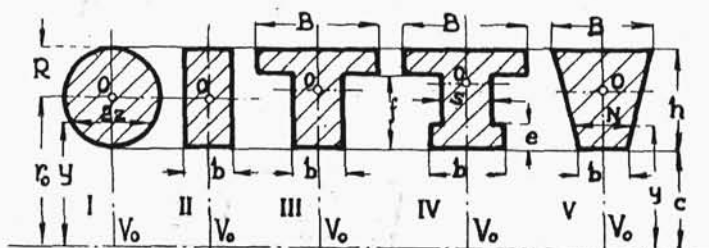
Całka wzoru (173) może być wyznaczona wykreślnie, jako pole odpowiednio przekształconego przekroju. Można ją również brać bezpośrednio, lub całkując szereg:

$$\int \frac{dF}{r_0+y} = \frac{1}{r_0} \int \frac{dF}{1+\frac{y}{r_0}} = \frac{1}{r_0} \int \left[1 - \frac{y}{r_0} + \left(\frac{y}{r_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{r_0}\right)^3 + \dots \right] dF$$

szybkoszbieżny.

7. Linja obojętna. Wyznamy położenie linii obojętnej dla przekrojów I—V (Rys. 118):

a. Przekrój kołowy pełny. Równanie obwodu:



Rys. 118.

$$y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad dF = 2z dy = 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$\int \frac{dF}{r_0+y} = 2 \int_{-R}^R \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{r_0+y} dy = 2\pi(r_0 - \sqrt{r_0^2 - R^2})$$

jako, że:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{r_0 + y} dy &= \int \frac{\sqrt{R^2 - (u - r_0)^2}}{u} du = \\ &= \sqrt{R^2 - (u - r_0)^2} + (R^2 - r_0^2) \int \frac{du}{u \sqrt{R^2 - (u - r_0)^2}} + r_0 \int \frac{du}{\sqrt{R^2 - (u - r_0)^2}} = \\ &= \sqrt{R^2 - (u - r_0)^2} + \sqrt{r_0^2 - R^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{r_0^2 - R^2 - r_0 u}{\sqrt{r_0^2 - R^2} \sqrt{R^2 - (u - r_0)^2}} \right] + \\ &\quad + r_0 \operatorname{arc} \sin \left(\frac{u - r_0}{R} \right) = \sqrt{R^2 - y^2} - \\ &\quad - \sqrt{r_0^2 - R^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{R^2 + r_0 y}{\sqrt{r_0^2 - R^2} \sqrt{R^2 - (u - r_0)^2}} \right] + r_0 \operatorname{arc} \sin \left(\frac{y}{R} \right) \end{aligned}$$

ostatecznie więc:

$$v = r_0 - a = \frac{R^2}{2(r_0 - \sqrt{r_0^2 - R^2})}$$

b. Przekrój prostokątny: Tutaj:

$$dF = b dY \quad \int \frac{dF}{Y} = b \int \frac{dY}{Y} = b \lg \left(1 + \frac{h}{c} \right)$$

i ostatecznie:

$$v = r_0 - a = \frac{h}{\lg \left(1 + \frac{h}{c} \right)}$$

c. Przekrój teowy. Dla górnej części przekroju i dolnej:

$$\begin{aligned} dF &= B dY \quad \int \frac{dF}{Y} = B \int \frac{dY}{Y} = B \lg \left(\frac{c+h}{c+f} \right) \\ dF &= b dY \quad \int \frac{dF}{Y} = b \int \frac{dY}{Y} = b \lg \frac{c+f}{c} \end{aligned}$$

i ostatecznie:

$$v = r_0 - a = \frac{bf + B(h-f)}{b \lg\left(1 + \frac{f}{c}\right) + B \lg\left(\frac{c+h}{c+f}\right)}$$

d. Przekrój dwuteowy: Dla górnej, średniej i dolnej części przekroju:

$$dF = B dY \quad \int \frac{dF}{Y} = B \int_{c+f}^{c+h} \frac{dY}{Y} = B \lg\left(\frac{c+h}{c+f}\right)$$

$$dF = s dY \quad \int \frac{dF}{Y} = s \int_{c+e}^{c+f} \frac{dY}{Y} = s \lg\left(\frac{c+f}{c+e}\right)$$

$$dF = b dY \quad \int \frac{dF}{Y} = b \int_c^{c+e} \frac{dY}{Y} = b \lg\left(1 + \frac{e}{c}\right)$$

i ostatecznie:

$$v = r_0 - a = \frac{be + s(f-e) + B(h-f)}{b \lg\left(1 + \frac{e}{c}\right) + s \lg\left(\frac{c+f}{c+e}\right) + B \lg\left(\frac{c+h}{c+f}\right)}$$

e. Przekrój trapezowy. Tutaj:

$$dF = w dY \quad w = b + \frac{B-b}{h}(Y-c)$$

$$\int \frac{dF}{Y} = \int_c^{c+h} \left[b + \frac{B-b}{h}(Y-c) \right] \frac{dY}{Y} = B - b + \left(b - \frac{B-b}{h}c \right) \lg\left(1 + \frac{h}{c}\right)$$

i ostatecznie:

$$v = r_0 - a = \frac{\frac{1}{2}h(B+b)}{B-b + \left(b - \frac{B-b}{h}c \right) \lg\left(1 + \frac{h}{c}\right)}$$