

X. ROZDZIAŁ DZIESIĄTY.

W Y B A C Z A N I E.

A. Część pierwsza.

1. Zginanie płaskie mimośrodowe. W układzie osi (IX. A. 1.) rozpatrujemy belkę bezwładnościowo jednorodną, pierwotnie prostą, poziomą. Obciążenie, zawarte w głównej płaszczyźnie bezwładności XY działa na oś podłużną belki. Obejmuje ono: siły skupione, pary sił momentów zewnętrznych — oraz — warstwy obciążeń ciągłych. Kierunek (w) wzrostu jego wypadkowych jest różnowrotny z osią X .

Tuż przed punktem i odkształconej panuje moment zginający M_i , równoległy do osi Z , pionowa siła ścinająca Q_i oraz — siła podłużna O_i , równoległa do osi X . Nadto w tym punkcie może działać siła zewnętrzna pionowa P_i , pozioma R_i , równoległa do osi X , lub moment zewnętrzny N_i , równoległy do osi Z . Może również w tym punkcie zachodzić zmiana lub przerwa ciągłości obciążenia jednostkowego. We wszystkich tych przypadkach punkt i stanowi granicę dwóch sąsiednich obszarów różnolitej zmienności wypadkowych obciążenia mimośrodowego.

Idąc w kierunku (w) dojdziemy do następnego granicznego punktu $i+1$ przyłożenia siły R_{i+1}, P_{i+1} , momentu N_{i+1} lub przerwy ciągłości obciążenia jednostkowego. Odcinek $(i, i+1)$, czyli *przęsło* $(i+1)$ stanowi obszar jednolitej zmienności wypadkowych obciążenia mimośrodowego.

2. Równanie odkształconej. Oznaczmy przez x, y, y' współrzędne bieżącego punktu odkształconej obszaru jednolitej zmienności wypadkowych obciążenia mimośrodowego, przez x_i, y_i, y_i'

oraz $x_{i+1}, y_{i+1}, y'_{i+1}$ współrzędne początkowego i końcowego punktów $i, i+1$ tego obszaru, i założmy, że na całej długości:

$$l_{i+1} = x_i - x_{i+1}$$

pręsła $(i+1)$ *nie*ma obciążeń jednostkowych podłużnych. Zatem tuż przed bieżącym punktem odkształconej pręsła $(i+1)$ panować będzie moment zginający:

$$M = -S_i(y_i - y) + M'$$

gdzie

$$S_i = O_i + R_i$$

a przez M' oznaczono wyrazy pozostałe, niezależne od bieżącej współrzędnej y . Przy odkształceniach nieznacznych (IX. A. 8.), praktycznie jedynie dopuszczalnych:

$$EJy'' = -S_i(y_i - y) + M'$$

Dla belki o stałym przekroju i dla *dodatniej* siły S_i rozciągającej:

$$y'' = -n^2(y_i - y) + \frac{M'}{EJ} \quad y = y_i + A \sinh(nx) + B \cosh(nx) - \frac{1}{S_i} \left(M' + \frac{1}{n^2} \frac{d^2 M'}{dx^2} + \frac{1}{n^4} \frac{d^4 M'}{dx^4} + \frac{1}{n^6} \frac{d^6 M'}{dx^6} + \dots \right) \quad (140)$$

a dla belki o stałym przekroju i dla *dodatniej* siły S_i , ściskającej:

$$y'' = n^2(y_i - y) + \frac{M'}{EJ} \quad y = y_i + A \sin(nx) + B \cos(nx) + \frac{1}{S_i} \left(M' - \frac{1}{n^2} \frac{d^2 M'}{dx^2} + \frac{1}{n^4} \frac{d^4 M'}{dx^4} - \frac{1}{n^6} \frac{d^6 M'}{dx^6} + \dots \right) \quad (141)$$

W obu przypadkach:

$$n = \sqrt{\frac{S_i}{EJ}}$$

3. Momenty zginające. Założmy, że całą długość l_{i+1} pręsła $(i+1)$ pokrywa warstwa obciążenia pionowego:

$$q = q_i - \frac{q_i - q_{i+1}}{l_{i+1}}(x_i - x)$$

zmieniającego się linjowo od q_i w początkowym punkcie i przeszła do q_{i+1} — w końcowym punkcie $i+1$. Tuż przed bieżącym punktem odkształconej panować będzie moment zginający:

$$M = \mp S_i (y_i - y) + M_i + N_i + (Q_i + P_i) (x_i - x) + \\ + \frac{1}{2} q_i (x_i - x)^2 - \frac{q_i - q_{i+1}}{6 l_{i+1}} (x_i - x)^3$$

tuż przed punktem końcowym $i+1$ przeszła:

$$M_{i+1} = \mp S_i (y_i - y_{i+1}) + M_i + N_i + (Q_i + P_i) l_{i+1} + \\ + \frac{1}{2} q_i l_{i+1}^2 - \frac{q_i - q_{i+1}}{6} l_{i+1}^3$$

Stąd, rugując sumę $Q_i + P_i$ otrzymamy:

$$M' = M_i + N_i + [M_{i+1} - M_i - N_i \pm S_i (y_i - y_{i+1})] \frac{x_i - x}{l_{i+1}} - \\ - \frac{1}{2} q_i (x_i - x) (x - x_{i+1}) + \frac{q_i - q_{i+1}}{6 l_{i+1}} (x_i - x) (x - x_{i+1}) \cdot \\ \cdot (l_{i+1} + x_i - x)$$

$$\frac{dM'}{dx} = - \frac{1}{l_{i+1}} [M_{i+1} - M_i - N_i \pm S_i (y_i - y_{i+1})] - \\ - \frac{1}{2} q_i [x_i - x - (x - x_{i+1})] + \frac{q_i - q_{i+1}}{l_{i+1}} \{ (l_{i+1} + x_i - x) \cdot \\ \cdot [x_i - x - (x - x_{i+1})] - (x_i - x) (x - x_{i+1}) \}$$

$$\frac{d^2 M'}{dx^2} = q_i - \frac{q_i - q_{i+1}}{l_{i+1}} (x_i - x) = q \quad \frac{d^3 M'}{dx^3} = \frac{dq}{dx} = \frac{q_i - q_{i+1}}{l_{i+1}}$$

W powyższych wzorach górny znak przynależy sile S_i rozciągającej dodatniej, dolny — ściskającej sile S_i również dodatniej.

4. Wzory dla siły S_i rozciągającej dodatniej i belki o stałym przekroju:

$$S_i y = S_i y_i - M_i - N_i - [M_{i+1} - M_i - N_i + S_i (y_i - y_{i+1})] \frac{x_i - x}{l_{i+1}} + \\ + \left(M_i + N_i + \frac{q_i}{n^2} \right) \frac{\sinh [n (x - x_{i+1})]}{\sinh (n l_{i+1})} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(M_{l+1} + \frac{q_{l+1}}{n^2} \right) \frac{\sinh[n(x_l - x)]}{\sinh(nl_{l+1})} + \frac{1}{2} q_l (x_l - x)(x - x_{l+1}) - \\
& - \frac{q_l - q_{l+1}}{6 l_{l+1}} (x_l - x)(x - x_{l+1})(l_{l+1} + x_l - x) - \frac{q_l}{n^2} + \\
& + \frac{q_l - q_{l+1}}{n^2 l_{l+1}} (x_l - x) \quad (142)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_l y' &= \frac{M_{l+1} - M_l - N_l + S_l (y_l - y_{l+1})}{l_{l+1}} + \left(M_l + N_l + \frac{q_l}{n^2} \right) \cdot \\
& \cdot \frac{n \coth[n(x - x_{l+1})]}{\sinh(nl_{l+1})} - \left(M_{l+1} + \frac{q_{l+1}}{n^2} \right) \frac{n \coth[n(x_l - x)]}{\sinh(nl_{l+1})} + \\
& + \frac{1}{2} q_l [(x_l - x) - (x - x_{l+1})] - \frac{q_l - q_{l+1}}{6 l_{l+1}} \{ (l_{l+1} + x_l - x) \cdot \\
& \cdot [x_l - x - (x - x_{l+1})] - (x_l - x)(x - x_{l+1}) \} - \frac{q_l - q_{l+1}}{n^2 l_{l+1}} \dots \quad (143)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_l y'_l &= \frac{M_{l+1} - M_l - N_l + S_l (y_l - y_{l+1})}{l_{l+1}} + \left(M_l + N_l + \frac{q_l}{n^2} \right) \cdot \\
& \cdot \frac{n \coth(nl_{l+1})}{\sinh(nl_{l+1})} - \frac{n \left(M_{l+1} + \frac{q_{l+1}}{n^2} \right)}{\sinh(nl_{l+1})} - \frac{1}{2} q_l l_{l+1} + \frac{1}{6} (q_l - q_{l+1}) l_{l+1} - \\
& - \frac{q_l - q_{l+1}}{n^2 l_{l+1}} \quad (144)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_l y'_{l+1} &= \frac{M_{l+1} - M_l - N_l + S_l (y_l - y_{l+1})}{l_{l+1}} + \frac{n \left(M_l + N_l + \frac{q_l}{n^2} \right)}{\sinh(nl_{l+1})} - \\
& - \left(M_{l+1} + \frac{q_{l+1}}{n^2} \right) \frac{n \coth(nl_{l+1})}{\sinh(nl_{l+1})} + \frac{1}{2} q_l l_{l+1} - \frac{1}{3} (q_l - q_{l+1}) l_{l+1} - \\
& - \frac{q_l - q_{l+1}}{n^2 l_{l+1}} \quad (145)
\end{aligned}$$

przyczem:

$$n = \sqrt{\frac{S_l}{EJ}}$$

5. Wzory dla siły S_l ściskającej dodatniej i belki o stałym przekroju:

$$\begin{aligned}
 S_l y &= S_l y_l + M_l + N_l + [M_{l+1} - M_l - N_l - S_l (y_l - y_{l+1})] \frac{x_l - x}{l_{l+1}} - \\
 &\quad - \left(M_l + N_l - \frac{q_l}{n^2} \right) \frac{\sin [n(x - x_{l+1})]}{\sin (n l_{l+1})} - \left(M_{l+1} - \right. \\
 &\quad - \left. \frac{q_{l+1}}{n^2} \right) \frac{\sin [n(x_l - x)]}{\sin (n l_{l+1})} + \frac{1}{2} q_l (x_l - x) (x - x_{l+1}) - \\
 &\quad - \frac{q_l - q_{l+1}}{6 l_{l+1}} (x_l - x) (x - x_{l+1}) (l_{l+1} + x_l - x) + \\
 &\quad + \frac{q_l - q_{l+1}}{n^2 l_{l+1}} (x_l - x) - \frac{q_l}{n^2} \dots \dots \dots (146)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_l y' &= - \frac{M_{l+1} - M_l - N_l - S_l (y_l - y_{l+1})}{l_{l+1}} - \left(M_l + N_l - \frac{q_l}{n^2} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{n \cos [n(x - x_{l+1})]}{\sin (n l_{l+1})} + \left(M_{l+1} - \frac{q_{l+1}}{n^2} \right) \frac{n \cos [n(x_l - x)]}{\sin (n l_{l+1})} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} q_l [x_l - x - (x - x_{l+1})] + \frac{q_l - q_{l+1}}{6 l_{l+1}} \{ l_{l+1} + x_l - x \} \cdot \\
 &\quad \cdot [x_l - x - (x - x_{l+1})] - (x_l - x) (x - x_{l+1}) \} - \frac{q_l - q_{l+1}}{n^2 l_{l+1}} \dots \dots (147)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_l y_l' &= - \frac{M_{l+1} - M_l - N_l - S_l (y_l - y_{l+1})}{l_{l+1}} - \\
 &\quad - \left(M_l + N_l - \frac{q_l}{n^2} \right) \frac{n \cos (n l_{l+1})}{\sin (n l_{l+1})} + \frac{n \left(M_{l+1} - \frac{q_{l+1}}{n^2} \right)}{\sin (n l_{l+1})} + \frac{1}{2} q_l l_{l+1} - \\
 &\quad - \frac{1}{6} (q_l - q_{l+1}) l_{l+1} - \frac{q_l - q_{l+1}}{n^2 l_{l+1}} \dots \dots \dots (148)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_l y_{l+1}' &= - \frac{M_{l+1} - M_l - N_l - S_l (y_l - y_{l+1})}{l_{l+1}} - \\
 &\quad - \frac{n \left(M_l + N_l - \frac{q_l}{n^2} \right)}{\sin (n l_{l+1})} + \left(M_{l+1} - \frac{q_{l+1}}{n^2} \right) \frac{n \cos (n l_{l+1})}{\sin (n l_{l+1})} - \frac{1}{2} q_l l_{l+1} + \\
 &\quad + \frac{1}{3} (q_l - q_{l+1}) l_{l+1} - \frac{q_l - q_{l+1}}{n^2 l_{l+1}} \dots \dots \dots (149)
 \end{aligned}$$

przyczem:

$$n = \sqrt{\frac{S_l}{EJ}}$$

6. Wyboczenie. Rozpatrujemy belkę, pierwotnie prostą, bezwładnościowo jednorodną, pionową. Jej oś podłużna leży na dodatniej osi X , wyprowadzonej ze środka 0 dolnej czołowej ścianki belki. Dla oka, patrzącego z góry, wskazówka zegara naprzód pokryje oś Y , a potem dopiero — oś Z . Najmniejszy moment bezwładności J przekroju bieżącego przynależy jego osi głównej Z , leżącej w głównej płaszczyźnie XZ bezwładności belki.

Obciążenie zewnętrzne działa bezpośrednio na oś belki i obejmuje wyłącznie tylko siły podłużne, zwykłe i jednostkowe, — niezmiennie równoległe do osi X . To obciążenie ściśle osiowe, a więc rozciągające, lub ściskające, może tylko wydłużyć lub skrócić belkę. Jej odkształcona leży na osi X .

W rzeczywistości jednak obciążenie podłużne nie może być ściśle osiowem. Nawet przy najstaranniejszym obciążaniu belki — siły zewnętrzne podłużne nie trafiają na oś belki: dadzą więc obciążenie mimośrodkowe o znikomym wypadkowym momencie zginającym przekroju bieżącego.

I sama belka nie może być doskonale prosta. Jej oś podłużna stanowi krzywą przestrzenną, znikomo różną od prostej. Krzywizna tej istotnej osi belki, zależna w pierwszej mierze od niedokładności naszych środków technicznych, jest — zawsze — czysto przypadkowa, nie da się przeto wyrazić wzorem w zależności od głównych wymiarów pręta, zwłaszcza, że ciągłym ulega zmianom, przy niejednostajnem ogrzaniu belki. Podobnie działają zgoła nieprzewidziane czynniki zewnętrzne: lekkie uderzenia i wstrząsy, wywołujące drgania.

Nadto tworzywo belki nie może być zupełnie jednolite. Spółczynnik sprężystości podłużnej E nie jest zgoła tożsamościowy we wszystkich punktach przekrojów poprzecznych. Zatem, przy obciążeniu nawet ściśle osiowem, — pierwotnie równoległe płaskie ścianki płytki bieżącej mogą się zwichrzyć po odkształceniu — pochylić, dając nieznaczną krzywiznę osi belki.

Zatem — w przekroju bieżącym panuje, lub może w każdej chwili powstać znikomy moment zginający, zależny od sił podłużnych i mimośrodkowości obciążenia zewnętrznego. Znikomy — daje nieznaczną krzywiznę: belka jest *praktycznie* prosta i po odkształceniu.

Gdy moment ów wzrasta wraz z obciążeniem, belka pozostaje praktycznie prostą w początkowym obszarze obciążeń, rosnących od zera. Na granicy tego obszaru, przy tak zwanem obciążeniu krytycznem, powstaje wyraźne ugięcie belki, zazwyczaj nader szybko zwiększające się wraz z obciążeniem. Belka ulega *wyboczeniu*.

Odkształcona — leży przytem przeważnie w głównej płaszczyźnie XY bezwładności pręta, płaszczyźnie najmniejszego oporu, przynależnej najmniejszym momentom J przekrojów poprzecznych. Prosty przykład najlepiej uwypukli powyższe rozważania.

7. Słup. Nieważki, pierwotnie prosty pręt (Rys. 83) o stałym przekroju F osadzono u podstawy niesprężystie pionowo i obciążono mimośrodowo w górnej ścianie czołowej ciężarem P o sztywnym mimośrodku m , prostopadłym do nieodkształconej osi słupa.

Oznaczmy przez l — długość nieodkształconej; przez s — długość łuku odkształconej, mierzoną od początku osi O — do bieżącego punktu odkształconej o współrzędnych: x, y ; przez φ — odchylenie od osi X — stycznej odkształconej w tym punkcie; przez f — końcowe ugięcie; przez θ — kąt, jaki tworzy z osią X — skrajna styczna odkształconej.

Nieznaczące działanie sił osiowych i ścinających narazie pomijamy. Zatem, w obszarze sprężystości i proporcjonalności równanie odkształconej:

$$\frac{1}{r} = n^2(b - y) \quad n^2 = \frac{P}{EJ} \quad b = m \cos \theta + f$$

Niech będzie:

$$y = b(1 - \cos z)$$

a przeto dla dolnego skrajnego punktu odkształconej:

$$s = y = \varphi = z = 0$$

dla górnego:

$$s = l' \quad y = f \quad \varphi = \theta \quad z = \omega$$

gdzie przez l' oznaczono długość odkształconej, przez ω kąt, czyniący zadość równaniu:

$$b \cos \omega = m \cos \theta$$

W obranym układzie osi:

$$dx = \cos \varphi \, ds \quad dy = \sin \varphi \, ds = r \sin \varphi \, d\varphi = b \sin z \, dz$$

zatem równanie odkształconej da:

$$\sin \varphi \, d\varphi = n^2 b^2 \sin z \cos z \, dz$$

skąd po uwzględnieniu warunku brzegowego w punkcie 0:

$$1 - \cos \varphi = \frac{1}{2} n^2 b^2 \sin^2 z$$

Dalej mamy kolejno:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{nb}{2} \sin z$$

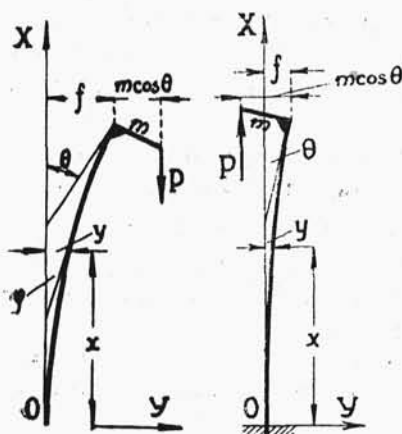
$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{nb}{2} \sin \omega$$

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{n^2 b^2}{4} \sin^2 z$$

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - \frac{1}{4} n^2 b^2 \sin^2 z$$

$$\cos \theta = \frac{1 - \frac{1}{2} n^2 f^2}{1 + m n^2 f} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} n^2 b^2 + \frac{1}{2} n^2 b^2 \cos^2 \omega$$



Rys. 83 i 84.

$$\frac{b}{m} = \frac{1 - \frac{1}{2} n^2 b^2}{\cos \omega} + \frac{n^2 b^2}{2} \cos \omega$$

$$\sin \varphi = nb \sin z \sqrt{1 - \frac{1}{4} n^2 b^2 \sin^2 z} = \frac{dy}{ds} = \frac{b \sin z \, dz}{ds}$$

skąd bezpośrednio:

$$ns = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} n^2 b^2 \sin^2 z}} \quad nl = \int_0^\omega \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} n^2 b^2 \sin^2 z}}$$

ponieważ przy zginaniu—pierwotna długość osi jest niezmienna. Powyższe wzory służą do obliczania słupów i wyznaczania ich

odkształconych — przy *wyrażnych* mimośrodkach m obciążenia zewnętrznego. Odształcone nie leżą na osi X — słup wygina się pod działaniem mimośrodkowego ciężaru P .

8. Mimośród zerowy. Stałe wartości:

$$\frac{1}{r} = y = f = \varphi = \theta = 0$$

przynależne odkształconej — *prostej*, leżącej na osi X , spełniają równanie odkształconej — przy zerowej wielkości b , a więc, co za tem idzie, — przy początkowym mimośrodku:

$$m = 0$$

Warunek ten jest spełniony,

a. gdy m jest stałe i ściśle równe zeru. W tym przypadku:

$$b = f \quad \omega = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} nl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} n^2 b^2 \sin^2 z}} = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{n^2 b^2}{8} \sin^2 z + \dots \right) dz = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} f^2 \left(\frac{\pi^2}{16} + \dots \right) \end{aligned}$$

Zerowej wielkości f przynależy *krytyczna* wielkość obciążenia:

$$n_e l = \frac{\pi}{2} \quad P_e = \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2}$$

zwana siłą Euler'owską.

Jak widać z równań powyższych, w obszarze:

$$0 \leq P \leq P_e$$

słup pozostaje prosty; natomiast gdy jego obciążenie przekroczy granicę P_e , odkształcona staje się krzywą płaską: słup ulega wyboczeniu. Stąd nazwa *siły wybaczającej* P_e .

b. gdy mimośród m rodzi się wraz z ugięciem f i wraz z nim wzrasta według zależności

$$(f, m) = 0$$

która daje:

$$m = f(a + a_1 f + \dots) \quad a > 0$$

W tym przypadku, w obszarze obciążeń rosnących od zera do siły krytycznej:

$$P_0 = EJn_0^2$$

będzie:

$$m = b = y = f = \varphi = \Theta = 0 \quad \omega_0 = n_0 l$$

$$\cos(n_0 l) = \frac{a}{1+a} \quad P_0 = \frac{EJ}{l^2} \left[\arccos\left(\frac{a}{1+a}\right) \right]^2$$

zatem w obszarze:

$$0 \leq P \leq P_0$$

słup pozostaje prosty; natomiast gdy obciążenie przekroczy granicę P_0 — odkształcona staje się krzywą płaską: słup ulega wyboczeniu.

c. może się wreszcie zdarzyć, że mimośród m , początkowo równy zeru, zagnął, przy wzroście obciążenia, zupełnie zresztą odeń niezależnie, — pojawia się, jako skutek działania przyczyn postronnych. Siła P_0 , cisnąca na słup w owej chwili może się stać nieoczekiwanem obciążeniem krytycznem, o ile da wyraźne ugięcie słupa.

9. Ugięcia znikome. W przypadku najogólniejszym mimośrodu m różnego od zera, słup nie może mieć odkształconej prostej. Wygięcie jego może być jednak znikome.

Niedostrzegalna mimośrodkowość obciążenia, albo nieznaczna krzywizna istotnej osi słupa tworzą znikomy mimośród m obciążenia zewnętrznego — ciężaru P . Dalej — niejednorodność tworzywa, drobne odchylenia istotnej osi słupa od prostej X , a nadto drgania, choćby najslabsze, — dają mimośrodkowość obciążenia w przekroju bieżącym — i, — jako skutek — ugięcie f nawet bez mimośrodu m . W tych wszystkich przypadkach słup pozostaje praktycznie prosty, przy:

$$\frac{1}{r}, y, f, b, m, \varphi, \Theta$$

bliskich zeru.

Zatem po odrzuceniu wyrazów rzędu wyższego, zawierających drugą potęgę b , otrzymamy ze wzorów ogólnych:

$$b = f + m \quad nl = \omega \quad m = b \cos \omega$$

a nadto zależność:

$$\cos(nl) = \frac{m}{f+m}$$

dającą siłę krytyczną P_0 przy dodatkowym warunku co do wielkości stosunku dwóch znikomo małych: m, f .

Tak, np. ograniczenie:

$$f \leq m$$

wymaga, aby obciążenie P słupa nie przekraczało $\frac{4}{9}$ (czterech dziewiątych) siły Euler'owskiej:

$$P_e = \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2}$$

Łatwo to dostrzec, zważywszy, że:

$$nl = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_e}}$$

10. Wpływ sił osiowych i ścinających. W przekroju bieżącym słupa wyżej rozpatrywanego, panuje: moment zginający M , a nadto siły: osiowa S i ścinająca Q , przyczem:

$$M = P(b-y) \quad S = -P \cos \varphi \quad Q = P \sin \varphi$$

W obszarze sprężystości i proporcjonalności równanie odkształconej:

$$\frac{1 + \frac{S}{EF}}{r} = \frac{M}{EJ} - \frac{t}{GF} \frac{d^2 M}{ds^2} \quad \dots \quad (150)$$

wobec:

$$\frac{dM}{ds} = -P \frac{dy}{ds} = -P \sin \varphi \quad \frac{d^2 M}{ds^2} = -P \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{P \cos \varphi}{r}$$

da ostatecznie:

$$\frac{1 - v^2 \cos \varphi}{r} = n^2 (b-y)$$

gdzie:

$$n^2 = \frac{P}{EJ} \quad v^2 = \frac{P}{F} \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{G} \right)$$

Jak wyżej:

$$b - y = b \cos z \quad r \sin \varphi \, d\varphi = b \sin z \, dz$$

a przeto:

$$(1 - v^2 \cos \varphi) \sin \varphi \, d\varphi = n^2 b^2 \sin z \cos z \, dz$$

skąd, po uwzględnieniu warunku brzegowego w punkcie 0:

$$1 - \cos \varphi - \frac{v^2}{2} \sin^2 \varphi = \frac{n^2 b^2}{2} \sin^2 z$$

Oznaczmy przez:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{nb}{2h} \sin z$$

a spełnimy poprzednie równanie, czyniąc:

$$h^4 - (1 - v^2) h^2 - \frac{1}{4} v^2 n^2 b^2 \sin^2 z = 0$$

skąd:

$$h^2 = \frac{1 - v^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - v^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} v^2 n^2 b^2 \sin^2 z}$$

Zatem, jak wyżej:

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{n^2 b^2}{4 h^2} \sin^2 z \quad \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - \frac{n^2 b^2}{4 h^2} \sin^2 z$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{n^2 b^2}{2 h^2} \sin^2 z$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{n^2 b^2 \sin^2 \omega}{1 - v^2 + \sqrt{(1 - v^2)^2 + v^2 n^2 b^2 \sin^2 \omega}}$$

$$\sin \varphi = \frac{nb \sin z}{h} \sqrt{1 - \frac{n^2 b^2}{4 h^2} \sin^2 z} = \frac{dy}{ds} = \frac{b \sin z \, dz}{ds}$$

Stąd bezpośrednio:

$$ns = \int_0^z \frac{h \, dz}{\sqrt{1 - \frac{n^2 b^2}{4 h^2} \sin^2 z}} \quad nl' = \int_0^\omega \frac{h \, dz}{\sqrt{1 - \frac{n^2 b^2}{4 h^2} \sin^2 z}}$$

gdzie przez l' oznaczono długość odkształconej słupa.

Siła krytycznej Euler'owskiej przynależą:

$$m = b = f = 0 \quad \omega = \frac{\pi}{2}$$

a przeto:

$$nl' = nl \left(1 - \frac{P}{EF} \right) = \frac{1}{2} \pi h = \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - v^2}$$

stąd, po podstawieniu i pominięciu małych wyższych rzędów:

$$P_e = \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2} \left[1 + \frac{\pi^2 i^2}{4 l^2} \left(1 - t \frac{E}{G} \right) \right] \quad i = \sqrt{\frac{J}{F}}$$

Drugi wyraz nawiasu tego wzoru wyraża wpływ siły osiowej, trzeci wyraz — wpływ siły ścinającej. Oba można pominąć, jako znikome wobec jedności.

11. Siła rozciągająca. Ten sam słup (Rys. 84), obciążony mimośrodowo siłą P rozciągającą, wygina się przy wyraźnym mimośrodku m , sztywnym, prostopadłym do nieodkształconej słupa.

Oznaczmy przez f skrajną rzędną odkształconej, przez θ kąt pochylenia ku osi X jej skrajnej stycznej. Z łatwością można udowodnić, że:

$$b = m \cos \theta - f > 0$$

I tu nieznaczne działanie sił osiowych i ścinających pomijamy. W obszarze sprężystości i proporcjonalności równanie odkształconej:

$$\frac{1}{r} = n^2 (b + y) \quad n^2 = \frac{P}{EJ}$$

Niech będzie:

$$y = b (\operatorname{coh} z - 1)$$

zatem, dla dolnego skrajnego punktu odkształconej:

$$s = y = \varphi = z = 0$$

dla górnego:

$$s = l' \quad y = f \quad \varphi = \theta \quad z = \omega$$

gdzie przez l' oznaczono długość odkształconej; przez ω — kąt, czyniący zadość równaniu:

$$b \operatorname{coh} \omega = m \cos \theta$$

W obranym układzie osi:

$$dx = \cos \varphi ds \quad dy = \sin \varphi ds = r \sin \varphi d\varphi = b \operatorname{sh} z dz$$

a przeto równanie odkształconej daje:

$$\sin \varphi d\varphi = n^2 b^2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z dz$$

skąd, po uwzględnieniu warunku brzegowego w punkcie 0:

$$1 - \cos \varphi = \frac{n^2 b^2}{2} \operatorname{sh}^2 z$$

Dalej mamy:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{nb}{2} \operatorname{sh} z \quad \sin \frac{\Theta}{2} = \frac{nb}{2} \operatorname{sh} \omega$$

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{n^2 b^2}{4} \operatorname{sh}^2 z \quad \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - \frac{n^2 b^2}{4} \operatorname{sh}^2 z$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{n^2 b^2}{2} \operatorname{sh}^2 z \quad \cos \Theta = 1 + \frac{n^2 b^2}{2} - \frac{n^2 b^2}{2} \operatorname{ch}^2 \omega$$

$$\frac{b}{m} = \frac{1 + \frac{1}{2} n^2 b^2}{\operatorname{ch} \omega} - \frac{n^2 b^2}{2} \operatorname{ch} \omega$$

$$\sin \varphi = nb \operatorname{sh} z \sqrt{1 - \frac{n^2 b^2}{4} \operatorname{sh}^2 z} = \frac{dy}{ds} = \frac{b \operatorname{sh} z dz}{ds}$$

stąd bezpośrednio:

$$ns = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{n^2 b^2}{4} \operatorname{sh}^2 z}} \quad nl = \int_0^\omega \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{n^2 b^2}{4} \operatorname{sh}^2 z}}$$

ponieważ przy zginaniu pierwotna długość osi jest niezmienna.

Wzory powyższe służą do obliczania słupów i wyznaczania ich odkształconych — krzywych płaskich — przy *wyraźnych* mimośrodkach m obciążenia zewnętrznego. Odkształcone nie leżą na osi X — słup ugina się pod działaniem mimośrodkowej siły P — rozciągającej.

12. Mimośród znikomy. Stałe wartości:

$$\frac{1}{r} = y = f = \varphi = \Theta = 0$$

przynależne odkształconej — *prostej*, leżącej na osi X , spełniają jej równanie różniczkowe przy zerowej wielkości b , a więc, co za tem idzie, — przy początkowym mimośrodku:

$$m = 0$$

W tym przypadku równanie odkształconej:

$$\frac{1}{r} = n^2 y$$

po uwzględnieniu zależności:

$$r \sin \varphi d\varphi = dy$$

oraz warunku brzegowego w punkcie 0, da:

$$1 - \cos \varphi = \frac{1}{2} n^2 y^2$$

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{n^2 y^2}{4} \quad \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - \frac{n^2 y^2}{4}$$

$$\sin \varphi = ny \sqrt{1 - \frac{1}{4} n^2 y^2} = \frac{dy}{ds}$$

i ostatecznie:

$$ns = \int_0^y \frac{dy}{y \sqrt{1 - \frac{1}{4} n^2 y^2}} = \frac{1}{2} \lg \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4} n^2 y^2} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} n^2 y^2} + 1} \right) \Big|_0^y = \infty$$

Zatem przy zerowym pierwotnym mimośrodku m siła rozciągająca P nie daje ugięcia słupa.

Wygięcie słupa może być jednak znikome, jako pochodne niedostrzegalnej mimośrodkowości obciążenia, niezupełnej jednolitości tworzywa, lub nieznacznej krzywizny istotnej osi słupa. We wszystkich tych przypadkach:

$$f < m \cos \Theta$$

a przeto słup, praktycznie prosty, nie może ulec wyboczeniu pod działaniem siły P rozciągającej, praktycznie osiowej. Jego odkształcona praktycznie utożsamia się z odcinkiem osi X — pierwotnej osi słupa.