

wielkość największą  $p_i$  — stanowią początki obszarów ( $i$ ) ( $j$ ).  
Odciętej  $x$  odpowiada:

$$q = p_i \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad x_i \geq x \geq x_j$$

a przeto:

$$M_i = \frac{1}{2} p_i (x - x_j) \frac{(x_i - x)^2}{x_i - x_j} + \frac{1}{3} p_i \frac{(x_i - x)^3}{x_i - x_j}$$

$$U_i = -\frac{1}{6} p_i (x - x_j) \frac{(x_i - x)^3}{x_i - x_j} - \frac{1}{8} p_i \frac{(x_i - x)^4}{x_i - x_j}$$

$$V_i = \frac{1}{24} p_i (x - x_j) \frac{(x_i - x)^4}{x_i - x_j} + \frac{1}{30} p_i \frac{(x_i - x)^5}{x_i - x_j}$$

$$M_j = -\frac{1}{6} p_i \frac{(x_j - x)^3}{x_i - x_j} \quad U_j = \frac{1}{24} p_i \frac{(x_j - x)^4}{x_i - x_j} \quad V_j = -\frac{1}{120} p_i \frac{(x_j - x)^5}{x_i - x_j}$$

Stałe całkowania  $C_1, D_1$  należy wyznaczyć z warunków unieruchomienia pręta na podporach.

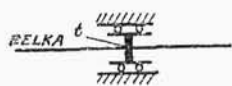
## B. Część druga.

1. **Belki.** Bezwładnościowo jednorodny pręt prosty, wsparty na podporach, zwie się belką. Podpory mają uniemożliwiać ruch, jaki mogłoby nadać belce obciążenie zewnętrzne, winny być przeto należycie dobrane i celowo użyte. Obciążenie belki wzbudza równoważące przeciwdziałania jej podpór, zwane *oporami*.

a. **Osadzenie** (Rys. 63), czyli unieruchomienie przekroju poprzecznego belki stanowi jej *podpora stała*  $s$ . Do środka tego przekroju — *punktu podparcia* na osi belki przyłożone są odpory. Obciążenie płaskie wzbudza w nim trzy odpory: *siłę podłużną*, *poprzeczną*, obie w płaszczyźnie obciążenia, i *moment* do tej płaszczyzny prostopadły. Podpora stała, nieodkształcająca się może być tylko skrajną — przekrój unieruchomiony stanowić może tylko czołową ściankę belki. Przy zupełnem unieruchomieniu przekroju pośredniego — belka rozpada się na dwie belki, o wspólnej osadzonej ścianie czołowej.

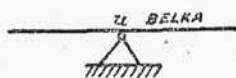


Rys. 63.



Rys. 64.

b. Osadzenie (Rys. 64), czyli unieruchomienie przekroju poprzecznego belki w tulei o posuwie osiowym, — stanowi *podporę łożyskową t*. Do środka tego przekroju — *punktu podparcia* na osi belki przyłożone są odpory. Obciążenie płaskie wzbudza w nim dwa odpory: *siłę poprzeczną*, leżącą w płaszczyźnie obciążenia i *moment* do tej płaszczyzny prostopadły.



Rys. 65.

c. Podpora przegubowa *u* o podstawie (Rys. 65) nieruchomej, płaskiej, równoległej do jednej z głównych płaszczyzn bezwładności belki, ujmuje ją przegubowo. Oś przegubu, równoległa do podstawy, przecina prostopadłe oś belki w *punkcie podparcia*. Obciążenie płaskie wzbudza w tym punkcie dwa odpory: *siłę podłużną* i *poprzeczną*, obie w płaszczyźnie obciążenia, prostopadłe do osi przegubu i do podstawy.



Rys. 66.

d. Podpora posuwna *r* (Rys. 66) o podstawie płaskiej, równoległej do jednej z głównych płaszczyzn bezwładności belki — i ruchomej na walcach w kierunku podłużnej osi belki — ujmuje ją przegubowo. Oś przegubu, równoległa do podstawy, przecina prostopadłe oś belki w *punkcie podparcia*. Obciążenie płaskie wzbudza w tym punkcie tylko jeden odpór: *siłę poprzeczną*, leżącą w płaszczyźnie obciążenia, prostopadłe do osi przegubu i do podstawy.

2. Odpory. Ogólna liczba odporów belki płasko obciążonej:

$$(o) = (r) + 2(u + t) + 3(s) \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

gdzie nawiasami oznaczono odpowiednio ilość podpór *r, u, t, s*.

Trzy warunkowe równania równowagi belki prostej, płasko obciążonej:

a. suma podłużnych sił skupionych i jednostkowych, zewnętrznych i odporowych równa zero,

b. suma poprzecznych sił skupionych i jednostkowych, zewnętrznych i odporowych równa zero,

c. suma momentów zewnętrznych i odporowych oraz momentów poprzecznych sił skupionych i jednostkowych, zewnętrznych i odporowych — względem bieguna, dowolnie obranego w płaszczyźnie obciążenia. — równa zero.

Z tych trzech równań możemy wyznaczyć tylko trzy odpory *izostatyczne*. Zatem ogólna liczba *trzech* odporów cechuje belkę *izostatyczną zewnętrźnie*. Mniejsza od trzech: *hypostatyczną zewnętrźnie*, niedostatecznie podpartą. Większa od trzech — *hyperstatyczną zewnętrźnie* — nadmiernie podpartą.

Podpory, dostosowane do obciążenia przestrzennego są nader różnorodne; równowaga belki wymaga spełnienia *sześciu* równań warunkowych. Zatem ogólna liczba sześciu odporów — cechuje belkę *izostatyczną zewnętrźnie*, mniejsza — *hypostatyczną* — większa — *hyperstatyczną*.

**3. Odpory.** Do punktu podparcia o odciętej  $x_l$  mogą być przyłożone odpory: *siła podłużna*  $U_l$ , *siła poprzeczna*  $V_l$  i *moment*  $W_l$ . Posunięcia (III. A. 3) tych sił odporowych będą odpowiednio:  $u_l$  — posuw podłużny punktu podparcia,  $v_l$  — posuw poprzeczny i  $w_l$  — obrót długostki osi pręta, wyprowadzonej z punktu podparcia.

Zerowe posunięcia cechują *podporę niesprężystą*. *Podpora sprężysta odkształca* się sprężysto pod naciskiem belki. Jej odpory:

$$U_l = -b_l u_l \quad V_l = -c_l v_l \quad W_l = -d_l w_l \quad . \quad (116)$$

zależą od sprężystych posunięć punktu podparcia, niewątpliwie różnozwrotnych z odporami. Spółczynniki sprężystości  $b_l, c_l, d_l$  są stałe w obszarze sprężystości i proporcjonalności.

**4. Pionowe obciążenie płaskie.** Nadal już rozpatrywać będziemy tylko jeden rzut odkształconej na pionową płaszczyznę główną  $XY$  bezwładności belki (IX. A. 10) *poziomej*. W tej płaszczyźnie leżą siły skupione pionowe, pionowe warstwy ciągłych obciążeń — oraz — pary sił poziomych momentów pionowego obciążenia płaskiego (IX. A. 3). W układzie osi stałych (IX. A. 1) obieramy kierunek ( $w$ ) wzrostu wypadkowych tego obciążenia — *sprzeczny* z kierunkiem podłużnej osi  $X$  belki nieodkształconej, zatem momenty lewoskrętne są dodatnie.

Idąc w kierunku ( $w$ ) wyodrębniamy na odkształconej trzy dowolne punkty:  $n-1, n, n+1$  o spółrzędnych:

$$x_{n-1}, y_{n-1}, y'_{n-1} \quad x_n, y_n, y'_n \quad x_{n+1}, y_{n+1}, y'_{n+1}$$

Odcinek  $(n-1, n)$  stanowi *przęsło* ( $n$ ), odcinek zaś  $(n, n+1)$  — *przęsło* ( $n+1$ ). Poziome długości tych przęseł będą odpowiednio równe:

$$l_n = x_{n-1} - x_n \quad l_{n+1} = x_n - x_{n+1}$$

Nadto oznaczamy przez:

$x$  — odciętą bieżącego punktu odkształconej.

$z$  — poziomą odległość bieżącego punktu odkształconej w przeszłe  
( $n$ ) — od punktu  $n-1$ .

$u$  — poziomą odległość bieżącego punktu odkształconej w przeszłe  
( $n+1$ ) od punktu  $n+1$ .

$M$  — moment zginający *tuż przed* punktem bieżącym odkształconej.

$M_{n-1}, M_n, M_{n+1}$  — odpowiednie momenty zginające *tuż przed* punktami:  $n-1, n, n+1$ .

5. Wzór Bresse'a. Pionowe obciążenie płaskie belki nie wzbudza sił odporowych pionowych, przeto, po sprowadzeniu obciążenia zewnętrznego i odporowego do obranego punktu  $n-1$ , otrzymamy *tuż przed* tym punktem: poziomy moment zginający  $M_{n-1}$  i pionową siłę ścinającą  $Q_{n-1}$ . Zatem dla punktu bieżącego przeszła  $l_n$ :

$$M = M_{n-1} + Q_{n-1} z + (M)_z$$

i końcowego punktu  $n$ :

$$M_n = M_{n-1} + Q_{n-1} l_n + (M)_n$$

gdzie oznaczyliśmy odpowiednio przez:

$(M)_z$  — moment zginający *tuż przed* punktem bieżącym przeszła ( $n$ ) wypadkowy obciążenia zewnętrznego i odporowego, działającego w odcinku od punktu  $n-1$  *włącznie do punktu bieżącego wyłącznie*.

$(M)_n$  — moment zginający *tuż przed* punktem  $n$  — wypadkowy obciążenia zewnętrznego i odporowego, działającego w odcinku od punktu  $n-1$  *włącznie do punktu  $n$  wyłącznie*.

Stąd bezpośrednio, rugując  $Q_{n-1}$  otrzymamy: wzór Bresse'a:

$$M = M_{n-1} + (M_n - M_{n-1}) \frac{z}{l_n} + m_n \quad \dots \quad (117)$$

w którym:

$$m_n = (M)_z - \frac{z}{l_n} (M)_n$$

oznacza moment zginający, jakiby, przy zachowaniu kierunku ( $w$ ) — panował *tuż przed* punktem bieżącym o odciętej  $z$  w przeszłe ( $n$ ), gdyby to przeszło wyciąć z belki i, nie zmieniając w niczem jego obciążenia — ustawić końcami na podporach: przegubowej i posuwnej.

Ten wzór, wypisany dla przęsła  $(n+1)$ , daje:

$$M = M_{n+1} + (M_n - M_{n+1}) \frac{u}{l_{n+1}} + m_{n+1} \quad . \quad . \quad (118)$$

gdzie przez  $m_{n+1}$  oznaczono moment zginający, jakiby, przy zachowaniu kierunku ( $w$ ) — panował *tuż przed* punktem o odciętej  $u$  w przęśle  $(n+1)$ , gdyby to przęsło wyciąć z belki i, nie zmieniając w niczem jego obciążenia, ustawić końcami na podporach: przegubowej i posuwnej.

**6. Wzory Clerc'a i Clapeyron'a.** Po podstawieniu  $M$  z powyższych wzorów i uwzględnieniu zależności:

$$x_{n-1} = z + x \quad x = u + x_{n+1}$$

dla przęseł  $(n)$ ,  $(n+1)$  otrzymamy z trzeciego wzoru (112):

$$y_n' = \frac{y_{n-1} - y_n}{l_n} - \frac{M_{n-1}}{l_n} \int_0^{l_n} \left(1 - \frac{z}{l_n}\right) \frac{z dz}{EJ} - \frac{M_n}{l_n^2} \int_0^{l_n} \frac{z^2 dz}{EJ} - \\ - \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{m_n z dz}{EJ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19$$

$$y_n' = \frac{y_n - y_{n+1}}{l_{n+1}} + \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \left(1 - \frac{u}{l_{n+1}}\right) \frac{u du}{EJ} + \frac{M_n}{l_{n+1}^2} \int_0^{l_{n+1}} \frac{u^2 du}{EJ} + \\ + \frac{1}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \frac{m_{n+1} u du}{EJ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

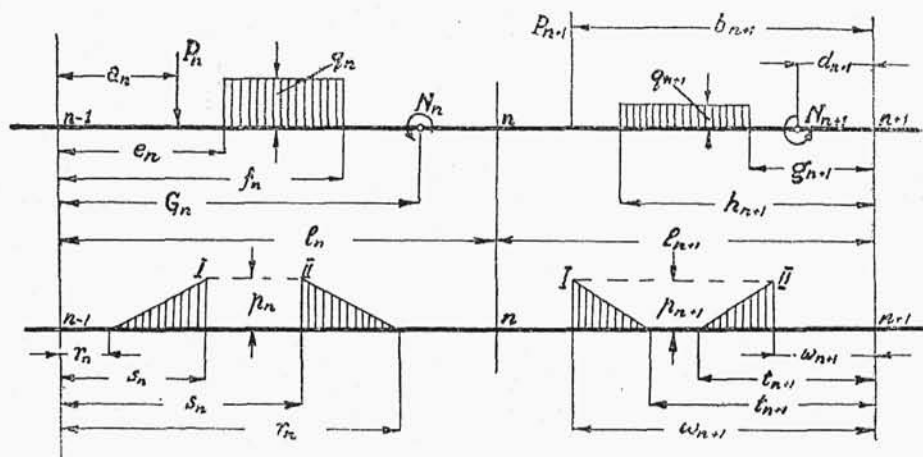
Są to wzory Clerc'a; wypływają z nich bezpośrednio wzory Clapeyron'a:

$$y_{n-1}' - y_n' = M_{n-1} \int_0^{l_n} \left(1 - \frac{z}{l_n}\right) \frac{dz}{EJ} + \frac{M_n}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{z dz}{EJ} + \int_0^{l_n} \frac{m_n dz}{EJ} \quad (121)$$

$$\begin{aligned}
\frac{y_{n-1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} &= \frac{M_{n-1}}{l_n} \int_0^{l_n} \left(1 - \frac{z}{l_n}\right) \frac{z dz}{EJ} + \\
&+ M_n \left[ \frac{1}{l_n^3} \int_0^{l_n} \frac{z^2 dz}{EJ} + \frac{1}{l_{n+1}^3} \int_0^{l_{n+1}} \frac{u^2 du}{EJ} \right] + \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \left(1 - \frac{u}{l_{n+1}}\right) \frac{u du}{EJ} + \\
&+ \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{m_n z dz}{EJ} + \frac{1}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \frac{m_{n+1} u du}{EJ} \dots \dots \dots (122)
\end{aligned}$$

Całki tych wzorów wyznaczać można wykreślnie. Ta droga najsprawniej daje wyniki przy zmiennym przekroju belki.

**7. Wzory uproszczone.** Moment bezwładności  $J_n$  przekroju jest stały dla całego przęsła ( $n$ ), a moment  $J_{n+1}$  — stały dla całego przęsła ( $n+1$ ). Przy obciążeniu pionowym płaskim (Rys. 67) mamy:



Rys. 67.

$$\begin{aligned}
y_n' &= \frac{y_{n-1} - y_n}{l_n} - \frac{1}{6 EJ_n} \left\{ l_n M_{n-1} + 2 l_n M_n - \right. \\
&- \sum \frac{P_n a_n}{l_n} (l_n^2 - a_n^2) - \sum \frac{N_n}{l_n} (3 c_n^2 - l_n^2) - \\
&- \sum \frac{q_n}{4 l_n} (f_n^2 - e_n^2) (2 l_n^2 - f_n^2 - e_n^2) - \\
&- \left. \sum \frac{P_n (s_n - r_n)}{2 l_n} \left[ (2 s_n + r_n) \left( \frac{l_n^2}{3} - \frac{s_n^2}{5} \right) - \frac{r_n}{10} (r_n + s_n)^2 \right] \right\} \quad (123)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_n' = & \frac{y_n - y_{n+1}}{l_{n+1}} + \frac{1}{6 E J_{n+1}} \left\{ 2 l_{n+1} M_n + l_{n+1} M_{n+1} - \right. \\
 - & \sum \frac{P_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} (l_{n+1}^2 - b_{n+1}^2) - \sum \frac{N_{n+1}}{l_{n+1}} (l_{n+1}^2 - 3 \partial_{n+1}^2) - \\
 - & \sum \frac{q_{n+1}}{4 l_{n+1}} (h_{n+1}^2 - g_{n+1}^2) (2 l_{n+1}^2 - h_{n+1}^2 - g_{n+1}^2) - \\
 - & \sum \frac{p_{n+1} (w_{n+1} - t_{n+1})}{2 l_{n+1}} \left[ (2 w_{n+1} + t_{n+1}) \left( \frac{l_{n+1}^2}{3} - \frac{w_{n+1}^2}{5} \right) - \right. \\
 - & \left. \left. \frac{t_{n+1}}{10} (w_{n+1} + t_{n+1})^2 \right] \right\} \dots \dots \dots (124)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6 E \left( \frac{y_{n-1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} \right) = & \frac{l_n}{J_n} M_{n-1} + 2 \left( \frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) M_n + \\
 + & \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} M_{n+1} - \sum \frac{P_n a_n}{l_n J_n} (l_n^2 - a_n^2) - \sum \frac{P_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1} J_{n+1}} (l_{n+1}^2 - \\
 - & b_{n+1}^2) - \sum \frac{N_n}{l_n J_n} (3 c_n^2 - l_n^2) - \sum \frac{N_{n+1}}{l_{n+1} J_{n+1}} (l_{n+1}^2 - 3 \partial_{n+1}^2) - \\
 - & \sum \frac{q_n}{4 l_n J_n} (f_n^2 - e_n^2) (2 l_n^2 - f_n^2 - e_n^2) - \\
 - & \sum \frac{q_{n+1}}{4 l_{n+1} J_{n+1}} (h_{n+1}^2 - g_{n+1}^2) (2 l_{n+1}^2 - h_{n+1}^2 - g_{n+1}^2) - \\
 - & \sum \frac{p_n (s_n - r_n)}{2 l_n J_n} \left[ (2 s_n + r_n) \left( \frac{l_n^2}{3} - \frac{s_n^2}{5} \right) - \frac{r_n}{10} (r_n + s_n)^2 \right] - \\
 - & \sum \frac{p_{n+1} (w_{n+1} - t_{n+1})}{2 l_{n+1} J_{n+1}} \left[ (2 w_{n+1} + t_{n+1}) \left( \frac{l_{n+1}^2}{3} - \frac{w_{n+1}^2}{5} \right) - \right. \\
 - & \left. \frac{t_{n+1}}{10} (w_{n+1} + t_{n+1})^2 \right] \dots \dots \dots (125)
 \end{aligned}$$

Wzory powyższe dostosowane są do obciążeń trójkątnych, zwróconych ostrzami ku punktom  $n-1$ ,  $n+1$ . Gdy obciążenia trójkątne zwrócone są ostrzami ku punktowi  $n$  — odpowiednie wyrazy należy brać ze znakiem odwrotnym. Moment zewnętrzny, lub odporowy, przyłożony do punktu  $n$  zaliczać trzeba do przęsła  $(n+1)$ , następnego — w kierunku  $(w)$  wzrostu momentów zginających.

**8. Belka pozioma.** Poziomą, prostą oś  $X$  belki nieodkształconej wyprowadzono ze środka jej prawej ścianki czołowej wlewo. Kierunek  $(w)$  obrano wprawo, sprzecznie z kierunkiem osi  $X$ .

Punkty podparcia oznaczono kolejnymi numerami  $n$ , od zerowego — skrajnego lewego, do skrajnego prawego —  $w$ . Wszystkim podporom, prócz jednej, nadano posuw poziomy, swobodny, po osi  $X$  — ze względu na cieplikową rozszerzalność belki. Wszystkie podpory są przeto łożyskowe, lub posuwne, prócz jednej: stałej lub przegubowej — koniecznej do unieruchomienia belki.

Odcinek odkształconej, zawarty pomiędzy dwoma kolejnymi punktami podparcia:  $n-1, n$  belki, stanowi jej przęsło ( $n$ ). Belka ( $w$ )—przęsłowa ma  $w+1$  punktów podparcia:  $0, 1, 2, 3 \dots w$ . Może wystawać poza podpory skrajne. Jej wystające odcinki będziemy nazywali odpowiednio: *wspornikiem lewym* i *prawym*.

Przy obciążeniu pionowym płaskim niema osiowych sił zewnętrznych i odporowych. Zatem podłużne wymiary belki, pierwotnie poziome, można uważać za niezmiennie, przy wygięciach płaskich nieznacznych, praktycznie jedynie dopuszczalnych, a stałe lub przegubowe odpory — utożsamiać odpowiednio z łożyskowemi lub posuwnemi.

Przez  $M_n$  i  $Q_n$  oznaczamy moment zginający i siłę ścinającą tuż przed punktem podparcia  $n$ . Do tego punktu mogą być przyłożone odpory: siła pionowa  $V_n$  i poziomy moment  $W_n$ . Tuż za punktem podparcia — moment zginający, będzie więc:  $M_n + W_n$ , a siła ścinająca:  $Q_n + V_n$ .

**9. Równania statyki. Przedewszystkiem:**

$$M_o = M_l \quad . \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad . \quad (126)$$

gdzie  $M_l$  oznacza moment zginający tuż przed zerowym punktem podparcia belki — wypadkowy pionowego płaskiego obciążenia, działającego na lewy wspornik aż do owego punktu — *wyłącznie*.

Dalej dla przęsła pierwszego:

$$M_1 = M_0 + W_0 + (V_0 + Q_0) l_1 + (M)_1$$

gdzie oznaczono przez  $(M)_1$  — moment zginający tuż przed pierwszym punktem podparcia, — wypadkowy pionowy obciążenia płaskiego, działającego na przęsło *pierwsze*, pomiędzy zerowym i pierwszym punktami podparcia — *wyłącznie*.

Stąd bezpośrednio:

$$V_0 = -\frac{M_0}{l_1} + \frac{M_1}{l_1} - \frac{W_0}{l_1} + v_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

gdzie:

$$v_0 = -Q_0 - \frac{1}{l_1}(M)_1$$



oznacza sumę odporów pionowych, jakieby panowały w zerowych punktach lewego wspornika i przęsła pierwszego, gdyby te odcinki powycinać z belki, i nie zmieniając w niczem ich obciążeń zewnętrznych — wspornik osadzić w zerowym punkcie na podporze stałej, a przęsło — ustawić końcami na podporach: przegubowej i posuwnej. Odpory  $V_0$  i  $W_0$  należy przytem pominąć.

Dalej, dla przęseł  $(n), (n+1)$ :

$$M_n = M_{n-1} + W_{n-1} + (Q_{n-1} + V_{n-1})l_n + (M)_n$$

$$M_{n+1} = M_n + W_n + [Q_n + V_n + (P)_n]l_{n+1} + (M)_{n+1}$$

gdzie oznaczono odpowiednio przez:

$(P)_n$  — sumę pionowych sił skupionych i jednostkowych pionowego obciążenia płaskiego, działającego na przęsło  $(n)$  pomiędzy punktami podparcia:  $n-1, n$  — wyłącznie.

$(M)_n$  — moment zginający tuż przed punktem podparcia  $n$ , — wypadkowy pionowego obciążenia płaskiego, działającego na przęsło  $(n)$  — pomiędzy punktami podparcia:  $n-1, n$  — wyłącznie.

$(M)_{n+1}$  — moment zginający tuż przed punktem  $n+1$ , wypadkowy pionowego obciążenia płaskiego, działającego na przęsło  $(n+1)$ , pomiędzy punktami podparcia:  $n, n+1$  — wyłącznie.

Stąd bezpośrednio:

$$V_n = \frac{M_{n-1}}{l_n} - \left( \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) M_n + \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}} + \frac{W_{n-1}}{l_n} - \frac{W_n}{l_{n+1}} + v_n$$

gdzie:

(128)

$$v_n = - (P)_n + \frac{1}{l_n} (M)_n - \frac{1}{l_{n+1}} (M)_{n+1}$$

oznacza sumę odporów pionowych, jakieby panowały w punktach  $n$  przęseł  $(n), (n+1)$ , gdyby te przęsła powycinać z belki, i nie zmieniając w niczem ich obciążeń — poustawiać końcami na podporach: przegubowej i posuwnej. Odpory  $V_{n-1}, V_n, V_{n+1}, W_{n-1}, W_n, W_{n+1}$  należy przy tem pominąć.

Dla ostatniego przęsła:

$$M_w = M_{w-1} + W_{w-1} + (Q_{w-1} + V_{w-1})l_w + (M)_w$$

gdzie oznaczono przez:

$(M)_w$  — moment zginający tuż przed punktem podparcia  $w$ , —  
wypadkowy pionowego obciążenia płaskiego, działają-  
cego na przęsło  $(w)$  — pomiędzy punktami podpar-  
cia:  $w-1, w$  — *wyłącznie*.

Nadto moment bieżący w końcowym, prawym punkcie odkształ-  
conej:

$$M_w + W_w + [Q_{w-1} + V_{w-1} + (P)_w + V_w] l + (M) = 0$$

gdzie oznaczono przez  $l$  — długość prawego wspornika belki,  
przez:  $(P)_w$  — sumę pionowych sił skupionych i jednostkowych,  
pionowego obciążenia płaskiego, działającego na przęsło  $(w)$   
pomiędzy punktami podparcia:  $w-1, w$  — *wyłącznie*.

$(M)$  — moment zginający, *tuż przed* końcowym prawym  
punktem belki — wypadkowy obciążenia pionowego  
płaskiego, działającego na prawy wspornik od począt-  
kowego punktu  $w$  — *wyłącznie*.

Stąd bezpośrednio:

$$V_w = \frac{M_{w-1}}{l_w} - \frac{M_w}{l_w} + \frac{W_{w-1}}{l_w} + v_w \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

gdzie:

$$v_w = -(P)_w + \frac{1}{l_w} (M)_w - \frac{(M) + M_p}{l}$$

oznacza sumę odporów pionowych, jakieby panowały w punktach  
 $w$  przęsła  $(w)$  i prawego wspornika, gdyby te odcinki powyci-  
nać z belki, i nie zmieniając ich obciążeń — wspornik — osa-  
dzić w punkcie  $w$  na podporze stałej, a przęsło  $(w)$  końcami  
ustawić na podporach: przegubowej i posuwnej. Odpory:  $V_{w-1}$ ,  
 $V_w$ ,  $W_{w-1}$ ,  $W_w$  należy przy tem pominąć.

Łatwo jest dowieść słuszności ostatniego wzoru, rugując  
 $Q_{w-1}$ ,  $V_{w-1}$  z poprzednich, przyczem równanie statyki—momen-  
tów w punkcie  $w$  daje:

$$M_w + W_w - M_p = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

gdzie  $M_p$  oznacza moment względem punktu podparcia  $w$ , jako  
bieguna, — wypadkowy pionowego płaskiego obciążenia, dzia-  
łającego na prawy wspornik, począwszy od punktu  $w$  — *wy-  
łącznie*.

10. Wzory ostateczne. Dla obciążenia pionowego płaskiego (Rys. 67) mamy:

$$M_0 = \Sigma P_0 b_0 + \Sigma N_0 + \Sigma q_0 (f_0 - e_0) \left( l_0 - \frac{1}{2} f_0 - \frac{1}{2} e_0 \right) + \\ + \Sigma \frac{1}{6} p_0 (s_0 - r_0) (3 l_0 - 2 s_0 - r_0)$$

$$V_0 = -\frac{1}{l_1} (M_0 - M_1 + W_0) - \Sigma P_0 - \Sigma \frac{P_1 b_1}{l_1} - \\ - \Sigma \frac{N_1}{l_1} - \Sigma q_0 (f_0 - e_0) - \Sigma \frac{q_1}{2 l_1} (h_1^2 - g_1^2) - \\ - \Sigma \frac{1}{2} p_0 (s_0 - r_0) - \Sigma \frac{p_1}{6 l_1} (w_1 - t_1) (t_1 + 2 w_1)$$

$$V_n = \frac{M_{n-1}}{l_n} - \left( \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) M_n + \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}} + \frac{W_{n-1}}{l_n} - \\ - \frac{W_n}{l_{n+1}} - \Sigma \frac{P_n a_n}{l_n} - \Sigma \frac{P_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} + \Sigma \frac{N_n}{l_n} - \\ - \Sigma \frac{N_{n+1}}{l_{n+1}} - \Sigma \frac{q_n}{2 l_n} (f_n^2 - e_n^2) - \Sigma \frac{q_{n+1}}{2 l_{n+1}} (h_{n+1}^2 - g_{n+1}^2) - \\ - \Sigma \frac{p_n}{6 l_n} (s_n - r_n) (2 s_n + r_n) - \Sigma \frac{p_{n+1}}{6 l_{n+1}} (w_{n+1} - t_{n+1}) \cdot \\ \cdot (2 w_{n+1} + t_{n+1}) \quad . \quad (131)$$

$$V_w = \frac{1}{l_w} (M_{w-1} - M_w + N_{w-1}) - \Sigma \frac{P_w a_w}{l_w} - \Sigma P + \\ + \Sigma \frac{N_w}{l_w} - \Sigma \frac{q_w}{2 l_w} (f_w^2 - e_w^2) - \Sigma q (h - g) - \\ - \Sigma \frac{p_w}{6 l_w} (s_w - r_w) (2 s_w + r_w) - \Sigma \frac{1}{2} p (w - t)$$

$$M_w + W_w = \Sigma P_a - \Sigma N + \Sigma \frac{1}{2} q (f^2 - e^2) + \\ + \Sigma \frac{1}{6} p (s - r) (2 s + r)$$

Przynależność lewemu wspornikowi zaznaczono tu zerowemi dolnemi wskaźnikami. Prawemu wspornikowi — ich pominięciem. Wzory powyższe dotyczą obciążeń trójkątnych (I), ostrzami zwróconych ku punktom  $n-1, n+1$ . Wyrazy, zawierające  $p_n$  i  $p_{n+1}$  należy brać ze znakiem odwrotnym, gdy odpowiednie obciążenia trójkątne (II), zwrócone są ostrzami ku punktowi  $n$ .

**11. Belki na podporach.** Pierwotnie prosta, pozioma oś  $X$  belki staje się odkształconą, leżącą w płaszczyźnie głównej  $XY$  bezwładności tej belki — pod obciążeniem pionowym płaskim, tkwiącem w płaszczyźnie  $XY$ .

Odcięte  $x_n$  punktów podparcia:

$$n=0, 1, 2, \dots, w$$

odkształconej mogą uchodzić za niezmiennie przy ugięciach belki nieznacznych, praktycznie jedynie dopuszczalnych.

Rzędne  $y_n$  tych samych punktów są również niezmiennie lecz tylko dla *podpór niesprężystych* i równe odpowiednim rzędnym  $(y_n)_0$  — pierwotnym. Dla *podpór sprężystych*:

$$y_n = (y_n)_0 - \frac{V_n}{c_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

Nadto w punkcie podparcia na *podporze niesprężystej łożyskowej* lub *stałej* — pochylenie  $y'_n$  stycznej odkształconej jest niezmiennie przy odkształceniu i równe odchyleniu pierwotnemu  $(y'_n)_0$ , ponieważ jego przyrost:

$$\frac{t}{G F_n} Q_n \quad \frac{t}{G F_n} (Q_n + V_n)$$

zależny od siły ścinającej (VI. B. 7) tuż przed, lub tuż za środkiem  $n$  przekroju podpartego  $F_n$  można w ogólnym przypadku pominąć, jako znikomy.

Dla *sprężystych podpór łożyskowych, lub stałych*:

$$y'_n = (y'_n)_0 - \frac{W_n}{\partial_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

**12. Wyznaczanie odkształconej.** W najogólniejszym przypadku belki wspartej na podporach: sprężystych, niesprężystych lub sprężystych co do jednego z odporów, niesprężystych co do drugiego — wszystkie  $y_n, y'_n$  wzorów Clerc'a — podstawieniem z (132), (133) wyrazimy przez:  $(y_n)_0, (y'_n)_0, V_n, W_n$ .

Zatem, po podstawieniu wszystkich  $V_n$  ze wzorów statyki — będziemy mieli  $(2w+2)$  równań, wiążących  $(w+1)$  momentów  $M_n$  i tyleż  $W_n$ . Ostatecznie — po wyrugowaniu  $(w+1)$  momentów  $W_n$  lub  $(y_n')_0$  otrzymamy  $(w+1)$  równań, z których wyznaczymy wszystkie  $M_n$  a następnie kolejno wszystkie pozostałe:  $W_n, V_n, y_n, y_n'$ . Ta droga, zresztą zawsze dość uciążliwa, daje wyniki słuszne w przypadku wszystkich podpór obustronnego działania.

Podpory jednostronnego działania dają odpory tylko jednego znaku, to też po otrzymaniu  $V_n, W_n$  i sprawdzeniu właściwości ich znaków, wszystkie podpory jednostronnego działania przynależne odporom niewłaściwego znaku — należy pominąć, i — zacząć znów od początku, lecz już — bez tych podpór.

Wreszcie, chcąc znaleźć rzędne:  $y, y'$  odkształconej, przynależne odciętej  $x$ , wyodrębniamy przęsło  $(n)$  belki, w którym leży koniec tej odciętej. Wzory Clerc'a lub Clapeyron'a, wypisane dla przęseł  $(x_{n-1}, x)$   $(x, x_n)$  dadzą wprost szukane rzędne  $y, y'$  odkształconej. (L. Karasiński. Przegląd Techniczny. R. 1923 str. 380, R. 1927 str. 212—214, 329—331, 626—630).

**13. Wzór Lévy.** Wzór Clapeyron'a (122) zawiera trzy momenty zginające:  $M_{n-1}, M_n, M_{n+1}$ , panujące tuż przed punktami:  $n-1, n, n+1$ , dowolnie obranymi na odkształconej w kierunku  $(w)$  — wzrostu wypadkowych pionowego obciążenia płaskiego.

Wyodrębnijmy w przęśle  $(n)$  punkt odkształconej — *wytyczny* w poziomej odległości  $w'$  od punktu  $n$ , a w przęśle  $(n+1)$  drugi punkt wytyczny na odkształconej — w poziomej odległości  $w''$  od tegoż punktu  $n$ . Tuż przed punktami *wytycznymi* panują momenty zginające: (117), (118):

$$M' = M_{n-1} + (M_n - M_{n-1}) \frac{l_n - w'}{l_n} + m'$$

$$M'' = M_{n+1} + (M_n - M_{n+1}) \frac{l_{n+1} - w''}{l_{n+1}} + m''$$

a przeto:

$$M_{n-1} = \frac{M' - m'}{w'} l_n - M_n \frac{l_n - w'}{w'}$$

$$M_{n+1} = \frac{M'' - m''}{w''} l_{n+1} - M_n \frac{l_{n+1} - w''}{w''}$$

Stąd, po podstawieniu we wzór (122) otrzymamy wzór L é v y:

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} &= \frac{M' - m'}{w'} \int_0^{l_n} \left(1 - \frac{z}{l_n}\right) \frac{z dz}{E J_n} + \\ &+ \frac{M'' - m''}{w''} \int_0^{l_{n+1}} \left(1 - \frac{u}{l_{n+1}}\right) \frac{u du}{E J_{n+1}} + \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{m_n z dz}{E J_n} + \\ &+ \frac{1}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \frac{m_{n+1} u du}{E J_{n+1}} \dots \dots \dots (134) \end{aligned}$$

o ile dobierzemy  $w'$  i  $w''$  tak, aby współczynnik przy  $M_n$  był równy zeru. Inaczej mówiąc  $w'$  i  $w''$  winny spełniać równanie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w'} \int_0^{l_n} \left(1 - \frac{z}{l_n}\right) \frac{z dz}{E J_n} + \frac{1}{w''} \int_0^{l_{n+1}} \left(1 - \frac{u}{l_{n+1}}\right) \frac{u du}{E J_{n+1}} &= \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{z dz}{E J_n} + \\ &+ \frac{1}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \frac{u du}{E J_{n+1}} \end{aligned}$$

Gdy moment bezwładności  $J_n$  jest stały dla całego przęsła ( $n$ ) a moment  $J_{n+1}$  — stały dla całego pręta ( $n+1$ ), równanie (125) da:

$$\begin{aligned} 6 E \left( \frac{y_{n-1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} \right) &= \frac{l_n^2 M' - m'}{J_n w'} + \frac{l_{n+1}^2 M'' - m''}{J_{n+1} w''} - \\ &- \sum \frac{P_n a_n}{l_n J_n} (l_n^2 - a_n^2) - \sum \frac{P_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1} J_{n+1}} (l_{n+1}^2 - b_{n+1}^2) - \\ &- \sum \frac{N_n}{l_n J_n} (3 c_n^2 - l_n^2) - \sum \frac{N_{n+1}}{l_{n+1} J_{n+1}} (l_{n+1}^2 - 3 d_{n+1}^2) - \\ &- \sum \frac{q_n}{4 l_n J_n} (f_n^2 - e_n^2) (2 l_n^2 - f_n^2 - e_n^2) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum \frac{q_{n+1}}{4 l_{n+1} J_{n+1}} (h_{n+1}^2 - g_{n+1}^2) (2 l_{n+1}^2 - h_{n+1}^2 - g_{n+1}^2) - \\
 & - \sum \frac{p_n (s_n - r_n)}{2 l_n J_n} \left[ (2 s_n + r_n) \left( \frac{1}{3} l_n^2 - \frac{1}{5} s_n^2 \right) - \frac{1}{10} r_n (r_n + s_n)^3 \right] - \\
 & - \sum \frac{p_{n+1} (w_{n+1} - t_{n+1})}{2 l_{n+1} J_{n+1}} \left[ (2 w_{n+1} + t_{n+1}) \left( \frac{1}{3} l_{n+1}^2 - \frac{1}{5} w_{n+1}^2 \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{10} t_{n+1} (w_{n+1} + t_{n+1})^2 \right] \quad \dots \dots \dots (135)
 \end{aligned}$$

z równaniem dodatkowym:

$$\frac{1}{w'} \frac{l_n^2}{J_n} + \frac{1}{w''} \frac{l_{n+1}^2}{J_{n+1}} = 3 \left( \frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right)$$

Te wzory niekiedy ułatwiają obliczenia.

**14. Wpływ sił ścinających.** W obszarze jednolitej zmienności momentu zginającego  $M$ , jego pierwszej i drugiej pochodnych względem  $x$ , równanie (111):

$$y' = \frac{M}{EJ} \pm \frac{t}{GF} \frac{d^2 M}{dx^2}$$

całkowane dwukrotnie, daje:

$$\begin{aligned}
 y' &= \int \frac{M}{EJ} dx \pm \int \frac{t}{GF} \frac{d^2 M}{dx^2} dx + A \\
 y &= x \int \frac{M}{EJ} dx - \int \frac{Mx}{EJ} dx \pm x \int \frac{t}{GF} \frac{d^2 M}{dx^2} dx \mp \\
 &\mp \int \frac{tx}{GF} \frac{d^2 M}{dx^2} dx + Ax + B
 \end{aligned}$$

Gdziekolwiek na odkształconej obieramy punkt *wytoczny*. Przynależne mu:

$$x_0, y_0, y_0'$$

spełnią powyższe równania. Odejmując dwa drugie, wypisane dla  $x$  i  $x_0$ , pozbędziemy się stałej  $B$ . Stałą  $A$  wyrugujemy przez podstawienie z dwóch pierwszych równań, wypisanych dla  $x_0$  i  $x$ . Tą drogą otrzymamy równania całkowe:

$$\begin{aligned}
 y' - y_0' &= \int_{x_0}^x \frac{M}{EJ} dx \pm \int_{x_0}^x \frac{t}{GF} \frac{d^2 M}{dx^2} dx \\
 y - y_0 &= y_0'(x - x_0) + x \int_{x_0}^x \frac{M}{EJ} dx - \int_{x_0}^x \frac{Mx}{EJ} dx \pm x \int_{x_0}^x \frac{t}{GF} \frac{d^2 M}{dx^2} dx \mp \\
 &\quad \mp \int_{x_0}^x \frac{tx}{GF} \frac{d^2 M}{dx^2} dx \quad \dots \dots \dots (136) \\
 y' &= \frac{y - y_0}{x - x_0} + \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{M(x - x_0)}{EJ} dx + \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{t(x - x_0)}{GF} \frac{d^2 M}{dx^2} dx
 \end{aligned}$$

Górne znaki w tych wzorach należy brać, gdy kierunek ( $w$ ) wzrostu wypadkowych pionowego płaskiego obciążenia jest jednozwrótny z osią  $X$  pręta. Dolne znaki — gdy — różnozwrótny.

Możnaby tą drogą uzupełnić wzory Clerc'a i Clapeyron'a wyrazami, zależnemi od sił ścinających. Nie podaję wzorów w ten sposób otrzymanych, ponieważ różnice, wynikające z użycia tych, lub owych wzorów — praktycznie — są bez znaczenia.

**15. Belka na sprężystym podłożu.** Na płaskim poziomym podłożu leży nieważka belka prosta, nieobciążona. Jej oś poziomą oznaczmy przez  $X$  i nadamy jej zwrot w lewo. Prostopadłą oś  $Y$  — w dół. Dodatnia oś  $Z$  leży poza płaszczyzną główną  $XY$  bezwładności belki. Pod obciążeniem pionowym w  $XY$  zawartem, belka ugina się i obniża wraz z podłożem. Podłoże jest sprężyste, gdy po stopniowym odciążeniu — belka wraz z podłożem powraca do pierwotnego położenia.

W obszarze sprężystości i proporcjonalności sprzeciw  $s$  podłoża jest proporcjonalny do rzędnej  $y$  odkształconej w tem miejscu; zatem:

$$s = -ay$$

gdzie przez  $a$  oznaczyliśmy *spółczynnik sprężystości podłoża*.

Dla belki o stałym przekroju i obciążeniu jednostkowym  $q$  zależnem od  $x$ , równanie różniczkowe odkształconej (IX. A. 8) będzie:

$$EJy''' = q - ay$$



Jego całka:

$$y = Y + \frac{1}{a} \left[ q - \frac{\frac{d^4 q}{dx^4}}{(n\sqrt{2})^4} + \frac{\frac{d^8 q}{dx^8}}{(n\sqrt{2})^8} - \frac{\frac{d^{12} q}{dx^{12}}}{(n\sqrt{2})^{12}} + \dots \right] \quad (137)$$

gdzie:

$$Y = Ae^{nx} \sin(nx) + Be^{nx} \cos(nx) + Ce^{-nx} \sin(nx) + De^{-nx} \cos(nx) \quad n = \sqrt[4]{\frac{a}{4EJ}}$$

Zatem:

$$Y' = n \{ Ae^{nx} [\sin(nx) + \cos(nx)] - Be^{nx} [\sin(nx) - \cos(nx)] - Ce^{-nx} [\sin(nx) - \cos(nx)] - De^{-nx} [\sin(nx) + \cos(nx)] \}$$

$$Y'' = 2n^2 [Ae^{nx} \cos(nx) - Be^{nx} \sin(nx) - Ce^{-nx} \cos(nx) + De^{-nx} \sin(nx)]$$

$$Y''' = -2n^3 \{ Ae^{nx} [\sin(nx) - \cos(nx)] + Be^{nx} [\sin(nx) + \cos(nx)] - Ce^{-nx} [\sin(nx) + \cos(nx)] + De^{-nx} [\sin(nx) - \cos(nx)] \}$$

Kierunek ( $w$ ) wzrostu wypadkowych obciążenia obieramy różnowrotny z osią  $X$  a przeto:

$$y'' = \frac{M}{EJ} \quad y''' = -\frac{Q}{EJ}$$

gdzie przez  $Q, M$  oznaczono siłę ścinającą i moment zginający tuż przed punktem bieżącym odkształconej, przynależnym odciętej  $x$ .

Powyższe wzory są słuszne w obszarze jednolitej zmienności wypadkowych obciążenia. Wszelka przerwa ciągłości tych wypadkowych stanowi granicę dawnego i początek nowego obszaru.

### C. Część trzecia.

1. **Pojęcia ogólne.** W układzie osi stałych (IX. A. 1) odcięta środka lewej ścianki czołowej belki nieodkształconej, stanowi jej długość pierwotną. W płaszczyźnie głównej  $XY$  bezwładności belki leży jej obciążenie pionowe. Kierunek ( $w$ ) wzrostu jego wypadkowych:  $M$  — momentu zginającego i  $Q$  — siły ści-