

Jakiegokolwiek inne włókno pod działaniem naprężenia N_x wydłuży się o:

$$\delta dx = e_x dx = \frac{N_x}{E} dx$$

Jak widać z rysunku:

$$\delta dx = j d\varphi \quad \overline{O'O''} = j_o d\varphi \quad \overline{OO''} = dx + \frac{O_x}{EF} dx = r d\varphi$$

a przeto ostatecznie, po uwzględnieniu (91) otrzymamy wzory:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1 + \frac{O_x}{EF}}{r} = \frac{M_g}{E} \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_y^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_z^2}} \quad \dots (103)$$

$$j_o = \frac{O_x}{FM_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_y^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_z^2}}}$$

dla zginania mimośrodowego. W tych wzorach F oznacza pole przekroju, J_y, J_z — jego momenty bezwładności względem osi głównych Y, Z , — ω — kąt pochylenia momentu zginającego M_g ku osi Y .

Przy zginaniu właściwym siła osiowa O_x jest równa zeru. Linia obojętna przechodzi przez środek przekroju: jej odległość od tego środka:

$$j_o = 0$$

Nadto:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{r} = \frac{M_g}{E} \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_y^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_z^2}} \quad \dots (104)$$

B. Część druga.

1. Zginanie płaskie. Zginanie jest *płaskie*, gdy moment zginający leży na głównej osi bieżącego przekroju. Linia obojętna jest do tej osi równoległa. Nazwijmy ją osią Z . Wzór (41) da naprężenie:

$$N_x = \frac{O_x}{F} - \frac{M_z}{J_z} y$$

dla zginania płaskiego mimośrodowego. Skrajne naprężenia panować będą w punktach przekroju najbardziej oddalonych od osi Z , a więc przynależnych skrajnym rzędnym y_1, y_2 . Oznaczmy przez:

$$W_{z1} = \frac{J_z}{y_1} \quad W_{z2} = \frac{J_z}{y_2}$$

Skrajne naprężenia będą:

$$N_{x1} = \frac{O_x}{F} - \frac{M_z}{W_{z1}} \quad N_{x2} = \frac{O_x}{F} - \frac{M_z}{W_{z2}}$$

Ilorazy W_{z1}, W_{z2} noszą miano *momentów wytrzymałości* na zginanie. Dla przekrojów symetrycznych względem osi Z :

$$W_{z1} = W_{z2} = W_z$$

a przeto:

$$N_{x1} = \frac{O_x}{F} + \frac{M_z}{W_z} \quad N_{x2} = \frac{O_x}{F} - \frac{M_z}{W_z}$$

2. Momenty wytrzymałości.

- a. Przekrój kołowy: pełny średnicy D lub promienia R :

$$W_y = W_z = \frac{1}{32} \pi D^3 = \frac{1}{4} \pi R^3$$

Pierścieniowy średnicy zewnętrznej D , wewnętrznej d , lub promienia zewnętrznego R i wewnętrznego r :

$$W_y = W_z = \pi \frac{D^4 - d^4}{32 D} = \pi \frac{R^4 - r^4}{R}$$

- b. Przekrój eliptyczny pełny: półos mała b leży na osi Y , wielka c — na osi Z :

$$W_y = \frac{1}{4} \pi c^2 b \quad W_z = \frac{1}{4} \pi b^2 c$$

- c. Prostokąt pełny o wysokości h i podstawie b . Główna oś Y jest prostopadła do podstawy:

$$W_y = \frac{1}{6} b^2 h \quad W_z = \frac{1}{6} b h^2$$

- d. Dwuteownik Nr. 25. Oś Y stanowi zarazem podłużną oś środka. Wysokość dwuteownika 25 cm, szerokość pasów 11 cm. Tablice dają:

$$J_y = 256 \text{ cm}^4 \quad J_z = 4966 \text{ cm}^4$$

a przeto:

$$W_y = 256 : 5,5 = 46,5 \text{ cm}^3 \quad W_z = 4966 : 12,5 = 397 \text{ cm}^3$$

jako dla osi symetrii przekroju.

- e. Ceownik Nr. 30. Wysokość przekroju 30 cm, szerokość obu pasów: 10 cm. Odległość środka O przekroju od zewnętrznej płaskiej powierzchni ścianki łączącej: 2,7 cm. Główną oś Y wyprowadzamy ze środka O równolegle do tej powierzchni, a więc prostopadle do równoległych ścianek pasów. Dla osi Y mamy z tablic:

$$J_y = 495 \text{ cm}^4 \quad z_1 = \pm 2,7 \text{ cm} \quad z_2 = \pm (10 - 2,7) \text{ cm}$$

Dla drugiej głównej osi Z , symetrii przekroju:

$$J_z = 8026 \text{ cm}^4 \quad y_1 = -y_2 = \pm 15 \text{ cm}$$

a przeto:

$$W_{y1} = \pm 183 \text{ cm}^3 \quad W_{y2} = \mp 67,8 \text{ cm}^3 \quad W_z = 535 \text{ cm}^3$$

3. **Praca sprężysta.** W płaszczyznach głównych pręta bezwładnościowo: jednorodnego, na osiach głównych Y, Z bieżącego przekroju F — leżą składowe M_y, M_z momentów zginających. Siła osiowa O_x leży na osi X pręta. Wzór (59) daje pracę jednostkową:

$$W = \frac{N_x^2}{2E}$$

zatem, wobec (41) — praca sprężysta płytki:

$$dH = \frac{dx}{2E} \int_F \left(\frac{O_x}{F} - \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z \right)^2 dy dz = \left(\frac{O_x^2}{F} + \frac{M_y^2}{J_y} + \frac{M_z^2}{J_z} \right) \frac{dx}{2E}$$

jako że dla osi głównych momenty statyczne i moment odśrodkowy przekroju są równe zeru.

Stąd, dla odcinka x pierwotnej długości l pręta:

$$H_x = \int_0^x \frac{O_x^2 dx}{2 EF} + \int_0^x \frac{M_y^2 dx}{2 EJ_y} + \int_0^x \frac{M_z^2 dx}{2 EJ_z}$$

a dla całego pręta: . . (105)

$$H = \int_0^l \frac{O_x^2 dx}{2 EF} + \int_0^l \frac{M_y^2 dx}{2 EJ_y} + \int_0^l \frac{M_z^2 dx}{2 EJ_z}$$

Powyższe wzory są słuszne tylko w obszarze sprężystości i proporcjonalności tworzywa przy zginaniu.

4. Wygięcie Lamarle'a. W pionowej płaszczyźnie głównej nieważkiego poziomego pręta prostego o stałym przekroju leżą osie główne Y wszystkich przekrojów. Pierwotna, prosta oś X pręta jest pozioma. Na osiach Z czołowych ścianek pręta leżą dwa różnozwrotne momenty M_z obciążenia zewnętrznego. Zatem moment zginający bieżącego przekroju jest stały i równy M_z a siła osiowa równa zero. Stąd bezpośrednio na mocy (103):

$$\frac{1}{r} = \frac{M_z}{EJ_z}$$

jako że kąt ω nachylenia momentu zginającego ku osi Y jest prosty. Odkształconą stanowi łuk koła promienia:

$$r = \frac{EJ_z}{M_z}$$

i długości l — pierwotnej długości pręta. Cięciwą tego łuku będzie prosta, łącząca środki czołowych ścianek pręta. Odcinek osi symetrii, zawarty pomiędzy łukiem a cięciwą, zwie się *strzałką* f odkształconej, przyczem niewątpliwie:

$$f = \frac{EJ_z}{M_z} \left[1 - \cos \left(\frac{l M_z}{2 EJ_z} \right) \right]$$

W pierwszym przybliżeniu:

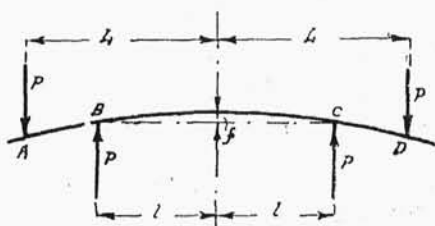
$$f = \frac{EJ_z}{M_z} \left[1 - 1 + \frac{1}{1.2} \left(\frac{l M_z}{2 EJ_z} \right)^2 - \dots \right] \simeq \frac{M_z l^2}{8 EJ_z}$$

5. Granice S_g, P_g . Próbkę stanowi pręt prosty o stałym przekroju, zazwyczaj kwadratowym, lub prostokątnym. Obciąż-

żenie zginające (Rys. 56) daje siłę osiową równą zeru i stały moment zginający:

$$M_z = P(L - l)$$

a zatem i stałe naprężenie najwyższe w odcinku BC :



Rys. 56

$$N_m = \frac{M_z}{W_z}$$

Odkształconą stanowi tu łuk koła o promieniu i strzałce:

$$r = \frac{EJ_z}{M_z} \quad f = \frac{l^2 M_z}{2 EJ_z}$$

W obszarze sprężystości tworzywa stopniowym obciążeniem siłami P przynależą sprężyste ugięcia f , ginące bez śladu po stopniowym odciążeniu próbki. Pierwsza, różna od zera strzałka niesprężysta odpowiada skrajnemu naprężeniu zginającemu, zwanemu *granica sprężystości* S_g tworzywa przy zginaniu. Zatem w obszarze *niesprężystości* skrajnemu naprężeniu zginającemu:

$$N_m \geq S_g$$

przynależy strzałka f , złożona z części f_s , — sprężystej, ginącej wraz z obciążeniem i części f_n — niesprężystej, pozostającej po stopniowym odciążeniu. Strzałki należy mierzyć z taką dokładnością, aby skrajne wydłużenia jednostkowe:

$$e_m = \frac{N_m}{E} = \frac{M_z}{E W_z}$$

mniejsze od 0,00001, uważać można było za znikome. Zatem *granice sprężystości tworzywa przy zginaniu stanowi skrajne naprężenie zginające* S_g , przynależne *niesprężystemu wydłużeniu skrajnemu* 0,00001, to jest niesprężystej strzałce:

$$f_n = 0,000005 \frac{l^2 W_z}{J_z}$$

przy *wygięciu Lamarle'a* pręta o stałym przekroju. W obszarze proporcjonalności skrajne naprężenia N_m , zawarte w granicach:

$$P_g \geq N_m \geq 0$$

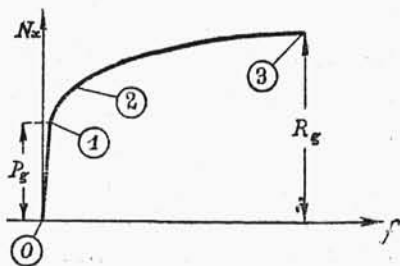
są proporcjonalne do strzałek f sprężystych, lub do sprężystych części f_s strzałek, mających część niesprężystą f_n . Najwyższe naprężenie P_g tego obszaru zowie się *granica proporcjonalności* tworzywa przy zginaniu. W obszarze proporcjonalności *spółczynnik sprężystości podłużnej*:

$$E = \frac{l^2 M_z}{2 f J_z}$$

ma wielkość stałą i może być wyznaczony zapomocą przyrządu, mierzącego strzałki f przy zginaniu zupełnie tak samo, jak zapomocą ekstensometru (III. C. 4).

6. Próba na zginanie. Swoisty przyrząd maszyny probierczej samoczynnie kreśli wykres tworzywa przy próbie na zginanie, zazwyczaj *Lamarle'a*. Podstawowa oś wykresu (Rys. 57) daje w skali strzałkę f próbki o stałym przekroju. Druga oś prostopadła — daje w innej skali siłę P , moment zginający M_z , lub skrajne naprężenie N_m .

W obszarze sprężystości i proporcjonalności krzywa wykresu jest prostą. Górną granicę tego obszaru stanowi P_g , gdy $S_g \geq P_g$. W tym przypadku pomiędzy P_g i S_g leży



Rys. 57.

obszar strzałek sprężystych, nieproporcjonalnych do N_m . Granica sprężystości S_g nie jest widoczna na wykresie. Poza nią zaczyna się *obszar niesprężystości*: strzałki mają wyraźną część niesprężystą f_n , zrazu nieznaczną, potem coraz szybciej rosnącą wraz z obciążeniem. W początkowym obszarze niesprężystości linia wykresu pochyla się ku podstawie wykresu — zrazu nieznacznie, potem coraz bardziej — zwłaszcza w *obszarze niesprężystości końcowym* (2—3). Ten obszar jest nieograniczony dla tworzyw miękkich: próbkę można zgiąć aż do zetknięcia się końców. Dla tworzyw twardych, przy najwyższym skrajnym naprężeniu R_g próbka zginana pęka — łamie się. To naprężenie R_g — niszczące, zowie się *wytrzymałością* tworzywa na zginanie. Krzywa wykresu przechodzi z początkowego obszaru niesprężystości w końcowy bezpośrednio, bez wyraźnie zaznaczającego się na wykresie przejściowego obszaru podatności, aczkolwiek na *polerowanych* ściankach próbki można dostrzec

linje podatności, gdy naprężenie N_m osiąga *granice podatności* Q_g tworzywa na zginanie.

Zatem próbka tworzywa na zginanie daje właściwe mu *cechy wytrzymałościowe*:

$$S_g, \quad R_g$$

a nadto może służyć do określania współczynnika sprężystości podłużnej, nieco większego od E , określonego zapomocą ekstensometru.

7. Naprężenia dopuszczalne. Na zestawieniu:

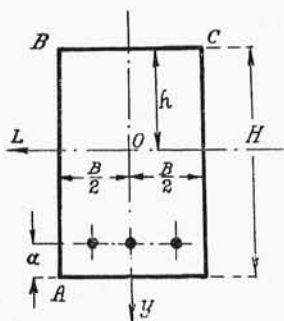
ZESTAWIENIE.

OBciążENIE:		TRWAŁE	POWTA- RZANE	PRZE- MIENNE
NAPRĘżENIE:	R_r	k_g	k_g	k_g
Żeliwo	1300—1800	300— 700	200— 450	100—250
Żeliwo kowalne	2000—3000	450— 700	300— 450	150—250
Stal zgrzewna	3000—4500	900—1200	550— 800	300—450
Stal zlewna	3000—4500	900—1500	550—1000	300—750
Stal zlewna	4500—7000	1200—1800	800—1200	400—900
Stal tyglowa	4500—9000	1200—2500	800—1600	400—800
Stal niklowa	4500—9000	1200—1800	800—1200	400—600
Stal lana	3500—6000	750—1200	450— 800	250—600
Miedź	2000—2700	400— 550	250— 350	130—180
Bronz	2000—2500	400— 500	250— 350	130—170
Bronz fosforowy	3000—4500	600— 900	400— 600	200—300
Spiż	1800—2200	300— 400	200— 250	100—130
Mostłdz	2000—3000	400— 600	250— 400	130—200
Mostłdz przedni	3500—6000	600—1000	400— 650	200—300
Glin lany	900—1200	150— 200	100— 130	50— 70
Dąb (drewno)	350— 500	100— 130	70— 90	35— 45
Sosna, jodła	250— 400	80— 100	50— 70	25— 35

podano *dopuszczalne naprężenie* k_g w kg/cm^2 tworzywa przy zginaniu, a nadto — jego *wytrzymałość* na rozciąganie R_r w kg/cm^2 . Naprężenia dopuszczalne uzależniono od rodzaju obciążenia: trwałego, powtarzanego i przemennego.

Skrajne naprężenie N_m w *każdym* przekroju pręta prostego zginanego nie powinno przekraczać *naprężenia dopuszczalnego*. Największe N_g z naprężeń N_m wyodrębnia *przekrój niebezpieczny*; wymiary pręta należy przeto dobrać tak, aby N_g było równe k_g . Spełnienie tego warunku zabezpiecza pręt wytrzymałościowo.

8. Przekrój niejednolity. Płytką (Rys. 58) o równoległych ściankach prostokątnych, wyodrębniona z żelazobetonowego pręta prostego, zawiera w swej dolnej części rozciąganej — zbrojenie podłużne, złożone z prętów stalowych. Oznaczmy przez f ich łączny przekrój i załóżmy, że moment zginający M_g jest prostopadły do osi symetrii Y przekroju BH .



Rys. 58.

Zazwyczaj nie bierze się pod uwagę naprężeń rozciągających betonu, jako stosunkowo niewielkich, uwzględniając wyłącznie tylko naprężenia rozciągające N_f zbrojenia. Naprężenia ściskające w górnej części, czysto betonowej, rosną linijowo od zera na linii obojętnej L do skrajnej wielkości N_b — tuż pod górną ścianką BC płytki.

Oznaczmy przez h odległość linii obojętnej od ścianki BC . Wypadkowa naprężeń ściskających betonu — $\frac{1}{2} B h N_b$ działa w odległości $\frac{2}{3} h$ od linii obojętnej. Jej wielkość bezwzględna jest niewątpliwie równa wypadkowej: $f N_f$ naprężeń rozciągających zbrojenia, ponieważ siła osiowa przekroju BH , obciążonego tylko momentem gnącym, jest równa zeru. Zatem:

$$f N_f = \frac{1}{2} B h N_b$$

a nadto:

$$M_g = \left(H - a - \frac{1}{3} h \right) f N_f = \frac{1}{2} \left(H - a - \frac{1}{3} h \right) B h N_b$$

Stąd ostatecznie:

$$N_b = \frac{2 M_g}{\left(H - a - \frac{1}{3} h \right) B h} \quad N_f = \frac{M_g}{\left(H - a - \frac{1}{3} h \right) f}$$

Chcąc znaleźć h , zakładamy, że obie, pierwotnie płaskie, równoległe ścianki płytki nie wicherzą się przy odkształceniu, inaczej mówiąc zakładamy, że wydłużenia jednostkowe rosną proporcjonalnie do odległości od linii obojętnej. A przeto:

$$\frac{N_b}{E_b} : \frac{N_f}{E_f} = h : (H - h - a)$$

gdzie przez E_b , E_f oznaczono odpowiednio współczynniki sprężystości podłużnej betonu i stali. Stąd ostatecznie:

$$h = \frac{nf}{B} \left[\sqrt{1 - \frac{2B}{nf}(H - a)} - 1 \right]$$

gdzie:

$$n = E_f : E_b$$

C. Część trzecia.

1. Obciążenia niszczące. Pręt prosty zginany ulega złamaniu w przekroju niebezpiecznym, gdy skrajne naprężenie zginające N_g tego przekroju staje się równem wytrzymałości tworzywa na zginanie.

Odpowiednie obciążenie niszczące zawsze może być wyznaczone ze wzorów ogólnych.

Przykład (Rys. 59). Dyl o stałym przekroju kwadratowym 12×12 cm osadzony jednostronnie. Wolna długość dyla — 1 m.

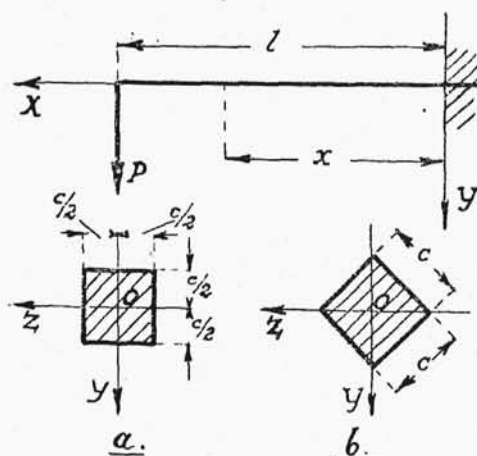
Tworzywo: dębina o wytrzymałości 600 kg/cm^2 na zginanie. Siła zewnętrzna P daje w przekroju osadzonym — *niebezpiecznym* — największy moment zginający:

$$M_z = Pl = 100 P \text{ cm.kg}$$

Siłę niszczącą P_n wyznaczmy ze wzoru:

$$100 P_n = W_z R_g$$

Gdy siła P jest równo-



Rys. 59.

legła do boku c przekroju kwadratowego:

$$W_z = \frac{1}{6} \times 12^3 = 288 \text{ cm}^3 \quad P_n = \frac{600 \times 288}{100} = 1728 \text{ kg}$$

gdy siła P jest równoległa do przekątnej tego przekroju:

$$W_z = \frac{1}{12} \times 12^4 \times \frac{2}{12\sqrt{2}} = 203 \text{ cm}^3 \quad P_n = \frac{600 \times 203}{100} = 1218 \text{ kg}$$

W pierwszym przypadku pręt jest bardziej wytrzymały na zginanie.

2. Pręt zginany. Bieżący przekrój dzieli pręt na dwie części. Obciążenie zewnętrzne jednej z nich, po sprowadzeniu do środka tego przekroju daje w ogólnym przypadku zginania mimośrodowego: siłę osiową i moment zginający, a, co za tem idzie — i skrajne, bezwzględnie największe naprężenie N_m przekroju. Najwyższe N_g z naprężeń N_m wyodrębnia przekrój niebezpieczny i, jako takie, winno być równe dopuszczalnemu naprężeniu k_g tworzywa na zginanie. Zatem jeden tylko przekrój niebezpieczny jest wytrzymałościowo należycie wyzyskany: pozostałe są zbyt sowe.

Jednakowa wielkość k_g naprężeń N_m *wszystkich* przekrojów cechuje pręt o *stałej wytrzymałości* na zginanie. Tego rodzaju pręt jest najoszczędniejszy pod względem wytrzymałościowego wyzyskania tworzywa, a przeto najlżejszy.

Przykłady: a. Przekrój dwuteowy. Wysokość dwuteowego przekroju — h , szerokość pasów — b . Główna oś Y stanowi zarazem podłużną oś środka. Tworzywo — stal o naprężeniu dopuszczalnym 1200 kg/cm^2 . Moment zginający: 50000 cm.kg tworzy kąt:

$$\omega = 61^\circ 40'$$

z osią Y . Siła osiowa rozciągająca: 2700 kg .

Linia nowego naprężenia, przechodząca przez środek przekroju, leży w jednej ćwiartce osi głównych Y, Z z momentem zginającym M_g , zatem linie skrajnych naprężeń przejdą przez węglowe punkty:

$$\left(-\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}b\right) \quad \left(\frac{1}{2}h, -\frac{1}{2}b\right)$$

przekroju. Skrajne naprężenia będą:

$$N_{x1}, N_{x2} = \frac{2700}{F'} \pm \frac{50000 \times 0,8802}{J_z} \frac{h}{2} \pm \frac{50000 \times 0,4746}{J_y} \frac{b}{2}$$

Wobec dodatniej siły osiowej należy wziąć górne znaki. Najwyższe naprężenie przeto:

$$N_m = \frac{2700}{F} + \frac{44010}{W_x} + \frac{23730}{W_y} = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

panuje w punkcie:

$$\left(-\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}b\right)$$

Po kilku próbach przekonamy się, że *dwuteownik* № 20 spełnia to równanie. Dla tego przekroju:

$$\begin{aligned} h &= 20 \text{ cm} & b &= 9 \text{ cm} & F &= 33,5 \text{ cm}^2 & J_y &= 117 \text{ cm}^4 \\ J_x &= 2142 \text{ cm}^4 & W_y &= 26 \text{ cm}^3 & W_x &= 214 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Najwyższe naprężenie dodatnie, rozciągające $+1199 \text{ kg/cm}^2$ panuje w punkcie:

$$(-10 \text{ cm}, 4,5 \text{ cm})$$

skrajne ściskające: -1038 kg/cm^2 w punkcie:

$$(10 \text{ cm}, -4,5 \text{ cm})$$

Linia obojętna:

$$\frac{2700}{33,5} - \frac{44010}{2142} Y + \frac{23730}{117} Z = 0$$

przecina osie współrzędnych w punktach:

$$(3,92 \text{ cm}, 0) \quad (0, -0,39 \text{ cm})$$

b. Przekrój kołowy: pełny średnicy D . Tworzywo—stal o naprężeniu dopuszczalnym 10 kg/mm^2 . Siła osiowa rozciągająca: 8,3 t, moment zginający: 0,15 mt. Wobec zupełnej dowolności wyboru osi głównych, można założyć, że moment zginający leży na osi Z . Zatem:

$$N_m = \frac{8300}{F} + \frac{15000}{W_z} = 1000 \text{ kg/cm}^2$$

stąd po kilku próbach:

$$D = 6 \text{ cm.}$$

Skrajne naprężenia panują na obwodzie w punktach przecięcia się z osią Y , przyczem:

$$N_m = N_{x_1} = 1001 \text{ kg/cm}^2 \quad N_{x_2} = -414 \text{ kg/cm}^2$$

Linia obojętna prostopadle przecina oś Y w punkcie:

$$(1,25 \text{ cm}, 0)$$

Środek naprężeń leży na osi Y w punkcie:

$$(-1,81 \text{ cm}, 0)$$

Rdzeń ma obwód kołowy średnicy 1,5 cm.

c. Przekrój ceownikowy. Wysokość ceownikowego przekroju — h , szerokość pasów — b . Oś Z jest osią symetrii przekroju. Tworzywo — stal o naprężeniu dopuszczalnym 1200 kg/cm^2 . Moment zginający 2,3 mt leży na osi głównej Z .

Wobec symetrii przekroju i braku siły osiowej — skrajne naprężenia, panujące na zewnętrznych powierzchniach pasów, mają tę samą wielkość przy różnych znakach, zatem:

$$W_z = \frac{M_g}{k_g} = \frac{230000}{1200} = 191,7 \text{ cm}^3$$

Najbliższe W_z przynależy ceownikowi Nr. 20. Dla tego przekroju: $h = 20 \text{ cm}$, $b = 7,5 \text{ cm}$, $J_y = 148 \text{ cm}^4$, $J_z = 1911 \text{ cm}^4$, $W_z = 191 \text{ cm}^3$. Środek przekroju leży w odległości 2,01 cm od zewnętrznej powierzchni środka, a przeto:

$$z_1 = \pm 2,01 \text{ cm} \quad z_2 = \mp (7,5 - 2,01) = \mp 5,49 \text{ cm}$$

$$W_{y1} = \pm \frac{148}{2,01} = \pm 73,6 \text{ cm}^3 \quad W_{y2} = \mp \frac{148}{5,49} = \mp 27 \text{ cm}^3$$

Zatem przy tem samym skrajnym naprężeniu dopuszczalnym 1200 kg/cm^2 na osi Y może leżeć moment zginający:

$$M_y = 1200 \times 27 = 32400 \text{ cm kg} = 0,324 \text{ mt}$$

a więc znacznie mniejszy od wyżej rozpatrywanego. Nadto przy momencie zginającym M_y na zewnętrznej powierzchni środka panuje naprężenie skrajne odwrotnego znaku liczbowo równe:

$$\frac{32400}{73,6} = 440 \text{ kg/cm}^2$$

Znaczna różnica liczbowa skrajnych naprężeń zginających wskazuje, że przekrój wytrzymałościowo nie jest wykorzystany należycie w tym przypadku, gdy moment zginający leży na osi Y .

3. **Pręt o stałej wytrzymałości na zginanie.** Weźmy pod uwagę jednostronnie osadzony (Rys. 59) pręt, bezwładnościowo jednorodny. Na osi głównej Z poziomej przekroju bieżącego, przynależnego odciętej x , leży moment zginający:

$$M_z = P(l - x)$$

Oznaczmy przez W_z moment wytrzymałości przekroju bieżącego względem osi Z , zatem dla pręta o stałej wytrzymałości na zginanie:

$$M_z = P(l - x) = W_z k_g$$

Dla przekroju osadzonego:

$$M_{zo} = Pl = W_{zo} k_g$$

i ostatecznie:

$$W_z = W_{zo} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Tak, np. dla przekroju prostokątnego o poziomej podstawie B i pionowej wysokości H :

$$BH^2 = B_0 H_0^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

gdzie przez B_0, H_0 oznaczono podstawę i wysokość przekroju osadzonego. Zatem dla pręta o *stałej wysokości* H :

$$B = B_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

pręt, widziany z góry, ma kształt trójkąta, symetrycznego względem osi podłużnej X .

Dla pręta o *stałej szerokości* B :

$$H = H_0 \sqrt{1 - \frac{x}{l}}$$

Obciążenie zewnętrzne może pokrywać całą długość l pręta ciągłą warstwą niezmienną grubości. Jej ciężar P , dzielony przez l , da obciążenie jednostkowe q w jednostkach siły na

jednostkę bieżącą pierwotnej długości pręta: a więc w $\frac{\text{kg}}{\text{cm}}$ lub $\frac{\text{t}}{\text{mb}}$. I tu i tam znak b stanowi skrót słowa „bieżący”.
Zatem:

$$M_z = \frac{1}{2} q (l-x)^2 \quad M_{zo} = \frac{1}{2} q l^2 = W_{zo} k_g$$

$$W_z = W_{zo} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$

Tak np., jak wyżej, dla przekroju prostokątnego:

$$BH^2 = B_o H_o^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$

Zatem dla pręta o stałej szerokości B :

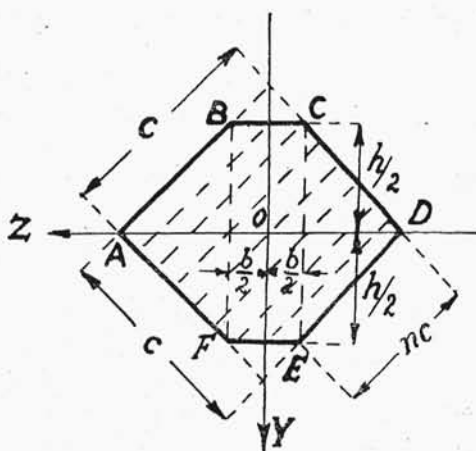
$$H = H_o \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

pręt, widziany z boku, ma zarys trójkąta, symetrycznego względem podłużnej osi X .

Dla pręta o stałej wysokości H :

$$B = B_o \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$

4. Wyzyskanie wytrzymałościowe przekroju. Pręt prosty poziomy, jednostronnie osadzony, obciążono siłą P pionową (Rys. 59). Stały kwadratowy przekrój pręta może mieć boki c lub przekątne poziome i pionowe. W pierwszym przypadku (a) moment wytrzymałości przekroju W_z jest $\sqrt{2}$ — razy większy, a sam pręt tyleż razy bardziej wytrzymały na obciążenie siłą P . W drugim przypadku (b) można wytrzymałość pręta nieco powiększyć spłaszczeniem ostrych kątów przekroju (Rys. 60). Dla tego przekroju:



Rys. 60.

$$h = nc\sqrt{2} \quad b = (1-n)c\sqrt{2}$$

$$J_z = \frac{1}{12}n^4c^4 + \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}n^3(4-3n)c^4$$

$$W_z = \frac{1}{12}\sqrt{2}n^3(4-3n)c^3$$

Największość:

$$W_{zm} = \frac{64\sqrt{2}}{729}c^3 = 0,124c^3$$

przynależy:

$$n = \frac{8}{9} \quad h = \frac{8\sqrt{2}}{9}c = 1,257c \quad b = \frac{\sqrt{2}}{9}c = 0,157c$$

a przeto W_{zm} jest:

$$\frac{256}{243} = 1,0545$$

razy większe niż w przypadku (b).

5. Rdzeń dwuteownika. Weźmy pod uwagę wyżej (2, a) rozpatrywany przekrój dwuteownika Nr. 20. Dla linii obojętnych — uogólnionych stycznych obu pasów:

$$y = \pm \frac{1}{2}h \quad z' = \infty$$

a przeto ich środki naprężeń leżą na osi Y w odległości:

$$y_r = \mp \frac{2J_z}{Fh} = \mp \frac{2 \times 2142}{33,5 \times 20} = \mp 6,394 \text{ cm}$$

Dla linii obojętnych, pokrywających boczne wklęsłości przekroju:

$$z = \pm \frac{1}{2}b \quad z' = 0$$

Ich środki naprężeń leżą na osi Z w odległości:

$$z_r = \mp \frac{2J_y}{Fb} = \mp \frac{2 \times 117}{33,5 \times 9} = \mp 0,776 \text{ cm}$$

Łącząc te punkty prostymi otrzymamy ukośnik — obwód rdzenia. Wyznamy skrajne naprężenia przekroju zapomocą pro-

mieni rdzenia. Oś sił momentu M_g tworzy kąt:

$$\varphi = 151^\circ 40'$$

z główną osią Y przekroju. Jej równanie:

$$Z = -0,5392 Y$$

Dodatnia oś sił przecina prostą obwodu rdzenia:

$$\frac{Y}{6,394} - \frac{Z}{0,776} + 1 = 0$$

ujemna zaś — prostą:

$$\frac{Y}{6,394} - \frac{Z}{0,776} - 1 = 0$$

zatem oba promienie rdzenia są jednakowe i równe 1,334 cm.

Stąd bezpośrednio skrajne naprężenia:

$$\left. \begin{matrix} N_{x1} \\ N_{x2} \end{matrix} \right\} = \frac{2700}{33,5} \pm \frac{50000}{33,5 \times 1,334} = \left\{ \begin{matrix} 1199 \\ -1038 \end{matrix} \right. \text{ kg/cm}^2$$

6. Drut średnicy d nawinięto ściśle, lecz bez rozciągnięcia na bęben. Jaką należy obrać średnicę D bębna, aby naprężenie drutu nie przekroczyło k_g ?

Po nawinięciu — śrubowy zwój odkształconej ma długość: $\pi(D+d)$, skrajnego włókna zewnętrznego: $\pi(D+2d)$ i wewnętrznego: πD . Zatem skrajne wydłużenie jednostkowe włókna zewnętrznego — dodatnie, lub wewnętrznego — ujemne:

$$\frac{\pi(D+2d) - \pi(D+d)}{\pi(D+d)} = -\frac{\pi D - \pi(D+d)}{\pi(D+d)} = -\frac{d}{D+d}$$

przynależy najwyższemu naprężeniu:

$$N_m = \frac{Ed}{D+d} = k_g$$

skąd bezpośrednio:

$$D = \left(\frac{E}{k_g} - 1 \right) d$$

7. Pręt pionowy, o stałym przekroju prostokątnym $B \times H$, dźwiga osiową siłę P pionową, przyłożoną do środka dolnej

ścianki czołowej pręta. W połowie długości wyciosano wręb zmniejszający przekrój poprzeczny o połowę H .

W pełnym przekroju pręta panuje naprężenie osiowe:

$$N_x = \frac{P}{BH}$$

Obciążenie przekroju zmniejszonego obejmuje: siłę osiową P i moment zginający $\frac{1}{4}PH$, a przeto skrajne naprężenia przekroju zwężonego:

$$\frac{P}{\frac{1}{2}BH} \pm \frac{\frac{1}{4}PH}{\frac{1}{6}B\left(\frac{1}{2}H\right)^2}$$

Stąd ostatecznie:

$$N_{x1} = \frac{8P}{BH} \quad N_{x2} = -\frac{4P}{BH}$$

Zatem w stosunku do przekroju pełnego naprężenie rozciągające powiększy się aż ośmiokrotnie.

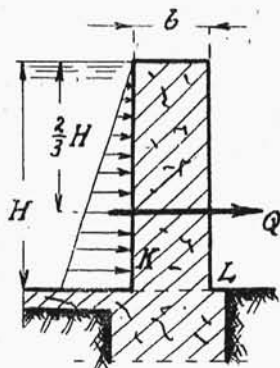
8. Mur oporowy (Rys. 61), stanowiący tamę, ulega ciśnieniu słupa wody, dochodzącej aż do górnego brzegu. To ciśnienie rośnie proporcjonalnie do odległości od poziomu. Wykres ciśnień jest przeto trójkątny o wysokości H i podstawie wH , gdzie w oznacza ciężar właściwy wody.

Wyodrębnijmy myślowo odcinek ∂ długości muru. Wypadkowa Q parcia wody na powierzchnię ∂H , równa $\frac{1}{2}w\partial H^2$ działa w odległości $\frac{2}{3}H$ od poziomu wody, daje więc moment zginający:

$$\frac{1}{6}w\partial H^3$$

po sprowadzeniu do środka dolnego przekroju KL muru. Nadto górne warstwy muru cisną na przekrój KL pośrodku z siłą:

$$m\partial bH$$



Rys. 61.

gdzie przez m oznaczono ciężar właściwy muru. Skrajne naprężenia będą odpowiednio:

$$-\frac{m\partial bH}{\partial h} \pm \frac{\frac{1}{6}w\partial H^3}{\frac{1}{6}\partial b^2}$$

Rozciągające panuje u podstawy wewnętrznej K , ściskające — u podstawy zewnętrznej L , a przeto:

$$\begin{aligned} -mH + w\frac{H^3}{b^2} &< k_r \\ +mH + w\frac{H^3}{b^2} &< k_c \end{aligned}$$

Tutaj przez k_r, k_c oznaczono odpowiednie naprężenia dopuszczalne muru przy rozciąganiu i ściskaniu.

9. Narożnik płyty poziomej odłamał się pod naciskiem pionowej siły P , przyłożonej w samym rogu. Odłamany narożnik ma zarys trójkątny: złom tworzy przeciwprostokątną, pochyłą pod kątem φ ku jednej z przyprostokątnych. Wyznamy prawdopodobną wielkość tego kąta. W tym celu długość owej przyprostokątnej oznaczamy przez b , grubość płyty — przez c .

Po sprowadzeniu do środka prostokątnego przekroju pęknięcia — niewątpliwie niebezpiecznego przekroju płyty, siła P da moment zginający:

$$Pb \sin \varphi$$

Moment wytrzymałości tego przekroju:

$$\frac{1}{6} \frac{bc^2}{\cos \varphi}$$

a przeto dla skrajnego naprężenia N_m będziemy mieli:

$$Pb \sin \varphi = \frac{1}{6} \frac{bc^2}{\cos \varphi} N_m$$

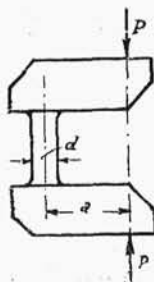
To naprężenie, jak widzimy, zależne jest od kąta φ . Największe — N_g przynależy φ — równemu 45° . Łatwo się o tem przekonać, biorąc pochodną. Zatem dla siły łamiącej P_n :

$$N_g = \frac{3P}{c^2} = R_g$$

skąd bezpośrednio:

$$P_n = \frac{1}{3} c^2 R_g$$

10. Wałek (Rys. 62) obustronnie osadzony w krzepkich szczękach i obciążony mimośrodkowo siłami P . Oznaczmy przez d jego średnicę, przez a — odległość pomiędzy osiami wałka i sił P , zatem po sprowadzeniu siły P do środka bieżącego przekroju wałka otrzymamy: siłę osiową ściskającą P , i moment zginający Pa .



Rys. 62.

W przekroju bieżącym na końcach średnicy d , równoległej do a , panują skrajne naprężenia: od strony osi sił P — ściskające:

$$N_{x1} = - \frac{P}{\frac{1}{4} \pi d^2} - \frac{Pa}{\frac{1}{32} \pi d^3}$$

od strony przeciwnej — rozciągające:

$$N_{x2} = - \frac{P}{\frac{1}{4} \pi d^2} + \frac{Pa}{\frac{1}{32} \pi d^3}$$

Wałek ulega złamaniu, gdy naprężenie N_{x2} staje się równym R_g . Stąd — siła łamiąca:

$$P_n = \frac{1}{4} \pi d^2 \cdot \frac{R_g}{8 \frac{a}{d} - 1}$$