

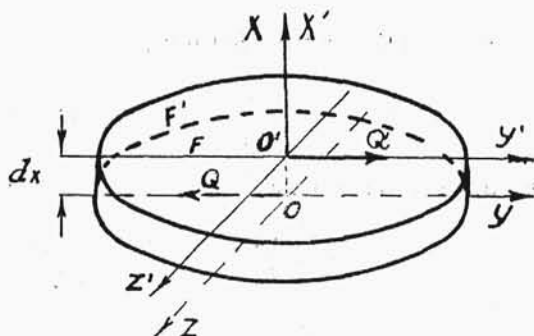
VI. ROZDZIAŁ SZÓSTY.

ŚCINANIE.

A. Część pierwsza.

1. **Wzory podstawowe.** Pręt prosty (I. B. 4) jest ścinany, gdy obciążenia jego płytek (I. B. 11) są ścinające (II. B. 7). W układzie osi (II. B. 5) pręta bezwładnościowo jednorodnego (I. B. 10) będziemy brali pod uwagę tylko składowe Q_y sił tnących: wyniki będą słuszne i dla składowych Q_z po odpowiedniej zamianie wskaźników i znaków. Przy łącznym działaniu Q_y, Q_z należy dodać jednoimienne składowe naprężeń i odkształceń.

Zatem w obszarze odkształceń znikomych — wyodrębniamy z pręta odkształconego płytkę (Rys. 36), obciążoną siłami tnącymi:



Rys 36.

$$Q_y \quad Q_y' = Q_y + dQ_y$$

różnowrotnemi, leżącemi na osiach głównych Y, Y' ścianek:

$$F \quad F' = F + dF$$

plytki bieżącej. Założmy, że pręt jest nieważki i że na bocznej powierzchni płytki niema obciążenia zewnętrznego. Zatem, dla równowagi płytki przyrost dQ_y musi być równy zeru, a nadto — na osi Z' winien leżeć moment znikomy:

$$- Q_y dx$$

równoważący parę sił Q_y . Ten moment daje na ściance F' płytki znikome naprężenia osiowe, które otrzymamy ze wzoru (XIV) w postaci:

$$dN_x = \frac{\partial N_x}{\partial x} dx = \frac{Q_y y}{J_z} dx$$

a przeto z warunków równowagi (40), w myśl założenia St. V é - n a n t ' a (II. B. 9):

$$\begin{aligned} T_x = N_y = N_z = 0 \\ \frac{\partial T_z}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial z} = - \frac{Q_y y}{J_z} \quad \frac{\partial T_y}{\partial x} = \frac{\partial T_z}{\partial x} = 0 \quad . \quad . \quad (74) \end{aligned}$$

Układ naprężeń, czyniący zadość warunkom powyższym i warunkowi brzegowemu (39) spełnia pięć równań (38) przy:

$$R_x = R_z = 0 \quad R_y = Q_y \quad M_x = M_y = 0 \quad M_z = - Q_y dx$$

Szóste — daje nowy warunek:

$$\int (y T_y - z T_z) dF = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Składowe odkształceń:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_x}{\partial x} = \frac{Q_y y}{E J_z} \quad \frac{\partial e_y}{\partial x} = \frac{\partial e_z}{\partial x} = - \frac{Q_y y}{m E J_z} \\ g_x = 0 \quad g_y = \frac{T_y}{G} \quad g_z = \frac{T_z}{G} \end{aligned}$$

czynią zadość czterem pierwszym równaniom warunkowym (I. A. 4). Dwa ostatnie dają:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{\partial T_z}{\partial z} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{\partial T_z}{\partial z} \right) = - \frac{2G}{m E J_z} Q_y = - \frac{Q_y}{(1+m) J_z} \quad . \quad . \quad . \quad (76) \end{aligned}$$

2. Wyznaczanie naprężeń. Biorąc dla składowych:

$$T_z = aG \left(\frac{\partial L_0}{\partial y} - z \right) - \frac{Q_y}{2(1+m)J_z} \left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{1}{2} y^2 + \frac{2m-1}{2} z^2 \right)$$

$$T_y = aG \left(\frac{\partial L_0}{\partial z} + y \right) - \frac{Q_y}{2(1+m)J_z} \left(\frac{\partial L}{\partial z} + (2m+1) yz \right)$$

spełnimy warunki (74) i (76), o ile całki L_0 , L , równań Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 L_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 L_0}{\partial z^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0$$

dobierzemy tak, aby składowe T_y, T_z czyniły zadość warunkowi brzegowemu (39) na całym obwodzie bieżącego przekroju.

Nadto z warunku (75) wyznaczymy stałą a . Jest ona równa zero dla przekroju symetrycznego względem osi Y , na której leży siła tnąca Q_y .

Układ naprężeń, w ten lub inny sposób wyznaczony, słuszny jest dla pręta o stałym przekroju i przy niezmienniej sile tnącej Q_y . Praktycznie — jest nadto wystarczająco przybliżony dla pręta o przekroju nader powolnie zmiennym i przy:

$$dQ_y \neq 0.$$

3. Wzory ostateczne. Siła tnąca Q_y leży na osi głównej Y przekroju bieżącego

a. Przekrój kołowy o promieniu R :

$$T_z = \frac{(3m+2)(R^2 - y^2) - (m-2)z^2}{2(m+1)\pi R^4} Q_y$$

$$T_y = - \frac{(m+2)yz}{(m+1)\pi R^4} Q_y$$

Najwyższe naprężenie, prostopadłe do osi Z :

$$T_m = \frac{3m+2}{2(m+1)\pi R^2} Q_y \quad (77)$$

panuje w środku przekroju.

b. Przekrój kołowy pierścieniowy o promieniu zewnętrznym R i wewnętrznym r :

$$T_z = \frac{(3m+2) \left[R^2 + r^2 - y^2 - \frac{R^2 r^2 (y^2 - z^2)}{(y^2 + z^2)^2} \right] - (m-2)z^2}{2(m+1)\pi (R^4 - r^4)} Q_y$$

$$T_y = - \frac{\left[m+2 + (3m+2) \frac{R^2 r^2}{(y^2+z^2)^2} \right] yz}{(m+1) \pi (R^4 - r^4)} Q_y$$

Najwyższe naprężenie, prostopadłe do osi Z :

$$T_m = \frac{(3m+2) R^2 + (m+2) r^2}{(m+1) \pi (R^4 - r^4)} Q_y \quad (78)$$

panuje w punktach o współrzędnych:

$$y=0 \quad z=\pm r$$

Ostatni wzór dla przekroju kołowego z małym kołowym otworkiem pośrodku daje:

$$T_m = \frac{3m+2}{(m+1) \pi R^2} Q_y$$

najwyższe naprężenie dwukrotnie wyższe niż dla przekroju kołowego pełnego (77).

c. Przekrój eliptyczny. Główna oś Y leży na półosi b , druga główna oś Z — na półosi c :

$$T_z = 2 \frac{[2(m+1)b^2 + mc^2](b^2 - y^2) - (m-2)b^2 z^2}{(m+1) \pi b^3 c (3b^2 + c^2)} Q_y$$

$$T_y = -4 \frac{[(m+1)b^2 + c^2]yz}{(m+1) \pi b^3 c (3b^2 + c^2)} Q_y$$

Najwyższe naprężenie, prostopadłe do osi Z :

$$T_m = 2 \frac{2(m+1)b^2 + mc^2}{(m+1) \pi b c (3b^2 + c^2)} Q_y \quad (79)$$

panuje w środku przekroju.

d. Przekrój prostokątny. Główna oś Y przekroju jest równoległa do jego wysokości h , druga główna oś Z — do podstawy b .

$$T_z = \frac{3 Q_y}{2 b h} \left\{ 1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 - \frac{1}{m+1} \frac{b^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{2z}{b} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\coth \left(\frac{2n\pi}{b} y \right)}{\coth \left(\frac{n\pi}{b} h \right)} \cos \left(\frac{2n\pi}{b} z \right) \right] \right\}$$

$$T_y = \frac{Q_y}{bh} \frac{6}{(m+1)\pi^2} \frac{b^2}{h^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\sinh\left(\frac{2n\pi}{b}y\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{b}h\right)} \sin\left(\frac{2n\pi}{b}z\right)$$

Najwyższe naprężenie, prostopadłe do osi Z :

$$T_m = \frac{3}{2} \frac{s}{bh} Q_y$$

panuje w środku przekroju. Niżej zestawiono wartości:

$$s = 1 - \frac{1}{m+1} \frac{b^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \cosh\left(n\pi \frac{b}{h}\right)} \right]$$

dla różnych m i $\frac{h}{b}$:

$h:b =$	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	2,0	2,5	3,0
$m=2$	0,460	0,748	0,845	0,900	0,937	0,952	0,974	0,982	0,988
$m=3$	0,595	0,811	0,884	0,925	0,952	0,964	0,979	0,986	0,991
$m=4$	0,676	0,849	0,907	0,940	0,962	0,971	0,983	0,989	0,993

4. Sposób przybliżony. Z pręta prostego, bezwładnościowo jednorodnego (I. B. 10), wyodrębniamy płytkę (Rys. 37), prowadząc dwa sąsiednie przekroje w znikomej odległości osiowej dx , i zakładamy, że:

a. przekrój bieżący F , stały lub nader powoli zmienny, jest symetryczny względem swej osi głównej Y , na której leży siła tnąca. Zatem do środka O pola F tylnej ścianki płytki przyłożona jest siła Q_y , leżąca na osi Y ; — do środka O' pola:

$$F' = F + dF$$

ścianki przedniej różnowrotna siła:

$$Q_y' = Q_y + dQ_y$$

b. naprężenia:

$$N_y = N_z = T_x = 0$$

nadto — znikomy moment

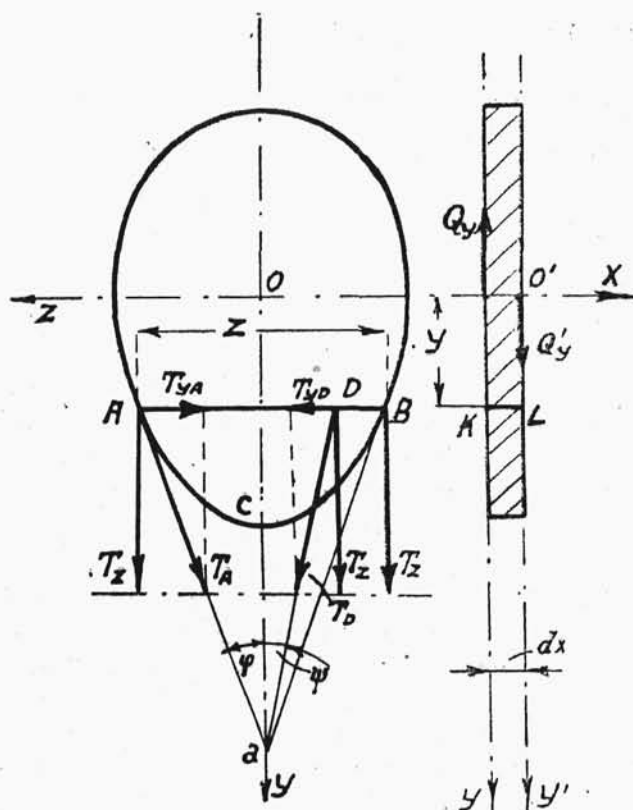
$$dM_x = -Q_y dx$$

równoważący parę sił Q_y, Q_y' , daje na przedniej ściance płytki układ naprężeń znikomych:

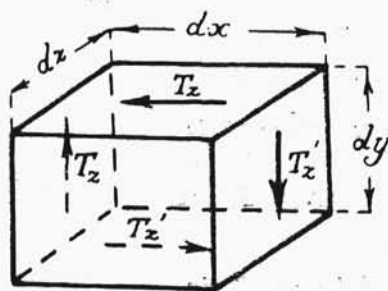
$$dN_x = \frac{Q_y y}{J_x} dx$$

zgodnie z (41)

c. na ściankach KL wzdłuż prostej AB , poprowadzonej w odległości y od osi Z równoległe do tej osi, panują naprężenia ścinające o składowej T_z , zależnej tylko od y , a więc stałej na całym odcinku AB .



Rys. 37.



Rys. 38.

d. naprężenia ścinające T_A, T_B w końcowych punktach A, B tego odcinka leżą na stycznych obwodu z tych punktów poprowadzonych, a przecinających się w punkcie a na osi Y .

e. osie naprężeń ścinających T_D , panujących w pośrednich punktach D odcinka AB przechodzą przez ten punkt a .

Oznaczmy przez:

S_y — moment statyczny odcinka ABC pola F względem osi Z .

J_z — moment bezwładności pola F względem osi Z .

Z — długość cięciwy AB , poprowadzonej równoległe do osi Z w odległości y od tej osi.

φ — kąt nachylenia ku osi Y — naprężeń ścinających T_A, T_B , panujących w końcowych punktach cięciwy AB .

ϕ — kąt nachylenia ku osi Y naprężenia ścinającego T_D , panującego w punkcie bieżącym D cięciwy AB :

i wyodrębnijmy, wzdłuż AB równoległy do osi Z szereg sześciątów (Rys. 38):

$$dx \cdot dy \cdot dz$$

W myśl poczynionych wyżej założeń siła Q_y wzbudza na tylnych ściankach $dy \cdot dz$ sześciątów składową T_z , siła Q_y' — na przednich ściankach $dy \cdot dz$ — składową:

$$T_z' = T_z + dT_z$$

Równowaga sześcianu wymaga, aby składowe T_z, T_z' panowały odpowiednio i na górnej i na dolnej ściankach $dx \cdot dz$, a przeto na górną ściankę KL odcinka ABC płytki działa wypadkowa:

$$T_z Z dx$$

składowych naprężeń ścinających T_z . Równoważy ją niewątpliwie wypadkowa naprężeń dN_x :

$$\int_{ABC} \frac{Q_y y}{J_z} dx dF = \frac{Q_y dx}{J_z} \int_{ABC} y dF = \frac{Q_y S_y}{J_z} dx$$

Tą drogą otrzymany przybliżony układ naprężeń:

$$\begin{aligned} dN_x &= \frac{Q_y y}{J_z} dx & N_y &= N_z = T_x = 0 \\ T_y &= \frac{Q_y S_y}{Z J_z} \operatorname{tg} \phi & T_z &= \frac{Q_y S_y}{Z J_z} \end{aligned} \quad (80)$$

daje skrajne naprężenie ścinające:

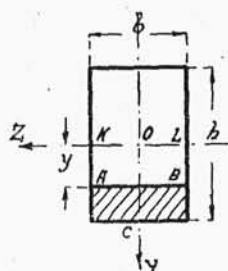
$$T_A = T_B = \frac{Q_y S_y}{Z J_z \cos \varphi} \quad (81)$$

dla cięciwy AB , panujące w obu jej punktach końcowych.

5. Wzory przybliżone. Siła tnąca Q_y leży na osi symetrii Y przekroju.

a. Przekrój prostokątny (Rys. 39). Tutaj:

$$Z = b \quad \varphi = \phi = 0$$



Rys. 39.

$$S_y = b \left(\frac{1}{2} h - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} h + y \right)$$

a przeto ostatecznie:

$$T_z = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{bh} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] \quad T_y = 0$$

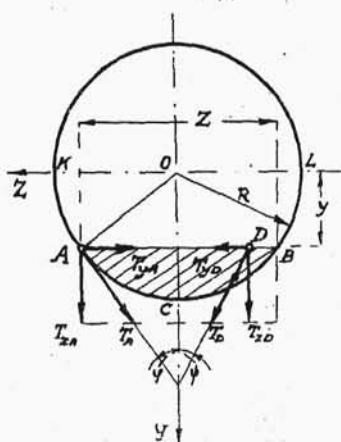
Najwyższe naprężenie ścinające, prostopadłe do osi Z:

$$T_m = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{bh}$$

panuje w odcinku KL tej osi. To samo da wzór ścisły przy:

$$m = \infty$$

b. Przekrój kołowy (Rys. 40). Tutaj:



Rys. 40.

$$Z = 2 \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$\cos \varphi = Z : 2R = \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R}$$

$$S_y = \int y Z dy = \frac{2}{3} \sqrt{(R^2 - y^2)^3}$$

Zatem dla bieżącego punktu cięciwy AB:

$$T_z = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{\pi R^2} \left[1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right]$$

$$T_y = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{\pi R^2} \left[1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right] \operatorname{tg} \psi$$

W końcowych punktach cięciwy Z panuje naprężenie:

$$T_A = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{\pi R^2} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2}$$

Najwyższe naprężenie ścinające, prostopadłe do osi Z:

$$T_m = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{\pi R^2}$$

panuje w odcinku KL tej osi. To samo daje wzór ścisły przy:

$$m=2$$

e. Przekrój pierścieniowy kołowy (Rys 41) o bardzo cienkiej ścianie s . Średni promień $-R_0$, wewnętrzny: $R_0 - \frac{1}{2}s$,

zewnątrzny: $R_0 + \frac{1}{2}s$. Na osi Y leży

siła tnąca Q_y . Naprężenie ścinające T jest prostopadłe do R_0 — wymaga tego warunek brzegowy (39). W przekrojach A, B , prostopadłych do końcowych elementów łuku ACB , panują więc naprężenia T o składowych:

$$T_y = T \sin \varphi = \frac{T y}{R_0}$$

$$T_z = T \cos \varphi = \frac{T}{R_0} \sqrt{R_0^2 - y^2}$$

Wypadkowa:

$$2 T s dx$$

równoważy wypadkową znikomych naprężeń normalnych: dN_x :

$$\frac{Q_y dx}{J_z} \int_{ACB} y dF = \frac{Q_y S_y}{J_z} dx$$

panujących w odcinku ACB przekroju. Tutaj:

$$S_y = 2 s R_0^2 \int_{\varphi}^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 2 s R_0 \sqrt{R_0^2 - y^2}$$

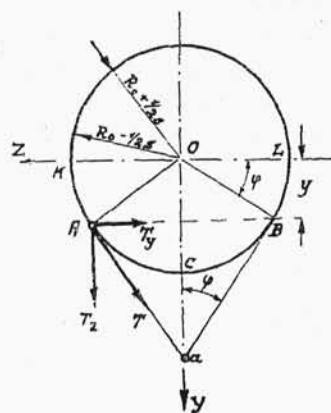
$$J_z = \pi s R_0^3$$

Stąd ostatecznie:

$$T = \frac{Q_y \sqrt{R_0^2 - y^2}}{\pi s R_0^2}$$

Najwyższe naprężenie, prostopadłe do osi Z :

$$T_m = \frac{Q_y}{\pi s R_0}$$



Rys. 41

panuje w punktach K, L . Ze wzoru ścisłego otrzymamy:

$$T_m = \frac{Q_y}{\pi s R_0} \left(1 + \frac{m}{m+1} \frac{R_0 s}{R_0^2 + s^2} \right)$$

d. Dwuteownik. Główna jego oś Y jest równoległa do wysokości H przekroju, druga główna oś Z do podstawy B . Na osi Y leży siła tnąca Q_y . Środkowa ścianka dwuteownika, czyli tak zwany *środnik* ma grubość s i wysokość h .

Z dostateczną do celów praktyki ścisłością można założyć, że naprężenie najwyższe:

$$T_m = \frac{Q_y}{sh}$$

panuje we wszystkich punktach środnika. Ścisłejszych danych dotąd jeszcze nie ma.

B. Część druga.

1. Średnie naprężenie ścinające. W układzie osi głównych Y, Z bieżącego przekroju pręta prostego składowe siły tnącej Q będą odpowiednio: Q_y, Q_z , — naprężeń ścinających: T_z, T_y , przy-
czem, zgoła niezależnie od układu tych naprężeń, winno być:

$$\int T_z dF = Q_y \quad \int T_y dF = Q_z$$

zgodnie z warunkami równowagi (38).

Składowe *średniego* naprężenia ścinającego T_s czynią za-
dość równaniom:

$$T_{sy} F = \int T_y dF \quad T_{sz} F = \int T_z dF$$

a przeto:

$$T_{sy} = \frac{Q_z}{F} \quad T_{sz} = \frac{Q_y}{F} \quad T_s = \frac{Q}{F}$$

średnie naprężenie ścinające stanowi iloraz siły tnącej przez pole przekroju bieżącego.

Średni układ naprężeń:

$$N_x = N_y = N_z = T_x = 0 \quad T_y = T_{sy} \quad T_z = T_{sz}$$

daje pierwsze przybliżenie we wszystkich przypadkach przekrojów bardzo złożonych, nieprawidłowych, lub co do tworzywa niejednorodnych, gdy wyznaczanie istotnego układu naprężeń jest zbyt uciążliwe.

W obszarze sprężystości i proporcjonalności składowym średniego naprężenia ścinającego przynależą składowe średniego odkształcenia:

$$g_{sy} = \frac{T_{sy}}{G} \quad g_{sz} = \frac{T_{sz}}{G}$$

niezmienne dla całej płytki, zawartej pomiędzy dwoma sąsiednimi przekrojami, wyodrębnionymi z pręta w znikomej odległości osiowej dx .

2. Praca sprężysta. W płaszczyznach głównych pręta bezwładnościowo jednorodnego, na osiach głównych Y, Z bieżącego przekroju F leżą składowe Q_y, Q_z siły tnącej Q . Wzór (59) da pracę jednostkową:

$$W = \frac{T_y^2 + T_z^2}{2G}$$

zatem praca sprężysta dla płytki:

$$dH = \frac{dx}{2G} \int (T_y^2 + T_z^2) dF$$

gdzie całkowaniem należy objąć pierwotny przekrój F pręta. Ta sama praca dla średniego układu naprężeń ścinających:

$$dH_s = \frac{dx}{2G} (T_y^2 + T_z^2) \int dF = \frac{Q^2 dx}{2GF}$$

a przeto zawsze możemy napisać:

$$dH = t \frac{Q^2 dx}{2GF}$$

ilekroć zdołamy wyznaczyć t ze wzoru:

$$dH = t dH_s$$

Tak, np. dla *przekroju kołowego*:

$$dH = \frac{Q_y^2 dx}{8G(m+1)^2 \pi^2 R^8} \int \{ [(3m+2)(R^2 - y^2) - (m-2)z^2]^2 + 4(m+2)^2 y^2 z^2 \} dF$$

Tutaj:

$$\int y^4 dF = \int z^4 dF = \frac{1}{8} \pi R^6 \quad \int y^2 z^2 dF = \frac{1}{24} \pi R^6$$

a przeto:

$$dH = \frac{Q_y^2 dx}{2G\pi R^2} \frac{1}{6} \left[7 + \frac{1}{(m+1)^2} \right]$$

Stąd dla *przekroju kołowego*:

$$t = \frac{1}{6} \left[7 + \frac{1}{(m+1)^2} \right]$$

średnio: 1,18. Dla *przekroju prostokątnego* średnio: 1,2.

Praca sprężysta dla całego pręta:

$$H = t \int_0^l \frac{Q_y^2 dx}{2GF} \quad (82)$$

gdzie l oznacza pierwotną długość pręta.

3. Wytrzymałość na ścinanie. Najwyższe naprężenie ścinające T_m przekroju stanowi miarę obciążenia ścinającego. Wielkość wytyczna tego naprężenia, zwana *granicą sprężystości* S_t na ścinanie, oddziela *obszar sprężystości* od *obszaru niesprężystości* tworzywa.

Granicą proporcjonalności P_t na ścinanie zowie się skrajna wielkość naprężenia ścinającego najwyższego T_m , proporcjonalnego do przynależnego mu odkształcenia sprężystego, lub do sprężystej części odkształcenia mieszanego.

Wyżej leży *granica podatności* Q_t na ścinanie — istotna, lub nieistotna. Istotna — stanowi początek *obszaru podatności* oddzielającego *początkowy obszar niesprężystości* od *końcowego*. Nieistotną — cechuje punkt zwrotu, oddzielający oba te obszary.

Nieistotną może również stanowić naprężenie T_m w ten, czy inny sposób ustalone na bezpośrednim ciąglem przejściu początkowego obszaru niesprężystości — w końcowy.

Najwyższe naprężenie T_m końcowego obszaru niesprężystości, przynależne najwyższej sile Q_t ścinającej — niszczącej, zwie się *wytrzymałością* R_t na ścinanie.

Przy próbach przeważnie określają tylko wytrzymałość, przecinając pręt w nożycach zwykłych, lub przegubowych. Przeciwległe ostrza nożyc zwykłych dwustronnie cisną na pręt o stałym przekroju F i przecinają go pod naciskiem Q_t na ostrze, przy naprężeniu średnim:

$$R_{st} = \frac{Q_t}{F}$$

zazwyczaj utożsamianem z wytrzymałością R_t na ścinanie.

Przy użyciu nożyc przegubowych — próbka stanowi sworzeń o stałym przekroju, dokładnie wypełniający współosiowe otwory środkowej spłaszczonej główki jednego pręta — oraz — widlastych szczęk drugiego, obustronnie ściśle przylegających do spłaszczeń główki. Pod działaniem niszczących sił osiowych Q_t , rozciągających pręty, sworzeń ulega ścięciu w dwóch przekrojach: dwie skrajne jego części pozostają w szczękach — środkowa — w główce. I tu również średnie naprężenie niszczące:

$$R_{st} = \frac{Q_t}{2F}$$

utożsamiane jest zazwyczaj z wytrzymałością R_t .

4. Współczynnik sprężystości poprzecznej G w kg/cm^2 . Niżej podane naprężenia również w kg/cm^2 .

ZESTAWIENIE I.

TWORZYWO	$G \text{ kg}/\text{cm}^2$	$R_r \text{ kg}/\text{cm}^2$
Żelazo zgrzewne . . .	770000	3000 — 4000
Stal węglista	800000	3500 — 4500
„ „	850000	4500 — 6000
„ niklowa	810000	5500 — 7000
„ chromoniklowa .	790000	5000 — 6500
„ wolframowa . .	870000	6000 — 7500
„ sprężynowa . .	850000	6000 — 10000

Tworzywo	$G \text{ kg/cm}^2$	$R_r \text{ kg/cm}^2$
Stal łana	830000	3500 — 7000
Platyna	620000	3000 — 3500
Złoto	280000	1000 — 3000
Srebro	295000	1500 — 3000
Cynk	320000	1000 — 2000
Miedź	465000	2000 — 4500
Bronz	370000	1500 — 8000
Mosiądz	320000	1500 — 4500
Spiż	350000	2000 — 2500
Glin łany	270000	700 — 800
„ walcowany . . .	275000	1000 — 2500
Cyna	170000	150 — 250
Ołów	57000	150 — 250

Odchylenia od wyżej podanych średnich G dochodzą do $\pm 10\%$.
Dla tworzyw powyższych:

$$R_{st} : R_r = 0,7 \div 0,8$$

Dla żeliwa ten sam stosunek waha się od 1,0 do 1,2 przy

$$G = 290000 - 400000 \text{ kg/cm}^2$$

5. Naprężenia dopuszczalne. Na zestawieniu podano *naprężenia dopuszczalne* k_t przy ścinaniu w kg/cm^2 .

ZESTAWIENIE II.

Obciążenie:		Trwałe	Powtarzane	Przebiegowe
Naprężenie:	R_r	k_t	k_t	k_t
Żeliwo	1300 — 1800	300 — 350	180 — 230	100 — 180
Żeliwo kowalne . . .	2000 — 3000	300 — 400	200 — 270	100 — 130
Stal zgrzewna	3000 — 4500	720 — 950	430 — 640	240 — 360
Stal zlewna	3000 — 4500	720 — 1200	430 — 800	240 — 600

OBCIĄŻENIE:		TRWAŁE	POWTA- RZANE	PRZE- MIENNE
NAPRĘŻENIE:	R_r	k_t	k_t	k_t
Stal zlewna	4500—7000	960—1440	580— 960	320—720
„ tyglowa	4500—9000	960—2000	640—1330	320—670
„ niklowa	4500—9000	960—1440	640— 960	320—480
„ lana	3500—6000	480— 960	290— 640	160—480
Miedź	2000—2700	300— 450	200— 300	100—150
Bronz	2000—2500	300— 400	200— 270	100—130
Bronz fosforowy	3000—4500	450— 700	300— 470	150—230
Spiż	1800—2200	240— 320	160— 200	80—100
Mosiądz	2000—3000	320— 480	210— 320	110—160
Mosiądz przedni	3500—6000	480— 800	320— 530	160—270
Glin lany	900—1200	120— 160	80— 110	40— 60
Dąb (drewno)	350— 500	10 — 18	7 — 12	4 — 6
Sosna, jodła.	250— 400	9 — 15	6 — 10	3 — 5

Najwyższe naprężenie w każdym ścinanym przekroju pręta prostego nie powinno przekraczać *naprężenia dopuszczalnego* k_t przy obciążeniu trwałem lub zmiennem. Najwyższa wielkość T_m tych skrajnych naprężeń poszczególnych przekrojów — wyodrębnia *przekrój niebezpieczny*. Jego wymiary należy dobrać tak, aby:

$$T_m = k_t$$

spełnienie tego warunku zabezpiecza pręt wytrzymałościowo: układ naprężeń ścinających nie wykracza poza obszar sprężystości i proporcjonalności.

Warunek powyższy zazwyczaj bywa pomijany, gdy pręt prosty nie jest zbyt krótki—przy obciążeniu zewnętrznym ścinającym i zginającym.

6. Odształcenia. W płaszczyznach głównych pręta bezwładnościowo jednorodnego leżą osie główne Y , Z bieżącego przekroju F . Dwa sąsiednie przekroje:

$$F \text{ i } F' = F + dF$$

obrane w osiowej odległości dx , wyodrębniają płytkę bieżącą.

Do środka O jej ścianki F przyłożona jest siła tnąca Q , leżąca w tym przekroju; do środka O' ścianki F' znikomo różna równoległa, lecz różnowrotna siła tnąca:

$$Q' = Q + dQ.$$

Obie te siły stanowią łącznie uogólnioną siłę obciążenia ścinającego płytki, czyli tak zwaną *siłę sprężystości* Q , ścinającą.

W punkcie (y, z) pola F , lub, co niewątpliwie na jedno wychodzi, w *przeciwległym* mu punkcie (y, z) pola F' wyodrębniamy bieżący *element sześcienny* płytki:

$$(dx \cdot dy \cdot dz)$$

Na czterech jego ściankach: $(dy \cdot dz)$ i $(dx \cdot dy)$ panują znikomo różniące się co do wielkości naprężenia: T_y i T_y' , na czterech ściankach: $(dy \cdot dz)$ i $(dx \cdot dz)$ także naprężenia T_z i T_z' . Pierwsze zmieniają pierwotnie prosty kąt pomiędzy dx i dz w:

$$\frac{1}{2} \pi \neq g_y$$

drugie — takież kąt pomiędzy dx i dy w:

$$\frac{1}{2} \pi \neq g_z$$

Stąd — posunięcia względne przeciwległych ścianek $(dy \cdot dz)$:

$$g_y dx$$

w kierunku osi Z oraz:

$$g_z dx$$

w kierunku osi Y . Ich wypadkowa, czyli *posunięcie względne przeciwległych punktów* płytki:

$$\Delta = \sqrt{g_y^2 + g_z^2} dx = \frac{dx}{G} \sqrt{T_y^2 + T_z^2}$$

w ogólnym przypadku zmienia się wraz z y, z . Natomiast Δ jest stałe dla wszystkich punktów przeciwległych płytki przy *średnim układzie naprężeń* ścinających i równe:

$$q_s = \frac{Q dx}{G F}$$

Nadto q_s jest niewątpliwie *posunięciem* (III. A. 3) siły sprężystości Q , zmiennem proporcjonalnie do tej siły, zatem jej praca:

$$\frac{dx}{GF} \int_0^Q Q dQ = \frac{Q^2 dx}{2GF} = \frac{1}{2} Q q_s = dH_s$$

zgodnie z tem, co podano wyżej w punkcie drugim.

7. Średnie posunięcie. W ogólnym przypadku zmienności Δ — miarę przybliżoną odkształcenia płytki może stanowić względne posunięcie środków O , O' jej ścianek F , F' , inaczej mówiąc — posunięcie q uogólnionej siły obciążenia ścinającego płytki. To posunięcie czyni zadość równaniu:

$$\frac{1}{2} Q q = dH$$

skąd, wobec:

$$dH = t dH_s = t \frac{Q^2 dx}{2GF} = \frac{1}{2} t Q q_s$$

otrzymamy ostatecznie:

$$q = t \frac{Q dx}{GF} = t q_s.$$

To *średnie posunięcie* q płytki nie daje pełnego obrazu jej odkształcenia, jako że ścianki jej F i F' , pierwotnie płaskie i równoległe — po odkształceniu, w ogólnym przypadku zmienności Δ , ulegają zwichrzeniu. O ile zatem q jako posunięcie średnie, nie wystarcza — należy uciec się do zwykłej drogi, a mianowicie, po wyznaczeniu istotnego układu naprężeń, przejść do układu składowych odkształceń, wyrażonych w zależności od współrzędnych bieżącego punktu pręta.

Nadto — należy wziąć pod uwagę sześć zależności (I. A. 2), wiążących pierwsze pochodne posunięć osiowych:

$$u, v, w$$

ze składowymi odkształceniemi. Różniczkowanie da ośmnaście równań, wiążących linjowo tyleż pochodnych drugiego rzędu owych posunięć osiowych. W ogólnym przypadku z tego układu równań otrzymamy wszystkie pochodne w zależności od współrzędnych x , y , z . Zwykle całkowanie da ostatecznie u , v , w po uwzględnieniu warunków brzegowych.