

Tak np. dla siły pionowej P , działającej w odległości al i bl od punktu podparcia 0 i 0':

$$v_0 = -Pb \quad v_0' = -Pa \quad S = -Plb(1-b^2) \quad R = -Pla(1-a^2)$$

(Przegląd Techniczny. R. 1926 str. 715).

P. Inż. Z. Wasiutyński ogłosił drukiem (P. T. r. 1927 str. 570) tablicę momentów, wystarczającą do obliczenia szyn.

11. Belki na sprężystym podłożu. Przekrój belki — stały. Stały współczynnik a sprężystości podłoża. Pierwotna oś X belki — pozioma. Obciążenie pionowe w płaszczyźnie głównej XY bezwładności belki. Kierunek (w) wzrostu jego wypadkowych różnowrotny z osią X .

Oznaczmy przez l odcięta punktu odkształconej, gdzie przyłożono siłę P pionową i poziomy moment N obciążenia zewnętrznego. Nadto w tym punkcie — granicznym dwóch obszarów: poprzedniego (p) i następnego (n) — obciążenia jednostkowe stałe q_p i q_n tych obszarów tworzą skończony skok: $q_p - q_n$. Ciągłość odkształconej wymaga, aby w punkcie granicznym (137):

$$y_p = Y_p + \frac{q_p}{a} = y_n = Y_n + \frac{q_n}{a}$$

$$y_p' = Y_p' + \frac{1}{a} \frac{dq_p}{dx} = y_n' = Y_n' + \frac{1}{a} \frac{dq_n}{dx}$$

Nadto (IX.A.8) przy przekraczaniu tego punktu w kierunku (w) siła ścinająca nagle wzrasta o P , a moment zginający o N ; a przeto:

$$y_p'' = \frac{M}{EJ} = \frac{4n^4}{a} M \quad y_n'' = \frac{M+N}{EJ} = \frac{4n^4}{a} (M+N)$$

$$y_p''' = -\frac{Q}{EJ} = -\frac{4n^4}{a} Q \quad y_n''' = -\frac{Q+P}{EJ} = -\frac{4n^4}{a} (Q+P)$$

Stąd ostatecznie odejmując:

$$Y_n - Y_p = \frac{1}{a} (q_p - q_n) \quad Y_n' - Y_p' = \frac{1}{a} \frac{d}{dx} (q_p - q_n)$$

$$y_n'' - y_p'' = \frac{4n^4}{a} N \quad y_n''' - y_p''' = -\frac{4n^4}{a} P$$

Stałe całkowania (137) dla pierwszego obszaru: A, B, C, D , dla następnego: $A + A', B + B', C + C', D + D'$. Po podstawieniu otrzymamy cztery równania. Zamiast drugiego i ostatniego weźmiemy ich sumę i różnicę. Stąd ostatecznie:

$$A'e^{nl} \sin(nl) + B'e^{nl} \cos(nl) + C'e^{-nl} \sin(nl) + \\ + D'e^{-nl} \cos(nl) = \frac{1}{a} (q_p - q_n)$$

$$A'e^{nl} \cos(nl) - B'e^{nl} \sin(nl) - C'e^{-nl} \cos(nl) + \\ + D'e^{-nl} \sin(nl) = \frac{2n^2}{a} N$$

$$A'e^{nl} \sin(nl) + B'e^{nl} \cos(nl) - C'e^{-nl} \sin(nl) - \\ - D'e^{-nl} \cos(nl) = \frac{n}{a} P + \frac{1}{2na} \frac{d}{dx} (q_p - q_n)$$

$$-A'e^{nl} \cos(nl) + B'e^{nl} \sin(nl) - C'e^{-nl} \cos(nl) + \\ + D'e^{-nl} \sin(nl) = \frac{n}{a} P - \frac{1}{2na} \frac{d}{dx} (q_p - q_n)$$

Biorąc sumę i różnicę pierwszego i trzeciego a następnie drugiego i czwartego równania otrzymamy wzory ogólne:

$$A' = \frac{e^{-nl}}{2a} \left\{ \left[q_p - q_n + nP + \frac{1}{2n} \frac{d}{dx} (q_p - q_n) \right] \sin(nl) + \right. \\ \left. + \left[2n^2 N - nP + \frac{1}{2n} \frac{d}{dx} (q_p - q_n) \right] \cos(nl) \right\}$$

$$B' = \frac{e^{-nl}}{2a} \left\{ \left[q_p - q_n + nP + \frac{1}{2n} \frac{d}{dx} (q_p - q_n) \right] \cos(nl) - \right. \\ \left. - \left[2n^2 N - nP + \frac{1}{2n} \frac{d}{dx} (q_p - q_n) \right] \sin(nl) \right\}$$

$$C' = \frac{e^{nl}}{2a} \left\{ \left[q_p - q_n - nP - \frac{1}{2n} \frac{d}{dx} (q_p - q_n) \right] \sin(nl) - \right. \\ \left. - \left[2n^2 N + nP - \frac{1}{2n} \frac{d}{dx} (q_p - q_n) \right] \cos(nl) \right\} \quad (138)$$

$$D' = \frac{e^{nl}}{2a} \left\{ \left[q_p - q_n - nP - \frac{1}{2n} \frac{d}{dx} (q_p - q_n) \right] \cos(nl) + \right. \\ \left. + \left[2n^2 N + nP - \frac{1}{2n} \frac{d}{dx} (q_p - q_n) \right] \sin(nl) \right\}$$

gdzie oznaczono:

$$n = \sqrt[4]{\frac{a}{4EJ}}$$

A. Belka długości $2L$, symetryczna względem pionowej osi Y i symetrycznie względem niej obciążona. Przeto będziemy rozpatrywali tylko połowę belki. W obszarze $(L-l)$ niema obciążenia, zatem równanie odkształconej:

$$y = Ae^{nx} \sin(nx) + Be^{nx} \cos(nx) + Ce^{-nx} \sin(nx) + De^{-nx} \cos(nx)$$

Na końcu belki siła ścinająca i moment zginający są niewątpliwie równe zeru, a przeto:

$$Ae^{nL} \cos(nL) - Be^{nL} \sin(nL) - Ce^{-nL} \cos(nL) + De^{-nL} \sin(nL) = 0$$

$$Ae^{nL} [\sin(nL) - \cos(nL)] + Be^{nL} [\sin(nL) + \cos(nL)] - \\ - Ce^{-nL} [\sin(nL) + \cos(nL)] + De^{-nL} [\sin(nL) - \cos(nL)] = 0$$

stąd bezpośrednio:

$$C = \{ A [1 - \sin(2nL)] + B [1 - \cos(2nL)] \} e^{2nL} \\ D = \{ -A [1 + \cos(2nL)] + B [1 + \sin(2nL)] \} e^{2nL} \quad (139)$$

Obciążenie zewnętrzne tej belki stanowi:

a. Siła P , leżąca na osi Y . W punkcie przecięcia się tej osi z odkształconą — jej styczna jest niewątpliwie równoległa do osi X , a siła ścinająca równa: $-\frac{1}{2} P$. Zatem:

$$y_0' = n(A + B + C - D) = 0 \\ y_0''' = 2n^3(A - B + C + D) = \frac{P}{2EJ} = \frac{2n^4 P}{a}$$

Stąd bezpośrednio:

$$C = \frac{nP}{2a} - A \quad D = \frac{nP}{2a} + B$$

i ostatecznie na mocy (139):

$$A = \frac{Pn}{4a} \frac{\sin(2nL) + \cos(2nL) - e^{-2nL}}{\sin(2nL) + \sinh(2nL)}$$

$$B = \frac{Pn}{4a} \frac{\cos(2nl) - \sin(2nL) + 2 + e^{-2nL}}{\sin(2nL) + \sinh(2nL)}$$

b. Belka podwalinowa długości $2L$, symetryczna względem osi Y . Stałe obciążenie jednostkowe q pokrywa odcinek $2l$, symetryczny względem tejże osi, możemy przeto rozpatrywać tylko połowę belki. W przeszle (l) równanie odkształconej będzie:

$$y = (A + A') e^{nx} \sin(nx) + (B + B') e^{nx} \cos(nx) + \\ + (C + C') e^{-nx} \sin(nx) + (D + D') e^{-nx} \cos(nx) + \frac{q}{a}$$

przyczem (138):

$$A' = -q \frac{e^{-nl}}{2a} \sin(nl) \quad B' = -q \frac{e^{-nl}}{2a} \cos(nl)$$

$$C' = -q \frac{e^{nl}}{2a} \sin(nl) \quad D' = -q \frac{e^{nl}}{2a} \cos(nl)$$

W punkcie przecięcia się osi Y z odkształconą — jej styczna jest niewątpliwie równoległa do osi X , a siła ścinająca — równa zeru. Zatem:

$$y_0' = n(A + A' + B + B' + C + C' - D - D') = 0$$

$$y_0''' = 2n^3(A + A' - B - B' + C + C' + D + D') = 0$$

stąd bezpośrednio:

$$C = \frac{q}{2a} (e^{nl} + e^{-nl}) \sin(nl) - A$$

$$D = \frac{q}{2a} (e^{nl} - e^{-nl}) \cos(nl) + B$$

i ostatecznie, po uwzględnieniu (139):

$$A = \frac{q}{4a} \left[(e^{nl} + e^{-nl}) \sin(nl) \frac{\sin(2nL) + 1 - e^{-2nL}}{\sin(2nL) + \sinh(2nL)} + \right. \\ \left. + (e^{nl} - e^{-nl}) \cos(nl) \frac{\cos(2nL) - 1}{\sin(2nL) + \sinh(2nL)} \right]$$

$$B = \frac{q}{4a} \left[(e^{nl} + e^{-nl}) \sin(nl) \frac{\cos(2nL) + 1}{\sin(2nL) + \sinh(2nL)} - \right. \\ \left. - (e^{nl} - e^{-nl}) \cos(nl) \frac{\sin(2nL) - 1 - e^{-2nL}}{\sin(2nL) + \sinh(2nL)} \right]$$

e. Podkład długości $2L$, symetryczny względem osi Y ; obustronnie w odległości l od tej osi działają nań dwie siły P nacisku szyn. Wobec symetrii rozpatrujemy tylko połowę belki. W obszarze (l) równanie odkształconej będzie:

$$y = (A + A') e^{nx} \sin(nx) + (B + B') e^{nx} \cos(nx) + \\ + (C + C') e^{-nx} \sin(nx) + (D + D') e^{-nx} \cos(nx)$$

przyczem (138):

$$A' = nP \frac{e^{-nl}}{2a} [\sin(nl) - \cos(nl)] \quad B' = nP \frac{e^{-nl}}{2a} [\sin(nl) + \cos(nl)]$$

$$C' = -nP \frac{e^{nl}}{2a} [\sin(nl) + \cos(nl)] \quad D' = nP \frac{e^{nl}}{2a} [\sin(nl) - \cos(nl)]$$

W punkcie przecięcia się osi Y z odkształconą — jej styczna jest niewątpliwie równoległa do osi X , a siła ścinająca — równa zeru. Zatem, jak wyżej:

$$y_0' = n(A + A' + B + B' + C + C' - D - D') = 0$$

$$y_0''' = 2n^3(A + A' - B - B' + C + C' + D + D') = 0$$

stad bezpośrednio:

$$C = \frac{nP}{2a} [(e^{nl} + e^{-nl}) \cos(nl) + (e^{nl} - e^{-nl}) \sin(nl)] - A$$

$$D = \frac{nP}{2a} [(e^{nl} + e^{-nl}) \cos(nl) - (e^{nl} - e^{-nl}) \sin(nl)] + B$$

i ostatecznie (139):

$$A = \frac{nP}{4a} \left[(e^{nl} + e^{-nl}) \cos(nl) \frac{\sin(2nL) + \cos(2nL) - e^{-2nL}}{\sin(2nL) + \sinh(2nL)} + \right. \\ \left. + (e^{nl} - e^{-nl}) \sin(nl) \frac{\sin(2nL) - \cos(2nL) + 2 - e^{-2nL}}{\sin(2nL) + \sinh(2nL)} \right]$$

$$B = \frac{nP}{4a} \left[(e^{nl} + e^{-nl}) \cos(nl) \frac{\cos(2nL) - \sin(2nL) + 2 + e^{-2nL}}{\sin(2nL) + \sinh(2nL)} + \right. \\ \left. + (e^{nl} - e^{-nl}) \sin(nl) \frac{\sin(2nL) + \cos(2nL) - e^{-2nL}}{\sin(2nL) + \sinh(2nL)} \right]$$

B. Belka nieskończenie długa, symetryczna względem dowolnej pionowej osi Y . Jej obciążenie stanowi:

a. Siła P na osi Y . Wobec symetrii rozpatrujemy tylko połowę belki. Równanie odkształconej:

$$y = [C \sin(nx) + D \cos(nx)] e^{-nx} \quad x \geq 0$$

nie może zawierać wyrazów z e^{nx} , nieograniczenie rosnących wraz z x .

W punkcie przecięcia się osi Y z odkształconą — jej styczna jest niewątpliwie równoległa do poziomej osi X , a siła ścinająca równa: $-\frac{1}{2}P$. Zatem:

$$y_0' = n(C - D) = 0 \quad y_0''' = 2n^3(C + D) = \frac{P}{2EJ} = \frac{2n^4}{a}P$$

Stąd bezpośrednio:

$$C = D = \frac{nP}{2a}$$

i ostatecznie:

$$\begin{aligned} y &= \frac{nP}{2a} [\sin(nx) + \cos(nx)] e^{-nx} & y' &= -\frac{n^2P}{a} e^{-nx} \sin(nx) \\ M &= \frac{P}{4n} [\sin(nx) - \cos(nx)] e^{-nx} & Q &= -\frac{1}{2}Pe^{-nx} \cos(nx) \end{aligned}$$

b. Moment N poziomy, przyłożony do punktu przecięcia się osi Y z odkształconą. W obszarze dodatnich x równanie odkształconej:

$$y = [C \sin(nx) + D \cos(nx)] e^{-nx}$$

nie może zawierać wyrazów z e^{nx} , nieograniczenie rosnących wraz z x ; w obszarze x ujemnych — równanie odkształconej:

$$y = [A' \sin(nx) + B' \cos(nx)] e^{nx}$$

nie może z tych samych przyczyn — zawierać wyrazów z e^{-nx} . Zatem:

$$C + C' = 0 \quad D + D' = 0$$

a nadto, według (138):

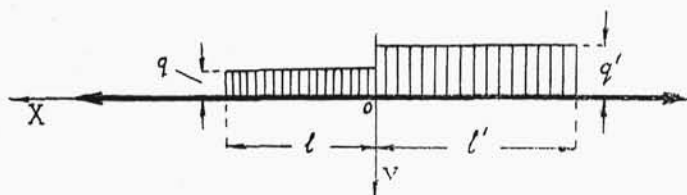
$$A' = \frac{n^2}{a}N \quad B' = 0 \quad C' = -\frac{n^2}{a}N \quad D' = 0$$

Równanie odkształconej

$$y = \frac{n^2}{a} N e^{-nx} \sin(nx) \quad y = \frac{n^2}{a} N e^{nx} \sin(nx)$$

dla x — dodatnich i ujemnych.

c. Obciążenia jednostkowe stałe q i q' pokrywają odcinki l i l' (Rys. 77) przedzielone osią Y . Przęsło (l) leży



Rys. 77

w obszarze x dodatnich — przęsło (l') w obszarze x — ujemnych. W lewym

obszarze belki nieobciążonej równanie odkształconej:

$$y = [C \sin(nx) + D \cos(nx)] e^{-nx}$$

nie może zawierać wyrazów z e^{nx} , nieograniczenie rosnących wzaz z x . W przęsle (l) natomiast:

$$y = A' e^{nx} \sin(nx) + B' e^{nx} \cos(nx) + (C + C') e^{-nx} \sin(nx) + \\ + (D + D') e^{-nx} \cos(nx) + \frac{q}{a}$$

przyczem na mocy (138):

$$A' = -q \frac{e^{-nl}}{2a} \sin(nl) \quad B' = -q \frac{e^{-nl}}{2a} \cos(nl)$$

$$C' = -q \frac{e^{nl}}{2a} \sin(nl) \quad D' = -q \frac{e^{nl}}{2a} \cos(nl)$$

Dalej w przęsle (l'):

$$y = (A' + A'') e^{nx} \sin(nx) + (B' + B'') e^{nx} \cos(nx) + \\ + (C + C' + C'') e^{-nx} \sin(nx) + (D + D' + D'') e^{-nx} \cos(nx) + \frac{q'}{a}$$

przyczem (138):

$$A'' = C'' = 0 \quad B'' = D'' = \frac{q - q'}{2a}$$

Poza przęsłem (l') w obszarze belki nieobciążonej — równanie odkształconej:

$$y = (A' + A''') e^{nx} \sin(nx) + (B' + B'' + B''') e^{nx} \cos(nx)$$

nie może zawierać wyrazów z e^{-nx} rosnących nieograniczenie wraz z x , a przeto:

$$C + C'' + C''' = D + D' + D'' + D''' = 0$$

oraz (138):

$$A''' = -q' \frac{e^{nl'}}{2a} \sin(nl') \quad B''' = q' \frac{e^{nl'}}{2a} \cos(nl')$$

$$C''' = -q' \frac{e^{-nl'}}{2a} \sin(nl') \quad D''' = q' \frac{e^{-nl'}}{2a} \cos(nl')$$

Stąd bezpośrednio w obszarze belki nieobciążonej i dodatnich x -ów:

$$y = \frac{q}{2a} \{ e^{n(l-x)} \cos[n(l-x)] - e^{-nx} \cos(nx) \} - \\ - \frac{q'}{2a} \{ e^{-n(l'+x)} \cos[n(l'+x)] - e^{-nx} \cos(nx) \}$$

w przęśle (l):

$$y = \frac{q}{2a} \{ 2 - e^{-nx} \cos(nx) - e^{-n(l-x)} \cos[n(l-x)] \} - \\ - \frac{q'}{2a} \{ e^{-n(l'+x)} \cos[n(l'+x)] - e^{-nx} \cos(nx) \}$$

w przęśle (l'):

$$y = \frac{q}{2a} \{ e^{nx} \cos(nx) - e^{-n(l-x)} \cos[n(l-x)] \} + \\ + \frac{q'}{2a} \{ 2 - e^{nx} \cos(nx) - e^{-n(l'+x)} \cos[n(l'+x)] \}$$

Wreszcie w obszarze belki nieobciążonej i ujemnych x :

$$y = \frac{q}{2a} \{ e^{nx} \cos(nx) - e^{-n(l-x)} \cos[n(l-x)] \} + \\ + \frac{q'}{2a} \{ e^{n(l'+x)} \cos[n(l'+x)] - e^{nx} \cos(nx) \}$$

W szczególnym przypadku, gdy obciążenie jednostkowe stałe q pokrywa odcinek odległości $2l$, symetryczny względem osi Y , możemy rozpatrywać tylko połowę belki. Czyniąc w powyższych wzorach

$$q = q' \quad l = l'$$

otrzymamy dla obszaru belki nieobciążonej:

$$y = \frac{q}{2a} \left\{ e^{n(l-x)} \cos [n(l-x)] - e^{-n(l+x)} \cos [n(l+x)] \right\}$$

a dla przęsła (l):

$$y = \frac{q}{2a} \left\{ 2 - e^{n(l-x)} \cos [n(l-x)] - e^{-n(l+x)} \cos [n(l+x)] \right\}$$

C. Belka nieskończenie długa jednostronna. Oś belki pokrywa się z poziomą osią X — dodatnią. Pionowa oś Y przechodzi przez środek prawej ścianki czołowej belki. Obciążenie zewnętrzne stanowi:

a. Moment N , poziomy, przyłożony do punktu przecięcia się osi Y z odkształconą. Jej równanie w obszarze dodatnich x :

$$y = [C \sin (nx) + D \cos (nx)] e^{-nx}$$

nie zawiera wyrazów z e^{nx} , nieograniczenie rosnących wraz z x .

Tuż przed końcowym punktem odkształconej, na osi X leżącym, panuje moment zginający:

$$M_0 = -N$$

a nadto siła ścinająca równa zeru:

$$y_0'' = -2n^2 C = -\frac{N}{EJ} = -\frac{4n^4}{a} N \quad y_0''' = 2n^3(C + D) = 0$$

i ostatecznie:

$$y = \frac{2n^2}{a} N [\sin (nx) - \cos (nx)] e^{-nx}$$

b. Obciążenie jednostkowe stałe q pokrywa odcinek l i kończy się na osi Y . Równanie odkształconej w obszarze belki nieobciążonej:

$$y = [C \sin (nx) + D \cos (nx)] e^{-nx}$$

a w przęśle (l):

$$y = A' e^{nx} \sin(nx) + B' e^{nx} \cos(nx) + (C + C') e^{-nx} \sin(nx) + \\ + (D + D') e^{-nx} \cos(nx) + \frac{q}{a}$$

przyczem (138):

$$A' = -q \frac{e^{-nl}}{2a} \sin(nl) \quad B' = -q \frac{e^{-nl}}{2a} \cos(nl) \\ C' = -q \frac{e^{nl}}{2a} \sin(nl) \quad D' = -q \frac{e^{nl}}{2a} \cos(nl)$$

Tuż przed punktem końcowym odkształconej, na osi Y leżącym, panuje moment zginający i siła ścinająca równa zero:

$$y_0'' = 2n^2 (A' - C - C') = 0$$

$$y_0''' = 2n^3 (A' - B' + C + C' + D + D') = 0$$

zatem w obszarze belki nieobciążonej:

$$y = \frac{q}{a} e^{-n(l+x)} \sin(nl) \cos(nx) + \\ + \frac{q}{2a} (e^{n(l-x)} - e^{-n(l+x)}) \cos[n(l-x)]$$

w przęśle (l):

$$y = \frac{q}{a} [1 + e^{-n(l+x)} \sin(nl) \cos(nx)] - \\ - \frac{q}{2a} (e^{-n(l-x)} + e^{-n(l+x)}) \cos[n(l-x)]$$

c. Obciążenie trójkątne (Rys. 78) pokrywa odcinek l , ostrzem dotyka osi Y . Odciętej l przynależy najwyższe obciążenie jednostkowe p , odciętej x — obciążenie jednostkowe :

$$q = p \frac{x}{l}$$

Równanie odkształconej w obszarze belki nieobciążonej:

$$y = [C \sin(nx) + D \cos(nx)] e^{-nx}$$

a w przeszłe (l):

$$y = A'e^{nx} \sin(nx) + B'e^{nx} \cos(nx) + (C + C')e^{-nx} \sin(nx) + \\ + (D + D')e^{-nx} \cos(nx) + \frac{px}{al}$$

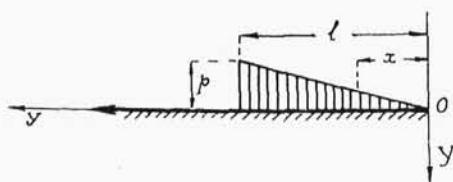
przyczem (138):

$$A' = -\frac{p}{2a} \left[\sin(nl) + \frac{\sin(nl) + \cos(nl)}{2nl} \right] e^{-nl}$$

$$B' = -\frac{p}{2a} \left[\cos(nl) - \right. \\ \left. - \frac{\sin(nl) - \cos(nl)}{2nl} \right] e^{-nl}$$

$$C' = -\frac{p}{2a} \left[\sin(nl) - \right. \\ \left. - \frac{\sin(nl) - \cos(nl)}{2nl} \right] e^{nl}$$

$$D' = -\frac{p}{2a} \left[\cos(nl) - \frac{\sin(nl) + \cos(nl)}{2nl} \right] e^{nl}$$



Rys. 78.

Tuż przed końcowym punktem odkształconej, leżącym na osi Y — panuje moment zginający i siła ścinająca, równe zero:

$$y_0'' = 2n^2 (A' - C - C') = 0$$

$$y_0''' = 2n^3 (A' - B' + C + C' + D + D') = 0$$

a przeto ostatecznie otrzymamy dla obszaru belki nieobciążonej:

$$y = \frac{p}{a} e^{-n(l+x)} \left[\sin(nl) + \frac{\sin(nl) + \cos(nl)}{2nl} \right] \cos(nx) + \\ + \frac{p}{2a} [e^{n(l-x)} - e^{-n(l+x)}] \left\{ \cos[n(l-x)] - \frac{\sin[n(l-x)]}{2nl} \right\} - \\ - \frac{p}{4anl} [e^{n(l-x)} + e^{-n(l+x)}] \cos[n(l-x)]$$

Dla przeszła (l):

$$y = \frac{p}{a} \left\{ \frac{x}{l} + e^{-n(l+x)} \left[\sin(nl) + \frac{\sin(nl) + \cos(nl)}{2nl} \right] \cos(nx) - \right.$$

$$-\frac{P}{2a} [e^{-n(l-x)} + e^{-n(l+x)}] \left\{ \cos [n(l-x)] + \right. \\ \left. + \frac{\cos [n(l-x)] - \sin [n(l-x)]}{2nl} \right\}$$

12. Przykłady liczbowe.

a. Wspornik (Rys. 79) osadzony niesprężysto. Pośrodku ścianki czołowej, w poziomej odległości 2 m od przekroju osadzonego, działa siła P , pochylona pod kątem 30° ku osi Y . Składowe P_y , P_z dają skrajne momenty w przekroju osadzonym:

$$P = 1000 \text{ kg} \quad M_{mx} = 1000 \times 0,86603 \times 200 = 173206 \text{ cm kg}$$

$$M_{my} = 1000 \times 0,5 \times 200 = 100000 \text{ cm kg}$$

Wspornik ma stały przekrój dwuteowy. Dopuszczalne naprężenie tworzywa — stali:

$$k_g = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

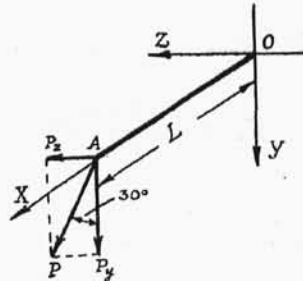
Wystarczy przeto dwuteownik Nr. 34, ustawiony środkami pionowo. Dla tego przekroju:

$$W_y = 98,4 \text{ cm}^3 \quad W_z = 923 \text{ cm}^3$$

$$J_y = 674 \text{ cm}^4 \quad J_z = 15695 \text{ cm}^4$$

a przeto najwyższe naprężenie w przekroju osadzonym:

$$N_m = \frac{100000}{98,4} + \frac{173206}{923} = 1215 \text{ kg/cm}^2$$



Rys. 79.

Wzór Clerc'a (123), wypisany dla przesła (x) daje równanie rzutów odkształconej na płaszczyznę XY i XZ :

$$0 = \frac{y}{x} - \frac{1}{6 EJ_z} [P_y (L-x)x + 2 P_y Lx]$$

$$0 = \frac{z}{x} - \frac{1}{6 EJ_y} [P_z (L-x)x + 2 P_z Lx]$$

Biorąc:

$$E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$$

otrzymamy:

$$y = \frac{P_y x^2}{6 EJ_z} (3L-x) = \frac{0,86603 \times 1000 \times x^2 (600-x)}{6 \times 2100000 \times 15695}$$

$$z = \frac{P_z x^2}{2 E J_y} (3 L - x) = \frac{0,5 \times 1000 x^2 (600 - x)}{6 \times 2100000 \times 674}$$

Końcowe ugięcie pręta ma składowe:

$$f_y = \frac{0,86603 \times 1000 \times 40000 \times 400}{6 \times 2100000 \times 15695} = 0,0701 \text{ cm}$$

$$f_z = \frac{0,5 \times 1000 \times 40000 \times 400}{6 \times 2100000 \times 674} = 0,9420 \text{ cm}$$

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = 0,945 \text{ cm}$$

b. Wał (Rys. 80) o stałym przekroju kołowym pełnym, wsparty na podporach: posuwnej i przegubowej. Znaleźć ugięcie f w końcowym punkcie A odkształconej przy obciążeniu pionową siłą P :

$$P = 11000 \text{ kg} \quad L = 160 \text{ cm} \quad l = 110 \text{ cm} \quad b = 70 \text{ cm}$$

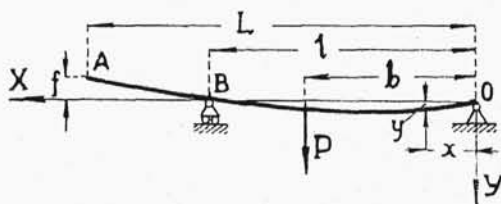
Równania statyki dają pionowe siły odporowe:

$$V_B = -\frac{11000}{110} 70 = -7000 \text{ kg} \quad V_0 = -\frac{11000}{110} 40 = -4000 \text{ kg}$$

Najwyższy moment zginający panuje tuż przed punktem przyłożenia siły P :

$$M_m = -7000 \times 40 = -280000 \text{ cm kg}$$

Tworzywo — stal zlewna. Dla niej:



Rys. 80.

$$E = 2150000 \text{ kg/cm}^2$$

$$k_g = 700 \text{ kg/cm}^2$$

a przeto:

$$W = \frac{1}{32} \pi d^3 = \frac{M}{k_g} =$$

$$= \frac{280000}{700} = 400 \text{ cm}^3$$

Stąd dla:

$$d = 16 \text{ cm} \quad J = 3217 \text{ cm}^4 \quad W = 402 \text{ cm}^3$$

i skrajne naprężenie:

$$N_m = \frac{280000}{402} = 696,5 \text{ kg/cm}^2$$

Wzór Clapeyron'a (125) daje dla przęseł: $(L-l)$, (l) :

$$6 EJ \frac{f}{L-l} = -P \frac{b}{l} (l^2 - b^2)$$

skąd:

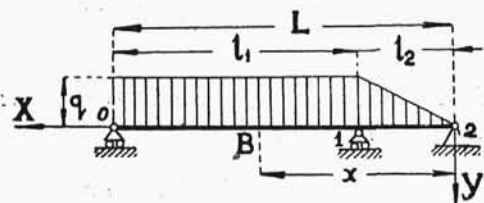
$$f = - \frac{11000 \times 70 (110^2 - 70^2) \times (160 - 110)}{6 \times 2150000 \times 3217 \times 110} = -0,0607 \text{ cm}$$

Ujemny znak wskazuje, że to ugięcie leży w obszarze rzędnych ujemnych.

e. Belka (Rys. 81) o stałym przekroju, dwuprzęsłowa, na niesprężystych podporach: prawej — przegubowej, dwóch pozostałych — posuwnych. Obciążenie jednostkowe stałe q pokrywa całe przęsło (l_1) , w drugim przęsle (l_2) maleje linjowo od q w punkcie (1) do zera w punkcie (2). Obciążenie jednostkowe q wynosi 1000 kg na metr bieżący pierwotnej belki, czyli 10 kg na centymetr bieżący. Nadto:

$$l_1 = 200 \text{ cm} \quad l_2 = 80 \text{ cm}$$

a przeto wzór Clapeyron'a (125), wobec zerowej wielkości skrajnych momentów da:



Rys. 81.

$$0 = 2(200 + 80) M_1 - \frac{10 \times 200}{4 \times 200} (2 \times 200^2 - 200^2) - 10 \left(\frac{80^2}{3} - \frac{80^2}{5} \right)$$

$$M_1 = 35729,5 \text{ cm kg}$$

Równania statyki dają:

$$V_0 = \frac{35729,5}{200} - \frac{1}{2} \times 10 \times 200 = -821,4 \text{ kg}$$

$$V_1 = - \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{80} \right) 35729,5 - 10 \times \frac{200}{2} - \frac{2}{3} \times 10 \times \frac{80}{2} = -1891,9 \text{ kg}$$

$$V_2 = \frac{35729,5}{80} - \frac{1}{3} \times 10 \times \frac{80}{2} = +313,3 \text{ kg}$$

Moment zginający dla dwóch obszarów: (l_1) , (l_2) będzie:

$$M = V_0(l_1 + l_2 - x) + \frac{1}{2} q(l_1 + l_2 - x)^2 \Big| + V_1(l_2 - x) - \frac{q}{6} l_2^3 (l_2 - x)^3$$

Minimum:

$$M_m = -\frac{V_0^2}{2q} = -33734,9 \text{ cm kg}$$

przynależy odciętej:

$$x = l_1 + l_2 + \frac{V_0}{q} = 197,86 \text{ cm}$$

Bezwzględna wielkość tego momentu jest mniejsza od M_1 , a przeto, przy wymaganym przekroju dwuteowym i dopuszczalnym naprężeniu:

$$k_g \leq 1200 \text{ kg/cm}^2$$

dla stali zlewnej:

$$W_z = \frac{35729,5}{1200} = 29,77 \text{ cm}^3$$

Temu najlepiej odpowiada dwuteownik Nr. 10, ustawiony środkiem pionowo. Dla niego:

$$W = 34,2 \text{ cm}^3 \quad J = 171 \text{ cm}^4$$

$$N_m = \frac{35729,5}{34,2} = 1045 \text{ kg/cm}^2$$

Skrajnego ugięcia f należy niewątpliwie szukać w przęśle (l_1) . Oznaczmy przez x odcięta punktu odkształconej, przynależnego tej skrajnej rzędnej. Dla tego punktu y' niewątpliwie równa się zeru, a przeto wzory Clerc'a: (123) i (124) wypisane dla przęseł: $(L - x)$ i $(x - l_2)$ dadzą:

$$0 = -\frac{f}{L-x} - \frac{1}{6EJ} \left\{ 2(L-x)[V_0(L-x) + \frac{1}{2}q(L-x)^2] - \frac{1}{4}q(L-x)^3 \right\}$$

$$0 = \frac{f}{x-l_2} + \frac{1}{6EJ} \left\{ 2(x-l_2)[V_0(L-x) + \frac{1}{2}q(L-x)^2] - \frac{1}{4}q(x-l_2)^3 \right\}$$

Z tych wzorów otrzymamy x i f .

d. Belka (Rys. 82), zawieszona na trzech prętach jednakowej pierwotnej długości h , dźwiga pośrodku lewego przęsła (l_1) — ciężar 20000 kg, — pośrodku prawego (l_2) — ciężar 10000 kg.

$$l_1 = 80 \text{ cm} \quad l_2 = 120 \text{ cm}$$

Wyznaczyć przekrój dwuteowy belki oraz średnice prętów tak, aby po odkształceniu punkty A, B, C leżały na jednym poziomie. Tworzywo belki i prętów — stal. Naprężenia dopuszczalne:

$$k_r = k_g = 1500 \text{ kg/cm}^2$$

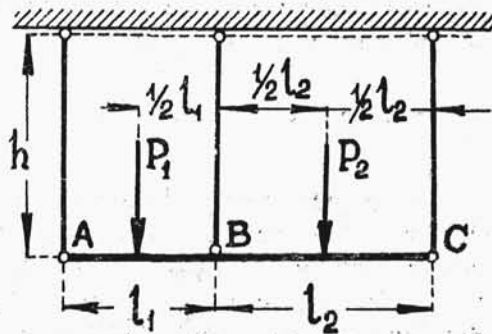
Wzór Clapeyron'a daje:
dla belki zawieszonej:

$$0 = 2(80 + 120) M_B -$$

$$-\frac{20000}{80} 40(80^2 - 40^2) -$$

$$-\frac{10000}{120} 60(120^2 - 60^2)$$

$$M_B = 255000 \text{ cm kg}$$



Rys. 82.

Naciągi drutów, lewego, pośrodkowego i prawego odpowiednio oznaczamy przez:

V_A, V_B, V_C , przyczem:

$$M_B = V_A l_1 + \frac{1}{2} P_1 l_1 = V_C l_2 + \frac{1}{2} P_2 l_2$$

Nadto:

$$V_B = -\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) M_1 - \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$$

stąd bezpośrednio:

$$V_A = -6812,5 \text{ kg} \quad V_B = -20312,5 \text{ kg} \quad V_C = -2875 \text{ kg}$$

Tuż przed środkiem odkształconej przęsła lewego panuje moment zginający:

$$-6812,5 \times 40 = -272500 \text{ cm kg}$$

prawego:

$$-2875 \times 60 = -172500 \text{ cm kg}$$

Stąd:

$$W = \frac{272500}{1500} = 181,67 \text{ cm}^3$$

Najlepiej nadaje się więc dwuteownik Nr. 19, zawieszony środkiem pionowo. Dla niego:

$$W = 186 \text{ cm}^3 \quad J = 1763 \text{ cm}^4 \quad N_m = \frac{272500}{186} = 1465 \text{ kg/cm}^2$$

Przy jednakowej długości pierwotnej h wszystkich trzech prętów — ich wydłużenia winny być jednakowe. Zatem przy jednakowym tworzywie — i naprężenia prętów winny być jednakowe i niewątpliwie równe dopuszczalnemu. Stąd dla przekrojów poprzecznych i średnic prętów:

$$\frac{1}{4} \pi d_A^2 = \frac{V_A}{k_r} = \frac{6812,5}{1500} = 4,542 \text{ cm}^2 \quad d_A = 24,0 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{4} \pi d_B^2 = \frac{V_B}{k_r} = \frac{20312,5}{1500} = 13,542 \text{ cm}^2 \quad d_B = 41,5 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{4} \pi d_C^2 = \frac{V_C}{k_r} = \frac{2875}{1500} = 1,92 \text{ cm}^2 \quad d_C = 15,5 \text{ mm}$$

e. Deska sosnowa znacznej długości leży na sprężystym podłożu, które pod naciskiem jednego kilograma na centymetr kwadratowy osiada sprężysto na:

$$\delta = 0,025 \text{ cm}$$

Oś belki pokrywa się z dodatnią osią X poziomą. Pionowa oś Y przechodzi przez środek prawej ścianki czołowej deski. Na osi Y

leży siła P — tysiąc kg. Szerokość b deski wynosi 20 cm. Znaleźć właściwą grubość deski h , biorąc dla drzewa sosnowego:

$$E = 100000 \text{ kg/cm}^2 \quad k_g = 70 \text{ kg/cm}^2$$

Równanie odkształconej:

$$y = [C \sin(nx) + D \cos(nx)] e^{-nx}$$

nie zawiera wyrazów z e^{nx} , nieograniczenie rosnących wraz z x . Tuż przed końcowym punktem odkształconej, leżącym na osi Y , panuje zerowy moment zginający i siła ścinająca, równa: $-P$. Zatem:

$$y_0'' = -2n^2 C = 0 \quad y_0''' = 2n^3 (C + D) = \frac{P}{EJ} = \frac{4n^4}{a} P$$

Stąd bezpośrednio:

$$y = \frac{2n}{a} P e^{-nx} \cos(nx) \quad y' = -\frac{2n^2}{a} P [\sin(nx) + \cos(nx)] e^{-nx}$$

$$y'' = \frac{4n^3}{a} P e^{-nx} \sin(nx) = \frac{M}{EJ} \quad n = \sqrt[4]{\frac{a}{4EJ}}$$

$$y''' = -\frac{P}{EJ} [\sin(nx) - \cos(nx)] e^{-nx} = -\frac{Q}{EJ}$$

Pochodna y''' jest niewątpliwie równa zeru przy:

$$x = \frac{\pi}{4n}$$

a przeto tej odciętej przynależy najwyższy moment zginający:

$$M_m = \frac{P e^{-\pi/4}}{n \sqrt{2}}$$

Stąd bezpośrednio:

$$M_m = \frac{P e^{-\pi/4}}{n \sqrt{2}} = W k_g = \frac{1}{6} b h^2 k_g$$

Podnosząc do potęgi czwartej, mamy:

$$\frac{P^4 e^{-\pi}}{4 n^4} = \frac{EJ}{a} P^4 e^{-\pi} = \frac{EP^4 e^{-\pi}}{12 a} b h^3 = \frac{b^4 h^3}{1296} k_g^4$$

Obierzmy, jako jednostkę długości deski, centymetr bieżący. Pod naciskiem b kilogramów na centymetr bieżący deski, jej oś osiada na t cm, zatem współczynnik sprężystości podłoża:

$$a = \frac{b}{t} \text{ kg/cm}^2$$

i ostatecznie, po podstawieniu:

$$h = \sqrt[5]{\frac{108 Et P^4}{e^\pi b^4 k_g^4}} = \sqrt[5]{\frac{108 \times 100000 \times 0,025 \times 1000^4}{e^\pi \times 20^4 \times 70^4}} = 4,97 \simeq 5 \text{ cm}$$

Dalej mamy:

$$n = \sqrt{\frac{20 \times 12}{4 \times 100000 \times 0,025 \times 20 \times 5^3}} = 0,05566$$

$$y = \frac{2 \times 0,05566 \times 1000 \times 0,025}{20} e^{-nx} \cos(nx) = 0,13915 e^{-nx} \cos(nx)$$

a przeto ugięcie na osi Y wynosi około 1,4 mm.