

## VIII. ROZDZIAŁ ÓSMY.

# Z G I N A N I E.

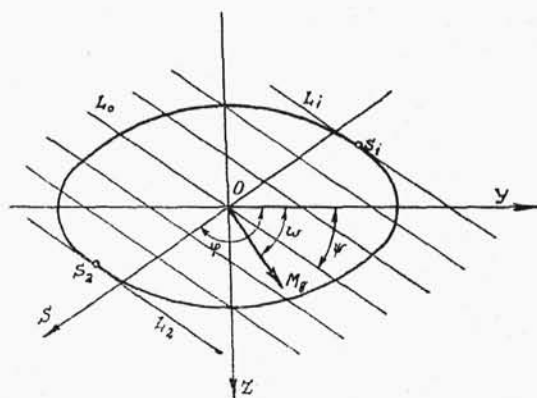
### A. Część pierwsza.

1. **Wzory podstawowe.** Pręt prosty (I. B. 4) jest zginany, gdy obciążenia wszystkich jego płytek (I. B. 11) są zginające (II. B. 7). W układzie osi (II. B. 5) odciętej  $x$  pierwotnej osi  $X$  pręta nieodkształconego przynależy środek  $O$  przekroju bieżącego  $F$  — stałego, lub nader powolnie zmiennego na całej pierwotnej długości  $l$  pręta nieodkształconego. Ten przekrój dzieli pręt na dwie części. Po sprowadzeniu obciążenia zewnę-

trznego jednej z nich do środka  $O$  — otrzymamy: siłę osiową  $O_x$  na osi  $X$  i moment zginający  $M_g$ , leżący w przekroju  $F$ . Jego składowe na osiach głównych  $Y, Z$  pola  $F$  będą odpowiednio:

$$M_y = M_g \cos \omega$$

$$M_z = M_g \sin \omega$$



Rys 52.

gdzie przez  $\omega$  oznaczono kąt nachylenia (Rys. 52) wektora  $M_g$  ku osi  $Y$ .

W przekroju  $F$  panuje układ osiowych naprężeń zginających (II. B. 10):

$$N_x = \frac{O_x}{F} - \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z \quad N_y = N_z = T_x = T_y = T_z = 0$$

Tutaj przez  $J_y$ ,  $J_z$  oznaczono momenty bezwładności pola  $F$  względem osi głównych  $Y$ ,  $Z$  przekroju. Ten układ czyni zadość warunkom (38) i (40) przy spełnieniu warunków (42), jest więc słuszny dla nieważkiego pręta o stałym przekroju i stałym obciążeniu zginającym przekroju bieżącego. Nadto w przypadkach powolnej zmienności przekroju i obciążenia — może być uważany za przybliżony — wystarczająco do celów praktyki.

Odpowiedni układ odkształceń będzie:

$$e_x = \frac{N_x}{E} \quad e_y = e_z = -\frac{N_x}{m E} \quad g_x = g_y = g_z = 0$$

dla tworzywa jednolitego, równokierunkowo sprężystego (III. A. 9).

**2. Naprężenia zginające.** Stała wielkość naprężenia zginającego  $N_x$  panuje we wszystkich punktach  $(y, z)$  przekroju, leżących na prostej, zwanej *linią równego naprężenia*. Wynika to wprost ze wzoru dla  $N_x$ , linjowego względem  $y, z$ .

Linie równych naprężeń tworzą układ prostych  $L$ , równoległych, pochylonych ku głównej osi  $Y$  przekroju (Rys. 52) pod kątem:

$$\phi = \arctg \left( \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \omega \right)$$

Średnie naprężenie zginające:

$$N_{x0} = \frac{1}{F} \int_F N_x dy dz = \frac{O_x}{F}$$

panuje w punktach  $(y, z)$  przekroju, leżących na prostej  $L_0$ , przechodzącej przez środek  $O$  przekroju. Skrajne naprężenia zginające  $N_{x1}$  i  $N_{x2}$  panują w punktach  $(y, z)$  przekroju leżących na prostych  $L_1$  i  $L_2$  — *uogólnionych stycznych* jego obwodu. Pod tą nazwą, prócz zwykłych stycznych obwodu — należy rozumieć proste, stanowiące prostoliniowe składowe części obwodu, a nadto proste, przechodzące przez punkty osobliwe, lub kątowe obwodu, lecz nieprzecinające jego pola  $F$ .

Z tożsamości znaków  $\operatorname{tg} \phi$  i  $\operatorname{tg} \omega$  wynika, że oś momentu gnącego  $M_g$  i linia równego naprężenia  $L_0$ , przechodząca przez środek  $O$  przekroju — leżą w tej samej ćwiartce osi głównych

$Y$ ,  $Z$  przekroju. W szczególnym przypadku — linie równych naprężeń są równoległe do głównej osi przekroju, gdy na tej osi leży moment zginający  $M_g$ .

Dodatnia oś  $\bar{OS}$ , wyprowadzona ze środka przekroju pod kątem:

$$\varphi = \omega + \frac{1}{2}\pi$$

zwie się *osią sił* momentu gnącego. Oś sił i linia równego naprężenia, przechodząca przez środek przekroju — leżą na sprzężonych średnicach środkowej elipsy bezwładności przekroju (I. B. 9). Łatwo to udowodnić, zważywszy, że:

$$\operatorname{tg} \omega = -\operatorname{ctg} \varphi$$

skąd po podstawieniu:

$$J_y + J_z \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi = 0$$

wzór — uzależniający kierunki średnic sprzężonych (27).

**3. Zginanie właściwe i mimośrodkowe.** Zginanie zwie się *właściwym* lub *mimośrodkowym*, gdy siła osiowa  $O_x$  jest równa zeru, lub różna od zera. Obciążenie przekroju bieżącego siłą osiową  $O_x$  i momentem gnącym  $M_g$  zawsze można sprowadzić do *siły mimośrodkowej*  $O_n$ , przyłożonej do tak zwanego *środku naprężeń*  $N$ . Siła  $O_n$  jest wektorowo równa sile osiowej  $O_x$ ; środek naprężeń  $N$  leży na osi  $S$  i ma współrzędne:

$$y_n = -\frac{M_z}{O_x} \quad z_n = \frac{M_y}{O_x}$$

Łatwo to udowodnić: sprowadźmy siłę  $O_n$  do środka przekroju, a otrzymamy dwie wypadkowe:  $O_x$  i  $M_g$ . Zatem naprężenie zginające może być również wyrażone wzorem:

$$N_x = \left( \frac{y_n y}{J_z} + \frac{z_n z}{J_y} + \frac{1}{F} \right) O_x \quad \dots \quad (89)$$

lecz tylko przy zginaniu mimośrodkowym. Przy zginaniu właściwym środek naprężeń leży w nieskończoności — na osi sił  $S$ .

**4. Linja obojętna.** Zerowa wielkość  $N_x$  wyróżnia tak zwaną *linję obojętną*. Jej najogólniejsze równanie:

$$-\frac{M_z}{J_z} Y + \frac{M_y}{J_y} Z + \frac{O_x}{F} = 0 \quad \dots \quad (90)$$

wskazuje, że linia obojętna przechodzi przez środek przekroju przy zginaniu właściwym, dzieli więc w tym przypadku przekrój na dwa obszary naprężeń zginających: dodatnich rozciągających i ujemnych — ściskających.

Przy zginaniu mimośrodowym linia obojętna może przecinać przekrój mimośrodowo, dzieląc go na dwa obszary naprężeń zginających różnych znaków; może być również uogólnioną styczną jego obwodu, lub — leżeć poza nim. W obu ostatnich przypadkach w przekroju panują naprężenia zginające jednego tylko znaku.

Odległość  $j$  bieżącego punktu  $(y, z)$  przekroju od linii obojętnej będziemy uważali za dodatnią w obszarze naprężeń zginających dodatnich, — za ujemną — w obszarze naprężeń ujemnych. Według znanego wzoru:

$$j = \frac{-\frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{O_x}{F}}{\sqrt{\left(\frac{M_z}{J_z}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{J_y}\right)^2}}$$

W liczniku odnajdujemy tu wyraz dla naprężenia zginającego  $N_x$ , panującego w punkcie  $(y, z)$ , a przeto ostatecznie:

$$N_x = j M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_y^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_z^2}} \quad \dots \quad (91)$$

Naprężenie zginające bieżącego punktu przekroju rośnie proporcjonalnie do odległości tego punktu od linii obojętnej. Skrajnym odległościom  $j_1, j_2$  przynależą skrajne naprężenia  $N_{x1}, N_{x2}$  przekroju.

**5. Środek naprężeń.** W przypadku zginania mimośrodowego linia obojętna może być wyrażona równaniem:

$$\frac{y_n}{J_z} Y + \frac{z_n}{J_y} Z + \frac{1}{F} = 0 \quad \dots \quad (92)$$

przecina przeto boki ćwiartki osi głównych  $Y, Z$  przekroju, wierzchołkowo przeciwległej ćwiartce, w której leży jej środek naprężeń o współrzędnych  $y_n, z_n$ . W szczególnym przypadku linia obojętna przecina prostopadle główną oś przekroju, gdy na tej osi leży jej środek naprężeń. Zatem, gdy linia obojętna jest

równoległa do głównej osi  $Y$ , lub  $Z$ , jej środek naprężeń ma współrzędne:

$$y_n = 0 \quad z_n = \frac{J_y}{Fz} \quad \dots \quad (93)$$

lub:

$$y_n = -\frac{J_z}{Fy} \quad z_n = 0$$

leży więc na osi  $Z$  lub  $Y$ . Wypływa to wprost z równania (92).

Na linii obojętnej, pochylonej pod kątem  $\text{arc tg } m$  ku osi głównej  $Y$  przekroju, wyodrębniamy jakiegokolwiek punkt wytyczny w  $(y, z)$ . Jej równanie:

$$Z - z = m(Y - y)$$

tożsamościowe z (92) ma niewątpliwie współczynniki proporcjonalne u zmiennych. Stąd bezpośrednio:

$$y_n = \frac{J_z m}{F(z - my)} \quad z_n = -\frac{J_y}{F(z - my)} \quad \dots \quad (94)$$

współrzędne jej środka naprężeń w układzie osi głównych  $Y, Z$  przekroju. W układzie osi  $Y, Z$  — prostokątnych, wyprowadzonych ze środka, leżącego w płaszczyźnie przekroju gdziekolwiek, współrzędne  $y_n, z_n$  środka naprężeń linii obojętnej, pochylonej ku osi  $Y$  pod kątem  $\text{arc tg } m$  i przechodzącej przez punkt wytyczny w  $(yz)$  będą:

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{S_z(z - my) + J_z m - J_{yz}}{F(z - my) + S_z m - S_y} \\ z_n &= \frac{S_y(z - my) + J_{yz} m - J_y}{F(z - my) + S_z m - S_y} \end{aligned} \quad \dots \quad (95)$$

gdzie  $F$  oznacza pole przekroju,  $S_y, S_z$  — jego momenty statyczne,  $J_y, J_z$  — jego momenty bezwładności,  $J_{yz}$  — jego moment odśrodkowy względem prostokątnych osi  $Y, Z$  — mimośrodkowych.

Środki naprężeń linii obojętnych, wyprowadzonych z punktu wytycznego w  $(y, z)$  leżą na prostej:

$$\frac{y}{J_z} Y + \frac{z}{J_y} Z + \frac{1}{F} = 0 \quad (96)$$

Łatwo to udowodnić, rugując  $m$  z (94).

**6. Rdzeń przekroju.** W układzie osi głównych  $Y, Z$  pola  $F$  przekroju równanie:

$$K(y, z) = 0$$

wyznacza obwód  $K$  pola  $F$ . Linja obojętna, uogólniona styczna obwodu  $K$ , przechodząca przez punkt wytyczny  $w(y, z)$  na tym obwodzie, ma środek naprężeń  $r(y_r, z_r)$  na obwodzie  $R$  tak zwanego *rdzenia* przekroju. Inaczej mówiąc bieżącemu punktowi  $w(y, z)$  obwodu  $K$  przekroju odpowiada na obwodzie rdzenia tego przekroju punkt o współrzędnych:

$$y_r = \frac{J_z z'}{F(z - y z')} \quad z_r = -\frac{J_y}{F(z - y z')} \quad \dots \quad (97)$$

przyczem:

$$z' = \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial K}{\partial y}}{\frac{\partial K}{\partial z}}$$

Zatem równanie obwodu rdzenia:

$$R(y_r, z_r) = 0$$

można otrzymać, rugując  $y, z, z'$  z równania obwodu  $K$  i równań (97).

Tak, np., dla *przekroju kołowego pełnego*:

$$K = y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad z' = -\frac{y}{z} \quad J_y = J_z = \frac{1}{4} \pi R^4$$

$$y_r = -\frac{\frac{1}{4} \pi R^4 y}{\pi R^2 \left(z + \frac{y^2}{z}\right)} = -\frac{1}{4} y$$

$$z_r = -\frac{\frac{1}{4} \pi R^4}{\pi R^2 \left(z + \frac{y^2}{z}\right)} = -\frac{1}{4} z$$

stąd, po podstawieniu  $y, z$  w równanie  $K$  otrzymamy:

$$R = y_r^2 + z_r^2 - \left(\frac{1}{4} R\right)^2 = 0$$

Obwód rdzenia przekroju kołowego pełnego stanowi koło współśrodkowe, promienia czterokrotnie mniejszego.

Dzieląc wzory (97) otrzymamy:

$$z' = \frac{dz}{dy} = - \frac{J_y}{J_z} \cdot \frac{y_r}{z_r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

Różniczkowanie (97) da:

$$\frac{\partial y_r}{\partial y} = \frac{J_z z}{F(z - yz')^2} z'' \quad \frac{\partial z_r}{\partial y} = - \frac{J_y y}{F(z - yz')^2} z''$$

skąd bezpośrednio:

$$z_r' = \frac{dz_r}{dy_r} = - \frac{J_y}{J_z} \cdot \frac{y}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

Zkolei, mnożąc pierwszy wzór (97) przez  $-z_r'$  i dodając do drugiego otrzymamy:

$$z_r - y_r z_r' = - \frac{J_y}{Fz}$$

i ostatecznie:

$$y = \frac{J_z z_r'}{F(z_r - y_r z_r')} \quad z = - \frac{J_y}{F(z_r - y_r z_r')} \quad . \quad . \quad (100)$$

Po podstawieniu tych wartości w równanie obwodu  $K$  i przezróżniczkowanie otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dy_r} &= \frac{\partial K}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y_r} + \frac{\partial K}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y_r} = \\ &= \left[ \frac{\partial K}{\partial y} \frac{J_z z_r}{F(z_r - y_r z_r')^2} - \frac{\partial K}{\partial z} \frac{J_y y_r}{F(z_r - y_r z_r')^2} \right] z_r'' = \frac{\partial K}{\partial z_r'} z_r'' = 0 \end{aligned}$$

Stąd bezpośrednio:

$$z_r'' = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial K}{\partial z_r'} = 0$$

Całka ogólna pierwszego równania daje układ prostych — uogólnionych stycznych rdzenia. Równanie obwodu rdzenia:

$$R(y_r, z_r) = 0$$

otrzymamy przeto jako całkę osobliwą, rugując  $z_r'$  — z równań:

$$K = 0 \quad \frac{\partial K}{\partial z_r'} = 0$$

Obwód przekroju, złożony z  $n$  części odrębnych, wyrażonych równaniami:

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad \dots \quad K_n = 0$$

ma równanie:

$$K = K_1 K_2 \dots K_n = 0$$

Części  $K_i$  przynależą odpowiednia część obwodu rdzenia. Jej równanie:

$$R_i = 0$$

otrzymamy, rugując  $z_r'$  z równań:

$$K_i = 0 \quad \frac{\partial K_i}{\partial z_r'} = 0$$

Łatwo to udowodnić, biorąc pochodną  $K$  względem  $z_r'$ .

Tak, np. dla części obwodu — krzywej drugiego stopnia:

$$K = ay^2 + 2byz + cz^2 + 2fy + 2gz + h = 0$$

po podstawieniu (100) otrzymamy:

$$K = A(z_r')^2 - 2Bz_r' + C = 0$$

$$A = aJ_z^2 - 2fFJ_z y_r + hF^2 y_r^2$$

$$B = bJ_y J_z - gFJ_y y - fFJ_z z_r + hF^2 y_r z_r$$

$$C = cJ_y^2 - 2gFJ_y z_r + hF^2 z_r^2$$

skąd:

$$\frac{\partial K}{\partial z_r'} = 2Az_r' - 2B = 0 \quad K = C - \frac{B^2}{A} = 0$$

Zatem równanie odpowiedniej części obwodu rdzenia — również krzywej drugiego stopnia:

$$\begin{aligned} R = B^2 - AC = & F^2 J_y^2 (g^2 - ch) y_r^2 + 2F^2 J_y J_z (bh - fg) y_r z_r + \\ & + F^2 J_z^2 (f^2 - ah) z_r^2 + 2FJ_y^2 J_z (cf - bg) y_r + \\ & + 2FJ_y J_z^2 (ag - bf) z_r + J_y^2 J_z^2 (b^2 - ac) = 0 \end{aligned} \quad (101)$$

Dla przekroju eliptycznego pełnego:

$$K = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$



a przeto, po podstawieniu:

$$R = \frac{y_r^2}{\left(\frac{b}{4}\right)^2} + \frac{z_r^2}{\left(\frac{c}{4}\right)^2} - 1 = 0$$

Obwód rdzenia przekroju eliptycznego pełnego stanowi elipsę współśrodkową o półosiach czterokrotnie mniejszych.

**7. Własności rdzenia.** Z tożsamościowego kształtu wzorów (97) i (100) wynika wzajemność punktów  $(y, z)$  obwodu  $K$  przekroju i odpowiednich punktów  $(y_r, z_r)$  obwodu  $R$  rdzenia; z tej wzajemności wynika dwójstwo twierdzeń.

Obwód przekroju (lub rdzenia) stanowi owijającą linię obojętnych, przynależnych ośrodkom naprężeń, leżącym na obwodzie rdzenia (lub przekroju).

Krzywej drugiego stopnia, składowej części obwodu przekroju (lub rdzenia) odpowiada krzywa również drugiego stopnia — składowa część obwodu rdzenia (lub przekroju).

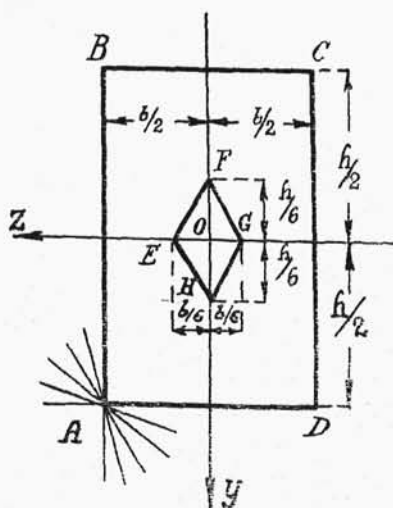
Części obwodu przekroju (lub rdzenia), złożonej z dwóch łuków przecinających się pod kątem, przynależy część obwodu rdzenia (lub przekroju), złożona z dwóch łuków, połączonych wspólną styczną, zwykłą lub uogólnioną. Na międzyłukowym odcinku tej stycznej leżą środki naprężeń, przynależne linjom obojętnym, przechodzącym przez punkt przecięcia się owych łuków i leżącym wewnątrz kąta, jaki tworzą ich skrajne styczne.

Tak, np. dla części  $AB$  przekroju prostokątnego (Rys. 53):

$$z = \frac{1}{2} b \quad z' = 0$$

Środek naprężeń  $G$ , przynależny linii obojętnej  $AB$  ma współrzędne:

$$\begin{aligned} y_r = 0 \quad z_r &= -\frac{J_y}{F_z} = \\ &= -\frac{\frac{1}{12} b^3 h}{\frac{1}{2} b^2 h} = -\frac{1}{6} b \end{aligned}$$



Rys. 53.

Dla części  $AD$ :

$$y = \frac{1}{2}h \quad z' = \infty$$

a przeto środek naprężeń  $F$ , przynależny linii obojętnej  $AD$ , ma współrzędne:

$$y_r = -\frac{1}{6}h \quad z_r = 0$$

Na linii  $FG$  leżą środki naprężeń, przynależne linjom obojętnym  $L$ , wyprowadzonym z wierzchołka  $A$  i zawartym wewnątrz kąta  $EAD$ , zatem obwód rdzenia przekroju prostokątnego  $b \times h$  pełnego, stanowi ukośnik o przekątnych  $\frac{1}{3}b$ ,  $\frac{1}{3}h$ , równoległych do  $b$  i  $h$ .

Obwód przekroju (lub rdzenia) jest *wypukły*, gdy jego uogólnione styczne nie przecinają jego pola. Obwód rdzenia przekroju o wypukłym obwodzie jest wypukły. Każda wklęsłość obwodu może być pokryta odcinkiem prostej — wspólnej uogólnionej stycznej sąsiednich łuków wypukłych. Każdej prostej, pokrywającej wklęsłość obwodu przekroju (lub rdzenia) przynależy punkt przecięcia się pod kątem dwóch łuków rdzenia (lub przekroju). Te łuki poza punktem przecięcia się tworzą pętlę zewnętrzną, przynależną wklęsłości obwodu. Przy wyznaczaniu rdzenia należy wszystkie pętlce zewnętrzne pominąć, inaczej mówiąc — zachować istotne wartości pola przekroju i jego momentów, natomiast obwód przekroju — przekształcić prostymi, pokrywającymi wklęsłości.

Tak np. *przekrój dwuteownika* jest wklęsły obustronnie. Oznaczmy jego wysokość przez  $h$ , szerokość pasów przez  $b$ . Główna oś  $Y$  przekroju jest zarazem osią jego środka. Boczne wklęsłości należy pokryć prostymi, równoległymi do osi  $Y$ , tworząc obwód prostokątny  $b \times h$ . Zatem, jak wyżej, obwód rdzenia stanowi ukośnik o przekątnych:

$$\frac{4J_z}{Fh} \quad \frac{4J_y}{Fb}$$

leżących na osiach  $Y$ ,  $Z$ .

Wewnętrzny obwód przekroju niepełnego (np. pierścieniowego) należy pomijać przy wyznaczaniu rdzenia, jako że uogólnione styczne obwodu wewnętrznego zawsze przecinają pole przekroju.

Tak np. przekrój kołowy pierścieniowy o promieniu zewnętrznym  $R$  i wewnętrznym  $r$  ma dwa obwody. Równanie zewnętrznego:

$$K = y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad z' = -\frac{y}{z}$$

a przeto:

$$y_r = -\frac{\frac{1}{4}\pi(R^4 - r^4)y}{\pi(R^2 - r^2)\left(z + \frac{y^2}{z}\right)z} = -\frac{R^2 + r^2}{4R^2}y$$

$$z_r = -\frac{\frac{1}{4}\pi(R^4 - r^4)}{\pi(R^2 - r^2)\left(z + \frac{y^2}{z}\right)} = -\frac{R^2 + r^2}{4R^2}z$$

Stąd, po podstawieniu  $y, z$  w równanie  $K$  otrzymamy:

$$y_r^2 + z_r^2 - \left(\frac{R^2 + r^2}{4R}\right)^2 = 0$$

Obwód rdzenia przekroju kołowego pierścieniowego o promieniach:  $R$  i  $r < R$  stanowi spółśrodkowe koło o promieniu  $\frac{R^2 + r^2}{4R}$ .

W układzie osi głównych  $Y, Z$  przekroju, równaniu:

$$Z = Y \operatorname{tg} \varphi$$

osi sił  $S$  momentu zginającego  $M_g$  — czynią zadość spółrzedne  $y_n, z_n$  środka naprężeń, przynależnego mimośrodkowemu obciążeniu przekroju. Nadto, niewątpliwie czynią mu zadość spółrzedne  $y_s, z_s$  punktu przecięcia się linii obojętnej z osią sił  $S$ . Zatem (92):

$$z_n = y_n \operatorname{tg} \varphi \quad z_s = y_s \operatorname{tg} \varphi \quad \frac{y_n y_s}{J_z} + \frac{z_n z_s}{J_y} + \frac{1}{F} = 0$$

i ostatecznie:

$$y_n y_s = -\frac{J_y J_z}{F(J_y + J_z \operatorname{tg}^2 \varphi)} = C \quad z_n z_s = C \operatorname{tg}^2 \varphi = D$$

Z niezmienności  $C, D$  wypływają następujące wnioski:

Gdy środek naprężeń utożsamia się ze środkiem przekroju:

$$y_n = z_n = 0 \quad y_s = z_s = \infty$$

przynależna mu linia obojętna leży w nieskończoności. Środkom naprężeń, leżącym w rdzeniu przekroju, przynależą linie obojętne poza przekrojem. Środkom naprężeń na obwodzie rdzenia przekroju — przynależą linie obojętne — uogólnione styczne obwodu przekroju. Środkom naprężeń, leżącym poza rdzeniem przekroju, lecz wewnątrz środkowej elipsy bezwładności, przynależą linie obojętne, przecinające obwód przekroju, lecz nie przecinające tej elipsy. Środkom naprężeń, leżącym na środkowej elipsie bezwładności przekroju, przynależą linie obojętne — styczne tej elipsy w punktach średnicowo przeciwnych. Łatwo to dostrzec, zważywszy, że równaniu (26) elipsy:

$$\frac{y^2}{J_z} + \frac{z^2}{J_y} - \frac{1}{F} = 0$$

czynią zadość współrzędne:

$$y_n = -y_s = y \quad z_n = -z_s = z$$

Środkom naprężeń, leżącym w przekroju poza środkową elipsą bezwładności, przynależą linie obojętne, przecinające tę elipsę, lecz nieprzecinające rdzenia. Środkom naprężeń na obwodzie przekroju przynależą linie obojętne — uogólnione styczne obwodu rdzenia. Środkom naprężeń, leżącym poza przekrojem, przynależą linie obojętne, przecinające rdzeń przekroju. Linii obojętnej, przechodzącej przez środek przekroju — przynależy nieskończenie daleki środek naprężeń.

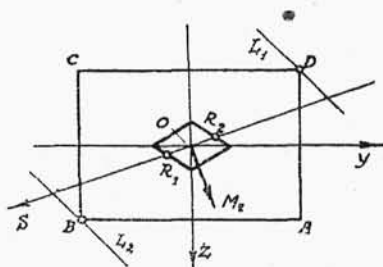
**8. Skrajne naprężenia zginające.** Dodatnia siła  $S$  przecina (Rys. 54) obwód rdzenia w punkcie  $R_1$ , ujemna w  $R_2$ . Oznaczmy przez:

$$\overline{OR}_1 = R_1 \quad \overline{OR}_2 = R_2$$

promienie wodzące tych punktów i rozłożmy moment zginający  $M_g$  zewnętrznego obciążenia przekroju na dwie pary sił  $O_1$  i  $O_2$ , prostopadłych do pola przekroju, czyniących zadość:

$$M_g = O_1 R_1 = O_2 R_2$$

Siła  $O_1$  dodatnia, rozciągająca panuje w punkcie  $R_1$ , na rdzeniu, nie daje przeto naprężenia na linii obojętnej  $L_1$  tego środka



Rys. 54.

naprężeń. Druga siła pary  $O_1$  ujemna, ściskająca działa pośrodku przekroju łącznie z siłą osiową  $O_x$  zewnętrznego obciążenia przekroju. Zatem na linii  $L_1$  panować będzie naprężenie:

$$N_{x1} = \frac{O_x - O_1}{F}$$

od sił osiowych  $O_x, O_1$ .

Siła ujemna  $O_2$  działa w punkcie  $R_2$  na rdzeniu, nie daje przeto naprężeń na linii obojętnej  $L_2$  tego środka naprężeń. Druga siła  $O_2$  pary, dodatnia, działa pośrodku przekroju, łącznie z  $O_x$ , zatem na linii  $L_2$  panować będzie naprężenie:

$$N_{x2} = \frac{O_x + O_2}{F}$$

od sił osiowych  $O_x, O_2$ .

Odcinki  $R_1, R_2$  noszą miano *promieni rdzenia*. Służą do wyznaczania skrajnych naprężeń zginających:

$$N_{x1} = \frac{O_x}{F} - \frac{M_g}{FR_1} \quad N_{x2} = \frac{O_x}{F} + \frac{M_g}{FR_2} \quad . \quad . \quad (102)$$

przekroju  $F$ , obciążonego siłą osiową  $O_x$  i momentem zginającym  $M_g$ .

**9. Odkształcenia.** Naprężenia zginające  $N_x$  bieżącego przekroju pręta wytrzymałościowo i bezwładnościowo jednorodnego są proporcjonalne do odległości  $j$  od linii obojętnej. Przynależne im wydłużenia jednostkowe:

$$e_x = \frac{N_x}{E} \quad e_y = e_z = -\frac{N_x}{mE}$$

są również proporcjonalne do tej odległości  $j$ , lecz tylko w obszarze sprężystości i proporcjonalności, gdzie współczynnik  $E$  ma wartość stałą.

Zatem sześciennne elementy płytki (I. B. 11.), uszeregowane wzdłuż linii równego naprężenia, mają te same wydłużenia jednostkowe, — zerowe dla linii obojętnej, dodatnie, lub ujemne — w obszarach naprężeń zginających dodatnich, lub ujemnych. Stąd wniosek, że sąsiednie przekroje pręta nieodkształconego, pierwotnie płaskie i równoległe, nie wicherzą się przy odkształceniu, lecz pochylają ku sobie o kąt znikomy  $d\varphi$ . Nadto, w obszarze naprężeń zginających dodatnich — płytka zwęża się poprzecznie, w obszarze naprężeń ujemnych — ulega poprzecznemu rozszerzeniu.

**10. Odształcona.** W przecięciu (Rys. 55) z płaszczyzną, poprowadzoną przez środek  $O$  bieżącego przekroju  $F$  prostopadłe do linii obojętnej, ten przekrój da ślad  $AB$ , jego linia obojętna — ślad  $L_o$ , sąsiedni przekrój da ślad  $CD$ , jego linia obojętna — ślad  $L_o'$ . Po odkształceniu  $CD$  pochyli się *względem*  $AB$  o kąt  $d\varphi$  obrotu około linii obojętnej  $L_o'$ . Odcinek:

$$OO' = dx$$

pierwotnej osi pręta wydłuży się lub skróci o  $O'O''$ . Dolna część pręta, leżąca poza  $CD$ , pochyli się o kąt  $d\varphi$ . Elementarne odcinki  $OO''$  utworzą nową oś pręta — jego *odkształconą*. Poprzeczne przekroje pręta odkształconego będą płaskie i prostopadłe do odkształconej. Jej środki krzywizny  $\omega$ , przynależne promieniom krzywizny:

$$O\omega = r$$

leżą w punktach przecięcia się śladów  $AB$  i  $C'D'$ .

Przy zginaniu mimośrodowym linia obojętna leży poza środkiem bieżącego przekroju: odcinki  $O'O''$  są różne od zera, — pierwotna oś pręta odkształca się w krzywą przestrzenną, a nadto wydłuża lub skróca w zależności od sił osiowych  $O_x$ , rozciągających, lub ściskających. Przy zginaniu właściwym linia obojętna przechodzi przez środek bieżącego przekroju: oś pręta odkształca się w krzywą przestrzenną, nie zmienia jednak swej pierwotnej długości.

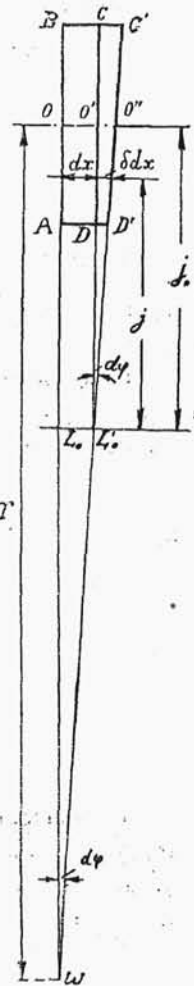
W szczególnym przypadku zginania *płaskiego*, mimośrodowego, lub właściwego, pierwotna oś pręta po odkształceniu staje się krzywą płaską.

**11. Wzory ogólne** (Rys. 55). Środkowe włókno  $OO'$  pod działaniem naprężenia środkowego:

$$N_{xo} = \frac{O_x}{F}$$

wydłuży się o:

$$O'O'' = e_{ox} dx = \frac{N_{xo}}{E} dx = \frac{O_x}{EF} dx$$



Rys. 55.

Jakiegokolwiek inne włókno pod działaniem naprężenia  $N_x$  wydłuży się o:

$$\delta dx = e_x dx = \frac{N_x}{E} dx$$

Jak widać z rysunku:

$$\delta dx = j d\varphi \quad \overline{O'O''} = j_o d\varphi \quad \overline{OO''} = dx + \frac{O_x}{EF} dx = r d\varphi$$

a przeto ostatecznie, po uwzględnieniu (91) otrzymamy wzory:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1 + \frac{O_x}{EF}}{r} = \frac{M_g}{E} \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_y^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_z^2}} \quad \dots (103)$$

$$j_o = \frac{O_x}{FM_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_y^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_z^2}}}$$

dla zginania mimośrodowego. W tych wzorach  $F$  oznacza pole przekroju,  $J_y, J_z$  — jego momenty bezwładności względem osi głównych  $Y, Z$ , —  $\omega$  — kąt pochylenia momentu zginającego  $M_g$  ku osi  $Y$ .

Przy zginaniu właściwym siła osiowa  $O_x$  jest równa zeru. Linia obojętna przechodzi przez środek przekroju: jej odległość od tego środka:

$$j_o = 0$$

Nadto:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{r} = \frac{M_g}{E} \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_y^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_z^2}} \quad \dots (104)$$

## B. Część druga.

**1. Zginanie płaskie.** Zginanie jest *płaskie*, gdy moment zginający leży na głównej osi bieżącego przekroju. Linia obojętna jest do tej osi równoległa. Nazwijmy ją osią  $Z$ . Wzór (41) da naprężenie:

$$N_x = \frac{O_x}{F} - \frac{M_z}{J_z} y$$