

III. ROZDZIAŁ TRZECI.

S P R E Ż Y S T O Ś Ć.

A. Część pierwsza.

1. **Rodzaje odkształceń.** Ograniczmy się do wyłącznego badania odkształceń ciała stałego, wywołanych działaniem obciążenia zewnętrznego — czyli układu zrównoważonych sił odkształcających.

Odkształcenia są sprężyste, gdy ciało powraca do swej postaci pierwotnej, po odciążeniu, czyli usunięciu sił odkształcających.

Odkształcenia są niesprężyste, gdy ciało zachowuje swą postać odkształconą po odciążeniu. Odkształcenia są mieszane, gdy ich część sprężysta znika po odciążeniu, a niesprężysta — pozostaje, jako trwały ślad działania sił odkształcających.

Odkształcenia sprężyste zachodzą w ściśle ograniczonym obszarze sprężystości tworzywa. Dolnej jego granicy odpowiada pierwotny stan ciała nieodkształconego. Górna — zwie się *granica sprężystości* tworzywa. Poza nią poczyną się obszary odkształceń mieszanych.

2. **Obciążenia zewnętrzne.** Obciążenie zwie się *stopniowem*, gdy jego siły, stale zrównoważone, wzrastają zwolna, bez przerw i nagłych skoków od początkowych zerowych, aż do swych skrajnych wielkości ostatecznych. Zwroty sił i kierunki ich osi pozostają przytem niezmiennie — przy stopniowem a ciąglem przemieszczaniu się lub tożsamości punktów uciepienia.

Przebieg ściśle odwrotny zwie się *odciążeniem* stopniowem.

Obciążenie zwie się *nagłem*, gdy ciało zostaje poddane równoczesnemu działaniu zrównoważonego układu sił odkształcających — zewnętrznych.

Jednoczesne przerwanie działania zrównoważonego układu sił odkształcających zwie się *odciążeniem* nagłym ciała obciążonego.

Obciążenie nagłe skojarzone z oddaniem ciała energii kinetycznej — zwie się *udarowem*.

Obciążenie lub odciążenie stopniowe, nader powolne, nazywamy *statycznym*. Obciążenia nagłe i udarowe zwa się *dynamicznymi*. Obciążenia dynamiczne wywołują odkształcenia i naprężenia zwane dynamicznymi, w odróżnieniu od zwykłych, przynależnych obciążeniom statycznym.

3. Równowaga odkształcenia. Przy odkształceniu ciała stałego punkt uciepienia siły odkształcającej zewnętrznej przemieszcza się. Rzut tego przemieszczenia na pierwotną oś siły zwie się *posunięciem* tej siły, przyczem znak siły przynależy jej posunięciu jednozrotnemu, odwrotny zaś — różnozrotnemu z siłą.

Siła przez posunięcie daje pracę — stąd prosty sposób wyznaczania posunięć sił uogólnionych: kąt obrotu pary sił stanowi posunięcie jej momentu, jako siły uogólnionej.

Sprężystym odkształceniom przynależą naprężenia — naprężeniom — znikome siły wewnętrzne. Ich wypadkowe, lub składowe, zwane uogólnionymi *siłami sprężystości* mają posunięcia względne.

Podstawowy warunek równowagi ciała sprężyste odkształconego będzie więc, według zasady prac możliwych (wirtualnych):

$$\delta L - \delta H = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

gdzie pierwszy wyraz oznacza elementarną możliwą pracę sił odkształcających zewnętrznych, drugi — sił sprężystości wewnętrznych; obie przy znikomem odkształceniu możliwem.

4. Praca sił zewnętrznych. W układzie osi prostokątnych, związanych z ciałem nieodkształconem, bieżący jego punkt ma współrzędne x, y, z . Niezmiennemu w czasie odkształceniu przynależą posunięcia osiowe u, v, w tego punktu. Przyrosty

$$\delta u, \quad \delta v, \quad \delta w$$

są niewątpliwie *możliwymi posunięciami* bieżącego punktu ciała odkształconego, a zarazem i składowych:

$$X \delta x \quad Y \delta y \quad Z \delta z$$

wypadkowej obciążenia zewnętrznego $R dV$, uczepionej w tym punkcie.

W bieżącym punkcie powierzchni ciała odkształconego, na jej poletku dF , działa zewnętrzna siła odkształcająca $p dF$, lub jej składowe:

$$p_x dF \quad p_y dF \quad p_z dF$$

Przynależne im posunięcia będą również: $\delta u, \delta v, \delta w$, a przeto możliwa praca sił zewnętrznych, odkształcających wyrazi się wzorem:

$$\delta L = \int_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dV + \int_F (p_x\delta u + p_y\delta v + p_z\delta w) dF \quad (44)$$

w którym sumowanie należy rozprzestrzenić na pierwotne: objętość V i powierzchnię F ciała nieodkształconego.

5. **Praca sił sprężystości.** Mnożąc naprężenia (Rys. 1) przez odpowiednie poletka, otrzymamy układ elementarnych sił — normalnych i stycznych w bieżącym punkcie ciała odkształconego. Dwie siły tego układu, normalne, współosiowe, stanowią uogólnioną siłę sprężystości *normalną*; cztery siły styczne, prostopadłe do tej samej osi spólrzędnych — *styczną*.

Normalnej sile sprężystości ($N_x dydz, N'_x dydz$) przynależy możliwe posunięcie względne:

$$\delta(e_x dx) = dx \delta e_x$$

jako elementarny przyrost osiowego rozsunięcia się punktów uczepienia tej uogólnionej siły — podwójnej. Jej praca elementarna będzie:

$$N_x \delta e_x dV$$

Styczna siła sprężystości ($T_{yz} dx dz, T'_{yz} dx dz, T_{xy} dx dy, T'_{xy} dx dy$) stanowi układ czterech sił, prostopadłych do osi X . Przy odkształceniu punkty uczepienia dwóch pierwszych i dwóch ostatnich posuną się względem siebie odpowiednio o: $\frac{\partial w}{\partial y} dy$ i $\frac{\partial v}{\partial z} dz$ w kierunku osi Z i osi Y (I. A. 2). Odpowiednie możliwe posunięcia będą więc:

$$\delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} dy \right) = dy \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} dz \right) = dz \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

a praca elementarna tej uogólnionej siły pochwórnej:

$$T_x \left[\delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dV = T_x \delta g_x dV$$

Zatem elementarna praca możliwa sił sprężystości wyrazi się wzorem:

$$\delta H = \int_V (N_x \delta e_x + N_y \delta e_y + N_z \delta e_z + T_x \delta g_x + T_y \delta g_y + T_z \delta g_z) dV \quad (45)$$

gdzie sumowanie należy rozciągnąć na pierwotną objętość V ciała nieodkształconego.

6. Energja sprężystości. Oznaczmy elementarny przyrost pracy sił sprężystości, przynależny jednostce objętości w bieżącym punkcie ciała odkształconego przez:

$$\delta W = N_x \delta e_x + N_y \delta e_y + N_z \delta e_z + T_x \delta g_x + T_y \delta g_y + T_z \delta g_z \quad (46)$$

i załóżmy, że składowe naprężenia są jednoznacznie ciągłymi funkcjami składowych odkształceń w tym punkcie. Można udowodnić, opierając się na pierwszym prawie termodynamiki, że prawa strona wzoru (46) istotnie stanowi pełną różniczkę funkcji W składowych odkształceń, rdzennie dodatniej, zwanej *pracą sprężystą*, lub *energją sprężystości*. Funkcja ta różni się nieco wartością współczynników w zależności od irotermiczności lub adiabatyczności przebiegu odkształceń. Różnice te są jednak znikome, jak o tem świadczą wyniki doświadczeń przy obciążeniach statycznych i dynamicznych, a więc i odkształceniach praktycznie izotermicznych i adiabatycznych.

Zatem:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial W}{\partial e_x} & N_y &= \frac{\partial W}{\partial e_y} & N_z &= \frac{\partial W}{\partial e_z} \quad . \quad . \quad . \quad (47) \\ T_x &= \frac{\partial W}{\partial g_x} & T_y &= \frac{\partial W}{\partial g_y} & T_z &= \frac{\partial W}{\partial g_z} \end{aligned}$$

co bezpośrednio wypływa ze wzoru (46).

7. Prawo Hooke'a. Pierwotne prawo Hooke'a

„ut tensio, sic vis”

przełożone na język pojęć dzisiejszych, orzeka, że:

odkształcenia sprężyste są proporcjonalne do obciążeń w obszarze proporcjonalności.

Dolnej granicy tego obszaru odpowiada pierwotny stan ciała nieodkształconego: — górna — zwie się *granica proporcjonalności* tworzywa.

„Rozszerzone” prawo Hooke’a opiera się na pierwotnem i głosi, że w obszarze proporcjonalności:

składowe naprężeń punktu bieżącego wyrażają się jednorodnemi linjowemi funkcjami składowych odkształceń tegoż punktu.

To znaczy się, że:

$$\begin{aligned} N_x &= a_{11} e_x + a_{12} e_y + a_{13} e_z + a_{14} g_x + a_{15} g_y + a_{16} g_z \\ N_y &= a_{21} e_x + a_{22} e_y + a_{23} e_z + a_{24} g_x + a_{25} g_y + a_{26} g_z \\ N_z &= a_{31} e_x + a_{32} e_y + a_{33} e_z + a_{34} g_x + a_{35} g_y + a_{36} g_z \\ T_x &= a_{41} e_x + a_{42} e_y + a_{43} e_z + a_{44} g_x + a_{45} g_y + a_{46} g_z \\ T_y &= a_{51} e_x + a_{52} e_y + a_{53} e_z + a_{54} g_x + a_{55} g_y + a_{56} g_z \\ T_z &= a_{61} e_x + a_{62} e_y + a_{63} e_z + a_{64} g_x + a_{65} g_y + a_{66} g_z \end{aligned} \quad (48)$$

przyczem:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

co wprost wynika z (47) przy różniczkowaniu. Nadto zależności (47) dają pracę sprężystą:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} (a_{11} e_x^2 + a_{22} e_y^2 + a_{33} e_z^2 + a_{44} g_x^2 + a_{55} g_y^2 + a_{66} g_z^2) + \\ &+ a_{12} e_x e_y + a_{13} e_x e_z + a_{14} e_x g_x + a_{15} e_x g_y + a_{16} e_x g_z + \\ &+ a_{23} e_y e_z + a_{24} e_y g_x + a_{25} e_y g_y + a_{26} e_y g_z + a_{34} e_z g_x + \\ &+ a_{35} e_z g_y + a_{36} e_z g_z + a_{45} g_x g_y + a_{46} g_x g_z + a_{56} g_y g_z \end{aligned} \quad (49)$$

Inaczej jeszcze:

$$W = \frac{1}{2} (N_x e_x + N_y e_y + N_z e_z + T_x g_x + T_y g_y + T_z g_z) \quad (50)$$

co bezpośrednio wypływa z Euler'owskiego twierdzenia o funkcjach jednorodnych.

8. Spółczynniki sprężystości. Spółczynniki a_{ij} , zwane *spółczynnikami sprężystości*, zależą w ogólnym przypadku od czasu i spólrzędnych punktu bieżącego ciała nieodkształconego. Zależność ich od czasu cechuje ciało o *sprężystości niestatej*, zależność od spólrzędnych — ciało o *sprężystości niejednolitej*.

Stałe wartości 21 spółczynników sprężystości wyróżniają ciało o *sprężystości jednolitej, stałej*.

Stałe ich wartości, różne od zera, przynależą ciału *różnokierunkowo-sprężystemu*, sprężystościowo niesymetrycznemu.

Sprężystościową symetrię względem jednej z płaszczyzn osi spólrzędnych cechuje kształt niezmienny funkcji W przy zmianie znaku spólrzędnych, do tej płaszczyzny prostopadłych.

Sprężystościową symetrię względem osi — cechuje kształt niezmienny funkcji W przy obrocie ciała około tej osi o kąt ściśle określony, lub zgoła dowolny.

W obu przypadkach symetrii — część spółczynników a_{ij} ma wartości zerowe. Przy zmianie zwrotu osi, zmieniają znak spólrzędne wraz z odpowiednimi składowymi g_x, g_y, g_z odkształceń. Wynika to wprost ze wzorów (3).

Przy obrocie osi spólrzędnych, zmieniają się składowe odkształceń według wzorów:

$$\begin{aligned} e_x' &= e_x l_1^2 + e_y m_1^2 + e_z n_1^2 + g_x m_1 n_1 + g_y l_1 n_1 + g_z l_1 m_1 \\ e_y' &= e_x l_2^2 + e_y m_2^2 + e_z n_2^2 + g_x m_2 n_2 + g_y l_2 n_2 + g_z l_2 m_2 \\ e_z' &= e_x l_3^2 + e_y m_3^2 + e_z n_3^2 + g_x m_3 n_3 + g_y l_3 n_3 + g_z l_3 m_3 \\ g_x' &= 2(e_x l_2 l_3 + e_y m_2 m_3 + e_z n_2 n_3) + g_x(m_2 n_3 + m_3 n_2) + \\ &\quad + g_y(n_2 l_3 + n_3 l_2) + g_z(l_2 m_3 + l_3 m_2) \quad \dots \quad (51) \\ g_y' &= 2(e_x l_1 l_3 + e_y m_1 m_3 + e_z n_1 n_3) + g_x(m_1 n_3 + m_3 n_1) + \\ &\quad + g_y(n_1 l_3 + n_3 l_1) + g_z(l_1 m_3 + l_3 m_1) \\ g_z' &= 2(e_x l_1 l_2 + e_y m_1 m_2 + e_z n_1 n_2) + g_x(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \\ &\quad + g_y(n_1 l_2 + n_2 l_1) + g_z(l_1 m_2 + l_2 m_1) \end{aligned}$$

wypływających bezpośrednio z (5) i (16). Górne wskaźniki i współczynniki kierunkowe:

$$l_1, m_1, n_1 \quad l_2, m_2, n_2 \quad l_3, m_3, n_3$$

przynależą nowym osiom X', Y', Z' .

9. Ciało równokierunkowo-sprężyste. Sprężystościowa symetria względem wszelkiej płaszczyzny i osi cechuje ciała *równokierunkowo-(izotropowo)-sprężyste*. Zmiana znaku współrzędnych z, w pociąga za sobą zmianę znaku wszystkich wyrazów funkcji W , zawierających po jednym mnożniku g_x lub g_y . Zatem symetrii względem płaszczyzny YZ przynależą zerowe wartości współczynników:

$$a_{14}, a_{15}, a_{24}, a_{25}, a_{34}, a_{35}, a_{46}, a_{56}$$

Dalszy warunek symetrii względem płaszczyzny ZX kojarzy się dodatkowo z zerowymi wartościami współczynników:

$$a_{16}, a_{26}, a_{36}, a_{45}$$

Nadto, ze względu na widoczną możliwość przemianowania osi współrzędnych, winno być:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} \quad a_{44} = a_{55} = a_{66}$$

i wreszcie — konieczna niezmiennosc kształtu funkcji W przy obrocie ciała około osi, dajmy na to Z o kąt dowolny, daje ostatnią zależność:

$$a_{11} - a_{12} - 2a_{44} = 0$$

Ostatecznie więc dla ciał równokierunkowo-sprężystych:

$$W = \left(\frac{1}{2} C + G \right) (e_x + e_y + e_z)^2 - 2G [e_x e_y + e_x e_z + e_y e_z - \\ - \frac{1}{4} (g_x^2 + g_y^2 + g_z^2)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

10. Składowe naprężeń i odkształceń. Dla ciała równokierunkowo-sprężystego mamy na mocy (47):

$$\begin{aligned} N_x &= C e_0 + 2 G e_x & T_x &= G g_x \\ N_y &= C e_0 + 2 G e_y & T_y &= G g_y \\ N_z &= C e_0 + 2 G e_z & T_z &= G g_z \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Dodając trzy pierwsze wzory otrzymamy:

$$N_x + N_y + N_z = (3C + 2G)e_0 \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

a przeto, po podstawieniu i zebraniu wyrazów:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E} \left(N_x - \frac{N_y + N_z}{m} \right) & g_x &= \frac{T_x}{G} \\ e_y &= \frac{1}{E} \left(N_y - \frac{N_x + N_z}{m} \right) & g_y &= \frac{T_y}{G} \\ e_z &= \frac{1}{E} \left(N_z - \frac{N_x + N_y}{m} \right) & g_z &= \frac{T_z}{G} \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

gdzie:

$$E = \frac{3C + 2G}{C + G} G \quad m = 2 \frac{C + G}{C} \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

i naodwrot:

$$G = \frac{mE}{2(m+1)} \quad C = \frac{mE}{(m+1)(m-2)} = \frac{2G}{m-2} \quad . \quad . \quad (57)$$

Spółczynnik E zwie się *spółczynnikiem sprężystości podłużnej*, G — *spółczynnikiem sprężystości poprzecznej*, m oznacza odwrotność liczby *Poisson'a*.

Nadto, po podstawieniu:

$$\begin{aligned} W &= G \left[\frac{m-1}{m-2} (e_x + e_y + e_z)^2 - 2(e_x e_y + e_x e_z + e_y e_z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (g_x^2 + g_y^2 + g_z^2) \right] \quad . \quad . \quad . \quad (58) \end{aligned}$$

lub też:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{E} \left[\frac{1}{2} (N_x + N_y + N_z)^2 - \frac{m+1}{m} (N_x N_y + N_x N_z + N_y N_z - \right. \\ &\quad \left. - T_x^2 - T_y^2 - T_z^2) \right] \quad . \quad . \quad . \quad (59) \end{aligned}$$

B. Część druga.

1. **Odształcenia samorodne i cieplne.** *Odształcenia samorodne* pojawiają się zazwyczaj z nagłą, nieoczekiwanie, pod działaniem *naprężeń utajonych* tworzywa, pozostałych po niejednostajnych przemianach fizycznych i chemicznych (hartowaniu stali, krzepnięciu odlewu, wiązaniu zaprawy...). Niepożądane zmiany kształtu, częste pęknięcia, jako wynik działania *naprężeń utajonych*, aż nadto przemawiają za wyłączeniem z użycia do celów praktycznych tworzywa, odkształcającego się samorodnie. Nie będziemy go brali przeto pod uwagę.

Odształcenia cieplne, zależne od zmian temperatury, kojarzą się z *naprężeniami cieplnymi* tworzywa przy nieswobodnej rozszerzalności (opory zewnętrzne, miejscowe ogrzanie ciała, ciepłnie jednorodnego, lub równomierne nagrzanie — niejednorodnego). Te odkształcenia i naprężenia narazie wyłączymy z rozważań. Rozpatrywać będziemy je oddzielnie.

Ostatecznie więc dochodzimy do wniosku, że pierwotny stan ciała stałego, nieobciążonego siłami zewnętrznymi, odpowiada ściśle określonej, stałej temperaturze jego tworzywa, wolnego od *naprężeń cieplnych i utajonych*.

Działanie sił ciężkości w wielu przypadkach pomijamy, jako znikome.

2. **Kierunki główne.** W bieżącym punkcie ciała równokierunkowo-sprężystego, kierunki główne odkształceń i naprężeń są jednakowe, zatem w układzie głównych osi, wyprowadzonych z tego punktu, wydłużeniom głównym:

$$e_1, e_2, e_3$$

przynależą naprężenia główne:

$$N_1, N_2, N_3$$

przyczem (III. A. 10):

$$\begin{aligned} N_1 &= 2G \left(e_1 - \frac{e_0}{m-2} \right) \\ N_2 &= 2G \left(e_2 - \frac{e_0}{m-2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60) \\ N_3 &= 2G \left(e_3 - \frac{e_0}{m-2} \right) \end{aligned}$$

gdzie:

$$e_0 = e_1 + e_2 + e_3$$

Naodwrot:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{E} \left(N_1 - \frac{N_2 + N_3}{m} \right) \\ e_2 &= \frac{1}{E} \left(N_2 - \frac{N_3 + N_1}{m} \right) \quad \dots \quad (61) \\ e_3 &= \frac{1}{E} \left(N_3 - \frac{N_1 + N_2}{m} \right) \end{aligned}$$

W układzie osi głównych składowe:

$$g' = g'' = g''' = T' = T'' = T''' = 0$$

a przeto jednostkowa praca sił sprężystości:

$$\begin{aligned} W &= G \left[\frac{m-1}{m-2} e_0^2 - 2(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) \right] = \\ &= G \left[e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \frac{e_0}{m-2} \right] \quad \dots \quad (62) \end{aligned}$$

$$W = \frac{1}{E} \left[\frac{1}{2} (N_1 + N_2 + N_3)^2 - \frac{m+1}{m} (N_1 N_2 + N_1 N_3 + N_2 N_3) \right]$$

3. Skrajne naprężenia styczne i przesunięcia. W bieżącym punkcie ciała równokierunkowo-sprężystego, kierunki skrajnych (II. A. 7) naprężeń stycznych:

$$T_1, T_2, T_3$$

i skrajnych przesunięć jednostkowych:

$$g_1, g_2, g_3$$

są odpowiednio te same, przyczem:

$$\begin{aligned} g_1 &= \pm (e_3 - e_2) \quad \text{dla } l=0 \quad m=n=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ g_2 &= \pm (e_1 - e_3) \quad \text{dla } m=0 \quad n=l=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \dots \quad (63) \\ g_3 &= \pm (e_2 - e_1) \quad \text{dla } n=0 \quad l=m=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Łatwo to dostrzec, zważywszy, że:

$$g_1 = \frac{T_1}{G} \quad g_2 = \frac{T_2}{G} \quad g_3 = \frac{T_3}{G} \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Na mocy tożsamości:

$$N_1 = \frac{1}{3} (N_1 + N_2 + N_3) + \frac{1}{3} (2N_1 - N_2 - N_3) = \frac{1}{3} N_0 + N_1'$$

$$N_2 = \frac{1}{3} (N_1 + N_2 + N_3) + \frac{1}{3} (2N_2 - N_3 - N_1) = \frac{1}{3} N_0 + N_2'$$

$$N_3 = \frac{1}{3} (N_1 + N_2 + N_3) + \frac{1}{3} (2N_3 - N_1 - N_2) = \frac{1}{3} N_0 + N_3'$$

gdzie:

$$N_0 = N_1 + N_2 + N_3 \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

wnioskujemy, że naprężenia główne w bieżącym punkcie ciała odkształconego mogą być rozpatrywane, jako sumy algebraiczne naprężeń głównych dwóch układów.

Naprężenia główne pierwszego układu są jednakowe i równe $\frac{1}{3} N_0$, kierunki główne przeto — obojętne. Naprężenia główne drugiego układu N_1' , N_2' , N_3' są jednokierunkowe z N_1 , N_2 , N_3 , a nadto powiązane zależnością:

$$N_1' + N_2' + N_3' = 0$$

Po podstawieniu otrzymamy:

$$W = \frac{m-2}{6mE} N_0^2 + \frac{1}{12G} [(N_3 - N_2)^2 + (N_1 - N_3)^2 + (N_2 - N_1)^2]$$

inaczej jeszcze:

$$W = \frac{m-2}{6mE} N_0^2 + \frac{1}{3G} (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

przyczem niewątpliwie:

$$T_1 + T_2 + T_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

4. Inne zmienne: Przemianujmy N_1, N_2, N_3 w N_W, N_S, N_M , tak, aby było:

$$N_W \geq N_S \geq N_M$$

przyczem jak dawniej:

$$N_0 = N_W + N_S + N_M$$

i oznaczmy:

$$T_0 = \frac{1}{2} (N_W - N_M)$$

$$K_0 = \frac{1}{2} (N_W + N_M) - N_S$$

a otrzymamy tożsamościowo:

$$N_W = \frac{1}{3} (N_0 + K_0) + T_0$$

$$N_S = \frac{1}{3} (N_0 + K_0) - K_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

$$N_M = \frac{1}{3} (N_0 + K_0) - T_0$$

oraz, po podstawieniu:

$$W = \frac{m-2}{6mE} N_0^2 + \frac{1}{6G} K_0^2 + \frac{1}{2G} T_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

gdzie T_0^2 oznacza *największy* z trzech kwadratów:

$$T_1^2, \quad T_2^2, \quad T_3^2$$

skrajnych naprężeń tnących. Zatem, T_0 oznacza promień największego półkola (Rys. 21) wykresu Mohr'a, a K_0 — odcinek \overline{CS} .

5. Spółczynnik E. Próbkę używaną do pomiarów współczynnika sprężystości podłużnej, stanowi pręt prosty, o środkowej części stałego przekroju F , obustronnie zakończonej symetrycznymi częściami uchwytowymi. *Pierwotny* przekrój F , stały na całej długości L środkowej części próbki, stopniowo wzrasta w częściach uchwytowych, ukształtowanych tak, aby ich obciążenie zewnętrzne, siłami osiowymi O_x , rozciągającymi rozkładało się w obu skrajnych przekrojach F w stosunku $O_x : F$ jednostek siły na jednostkę pola.

Zatem to obciążenie, po sprowadzeniu do środka któregośkolwiek przekroju F *pośredniego*, da *naprężenie osiowe*:

$$N_x = \frac{O_x}{F}$$

ciężar bowiem własny samej próbki można wprost pominąć, jako znikomy. Słowem, we wszystkich przekrojach poprzecznych środkowej części próbki panuje to samo naprężenie osiowe N_x , stałe dla bieżącego punktu przekroju.

Pomiar wydłużeń wymaga użycia *ekstensometru*. Dwa zaciskowe ostrza tego przyrządu odcinają pierwotną pomiarową długość l — część całkowitej długości L środkowej części próbki. Ich względny posuw przy odkształceniu, mierzony w znacznym powiększeniu, da przyrost $l' - l$ pierwotnej długości l , odkształconej w l' .

Wielkość tego przyrostu jest wogóle zależna od miejsca w którym odcięto l na L . Może być jednak odeń niezależna i — proporcjonalna do l , a wtedy odpowiada jej *wydłużenie jednostkowe*:

$$e_x = \frac{l' - l}{l}$$

stałe dla całej długości L próbki.

Naprężenie osiowe N_x leży w obszarze sprężystości, gdy przynależne mu przyrosty $l' - l$ giną po odciażeniu stopniowem. Nadto, w obszarze sprężystości przyrosty $l' - l$ są stałe na całej długości L , a przeto w tym obszarze naprężeniom osiowym N_x przynależą wydłużenia sprężyste e_x , stałe dla całej środkowej części próbki.

Stąd współczynnik sprężystości podłużnej:

$$E = \frac{N_x}{e_x}$$

Ma on wielkość stałą, dla całego obszaru sprężystości i proporcjonalności.

6. Granica sprężystości. Dolnej granicy obszaru sprężystości odpowiada pierwotny stan tworzywa próbki — przy zerowym naprężeniu osiowym. Stopniowym obciążeniami do naprężeń osiowych O_x , leżących w obszarze sprężystości, przynależą sprężyste przyrosty $l' - l$ pierwotnej pomiarowej długości l próbki, ginące bez śladu po stopniowym odciażeniu do zera.

Pierwszy, różny od zera trwały przyrost $l_1 - l$, pozostały po $l' - l$, odpowiada górnej granicy obszaru sprężystości, — skrajnemu jego naprężeniu osiowemu S_r , zwanemu *granica sprężystości* tworzywa przy rozciąganiu. Zatem, po stopniowym obciążeniu próbki siłami osiowymi do naprężenia S_r i następnym odciążeniu stopniowym do zera, — pierwotna pomiarowa długość nie będzie l jak poprzednio, lecz l_1 ; inaczej mówiąc, wykaże przyrost niesprężysty $l_1 - l$.

Przy obciążaniu stopniowym do naprężeń N_x poza granicę sprężystości i stopniowym odciążaniu następnym, niesprężyste przyrosty $l_1 - l$ rosną wraz z N_x , a przeto, poza granicą sprężystości S_r naprężeniom osiowym N_x rozciągającym, przynależą wydłużenia jednostkowe *sprężyste*:

$$e_{xs} = \frac{l' - l_1}{l}$$

i *niesprężyste*:

$$e_{xn} = \frac{l_1 - l}{l}$$

jako części właściwego *wydłużenia jednostkowego*:

$$e_x = \frac{l' - l}{l} = \frac{l' - l_1}{l} + \frac{l_1 - l}{l} = e_{xs} + e_{xn}$$

mieszanego.

Wydłużenia niesprężyste:

$$e_{xn} < 0,00001$$

praktycznie — są równe zeru, a przeto *granice sprężystości tworzywa przy rozciąganiu stanowi naprężenie osiowe S_r , przynależne niesprężystemu wydłużeniu jednostkowemu 0,00001*.

W ostatnich czasach to praktyczne zero wydłużeń niesprężystych podwyższono dość znacznie (do 0,0003), zmieniając odpowiednio i samo określenie S_r .

7. Granica proporcjonalności. Obszary sprężystości i proporcjonalności mają granicę dolną wspólną: odpowiada jej stan pierwotny tworzywa, przy zerowym naprężeniu osiowym.

W obszarze proporcjonalności, stopniowym obciążaniom do naprężeń osiowych szeregu:

$$N_x = N_i = 100 \text{ i kg/cm}^2 \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

odpowiadać winny wydłużenia jednostkowe:

$$e_{xs} = e_i \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

przyczem każda kolejna różnica dwóch ostatnich wydłużeń

$$e_{i+1} - e_i$$

może się różnić najwyżej tylko o:

$$\pm 0,000005$$

od $\frac{e_i}{i}$, lub od średniej arytmetycznej wszystkich różnic poprzednich. Pierwsza większa różnica

$$e_{j+1} - e_j$$

stanowi o górnej granicy obszaru, czyli o naprężeniu osiowym N_j , zwanem *granicą proporcjonalności* P_r tworzywa przy rozciąganiu.

Pod wydłużeniem e_{xs} należy wyżej rozumieć *wydłużenie jednostkowe sprężyste*, przynależne naprężeniu osiowemu N_x obszaru sprężystości, lub — *część sprężystą wydłużenia mieszanego*, przynależnego naprężeniu osiowemu N_x , wykraczającemu poza obszar sprężystości, lub równemu granicy sprężystości tworzywa.

Obszary sprężystości i proporcjonalności są więc od siebie niezależne, co do granic górnych S_r i P_r .

8. Liczba Poisson'a. Wydłużeniom osiowym e_x próbki rozciąganej towarzyszą m krotnie mniejsze wydłużenia poprzeczne ujemne, jednakowe we wszystkich kierunkach prostopadłych do osi pręta. Zatem, w układzie głównych osi bezwładności Y, Z stałego przekroju F próbki będziemy mieli:

$$e_y = e_z = -\frac{e_x}{m}$$

stąd bezpośrednio:

$$e_0 = e_x + e_y + e_z = \frac{m-2}{m} e_x$$

Pierwotna średnica D próbki o stałym przekroju F kołowym, po stopniowym obciążeniu osiowym do naprężenia N_x — odkształci

się w D' — nieco mniejszą średnicę współśrodkowego odkształconego przekroju kołowego, a przeto:

$$e_y = e_x = -\frac{e_x}{m} = -\frac{l' - l}{ml} = \frac{D - D'}{D}$$

stad bezpośrednio:

$$m = \frac{l - l'}{D - D'} \cdot \frac{D}{l}$$

dla próbki o przekroju kołowym.

W obszarze proporcjonalności i sprężystości tworzywa m ma wartość stałą. Odwrotność jej nosi miano *liczby Poisson'a*. Dla ciał jednorodnych, równokierunkowo sprężystych liczba ta waha się w dość szerokich granicach:

LICZBA POISSON'A

szkło:	0,25	nikiel:	0,33	glin:	0,37
cynk:	0,27	mosiądz:	0,34	olów:	0,43
żelazo:	0,28	miedź:	0,35	kauczuk:	0,47
stal:	0,29	bronz:	0,36	parafina:	0,49

Wyżej podany wzór dla rozszerzalności e_0 wskazuje, iż przy:

$$m = 2$$

rozciąganie próbki zachodzi przy niezmienniej objętości jej części pomiarowej, środkowej.

C. Część trzecia.

1. **Maszyny probiercze.** Próby wytrzymałościowe służą do określania cech wytrzymałościowych tworzywa. Maszyna, przeznaczona do prób wytrzymałościowych, zwie się probierzczą. Jako ustrój mechaniczny, ma ona, prócz nieruchomego szkieletu:

a. części uchwytowe, ujmujące próbkę, lub stanowiące jej podłoże,

b. części odkształcające, działające na próbkę bezpośrednio, lub zapomocą uchwytów, wreszcie:

c. części pomiarowe, czyli ogniwa mechanizmu, mierzącego siłę, lub energję odkształcającą, a nadto — kreślącego wykres.