

## XI. ROZDZIAŁ JEDENASTY.

# PRACA SPRĘŻYSTA.

### A. Część pierwsza.

1. **Ustrój parametralnie zmienny.** Ustrój, złożony z ogniów odkształcalnych, odpowiednio powiązanych na węzłach, może, jako sztywna całość — zmieniać położenie względem obranego układu odniesienia, a nadto — ulegać zmianom pierwotnego kształtu. Ustrój jest *parametralnie zmienny*, gdy wszelkie jego zmiany położenia i kształtu dają się sprowadzić do zmian skończonej liczby *w* parametrów geometrycznych *r* od siebie niezależnych.

Drogą zamiany zmiennych można otrzymać podstawowy układ tej samej liczby *w* parametrów *głównych*, obejmujący:

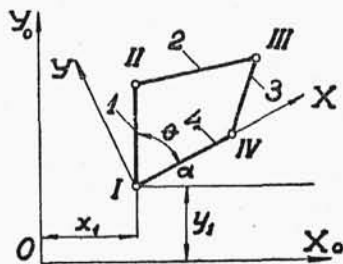
*a* parametrów położenia *u* lub przemieszczenia ustroju względem owego nieruchomego układu,

*b* parametrów przekształcenia *t* pierwotnej postaci ustroju przy niezmiennym kształcie wszystkich jego ogniów, wreszcie:

*c* parametrów doksztalcenia *s*, czyli zmian pierwotnej postaci ustroju, powstałych ze sprężystych odkształceń jego ogniów.

Weźmy, jako przykład, niezmiennie płaski ustrój czterech prętów prostych (Rys. 95), przegubowo łączonych na węzłach. Osie przegubów, prostopadłe do płaszczyzny ustroju, przechodzą przez punkty przecięcia się podłużnych osi prętów. W płaszczyźnie ustroju leży układ odniesienia — osi stałych prostokąt-

nych  $X_0, Y_0$ . Ten ustrój, zwany krótko: *przegubowo-prętowym* ma osiem geometrycznych parametrów niezależnych przy równomiernem osiowym odkształcaniu się prętów: ośm współrzędnych punktów węzłowych. Podstawowy układ parametrów głównych obejmuje:



Rys. 95.

*trzy parametry położenia:* dwie współrzędne  $x_1, y_1$  jednego z punktów węzłowych i kąt  $\alpha$  nachylenia ku osi  $X_0$  jednego z prętów,

*jeden parametr przekształcenia:* kąt  $\theta$  pomiędzy osiami którychkolwiek dwóch prętów, złączonych przegubowo, wreszcie:

*cztery parametry odkształcenia:* bezwzględne wydłużenia:  $q_1, q_2, q_3, q_4$  prętów.

**2. Siły zewnętrzne ustroju.** W ogólnym przypadku przy zmianie położenia, lub kształtu ustroju — punkt przyłożenia siły jego obciążenia zewnętrznego przemieszcza się. Rzut tego przemieszczenia na oś pierwotną siły zwie się *posunięciem* tej siły, przyczem znak siły przynależy jej posunięciu jednozrotnemu, — odwrotny zaś — różnozrotnemu z siłą. Siła przez posunięcie daje pracę, stąd prosty sposób określania posunięć sił uogólnionych. Tak, np. kąt obrotu pary sił stanowi posunięcie jej momentu, jako siły uogólnionej.

W ustrojach parametralnie zmiennych — posunięcia  $p$  sił  $P$  obciążenia zewnętrznego, zależne są od parametrów  $r$ ; *istnieje* przeto  $n$  zależności:

$$V(p, r) = 0 \quad . . . . . (154)$$

z których wyznaczyć można  $n$  posunięć  $p$  tyluż sił zewnętrznych  $P$ , zwykłych, lub uogólnionych, niezależnie od wielkości tych sił.

Tak np. warunek ściśle osiowej odkształcalności nieważkich ogniw ustroju przegubowo-prętowego wymaga obciążenia siłami zewnętrznymi  $P$ , lub ich składowymi:  $X, Y, Z$  wyłącznie tylko na punktach węzłowych. Przy zmianie parametrów głównych składowe przemieszczenia węzłów stają się posunięciami sił  $X, Y, Z$ , niezależnymi od ich wielkości.

Siły zewnętrzne ustroju mogą zmieniać swą wielkość niezależnie od położenia swych punktów uczepienia. Mogą być

również odeń zależne, a nadto zawierać niezależny czynnik wzrostu (szybkość kątowna stanowi ów czynnik siły odśrodkowej).

**3. Siły sprężystości ustroju.** Sprężystym odkształceniom ogniw przynależą naprężenia. Wypadkowe naprężeń, czyli tak zwane *siły sprężystości*  $Q$  występują zawsze bliźniaczo i różnizwrotnie, jako znoszące się wzajemnie siły wewnętrzne ustroju. Mają więc *posunięcia względne*  $q$ .

Układ skończonej liczby  $v$  sił  $Q$  i tyluż ich posunięć  $q$  jest *pełny*, gdy całkowity przyrost pracy sprężystej  $dH$  przynależny odkształceniom wszystkich ogniw ustroju, wyraża się jako  $\sum Q dq$ .

W ustrojach parametralnie zmiennych posunięcia  $q$ , jako względne, zależą tylko od parametrów odkształcenia  $s$ , istnieje przeto  $v$  zależności:

$$W(q, s) = 0 \quad . . . . . (155)$$

z których można wyznaczyć  $v$  posunięć  $q$  tyluż sił sprężystości  $Q$ , niezależnie zresztą od wielkości tych sił.

Nadto Wytrzymałość Tworzyw daje  $v$  zależności

$$S(q, Q) = 0 \quad . . . . . (156)$$

z których wyznaczyć można  $v$  sił  $Q$  w zależności od tyluż posunięć  $q$ , lub naodwrot.

Z linjowości *wszystkich* zależności (156) wypływa bezpośrednio swoista postać  $H$  pracy ustroju, jako jednorodnej funkcji drugiego stopnia sił  $Q$ , lub posunięć  $q$ .

Linjowość *wszystkich* zależności (154, 155 i 156) cechuje ustrój *linjowo parametralnie zmienny*.

Tak np. w ustroju (Rys. 95) złożonym z nieważkich prętów stałego przekroju  $F$ , obciążenie siłami zewnętrznymi na węzłach daje siły osiowe  $Q$  i wydłużenia  $q$  prętów, powiązane zależnościami:

$$S(q, Q) = EFq - Ql = 0$$

Zależności (155) otrzymamy ze znanego geometrycznego wzoru wyrażającego długość odcinka prostej.

**4. Równowaga ustroju.** Podstawowy warunek równowagi ustroju parametralnie zmiennego:

$$\delta U = \sum Q \delta q - \sum P \delta p = \delta H - \sum P \delta p = 0 \quad . . . (157)$$

oparty na zasadzie prac możliwych, rozpada się na  $w$  równań warunkowych:

$$U_j = \frac{\partial H}{\partial r_j} - \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial p_i}{\partial r_j} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial r_j} = \sum_{i=1}^v Q_i \frac{\partial q_i}{\partial r_j} \quad j=1, 2, \dots, w$$

W układzie  $n$  sił obciążenia zewnętrznego — sił niezależnych od siebie jest tylko:

$$m \leq n$$

zatem z powyższych równań warunkowych można wyznaczyć wszystkie parametry  $r$  w funkcji tych  $m$  sił  $P$ , lub ich czynników od położenia niezależnych, o ile:

- funkcje  $U_j$  oraz ich pierwsze pochodne względem wszystkich  $r$  są ciągłe w sąsiedztwie początkowych wartości zmiennych, cechujących rozpatrywany stan równowagi, a nadto, o ile:
- jakobian

$$J \frac{U_1, U_2, \dots, U_w}{r_1, r_2, \dots, r_w}$$

jest różny od zera dla tych wartości początkowych.

Przy spełnieniu warunków powyższych istnieje tylko jeden układ funkcji, uzależniających parametry  $r$  od  $m$  sił  $P$ . Funkcje te są ciągłe w sąsiedztwie owych początkowych wartości zmiennych. Zależności (154, 155 i 156) służą następnie do wyznaczania:  $p, q, Q$  również w funkcji  $m$  niezależnych od siebie sił  $P$  obciążenia zewnętrznego.

**5. Równania warunkowe.** Podstawowy układ parametrów głównych daje trzy gromady równań warunkowych:

$$\sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial p_i}{\partial u_j} = 0 \quad j=1, 2, \dots, a$$

$$\sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial p_i}{\partial t_j} = 0 \quad j=1, 2, \dots, b$$

$$\frac{\partial H}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial p_i}{\partial s_j} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial s_j} = \sum_{i=1}^v Q_i \frac{\partial q_i}{\partial s_j} \quad j=1, 2, \dots, c$$

Pierwsza, przynależna parametrom  $u$ , warunkuje równowagę ustroju, jako całości sztywnej, służy przeto do wyróżniania i wyzna-

czania izostatycznych odporów ustroju, unieruchomionego na podporach.

Druga gromada, przynależna parametrom  $t$  daje warunki równowagi ustroju *niestałego*, czyli zmiennego wewnątrznie przy zupełnej niezmienności *wszystkich* ogniw.

Trzecia — przynależna parametrom  $s$ , warunkuje równowagę ustroju stałego sprężystego, złożonego z ogniw odkształcających się w obszarze sprężystości.

**6. Ustrój sprężysty.** Rozpatrujemy ustrój sprężysty, linjowo parametralnie zmienny, unieruchomiony na sztywnych podporach, a przytem stały, to jest niezależny od parametrów przekształcenia. Podpory sprężyste nie wymagają swoistych rozważań: wystarczy uzupełnienie ustroju odpowiednio dobranymi ogniwami sprężystymi, opartymi na sztywnych podporach.

Druga gromada równań warunkowych odpada wobec stałości ustroju. Pierwsza służy do wyróżnienia odporów izostatycznych. Pozostałe, narazie niewiadome odpory hyperstatyczne możemy włączyć do układu sił zewnętrznych, przypisując tym dodatkowym siłom odpowiednie posunięcia, które w następstwie, już po otrzymaniu wyników, uczynimy równymi zeru. Tą drogą z pierwszej gromady równań warunkowych otrzymamy izostatyczne odpory w funkcji  $m$  niezależnych sił  $P$  obciążenia zewnętrznego i odporów hyperstatycznych, jego sił dodatkowych.

Wobec linjowej zmienności ustroju, trzecia gromada równań warunkowych daje  $w$  zależności, linjowych względem  $P$  i  $Q$ , a przeto, gdy:

$$v = w$$

ustrój jest *izostatyczny wewnątrznie*: wszystkie jego siły sprężystości  $Q$  mogą być wyznaczone z tych zależności w ogólnym przypadku ich wyznacznika różnego od zera.

Założenie:

$$v < w$$

przynależne  $(w - v)$ -krotnej hypostatyczności wewnętrznej ustroju można odrzucić zgóry, wobec stałości ustroju.

**7. Twierdzenie Castigliano.** Gdy:

$$v > w$$

ustrój jest *hyperstatyczny wewnątrznie*  $(v - w)$ -krotnie. Równania trzeciej gromady dają tylko  $w$  sił sprężystości  $Q$ , izostatycz-

nych w postaci funkcij linjowych  $m$  niezależnych sił zewnętrznych  $P$  — oraz — pozostałych  $(v-w)$  hyperstatycznych sił sprężystości  $Q_h$ .

Po podstawieniu tych  $Q_i$  w zależności (156) otrzymamy z nich  $v$  posunięć  $q$  w postaci funkcij linjowych owych  $P$  i  $Q_h$ . Te wartości  $q$  przekształcą  $v$  zależności (155) w tyleż zależności linjowych:

$$T(P, Q_h, r) = 0$$

Wyrugowanie z nich  $(v-w)$  sił sprężystości  $Q_h$  da  $w$  zależności, z których wyznaczymy wszystkie parametry  $r$  w postaci funkcij linjowych  $m$  niezależnych sił  $P$ , i, po podstawieniu w (154) otrzymamy wszystkie posunięcia  $p$  jako linjowe funkcje owych sił  $P$ .

W ten sposób podstawowy warunek równowagi ustroju (157) w układzie zmiennych niezależnych  $P, Q_h$  rozpadnie się na dwie gromady równań warunkowych:

$$\frac{\partial H}{\partial P_j} - \sum_{i=1}^m P_i \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^v Q_i \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (158)$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q_h} = \sum_{i=1}^v Q_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_h} = 0 \quad h = 1, 2, \dots, (v-w) \quad \dots \dots \dots (159)$$

Różniczkowanie daje bezpośrednio:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial P_i \partial P_j} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial p_j}{\partial P_i}$$

a przeto, na mocy twierdzenia Euler'a o funkcjach jednorodnych:

$$\frac{\partial H}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^m P_i \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial p_j}{\partial P_i} P_i = p_j \quad \dots \dots \dots (160)$$

Równania (158), (160) wyrażają *drugie twierdzenie Castigliano*:

Pochodna pracy sprężystej względem niezależnej siły zewnętrznej daje posunięcie tej siły dla linjowo zmiennego ustroju sprężystego stałego, unieruchomionego na podporach.

W ogólnym przypadku  $n$  sił zewnętrznych  $P$ , złożonych z  $(n-m)$  sił, zależnych od pozostałych  $m$  sił niezależnych otrzymamy, rozumując jak wyżej, to samo twierdzenie:

$$\frac{\partial H}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial P_i}{\partial P_j} \quad \dots \quad (161)$$

w postaci, jaką mu nadał Merten.

**8. Twierdzenia Menabrea.** Drugie twierdzenie Castigliano służy do określania warunków dodatkowych dla sił zewnętrznych w razach częściowego, lub całkowitego ograniczenia ich posunięć. Gdy:  $p_j$  jest równe zeru, siła  $P_j$  stanowi odpór hyperstatyczny. Stąd *drugie twierdzenie Menabrea*:

Pochodna pracy sprężystej względem odporu hyperstatycznego, przynależnego podporze sztywnej, ma wartość zerową dla linjowo zmiennego ustroju sprężystego stałego, unieruchomionego na podporach.

Równania (159) wyrażają *pierwsze twierdzenie Menabrea*.

Pochodna pracy sprężystej względem hyperstatycznej siły sprężystości ma wartość zerową dla linjowo zmiennego ustroju sprężystego, stałego, unieruchomionego na podporach.

**9. Dalsze twierdzenia.** Możemy również z zależności (156) — wyznaczyć wszystkie siły sprężystości  $Q$  linjowo przez posunięcia  $q$ . Po podstawieniu w równania warunkowe trzeciej gromady otrzymamy z nich  $w$  posunięć  $q_i$  w postaci funkcji linjowych  $m$  niezależnych sił zewnętrznych  $P$  i — pozostałych  $(v - w)$  posunięć  $q_h$ . Te wartości  $q_i$  przekształcą  $v$  zależności (155) w tyleż zależności linjowych:

$$T(P, q_h, r) = 0$$

Wyrugowanie z nich  $(v - w)$  niezależnych posunięć  $q_h$  da  $w$  zależności, z których wyznaczymy wszystkie parametry  $r$  w postaci funkcji linjowych  $m$  niezależnych sił  $P$ , i, po podstawieniu w (154) otrzymamy z nich wszystkie siły  $P$  jako funkcje linjowe posunięć  $p$ . Zatem i posunięcia  $q_i$  będą zależne tylko od  $p, q_h$ .

W ten sposób podstawowy warunek równowagi ustroju (157) w układzie zmiennych niezależnych  $p, q_h$  rozpadnie się na dwie gromady równań warunkowych.

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} - \sum_{i=1}^m P_i \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^v Q_i \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \quad j = 1, 2 \dots m \quad (162)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^v Q_i \frac{\partial q_i}{\partial q_h} = 0 \quad h=1, 2, \dots (v-w) \quad (163)$$

W ogólnym przypadku posunięcia  $p$  są niezależne od siebie, jako układ  $m$  zmiennych, powiązanych linjowo  $m$  zależnościami (154) z tyluż siłami  $P$  od siebie niezależnymi, a przeto:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = P_j \quad j=1, 2 \dots m \quad \dots \quad (164)$$

Równania (162, 164) wyrażają *pierwsze twierdzenie Castigliano*:

Pochodna pracy sprężystej względem posunięcia niezależnej siły zewnętrznej daje tę siłę dla linjowo zmiennego ustroju sprężystego, unieruchomionego na podporach.

Gdy układ  $n$  sił zewnętrznych  $P$  złożony jest z  $(n-m)$  sił, zależnych od pozostałych  $m$  sił niezależnych od siebie, wtedy  $(n-m)$  odpowiednich posunięć  $p$  zależy od pozostałych  $m$  posunięć  $p_j$ , od siebie niezależnych. Wypływa to bezpośrednio z rozumowań poprzednich, a przeto wzór:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \quad j=1, 2, \dots m \quad \dots \quad (165)$$

daje dla tego przypadku to samo twierdzenie w postaci, jaką mu nadał Merten.

Równania (163) wyrażają *twierdzenie (L. K. ?)*

Pochodna pracy sprężystej względem posunięcia hyperstatycznej siły sprężystości ma wartość zerową dla linjowo zmiennego ustroju sprężystego, stałego, unieruchomionego na podporach.

**10. Ustrój przegubowo-prętowy.** W ustroju przestrzennym, złożonym z nieważkich prętów prostych stałego przekroju, odkształcających się ściśle osiowo i powiązanych przegubami kulistymi na węzłach — składowe  $u, v, w$  posunięć punktów węzłowych stanowią układ parametrów geometrycznych  $r$ , a zarazem i posunięć  $p$  składowych  $X, Y, Z$  sił zewnętrznych  $P$ .

Siły osiowe prętów dają układ sił sprężystości  $Q$ , powiązanych z wydłużeniami prętów  $q$  zależnościami linjowymi:

$$EFq - Ql = 0$$



Zatem pierwsze twierdzenie Castigliano jest ściśle dla tego ustroju, aczkolwiek zależności (155) występują tu w postaci nieliniowej:

$$lq + \frac{1}{2} q^2 = l_x(u' - u) + l_y(v' - v) + l_z(w' - w) + \\ + \frac{1}{2} [(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2]$$

W powyższych wzorach przez  $l$  oznaczono długość pręta, przez  $l_x, l_y, l_z$  jej składowe, przez  $F$  stały przekrój pręta, przez  $u, v, w$ , i  $u', v', w'$  składowe posunięć punktów: początkowego i końcowego podłużnej osi pręta.

Twierdzenia pozostałe dają tu przybliżone wyniki, praktycznie dostateczne, lecz tylko wtedy, gdy w zależnościach wyżej podanych można pominąć  $q^2$  oraz drugie potęgi różnic — jako małe wyższego rzędu.

**11. Twierdzenie Clapeyron'a.** Pomnóżmy równania (158) przez odpowiednie  $P_j$ , równania (159) — przez  $Q_h$ , albo też równania (162) przez odpowiednie  $p_j$ , a równanie (163) przez  $q_h$ . Po dodaniu i tych i owych i uwzględnieniu twierdzenia Euler'a o funkcjach jednorodnych, otrzymamy:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial H}{\partial P_j} P_j + \sum_{h=1}^{v-w} \frac{\partial H}{\partial Q_h} Q_h = 2H = \sum_{j=1}^m P_j p_j = \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^n p_t \frac{\partial P_t}{\partial P_j} P_j = \\ = \sum_{t=1}^n p_t \sum_{j=1}^m \frac{\partial P_t}{\partial P_j} P_j = \sum_{t=1}^n P_t p_t = \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^v Q_t \frac{\partial q_t}{\partial P_j} P_j + \\ + \sum_{h=1}^{v-w} \sum_{t=1}^v Q_t \frac{\partial q_t}{\partial Q_h} Q_h = \sum_{t=1}^v Q_t \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial q_t}{\partial P_j} P_j + \sum_{h=1}^{v-w} \frac{\partial q_t}{\partial Q_h} Q_h \right) = \sum_{t=1}^v Q_t q_t \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_j} p_j + \sum_{h=1}^{v-w} \frac{\partial H}{\partial q_h} q_h = 2H = \sum_{j=1}^m P_j p_j = \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^n P_t \frac{\partial p_t}{\partial p_j} p_j = \\ = \sum_{t=1}^n P_t \sum_{j=1}^m \frac{\partial p_t}{\partial p_j} p_j = \sum_{t=1}^n P_t p_t = \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^v Q_t \frac{\partial q_t}{\partial p_j} p_j + \\ + \sum_{h=1}^{v-w} \sum_{t=1}^v Q_t \frac{\partial q_t}{\partial q_h} q_h = \sum_{t=1}^v \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial q_t}{\partial p_j} p_j + \sum_{h=1}^{v-w} \frac{\partial q_t}{\partial q_h} q_h \right) = \sum_{t=1}^v Q_t q_t$$

Stąd bezpośrednio:

$$\sum_{l=1}^n P_l p_l = \sum_{j=1}^m P_j p_j = \sum_{i=1}^v Q_i q_i = 2H \quad . \quad . \quad . \quad (166)$$

wzór, w którym wszystkie zmienne zależne — winny być wyrażone w funkcji *jednego* tylko układu zmiennych niezależnych, a więc  $P, Q_h$ , lub też  $p, q_h$ .

Ten wzór wyraża *twierdzenie Clapeyron'a* o pracy sprężystej linowo zmiennego ustroju stałego, sprężystego, unieruchomionego na podporach.

**12. Twierdzenia Betti i Mohr'a.** Weźmy pod uwagę dwa *pokrewne układy* sił tego samego obciążenia: poszczególne siły  $P$  pierwszego układu i odpowiednie siły  $P'$  drugiego pokrewnego — winny mieć te same osie i te same punkty przyłożenia, mogą różnić się jednak zwrotem, lub wielkością, przyczem siłę  $P$ , różnej od zera, może odpowiadać siła  $P'$ , równa zeru i naodwrot.

Linjowe zależności (154, 155 i 156) mają niewątpliwie te same stałe współczynniki dla obu układów pokrewnych, a przeto te same wartości stałe będą miały również i cząstkowe pochodne odpowiednich posunąć we wzorach: (158) i (158'), (159) i (159') lub też: (162) i (162'), (163) i (163'), wypisanych dla układów: sił  $P$  i pokrewnego układu sił  $P'$ .

Pomnożmy wzory (158) i (158') przez odpowiednie  $P'_i$  i  $P_i$  oraz wzory (159) i (159') przez  $Q'_h$  i  $Q_h$ ; albo też wzory: (162) i (162') przez odpowiednie  $p'_j$  i  $p_j$ , a wzory (163) i (163') przez  $q'_h$  i  $q_h$ . Po dodaniu i tych i owych i uwzględnieniu, jak wyżej, twierdzenia Euler'a o funkcjach jednorodnych otrzymamy:

$$\sum_{l=1}^m P_l p'_l = \sum_{l=1}^m P'_l p_l = \sum_{i=1}^v Q_i q'_i = \sum_{i=1}^v Q'_i q_i \quad . \quad . \quad . \quad (167)$$

wzór, wyrażający uogólnione *twierdzenie Betti* dla linowo-zmiennego, sprężystego ustroju stałego, unieruchomionego na podporach. Ten sam wzór wyraża zarazem i *twierdzenie Mohr'a*:

$$\sum_{l=1}^m P_l p'_l = \sum_{i=1}^v Q_i q'_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (168)$$

dla tegoż ustroju.

Wszystkie, wyżej udowodnione twierdzenia o pracy sprężystej, oparte na linjowym kształcie zależności (154, 155 i 156) zawodzą, gdy warunki:  $a, b$  punktu czwartego nie są spełnione, a nadto, gdy poszczególne siły obciążenia zewnętrznego zależą od parametrów zmienności ustroju.

## B. Część druga.

1. **Ustrój prętowy.** *Ustrojem prętowym zwie się układ prętów, powiązanych na węzłach.* Podłużne osie prętów ustroju przecinają się w *punktach węzłowych*: pręt ciągnie się tylko od węzła — do węzła; wsporniki nie są prętami ustroju. Międzywęzłowy odcinek prostej stanowi *oś węzłową* pręta, łączonego na tych węzłach. Oś węzłowa pokrywa się z osią podłużną pręta prostego. Punkty węzłowe i osie węzłowe tworzą pierwotny szkielet ustroju nieodkształconego.

Szkielet ten, jako całość niezmienna, może przemieszczać się względem obranego układu odniesienia, a nadto — ulegać wewnętrznym zmianom w stosunku do swej postaci pierwotnej. Inaczej mówiąc, ustrój unieruchomiony na podporach, może być zmiennym wewnątrznie przy niedostatecznem powiązaniu na węzłach: może ulegać *przekształceniom*, czyli zmianom swej postaci pierwotnej, nieskojarzonym z odkształceniami prętów. Nadto zarówno ustrój zmienny, jak i niezmienny, a więc *stały* — może ulegać *odkształceniom*, pochodnym odkształceń prętów ustroju.

Pręty mogą być łączone na węzłach przegubowo — przegubami cylindrycznymi, kardanowskimi, lub kulistymi. Mogą być również łączone sztywnie: nitowane lub spawane końcami. Ustrój prętowy podparty jest na węzłach: jego punkty podparcia leżą w obranych odpowiednio punktach węzłowych. Punkt podparcia, gdziekolwiek na osi pręta stanowi punkt węzłowy, dzielący ów pręt na dwa pręty ustroju. Podpory mogą być przegubowe i stałe.

Pod obciążeniem zewnętrznym ustrój prętowy działa na podpory, wywołując ich przeciwdziałania, zwane odporami. Odpory stanowią dodatkowy układ sił, równoważących obciążenie zewnętrzne, są przeto niewiadomymi równań statyki. Ustrój stały, unieruchomiony na podporach, zwie się *izostatycznym zewnętrznym*, gdy wszystkie jego odpory można wyznaczyć z tych równań. Zatem, gdy liczba ( $o$ ) odporów ustroju przekracza