

ZESTAWIENIE XI.

OBCIĄŻENIE:	I	II	OBCIĄŻENIE:	I	II
Bazalt	65	45	Marmur	30	20
Granit	60	40	Wapniak	30	20
Porfir	40	30	Piaskowiec	20	15
Mur z cegły na za- prawie wapiennej .	9	6	Mur z cegły na za- prawie cementowej	15	10

C. Część trzecia.

1. **Siły niszczące.** Pręt prosty rozciągany ulega zerwaniu, gdy naprężenie w jego przekroju niebezpiecznym F_n staje się równe wytrzymałości R_r tworzywa. Stąd — siła zrywająca:

$$O_r = R_r F_n$$

Krótki pręt prosty ściskany ulega zmiażdżeniu, gdy naprężenie w jego przekroju niebezpiecznym F_n staje się równe wytrzymałości R_c , oczywiście dla tworzywa gromady wykresowej K . Stąd siła niszcząca:

$$O_m = R_c F_n$$

Dla tworzyw gromady wykresowej S lub M , granica podatności Q_c , istotna, lub w ten, czy inny sposób ustalona, daje siłę zniekształcającą:

$$O_n = Q_c F_n$$

Długi pręt prosty ściskany ulega *wyboczeniu*. Długi pręt prosty o stałym przekroju F , swobodnie zwisający pionowo, może ulec zerwaniu pod własnym ciężarem:

$$c F l_r$$

Tu c oznacza ciężar właściwy tworzywa w kg/cm^3 , a l_r — tak zwaną *długość zrywającą* w cm. Przy tej długości w górnym przekroju niebezpiecznym panować będzie naprężenie R_r , zatem:

$$l_r = \frac{R_r}{c}$$

Tak, np. dla drutu miedzianego o wytrzymałości 2000 kg/cm^2 i ciężarze właściwym $8,9 \text{ gr/cm}^3$, długość zrywająca wynosi 2,23 klm.

2. Pręt nieważki. Środek czołowej ścianki pręta stanowi początek osi współrzędnych. Oś X pokrywa się z osią pręta; leżą na niej siły zewnętrzne P , rozciągające dodatnie, lub ściskające ujemne, przyłożone do środków obu ścianek czołowych pręta. Odciętej x przynależy bieżący przekrój poprzeczny F , stały, lub nader powolnie zmienny. Jego siła osiowa, niewątpliwie równa P , da naprężenie:

$$N_x = \frac{P}{F}$$

To naprężenie jest niezmiennie dla wszystkich przekrojów pręta o stałym przekroju F , zatem nieważki pręt prosty o stałym przekroju, obciążony na ściankach czołowych siłami osiowymi jest prętem o stałej wytrzymałości osiowej. Jego przekrój wyznaczymy, jako iloraz siły osiowej P przez naprężenie dopuszczalne.

W ogólnym przypadku pręta o przekroju zmiennym iloraz ten da przekrój najmniejszy, jako niebezpieczny F_n .

Wydlużenie odcinka x i całej pierwotnej długości l pręta:

$$\Delta x = \frac{P}{E} \int_0^x \frac{dx}{F} \quad \Delta l = \frac{P}{E} \int_0^l \frac{dx}{F}$$

praca sprężysta dla odcinka x i całego pręta:

$$H_x = \frac{P^2}{2E} \int_0^x \frac{dx}{F} \quad H = \frac{P^2}{2E} \int_0^l \frac{dx}{F}$$

Dla pręta o stałym przekroju:

$$\Delta x = \frac{Px}{EF} \quad \Delta l = \frac{Pl}{EF} \quad H_x = \frac{P^2 x}{2EF} \quad H = \frac{P^2 l}{2EF}$$

Przykłady: Pręt prosty, stalowy o przekroju kołowym. Obciążenie rozciągające trwałe.

$$l = 2\text{m} \quad P = 2\text{t} \quad E = 2150000 \text{ kg/cm}^2 \quad k_r = 1000 \text{ kg/cm}^2$$

a. Przekrój stały. Jego średnicę D wyznaczymy ze wzoru:

$$\frac{1}{4} \pi D^2 = 2000 : 1000$$

z zaokrągleniem:

$$D = 1,6 \text{ cm} \quad F = 2,01 \text{ cm}^2$$

Przyrost długości całego pręta:

$$\Delta l = \frac{2000 \times 200}{2150000 \times 2,01} = 0,09 \text{ cm}$$

b. Pręt stożkowy. Promienie ścianek czołowych: r , $R = nr$. Przy $n > 1$ mniejszy promień r wyznaczymy ze wzoru:

$$\pi r^2 = 2000 : 1000$$

z zaokrągleniem:

$$r = 0,8 \text{ cm} \quad F = 2,01 \text{ cm}^2$$

Odciętej x mierzonej od skrajnego najmniejszego przekroju, przynależy przekrój bieżący o promieniu:

$$r_x = r + (R - r) \frac{x}{l} = r \left(1 + \frac{n-1}{l} x \right)$$

zatem wydłużenie pręta:

$$\Delta l = \frac{P}{E \pi r^2} \int_0^l \frac{dx}{\left(1 + \frac{n-1}{l} x \right)^2} = \frac{Pl}{En \pi r^2} = \frac{0,09}{n} \text{ cm}$$

3. Pręt wałki pionowy prosty. Środek dolnej czołowej ścianki pręta stanowi początek osi współrzędnych. Oś X utożsamia się z osią pręta. Leżą na niej siły osiowe obciążenia zewnętrznego czołowych ścianek pręta: górna P_g równoważy dolną P_d oraz ciężar pręta:

$$G = \int_0^l c F dx$$

Tutaj c oznacza ciężar właściwy tworzywa, l — pierwotną długość pręta.

Siła osiowa przekroju bieżącego F , przynależnego odciętej x :

$$O_x = P_d + \int_0^x c F dx$$

stąd naprężenie:

$$N_x = \frac{O_x}{F}$$

Wydłużenie odcinka x — oraz całego pręta:

$$\Delta x = \int_0^x \left(P_d + \int_0^x c F dx \right) \frac{dx}{EF} \quad \Delta l = \int_0^l \left(P_d + \int_0^x c F dx \right) \frac{dx}{EF}$$

Maximum bezwzględne N_m naprężeń N_x wyodrębnia przekrój F_n niebezpieczny. To naprężenie N_m nie może przekraczać dopuszczalnego. Przekrój niebezpieczny pręta o stałym przekroju F leży tuż pod jego czołową ścianką górną, gdy siła P_d jest rozciągająca, dodatnia. Zatem:

$$N_m = \frac{P_d}{F} + c l$$

Natomiast, gdy siła P_d jest ujemna, ściskająca, jej wielkość bezwzględna może być większa od ciężaru całego pręta: clF . W tym szczególnym przypadku we wszystkich przekrojach pręta panują naprężenia ujemne, ściskające. Niebezpieczny przekrój leży tuż ponad dolną czołową ścianką pręta. Jego naprężenie:

$$N_m = \frac{P_d}{F}$$

Wreszcie, gdy siła P_d jest ujemna, a wielkość jej bezwzględna nie przekracza ciężaru pręta, wtedy — dolna część pręta jest ściskana, górna — rozciągana. Graniczny, *obojętny* przekrój, przynależny odciętej x_0 , nie jest naprężony, a przeto:

$$P_d + c x_0 F = 0$$

Skrajne naprężenie rozciągające:

$$\frac{P_d}{F} + cl$$

panuje tuż pod górną czołową ścianką pręta, ściskające:

$$\frac{P_d}{F}$$

— tuż nad dolną.

Niezależnie od znaku siły P_d przyrost całej długości pręta:

$$\Delta l = \int_0^l (P_d + cx F) \frac{dx}{EF} = (P_d + \frac{1}{2} G) \frac{l}{EF}$$

jest taki, jak dla pręta nieważkiego o stałym przekroju, obciążonego siłami osiowymi: $P + \frac{1}{2} G$.

Przykłady: a. Pręt o stałym przekroju F ustawiono pionowo na ścianie czołowej dolnej; do środka górnej — przyłożono siłę rozciągającą P_g , równą połowie ciężaru G pręta. Zatem:

$$P_d = -\frac{1}{2} G \quad \Delta l = 0$$

Przekrój obojętny leży w połowie wysokości pręta.

b. Znaleźć przekroje (Rys. 34) pręta ważkiego, przy danym ciężarze właściwym c kg/cm^3 i naprężeniu dopuszczalnym k_r kg/cm^2 tworzywa. Dla górnych przekrojów każdego odcinka:

$$F_1 k_r = P_d + cl_1 F_1 \quad F_2 k_r = P_d + cl_1 F_1 + cl_2 F_2$$

$$F_3 k_r = P_d + cl_1 F_1 + cl_2 F_2 + cl_3 F_3$$

stąd:

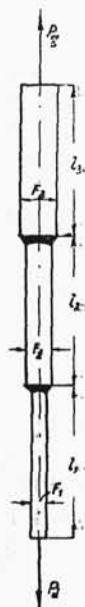
$$F_1 = \frac{P_d}{k_r - cl_1} \quad F_2 = \frac{P_d k_r}{(k_r - cl_1)(k_r - cl_2)}$$

$$F_3 = \frac{P_d k_r^2}{(k_r - cl_1)(k_r - cl_2)(k_r - cl_3)}$$

Przyrost całej długości pręta:

$$\Delta l = \frac{P_d + \frac{1}{2} cl_1 F_1}{EF_1} l_1 + \frac{P_d + cl_1 F_1 + \frac{1}{2} cl_2 F_2}{EF_2} l_2 +$$

$$+ \frac{P_d + cl_1 F_1 + cl_2 F_2 + \frac{1}{2} cl_3 F_3}{EF} l_3$$



Rys. 34.

4. Pręt prosty o stałej wytrzymałości osiowej, zwisa pionowo dźwigając ciężar P , przyłożony do środka czołowej ścianki dolnej pręta. W osiowej odległości x od tego środka wyodrębniamy płytkę grubości dx . Pole jej ścianki dolnej — F , górnej: $F + dF$; ciężar właściwy tworzywa pręta: $c \text{ kg/cm}^3$. Siła osiowa ścianki dolnej: FN_x , górnej:

$$FN_x + d(FN_x)$$

Ich różnica równoważy ciężar płytki $cFdx$.

W szczególnym przypadku pręta o stałej wytrzymałości osiowej, naprężenie N_x ma stałą wartość k_r dla wszystkich przekrojów, zatem:

$$k_r dF = cF dx$$

stąd, całkując:

$$F = Ae^{\frac{cx}{k_r}}$$

Przy x znikomo różnym od zera, a więc w przekroju F_0 tuż ponad dolną czołową ścianką pręta, panuje naprężenie:

$$\frac{P}{F_0} = k_r$$

a przeto ostatecznie:

$$F = \frac{P}{k_r} e^{\frac{cx}{k_r}}$$

Ten wzór wyraża prawo zmienności przekrojów. Wypisany z k_c , zamiast k_r , stosuje się do wazkiego pręta prostego o stałej wytrzymałości osiowej, ustawionego pionowo na szerszej ścianie czołowej i obciążonego ciężarem P , przyłożonym do środka czołowej ścianki górnej pręta.

Dla obu prętów wydłużenie odcinka dx :

$$\delta dx = \frac{N_x dx}{E} = \frac{k}{E} dx$$

całego pręta zaś:

$$\Delta l = \frac{k}{E} l$$

gdzie pod k należy rozumieć odpowiednio k_r lub k_c .

5. Pręt obracający się z szybkością kątową ω . Oś obrotu przechodzi przez środek jednej ze ścianek czołowych pręta, prostopadle do jego osi X . Środek O drugiej jego ścianki czołowej stanowi początek osi współrzędnych. Odciętym: $x, x+dx$ przynależą odpowiednio przekroje:

$$F \quad F+ dF$$

płytki bieżącej.

Oznaczmy przez n masę jednostki objętości (cm^3) tworzywa. Masa płytki będzie więc: $nFdx$, jej siła odśrodkowa:

$$n\omega^2(l-x)Fdx$$

gdzie l oznacza pierwotną długość pręta.

Siła osiowa przekroju bieżącego F :

$$n\omega^2 \int_0^x F(l-x) dx$$

daje naprężenie osiowe:

$$N_x = \frac{n\omega^2}{F} \int_0^x F(l-x) dx$$

Wydłużenie odcinka dx będzie:

$$\frac{N_x}{E} dx$$

a przeto wydłużenie całego pręta:

$$\Delta l = \frac{n\omega^2}{E} \int_0^l \frac{dx}{F} \int_0^x F(l-x) dx$$

Dla pręta o stałym przekroju, przekrój niebezpieczny leży tuż przed czołową ścianką, zawierającą oś obrotu. Panuje w nim naprężenie:

$$N_m = \frac{1}{2} n\omega^2 l^2 = \frac{1}{2} nv^2$$

gdzie v — oznacza linjową szybkość środka drugiej ścianki czołowej pręta — inaczej mówiąc — środka osi współrzędnych.

Wydłużenie całego pręta:

$$\Delta l = \frac{n \omega^2 l^3}{3E} = \frac{nl}{3E} v^2$$

6. **Dynamiczne naprężenia osiowe.** Pionowy ważyk pręt prosty dźwiga ciężar P masy, skupionej w środku dolnej ścianki czołowej pręta. Osiowej odległości x od tego środka przynależy przekrój bieżący F pręta. Ciężar właściwy tworzywa oznaczamy przez c , pierwotną długość pręta przez l . Ciężar samego pręta będzie więc:

$$G = c \int_0^l F dx$$

Pręt wraz z ciężarem P porusza się pionowo pod działaniem siły Q , ciągnącej, przyłożonej do środka górnej czołowej ścianki pręta. W braku dokładniejszych danych zakładamy, że wszystkie płytki pręta wraz z dodatkową masą u dołu mają to samo przyspieszenie a , całość rozwija przeto sprzeciw:

$$(P + G) \frac{a}{g}$$

Ten sprzeciw dynamiczny, łącznie z ciężarem masy dodatkowej i ciężarem samego pręta, zrównoważają siłę ciągnącą, a przeto:

$$Q = (P + G) \left(1 + \frac{a}{g} \right)$$

Dla pręta o stałym przekroju F , przekrój niebezpieczny leży tuż pod górną czołową ścianką pręta. Panuje w nim naprężenie skrajne:

$$N_{md} = \frac{P + G}{F} \left(1 + \frac{a}{g} \right)$$

dynamiczne, różniące się tak zwanym *spółczynnikiem dynamicznym*:

$$1 + \frac{a}{g}$$

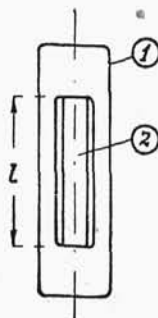
od naprężenia statycznego:

$$N_m = \frac{P + G}{F}$$

panującego w tym samym przekroju niebezpiecznym pręta nie-ruchomego, obciążonego pośrodku górnej czołowej ścianki siłą osiową:

$$Q = P + G$$

7. Ciepne naprężenia osiowe. W pręcie (1) wycięto osiowo otwór (Rys. 35) naprzestrzał, zmniejszając w ten sposób przekrój pierwotny stały pręta do F_1 i wpasowano pręt (2) z innego tworzywa, o przekroju stałym F_2 , tak, aby jego długość l przy temperaturze t_0 była ściśle równa odpowiedniej długości otworu. Zatem, przy temperaturze t_0 płaskie czołowe ścianki pręta (2) ściśle przylegają do przeciwnych płaskich ścianek otworu — bez żadnego nacisku.



Rys. 35

Spółczynniki sprężystości podłużnej tworzywa pręta (1) i (2) oznaczamy odpowiednio przez E_1 i E_2 . Spółczynnik linowej rozszerzalności cieplnej c_2 pręta (2) jest większy od współczynnika c_1 pręta (1), zatem, przy równomiernym nagrzaniu obu prętów do temperatury t , pręt (1) będzie rozciągany siłami osiowymi X , narazie niewiadomymi, pręt (2) — ściskany. Długość pierwotna l po nagrzaniu będzie równa:

$$l c_1 (t - t_0) + \frac{X l}{E_1 F_1} = l c_2 (t - t_0) - \frac{X l}{E_2 F_2}$$

stąd bezpośrednio:

$$X = \frac{(c_2 - c_1) (t - t_0)}{\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2}}$$

Dzieląc X przez F_1 i F_2 otrzymamy naprężenia w prętach (1) i (2) ustroju.

8. Słup żelazobetonowy o stałym prawidłowym niejednorodnym przekroju F , dajmy na to, kwadratowym, dźwiga ciężar P . Uzbrojenie podłużne rozłożono w przekroju symetrycznie względem podłużnej osi pręta, utożsamiając w ten sposób ze środkiem przekroju F — środek sprężystości przekroju niejednorodnego.

Oznaczmy przez F_s łączny przekrój stalowego uzbrojenia podłużnego, przez:

$$F_b = F - F_s$$

przekrój betonu. Zazwyczaj stosunek F_s do F_b waha się w granicach od 0,008 do 0,03.

Spółczynniki rozszerzalności cieplnej obu tworzyw są jednakowe, różnią się natomiast współczynniki sprężystości podłużnej: E_s stali i E_b — betonu. Oznaczmy ich stosunek:

$$E_s : E_b$$

przez n . W założeniu jednakowego wydłużenia e_x względem osi podłużnej pręta, naprężenia betonu będą:

$$N_b = E_b e_x$$

uzbrojenia zaś:

$$N_s = E_s e_x = n E_b e_x$$

Wypadkowa tych naprężeń:

$$\int_{F_b} N_b dF_b + \int_{F_s} N_s dF_s = e_x E_b F_b + e_x E_s F_s = e_x E_b (F_b + n F_s)$$

daje *siłę nośną* słupa:

$$P = N_b (F_b + n F_s)$$

Wyraz:

$$F_b + n F_s$$

tego wzoru stanowi tak zwany *przekrój zastępczy* słupa. Przy obliczaniu siły nośnej słupa należy brać:

$$n = 15$$

Przy uzbrojeniu słupa podłużnym i poprzecznym wzór na przekrój zastępczy należy uzupełnić odpowiednimi wyrazami, opartymi na wynikach doświadczeń.