

Skrajne naprężenie skręcające T_o w każdym przekroju pręta prostego nie może przekroczyć k_o przy obciążeniu trwałem, lub zmiennem. Największa wielkość T_m naprężeń skrajnych T_o wyodrębnia *przekrój niebezpieczny*. Jego wymiary należy dobrać tak, aby:

$$T_m = k_o$$

Spełnienie tego warunku zabezpiecza pręt wytrzymałościowo: układ naprężeń skręcających nie wykracza poza obszar sprężystości i proporcjonalności.

C. Część trzecia.

1. **Siły niszczące.** Pręt prosty ulega *ukręceniu* w przekroju niebezpiecznym, gdy skrajne naprężenie skręcające T_m tego przekroju staje się równem wytrzymałości R_o tworzywa na skręcanie. Naprężenie niszczące:

$$T_m = R_o$$

przynależy *momentowi ukręcającemu*, — jedynej składowej obciążenia zewnętrznego przekroju niebezpiecznego. To obciążenie zawsze można wyznaczyć ze wzorów ogólnych.

Tak, dla nieważkiego pręta prostego o stałym przekroju kołowym średnicy D , przekrój niebezpieczny przynależy największemu momentowi skręcającemu, a przeto moment ukręcający:

$$M_u = M_m = \frac{1}{16} \pi D^3 R_o$$

Tak, np. dla stali o wytrzymałości 40 kg/mm^2 na skręcanie — moment ukręcający pręt dwucentymetrowej średnicy wynosi 628 kg. mm.

2. **Pręt prosty, jednorodnie zbudowany.** Środek O czołowej jego ścianki stanowi początek osi współrzędnych; oś X pokrywa się z osią pręta. Odciętej x przynależy przekrój bieżący. Ten przekrój dzieli pręt na dwie części; po sprowadzeniu obciążenia zewnętrznego jednej z nich do środka owego przekroju otrzymamy moment skręcający M_x na osi X . Przynależy mu skrajne naprężenie skręcające T_x . Największe z nich T_m — wyodrębnia

przekrój niebezpieczny pręta, trzeba więc jego wymiary dobrać tak, aby:

$$T_m = k_o$$

Zatem wytrzymałościowo przekrój niebezpieczny jest wyzyskany, w pozostałych, zbyt słabo:

$$T_x < k_o$$

Skręcenie odcinka x całej pierwotnej długości l pręta będzie:

$$\phi_x = \int_0^x \phi dx$$

całego pręta:

$$\phi = \int_0^l \phi dx$$

Przy niezmiennym przekroju pręta i stałym M_x , naprężenia T_x są również stałe. Tego rodzaju *pręt o stałej wytrzymałości na skręcanie* jest niewątpliwie najoszczędniejszy co do wytrzymałościowego wyzyskania tworzywa, a więc i najłżejszy. Jego skręcenie jednostkowe ϕ jest oczywiście stałe na całej długości, zatem:

$$\phi_x = \phi \quad \phi = \phi l$$

Przykłady: a. Pręt prosty nieważki o stałym przekroju kołowym pełnym lub pierścieniowym osadzono jednostronnie — unieruchomiono jedną ściankę czołową. Z jej środka O wyprowadzono oś X — oś pręta. Odciętej l — długości pręta — przynależy druga ścianka czołowa. Do środka jej przyłożono moment zewnętrzny M_o , leżący na osi X . Ten moment wzbudza sprzeciw w przekroju osadzonym — różnozwrotny moment odporowy M_o — na osi X , przyłożony do środka O .

We wszystkich przekrojach

$$M_x = M_o \quad T_x = T_m = \frac{M_o}{W_o} = k_o$$

jest to więc pręt o stałej wytrzymałości na skręcanie. Nadto:

$$\phi_x = \frac{M_o x}{GJ_o} \quad \phi = \frac{M_o l}{GJ_o}$$

Niech będzie, np.:

$$l = 2 \text{ m} \quad M_o = 2 \text{ tm} \quad k_o = 10 \text{ kg/mm}^2 \quad G = 800000 \text{ kg/cm}^2$$

dla stali miękkiej i obciążenia trwałego. Zatem, licząc w *kg* i *cm*, otrzymamy dla przekroju pełnego, średnicy *D*:

$$W_o = \frac{1}{16} \pi D^3 = \frac{200000}{1000} = 200 \text{ cm}^3$$

stąd:

$$D = 10 \text{ cm}$$

z zaokrągleniem, które jednak podwyższa T_m do $10,19 \text{ kg/mm}^2$.

Skręcenie pręta:

$$\phi = \frac{M_o l}{G J_o} = \frac{200000 \times 200}{\frac{1}{32} \pi \times 10^4 \times 800000} = 0,0509 = 0,0509 \frac{180^\circ}{\pi} = 2,9^\circ$$

b. Pręt ten sam obciążono tym samym momentem M_o lecz jednostajnie rozłożonym na całej długości *l* pręta, zatem w przekroju bieżącym, przynależnym odciętej *x*, będzie panował moment skręcający:

$$M_x = M_o \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Najwyższy moment M_o osadzonego niebezpiecznego przekroju da w tym przekroju naprężenie najwyższe:

$$T_m = \frac{M_o}{W_o} = k_o$$

zatem wymiary pręta będą te same. Skręcenie jego natomiast:

$$\phi = \int_0^l \phi dx = \int_0^l \frac{M_x dx}{G J_o} = \frac{M_o}{G J_o} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = \frac{M_o}{2 G J_o}$$

będzie dwa razy mniejsze. Wszystkie przekroje pręta, z wyjątkiem osadzonego, są zbyt sowe.

c. Pręt prosty nieważki o zmiennym przekroju kołowym pełnym, lub pierścieniowym, osadzono jednostronnie i obciążono momentem M_o , jednostajnie rozłożonym na całej długości *l* pręta.

Oznaczmy przez W_x — moment wytrzymałości na skręcanie, przez J_x — moment biegunowy przekroju bieżącego, przynależnego odciętej x . Dla pręta o stałej wytrzymałości na skręcanie skrajne naprężenie skręcające jest stałe i równe k_o zatem:

$$W_x = \frac{M_o}{k_o} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Stąd dla przekroju osadzonego:

$$W_o = \frac{M_o}{k_o}$$

wzór, otrzymany już wyżej pod a i pod b dwukrotnie, zatem wymiary przekroju osadzonego są i tu te same. Dla przekrojów pozostałych:

$$W_x = W_o \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Skręcenie pręta:

$$\phi = \frac{M_o}{G} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{dx}{J_x}$$

Powyższe wzory dają dla pręta o przekroju kołowym pełnym, średnicy D_x :

$$D_x = D \sqrt[3]{1 - \frac{x}{l}}$$

$$\phi = \frac{M_o}{GJ_o} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - \frac{x}{l}}} = \frac{3M_o}{2GJ_o}$$

gdzie przez D oznaczono średnicę przekroju osadzonego, przez J_o — jego moment biegunowy.

d. Pręt prosty nieważki o stałym przekroju kołowym pełnym, lub pierścieniowym, osadzono obustronnie, inaczej mówiąc unieruchomiono przekroje A, B jego ścianek czołowych. Pośredni przekrój C dzieli długość:

$$\overline{AB} = l$$

pręta na odcinki:

$$\overline{AC} = a \quad \overline{CB} = b$$

W przekroju C leży para sił dająca moment M_0 obciążenia zewnętrznego. Wzbudza on dwa momenty odporowe M_a, M_b w przekrojach czołowych A, B , przyczem, ze względu na równowagę pręta:

$$M_a + M_b + M_0 = 0$$

Zatem w odcinku a :

$$M_x = M_a \quad T_x = T_a = \frac{M_a}{W_0} \quad \dot{O}_a = \frac{M_a a}{G J_0}$$

w odcinku b :

$$M_x = M_b \quad T_x = T_b = \frac{M_b}{W_0} \quad \dot{O}_b = \frac{M_b b}{G J_0}$$

Wobec unieruchomienia ścianek czołowych kąty obrotu przekroju C względem przekrojów czołowych: A, B muszą być jednakowe, a przeto z dostateczną do celów praktyki ścisłością, wobec równości \dot{O}_a, \dot{O}_b :

$$M_a a = M_b b$$

a przeto:

$$M_a = -M_0 \frac{b}{l} \quad M_b = -M_0 \frac{a}{l}$$

3. Wałki pędziane. Wałek pędzi, robiącej n obrotów na minutę, ma przenieść N koni mechanicznych: wyznaczyć właściwą średnicę D jego stałego przekroju kołowego pełnego. Przy niezbyt wielkiem rozstawieniu łożysk podporowych wałki pędziane można liczyć tylko na skręcanie z pominięciem zginania, pochodzącego z naciągu pasów kół, osadzonych na wałku.

Moment skręcający: (VI. C. 4)

$$M_0 = 71620 \frac{N}{n}$$

a przeto:

$$W_0 = \frac{1}{16} \pi D^3 = \frac{M_0}{k_0} = 71620 \frac{N}{n k_0}$$

skąd bezpośrednio:

$$D = 71,5 \sqrt[3]{\frac{N}{n k_0}}$$

Nadto należy wziąć pod uwagę skręcenie wałków pędzianych, zazwyczaj dość długich. Oznaczmy przez s dopuszczalny

jednostkowy kąt skręcenia w stopniach na metr bieżący długości wałka pędnianego. Zatem, licząc w kg i cm:

$$s = 100 \times \frac{180}{\pi} \times \frac{71620 N}{\frac{1}{32} \pi D^4 G n}$$

i ostatecznie:

$$D = 254,25 \sqrt[4]{\frac{N}{G s n}}$$

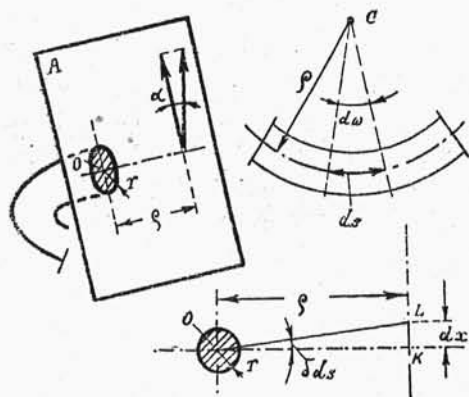
Dla miękkiej stali brano dotąd:

$$k_0 = 120 \text{ kg/cm}^2 \quad G = 800000 \text{ kg/cm}^2 \quad s = \frac{1}{4}$$

stąd:

$$D = 14,5 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad D = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$$

4. **Sprężyny śrubowe**, zwinięte z drutu o stałym przekroju kołowym pełnym promienia r . Oznaczmy (Rys. 50) przez ρ promień sprężyny, czyli odległość środka O przekroju bieżącego drutu od osi sprężyny. Na osi X sprężyny leży jej obciążenie zewnętrzne: siłami P różnozwrotnymi, osiowymi, rozciągającymi lub ściskającymi. Płaszczyzna A bieżącego przekroju drutu przecina oś sprężyny pod kątem $90 - \alpha$. Kąt α — śrubowego nachylenia zwojów jest zazwyczaj niewielki, możemy przeto siłę P utoż-



Rys. 50.

samić z jej rzutem na płaszczyznę A przekroju, który dzieli sprężynę na dwie części. Zatem, po sprowadzeniu obciążenia jednej z tych części do środka O , otrzymamy

dwie wypadkowe: moment skręcający $P\rho$ i siłę ścinającą P , którą zresztą pominiemy, jako dającą naprężenia skrajne, kilkakrotnie mniejsze od skręcających:

$$T_0 = \frac{P\rho}{W_0} \quad W_0 = \frac{1}{2} \pi r^3$$

o czym z łatwością można się przekonać.

Weźmy pod uwagę długostkę drutu, mierzoną odcinkiem:

$$ds = \rho d\omega$$

śrubowej osi drutu, albo przyrostem kąta środkowego ω zwojów. Kąt skręcenia odcinka ds , w przybliżeniu równy:

$$\phi ds = \frac{P\rho^2}{GJ_0} d\omega \quad J_0 = \frac{1}{2} \pi r^4$$

da odchylenie górnej części sprężyny, rozpościerającej się ponad odcinkiem ds , — względem pozostałej dolnej. W istocie, przed odkształceniem promień poziomy bieżącego przekroju wyznaczał w przedłużeniu punkt K na pionowej osi X sprężyny. Przy odkształceniu odcinka ds — ów promień obróci się o kąt ϕds , znacząc sąsiedni punkt L , odległy o dx od K .

Gdyby więc z całej sprężyny odkształcił się tylko ten odcinek ds , to sprężyna uległaby wyżej opisanemu odchyleniu, a pierwotna jej długość l otrzymałaby przyrost dx — dodatni, lub ujemny, przy obciążeniu siłami P rozciągającymi, lub ścisającymi. Długość odkształconą $l + dx$ należałoby przytem mierzyć wzdłuż osi, lekko w K zgiętej. W rzeczywistości jednak sprężyna pozostaje prosta: pochodzi to stąd, że odkształcenie odcinka średnicowo przeciwległego, ponownie odchyli ją w odwrotnym kierunku i przytem, wobec tożsamości obciążenia wszystkich przekrojów drutu, — ściśle o ten sam kąt, dający ten sam przyrost dx , mierzony wzdłuż osi sprężyny, tym razem już prostej.

Tak więc, posuwając się wzdłuż wszystkich n — zwojów, wyznaczymy całkowity przyrost długości l sprężyny, czyli jej strzałkę:

$$f = \int \rho \phi ds = \frac{P}{GJ_0} \int \rho^3 d\omega$$

Dla *sprężyn walcowych*, n — zwojowych, o stałym promieniu R :

$$f = \frac{PR^3}{GJ_0} \int_0^{2\pi n} d\omega = \frac{2\pi n R^3}{GJ_0} P$$

Dla sprężyn stożkowych, n — zwojowych o skrajnych promieniach: R_1 i $R_2 > R_1$:

$$\rho = R_1 + (R_2 - R_1) \frac{\omega}{2\pi n}$$

Stąd, różniczkując:

$$d\rho = (R_2 - R_1) \frac{d\omega}{2\pi n}$$

i ostatecznie:

$$f = \frac{2\pi n P}{(R_2 - R_1) G J_0} \int_{R_1}^{R_2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi n}{2 G J_0} (R_1^2 + R_2^2) (R_1 + R_2) P$$

Właściwą grubość drutu wyznaczymy ze wzoru:

$$W_0 = \frac{1}{2} \pi r^3 = \frac{PR}{k_0} \quad W_0 = \frac{1}{2} \pi r^3 = \frac{PR_2}{k_0}$$

dla sprężyn walcowych i stożkowych, przyczem:

ZESTAWIENIE:

OBCIĄŻENIE:		TRWAŁE	POWTARZANE
NAPRĘŻENIE DOPUSZCZALNE:		$k_0 \text{ kg/cm}^2$	$k_0 \text{ kg/cm}^2$
Stal sprężynowa $G = 850000 \text{ kg/cm}^2$	Wyżarzona	2500	1500
	Zahartowana	6000	4000
Bronz fosforowy $G = 475000 \text{ kg/cm}^2$		2500	1500

5. Trójkąt prawidłowy (Rys. 51) — stały przekrój pręta prostego, jednorodnego bezwładnościowo, obciążonego na ściankach czołowych różnoskrętnymi momentami skręcającymi M_0 . Równanie obwodu:

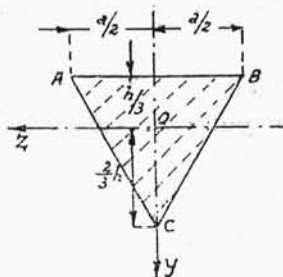
$$\begin{aligned} K(y, z) &= -(y + \frac{1}{3}h)(z\sqrt{3} - y + \frac{2}{3}h)(-z\sqrt{3} - y + \frac{2}{3}h) = \\ &= -y^3 + hy^2 + 3yz^2 + hz^2 - \frac{4}{27}h^3 = 0 \end{aligned}$$

jako, że:

$$a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

Różniczkowanie daje:

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial y} &= -3y^2 + 2hy + 3z^2 \\ \frac{\partial K}{\partial z} &= 2z(3y + h) \\ \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} &= -6y + 2h & \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} &= 6y + 2h \\ \Delta_2 K &= 4h\end{aligned}$$



Rys. 51.

a przeto i m ma wartość stałą m_0 . Tutaj (84):

$$\begin{aligned}\int_F \left(y \frac{\partial K}{\partial y} + z \frac{\partial K}{\partial z} \right) dF &= \int_F (-3y^2 + 2hy^2 + 9yz^2 + 2hz^2) dF = \\ &= \frac{2h^5}{15\sqrt{3}}\end{aligned}$$

ponieważ:

$$\int_F y^2 dF = \int_F z^2 dF = \frac{h^4}{18\sqrt{3}} \quad \int_F y^3 dF = - \int_F yz^2 dF = \frac{h^5}{135\sqrt{3}}$$

Zatem:

$$m_0 = \frac{15\sqrt{3}}{2h^5} M_0$$

i ostatecznie:

$$\begin{aligned}T_y &= m_0 \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{15\sqrt{3}}{2h^5} M_0 (3z^2 + 2hy - 3y^2) \\ T_z &= -m_0 \frac{\partial K}{\partial z} = -\frac{15\sqrt{3}}{h^5} M_0 (3y + h)z\end{aligned}$$

Skrećenie jednostkowe:

$$\phi = \frac{15\sqrt{3}}{Gh^4} M_0$$

Powyższe wzory są ścisłe. Wyznamy największe naprężenie skręcające T_0 . W układzie współrzędnych biegunowych ρ będzie promieniem wodzącym punktu bieżącego, θ — kątem biegunowym nachylenia ρ ku osi Y , zatem:

$$T = \sqrt{T_y^2 + T_z^2} = \\ = \frac{15\sqrt{3}}{2h^3} M_0 \sqrt{9\rho^4 + 4h^2\rho^2 + 12h\rho^3 \cos \Theta (3\sin^2 \Theta - \cos^2 \Theta)}$$

Pochodna T względem Θ , przyrównana do zera, daje trzy kąty biegunowe: $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$, przynależne skrajnemu naprężeniu skręcającemu:

$$T_0 = \frac{15\sqrt{3}}{2h^3} M_0$$

panującemu na obwodzie, w środkowych punktach wszystkich trzech boków trójkąta.

6. Porównanie przekrojów o jednakowym polu F i momencie skręcającym M_0 : kołowego pełnego (k) promienia R , kołowego pierścieniowego (o) promienia — zewnętrznego R_2 i wewnętrznego R_1 , eliptycznego pełnego (e) o dużej półosi c i małej b , oraz prostokątnego pełnego (p) o podstawie B i wysokości:

$$H = nB \quad n \geq 1$$

Zatem:

$$F = \pi R^2 = \pi (R_2^2 - R_1^2) = \pi bc = BH$$

stąd wynika bezpośrednio, że:

$$R_2 > R \quad R > b \quad \frac{R}{B} = \sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

Skrajne naprężenia skręcające T_0 tych przekrojów mają się jak:

$$\frac{2M_0}{\pi R^3} : \frac{2M_0 R_2}{\pi (R_2^4 - R_1^4)} : \frac{2M_0}{\pi b^2 c} : j \frac{M_0}{B^2 H}$$

inaczej jeszcze po skróceniu:

$$1 : \frac{1}{\frac{R_2}{R} + \frac{R_1^2}{RR_2}} : \frac{R}{b} : \frac{1}{2} j \sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

Biorąc pod uwagę nierówności, wyżej zaznaczone, a nadto (VII. A. 4.d) wartości n, j , przekonamy się, że drugi wyraz jest mniejszy od jedności, dwa ostatnie — większe, a przeto przy jednakowym polu skrajne naprężenie skręcające T_0 przekroju (o) jest

mniejsze, przekrojów zaś (*e*) i (*p*) — większe od takiegoż naprężenia przekroju (*k*) — kołowego pełnego.

Skręcenia jednostkowe δ tych przekrojów mają się jak:

$$\frac{2 M_0}{G \pi R^4} : \frac{2 M_0}{G \pi (R_2^4 - R_1^4)} : \frac{M_0 (b^2 + c^2)}{G \pi b^3 c^3} : i \frac{M_0}{G B^3 H}$$

inaczej jeszcze, po skróceniu:

$$1 : \frac{1}{\left(\frac{R_2}{R}\right)^2 + \left(\frac{R_1}{R}\right)^2} : \frac{c^2 + b^2}{2bc} : \frac{in}{2\pi}$$

I tu, jak wyżej, z łatwością przekonamy się, że drugi wyraz jest mniejszy od jedności, ostatni zaś — większy. Nadto, dzieląc tożsamość:

$$(c - b)^2 + 2bc = b^2 + c^2$$

przez $2bc$, udowodnimy, że trzeci wyraz jest też większy od jedności, a przeto, przy jednakowem polu skrócenie jednostkowe przekroju (*o*) jest mniejsze, przekrojów (*e*) i (*p*) — większe od skrócenia jednostkowego przekroju (*k*) kołowego pełnego.