

Jego całka:

$$y = Y + \frac{1}{a} \left[q - \frac{\frac{d^4 q}{dx^4}}{(n\sqrt{2})^4} + \frac{\frac{d^8 q}{dx^8}}{(n\sqrt{2})^8} - \frac{\frac{d^{12} q}{dx^{12}}}{(n\sqrt{2})^{12}} + \dots \right] \quad (137)$$

gdzie:

$$Y = Ae^{nx} \sin(nx) + Be^{nx} \cos(nx) + Ce^{-nx} \sin(nx) + De^{-nx} \cos(nx) \quad n = \sqrt[4]{\frac{a}{4EJ}}$$

Zatem:

$$Y' = n \{ Ae^{nx} [\sin(nx) + \cos(nx)] - Be^{nx} [\sin(nx) - \cos(nx)] - Ce^{-nx} [\sin(nx) - \cos(nx)] - De^{-nx} [\sin(nx) + \cos(nx)] \}$$

$$Y'' = 2n^2 [Ae^{nx} \cos(nx) - Be^{nx} \sin(nx) - Ce^{-nx} \cos(nx) + De^{-nx} \sin(nx)]$$

$$Y''' = -2n^3 \{ Ae^{nx} [\sin(nx) - \cos(nx)] + Be^{nx} [\sin(nx) + \cos(nx)] - Ce^{-nx} [\sin(nx) + \cos(nx)] + De^{-nx} [\sin(nx) - \cos(nx)] \}$$

Kierunek (w) wzrostu wypadkowych obciążenia obieramy różnowrotny z osią X a przeto:

$$y'' = \frac{M}{EJ} \quad y''' = -\frac{Q}{EJ}$$

gdzie przez Q, M oznaczono siłę ścinającą i moment zginający tuż przed punktem bieżącym odkształconej, przynależnym odciętej x .

Powyższe wzory są słuszne w obszarze jednolitej zmienności wypadkowych obciążenia. Wszelka przerwa ciągłości tych wypadkowych stanowi granicę dawnego i początek nowego obszaru.

C. Część trzecia.

1. **Pojęcia ogólne.** W układzie osi stałych (IX. A. 1) odcięta środka lewej ścianki czołowej belki nieodkształconej, stanowi jej długość pierwotną. W płaszczyźnie głównej XY bezwładności belki leży jej obciążenie pionowe. Kierunek (w) wzrostu jego wypadkowych: M — momentu zginającego i Q — siły ści-

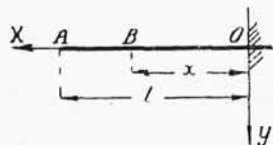
nającej ma zwrot przeciwny z osią X belki. W tym kierunku (w) znaczono kolejno punkty podparcia odkształconej będą:

$$n=0, 1, 2, \dots, w$$

Moment bezwładności względem osi głównej stałego przekroju oznaczać będziemy przez J , zmiennego zaś, przynależnego odciętej x — przez $J(x)$.

Do wyznaczania odkształconej używać będziemy równań łańcuchowych, lub wzorów Clerc'a i Clapeyron'a. Największe ugięcie belki oznaczać będziemy przez f — najwyższy moment zginający przez M_m .

2. Wspornik, czyli belka pozioma (Rys. 68), jednostronnie osadzona na niesprężystej podporze stałej.



Rys. 68.

A. Wspornik o stałym przekroju. Jego obciążenie stanowi:

a. Siła P , działająca w poziomej odległości l od punktu podparcia. W pierwszym przęśle $(L-l)$ moment zginający jest równy zero — zatem ugięcia niema: prosty odcinek odkształconej $L-l$ pochyla się tylko ku osi X .

Zatem dla przęseł $(L-l), l$:

$$M=0 \quad \left| + P(l-x) \right. \quad EJy' = C \quad \left| - \frac{1}{2} P(l-x)^2 \right.$$

$$EJy = D + Cx \quad \left| + \frac{1}{6} P(l-x)^3 \right.$$

w przekroju osadzonym:

$$x = y = y' = 0$$

a przeto:

$$C = \frac{1}{2} Pl^2 \quad D = -\frac{1}{6} Pl^3$$

Posunięcie siły P , czyli ugięcie w jej punkcie przyłożenia:

$$p = \frac{D + Cl}{EJ} = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

Ugięcie końcowe:

$$f = \frac{D + CL}{EJ} = \frac{Pl^2(3L-l)}{6EJ}$$

Kąt nachylenia ku osi X prostego odcinka $L-l$ odkształconej:

$$\Theta = \frac{C}{EJ} = \frac{Pl^2}{2EJ}$$

b. Obciążenie jednostkowe stałe q na jednostkę bieżącą osi X . Jego punkt końcowy ma odcięta b — początkowy — odcięta c . W prześle $(L-b)$ pręt nie wygina się, tylko pochyla ku osi X : moment zginający jest równy zeru. Zatem dla prześel: $(L-b)$, $(b-c)$, (c) :

$$M = 0 \left| + \frac{1}{2} q (b-x)^2 \right| - \frac{1}{2} q (c-x)^2$$

$$EJy' = C \left| - \frac{1}{6} q (b-x)^3 \right| + \frac{1}{6} q (c-x)^3$$

$$EJy = D + Cx \left| + \frac{1}{24} q (b-x)^4 \right| - \frac{1}{24} q (c-x)^4$$

W przekroju osadzonym:

$$x = y = y' = 0$$

a przeto:

$$C = \frac{1}{6} q (b^3 - c^3) \quad D = -\frac{1}{24} q (b^4 - c^4)$$

Ugięcie końcowe:

$$f = \frac{D + CL}{EJ} = \frac{q}{24EJ} [b^3 (4L - b) - c^3 (4L - c)]$$

Pochylenie ku osi X prostego odcinka $L-l$ odkształconej:

$$\Theta = \frac{C}{EJ} = \frac{q}{6EJ} (b^3 - c^3)$$

Gdy obciążenie q pokrywa cały wspornik:

$$b = L \quad c = 0 \quad M = \frac{1}{2} q (L-x)^2$$

$$y' = \frac{qx}{6EJ} [3L(L-x) + x^2] \quad y = \frac{qx^2}{24EJ} [2L(3L-2x) + x^2]$$

Ugięcie końcowe:

$$f = \frac{qL^4}{8EJ}$$

B. Wspornik o stałej wytrzymałości. Oznaczmy odpowiednio przez M_0 i M momenty zginające *tuż przed punktem podparcia* na podporze stałej i *punktem bieżącym* odkształconej, przynależnym odciętej x . Momenty bezwładności względem osi głównych poziomych i momenty wytrzymałości przekrojów: osadzonego i bieżącego — będą odpowiednio J i $J(x)$, W i $W(x)$, a przeto dla wspornika o stałej wytrzymałości na zginanie:

$$W = \frac{M_0}{k_g} \quad W(x) = \frac{M}{k_g}$$

gdzie k_g oznacza naprężenie dopuszczalne tworzywa. Stąd — prawo zmienności momentów wytrzymałości:

$$W(x) = W \frac{M}{M_0}$$

a co za tem idzie samego przekroju i jego momentów bezwładności.

Odciętej x przynależą rzędne y, y' odkształconej. W punkcie podparcia:

$$x_0 = y_0 = y'_0 = 0$$

a przeto pierwsze dwa wzory (112) dadzą:

$$y' = \frac{1}{E} \int_0^x \frac{M}{J(x)} dx \quad y = \frac{x}{E} \int_0^x \frac{M}{J(x)} dx - \frac{1}{E} \int_0^x \frac{Mx}{J(x)} dx$$

a. Siła P działa na końcu wspornika stałej wytrzymałości o przekroju prostokątnym. Odciętej x przynależy wysokość pionowa h i podstawa pozioma b przekroju; u nasady: B i H . Zatem:

$$M = P(L - x) \quad M_0 = PL = \frac{1}{6} BH^2 k_g \quad M = M_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$\frac{W(x)}{W} = \frac{bh^2}{BH^2} = \frac{M}{M_0} = 1 - \frac{x}{L}$$

Dla wspornika o stałej wysokości H :

$$b = B \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

a przeto:

$$J = \frac{1}{12} BH^3 \quad J(x) = \frac{1}{12} bH^3 = J \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$y' = \frac{PL}{EJ} x \quad y = \frac{PL}{2EJ} x^2$$

W porównaniu do pręta o stałym przekroju $B \times H$ — objętość pręta stałej wytrzymałości jest dwa razy mniejsza, zato końcowe ugięcie:

$$f = \frac{PL^3}{2EJ}$$

1,5 razy większe, a końcowe pochylenie odkształconej:

$$\theta = \frac{PL^2}{EJ}$$

dwa razy większe.

b. Obciążenie jednostkowe stałe q pokrywa całą długość L wspornika o przekroju prostokątnym, stałej wytrzymałości. Jak wyżej:

$$M = \frac{1}{2} q (L - x)^2 \quad M_0 = \frac{1}{2} q L^2 = \frac{1}{6} BH^2 k_g$$

$$M = M_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

Dla wspornika o stałej wysokości H :

$$\frac{W(x)}{W} = \frac{bH^2}{BH^2} = \frac{M}{M_0} = \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

$$b = B \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

Zatem:

$$J = \frac{1}{12} BH^3 \quad J(x) = \frac{1}{12} bH^3 = J \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

i ostatecznie:

$$y' = \frac{qL^2x}{2EJ} \quad y = \frac{qL^2x^2}{4EJ}$$

W porównaniu do pręta o stałym przekroju $B \times H$, objętość pręta stałej wytrzymałości jest trzy razy mniejsza, zato końcowe ugięcie:

$$f = \frac{qL^4}{4EJ}$$

dwa razy większe, a końcowe pochylenie stycznej odkształconej:

$$\Theta = \frac{qL^3}{2EJ}$$

trzy razy większe.

c. Wspornik na sprężystej podporze stałej. Odciętej x i rzędnej y przynależy bieżący punkt odkształconej wspornika, osadzonego na podporze *niesprężystej*. Tuż przed punktem bieżącym panuje moment zginający M , tuż przed punktem podparcia — takż moment M_0 i siła ścinająca Q_0 . Dla niesprężystej podpory stałej:

$$y_0 = y'_0 = 0$$

a przeto wzór Clerc'a (119) wypisany dla przęsła (x): da:

$$0 = \frac{y}{x} + S$$

gdzie dla skrócenia oznaczono przez S dalsze wyrazy, zależne od x , M i M_0 .

Odcięte tego samego wspornika, obciążonego zupełnie tak samo, lecz osadzonego na podporze *sprężystej stałej*, — można uważać za niezmiennie przy ugięciach nieznacznych, praktycznie jedynie dopuszczalnych. Zatem odcięta x , siła Q_0 i momenty M , M_0 pozostaną te same, nie zmieni się również i S , natomiast rzędna y_s punktu bieżącego będzie się różniła od poprzedniej y .

Pionowy posuw sprężysty y_0 punktu podparcia i pochylenie sprężyste y'_0 ku osi X długostki stycznej odkształconej w tym punkcie będą odpowiednio:

$$y_0 = \frac{Q_0}{c} \quad y'_0 = \frac{M_0}{\partial}$$

jako że odpór pionowy V_0 i moment odporowy W_0 punktu podparcia:

$$V_0 = -Q_0 \quad W_0 = -M_0$$

Zatem ten sam wzór (119) dla tegoż przęsła (x) da:

$$y'_0 = \frac{y_s - y_0}{x} + S$$

stąd, odejmując:

$$y_s = y + y_0 + xy'_0 = y + \frac{Q_0}{c} + \frac{M_0}{\partial} x$$

Chcąc znaleźć ugięcie wspornika, osadzonego sprężysto — wystarczy wyznaczyć ugięcie wspornika osadzonego niesprężysto i dodać ugięcia powstałe ze sprężystego osiadania wraz z podporą i sprężystego obrotu y_0' w podporze.

3. Belka izostatyczna pozioma (Rys. 69) wsparta końcami na podporach: lewej posuwnej i prawej — przegubowej.

A. Belka o stałym przekroju. Jej obciążenie stanowi:

a. Siła P , działająca w poziomej odległości l od prawego punktu podparcia. Równania statyki dają:

$$V_0 = -P \frac{l}{L} = -V_1 - P$$

a przeto dla przeseł $(L-l), (l)$:

$$M = -P \frac{l}{L} (L-x) \Big| + P(l-x)$$

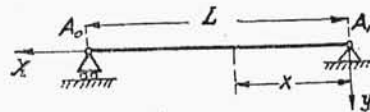
$$EJy' = C + \frac{Pl}{2L} (L-x)^2 \Big| - \frac{1}{2} P(l-x)^2$$

$$EJy = D + Cx - \frac{Pl}{6L} (L-x)^3 \Big| + \frac{1}{6} P(l-x)^3$$

Dla punktów podparcia:

$$x = L \quad y = 0$$

$$x = y = 0$$



a przeto:

Rys. 69.

$$C = -\frac{Pl}{6L} (L^2 - l^2) \quad D = \frac{1}{6} Pl (L^2 - l^2)$$

Posunięcie siły P :

$$p = \frac{Pl^2 (L-l)^2}{3 LEJ}$$

Najwyższy moment, tuż przed punktem przyłożenia siły P :

$$M_m = -P \frac{l(L-l)}{L}$$

Gdy siła działa pośrodku belki:

$$V_0 = V_1 = -\frac{1}{2} P \quad M = -\frac{1}{2} P(L-x) \Big| + \frac{1}{2} P(L-2x)$$

$$EJy' = -\frac{1}{16}PL^2 + \frac{1}{4}P(L-x)^2 \Big| - \frac{1}{8}P(L-2x)^2$$

$$EJy = \frac{1}{16}PL^2(L-x) - \frac{1}{12}P(L-x)^3 \Big| + \frac{1}{48}P(L-2x)^3$$

Największe ugięcie i największy moment zginający:

$$f = \frac{PL^3}{48EJ} \quad M_m = -\frac{1}{4}PL$$

pośrodku belki.

b. Obciążenie jednostkowe stałe q na jednostkę bieżącą pierwotnej osi X belki. Jego punkt początkowy ma odcięta b — końcowy — odcięta c . Równanie statyki daje:

$$V_0 = -q \frac{b^2 - c^2}{2L} = -V_1 - q(b-c)$$

Zatem dla przęseł $(L-b), (b-c), (c)$:

$$M = -q \frac{b^2 - c^2}{2L} (L-x) \Big| + \frac{1}{2} q (b-x)^2 \Big| - \frac{1}{2} q (c-x)^2$$

$$EJy' = C + q \frac{b^2 - c^2}{4L} (L-x)^2 \Big| - \frac{1}{6} q (b-x)^3 \Big| + \frac{1}{6} q (c-x)^3$$

$$EJy = D + Cx - q \frac{b^2 - c^2}{12L} (L-x)^3 \Big| + \frac{1}{24} q (b-x)^4 \Big| - \frac{1}{24} q (c-x)^4$$

W punktach podparcia:

$$x = L \quad y = 0 \quad x = y = 0$$

a przeto:

$$C = -\frac{q}{24L} (b^3 - c^3) (2L^2 - b^2 - c^2)$$

$$D = \frac{1}{24} q (b^2 - c^2) (2L^2 - b^2 - c^2)$$

Skrajny moment:

$$M_m = -\frac{q}{8L^2} (b^2 - c^2) [(2L-b)^2 - c^2]$$

przynależy odciętej:

$$x = b - \frac{b^2 - c^2}{2L}$$

Gdy obciążenie q pokrywa całą belkę:

$$b=L \quad c=0 \quad V_0=V_1=-\frac{1}{2}qL \quad M=-\frac{1}{2}qx(L-x)$$

$$y'=\frac{q}{24EJ}(L-2x)(L^2+2Lx-2x^2)$$

$$y=\frac{qx}{24EJ}(L-x)(L^2+Lx-x^2)$$

Największe ugięcie i najwyższy moment:

$$f=\frac{5qL^4}{384EJ} \quad M_m=-\frac{1}{8}qL^2$$

pośrodku belki.

c. Moment N zewnętrzny poziomy. Jego oś przecina odkształconą w odległości poziomej l od prawego punktu podparcia. Z równań statyki:

$$V_0=-V_1=-\frac{N}{L}$$

Zatem dla przęseł $(L-l), (l)$:

$$M=-\frac{N}{L}(L-x) \Big| + N \quad EJy'=C+\frac{N}{2L}(L-x)^2 \Big| - N(l-x)$$

$$EJy=D+Cx-\frac{N}{6L}(L-x)^3 \Big| + \frac{1}{2}N(l-x)^2$$

W punktach odparcia:

$$x=L \quad y=0 \quad x=y=0$$

za przeto:

$$C=-\frac{N}{6L}(L^2-3l^2) \quad D=\frac{1}{6}N(L^2-3l^2)$$

Posunięcie N , czyli pochylenie odkształconej w punkcie przyłożenia N :

$$n=\frac{N}{3LEJ}[L^2-3l(L-l)]$$

W punktach podparcia — lewym i prawym:

$$y_0'=\frac{C}{EJ}=-\frac{N(L^2-3l^2)}{6LEJ}$$

$$y_1'=\frac{C}{EJ}+\frac{NL^2}{2LEJ}-\frac{Nl}{EJ}=-\frac{N(4L^2-3l^2)}{6LEJ}$$

W szczególnym przypadku, gdy moment N_0 leży na osi przegubu lewej podpory, lub moment N_1 — na osi przegubu prawej:

$$V_0 = -V_1 = -\frac{N_0}{L} \qquad V_0 = -V_1 = -\frac{N_1}{L}$$

$$M = N_0 \frac{x}{L} \qquad M = -\frac{N_1}{L} (L - x)$$

$$y' = -\frac{N_0}{6 L E J} (L^2 - 3x^2) \qquad y' = -\frac{N_1}{6 L E J} [L^2 - 3(L - x)^2]$$

$$y = -\frac{N_0 x}{6 L E J} (L^2 - x^2) \qquad y = \frac{N_1 x}{6 L E J} (2L - x)(L - x)$$

Pochylenie stycznej odkształconej w punktach podparcia:

$$y_0' = \frac{N_0 L}{3 E J} \qquad y_0' = -\frac{N_1 L}{6 E J} \qquad y_1' = -\frac{N_0 L}{6 E J} \qquad y_1' = -\frac{N_1 L}{3 E J}$$

Momenty: N_0 i N_1 odpowiednio dają najwyższe ugięcia:

$$f = -\frac{N_0 L^2}{9\sqrt{3} E J} \qquad f = -\frac{N_1 L^2}{9\sqrt{3} E J}$$

przy:

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}} \qquad x = L - \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Przy łącznem działaniu obu momentów:

$$V_0 = -V_1 = -\frac{N_0 + N_1}{L} \qquad M = \frac{N_0 + N_1}{L} x - N_1$$

$$y' = \frac{1}{6 L E J} [(2N_1 - N_0)L^2 - 6N_1 Lx + 3(N_0 + N_1)x^2]$$

$$y = \frac{x(L-x)}{6 L E J} [(2N_1 - N_0)L - (N_0 - N_1)x]$$

Pochylenie stycznej w punktach podparcia: lewym i prawym:

$$y_0' = \frac{L(2N_0 - N_1)}{6 E J} \qquad y_1' = \frac{L(2N_1 - N_0)}{6 E J}$$

Odształcona przecina oś X w punkcie o odciętej x_2 pod kątem y_2'

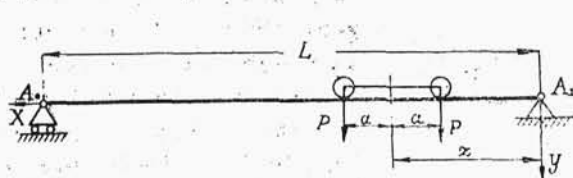
$$x_2 = \frac{2N_1 - N_0}{N_0 + N_1} L \qquad y_2' = -\frac{(2N_0 - N_1)(2N_1 - N_0)}{6 E J(N_0 + N_1)} L$$

Odciętym:

$$x = \frac{L}{N_0 + N_1} \left(N_1 \pm \sqrt{\frac{N_0^2 + N_1^2 - N_0 N_1}{3}} \right)$$

przynależą skrajne rzędne odkształconej.

d. Ruchome obciążenie, złożone (Rys. 70) z dwóch sił P nacisku kół wozu, jeżdżącego po belce poziomej izostatecznej. Z równań statyki:



Rys. 70

$$V_0 = -2P \frac{z}{L} = -V_1 - 2P$$

a przeto dla przęseł $(L - z - a)$, $(2a)$, $(z - a)$ mamy:

$$M = -2P \frac{z}{L} (L - x) + P(z + a - x) + P(z - a - x)$$

$$EJy' = C + P \frac{z}{L} (L - x)^2 - \frac{1}{2} P(z + a - x)^2 - \frac{1}{2} P(z - a - x)^2$$

$$EJy = D + Cx - \frac{1}{3} P \frac{z}{L} (L - x)^3 + \frac{1}{6} P(z + a - x)^3 + \frac{1}{6} P(z - a - x)^3$$

Dla punktów podparcia:

$$x = L \quad y = 0 \quad x = y = 0$$

a przeto:

$$C = -\frac{Pz}{3L} (L^2 - 3a^2 - z^2) \quad D = \frac{1}{3} Pz (L^2 - 3a^2 - z^2)$$

Oś siły P przecina odkształconą; tuż przed tym punktem panuje moment odpowiednio równy:

$$M = -2P \frac{z}{L} (L - a - z) \quad M = -\frac{2P}{L} (L - z)(z - a)$$

dla kół: lewego i prawego. Odciętej:

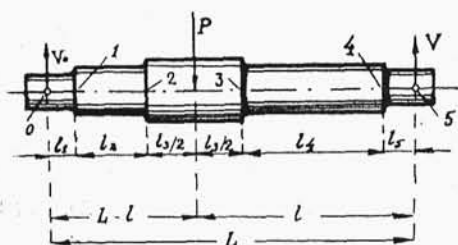
$$z = \frac{1}{2} (L - a) \quad z = \frac{1}{2} (L + a)$$

przynależą najwyższe momenty:

$$M_m = -\frac{P(L-a)^2}{2L}$$

pod kołem lewym i prawem.

B. Belka izostaticzna o przekroju zmiennym. Wał generatora (Rys. 71), jako belka pozioma — ma pięć przęseł. Pośrodku przęsła (3) działa ciężar P generatora. W początkowym punkcie osi przęsła (1) przeciwdziała siła odporowa V_0 ; w końcowym punkcie osi przęsła (5) — także siła V . Utożsamiając lewą podporę z posuwą, a prawą — z przegubową otrzymamy:



Rys. 71.

$$V_0 = -P \frac{l}{L} = -V - P$$

Zatem tuż przed punktami międzyprzęsłowymi panują momenty zginające:

$$M_1 = -P \frac{l}{L} l_1 \quad M_2 = -P \frac{l}{L} (l_1 + l_2) \quad M_3 = -P \frac{L-l}{L} (l - \frac{1}{2} l_3) = -P \frac{L-l}{L} (l_1 + l_5) \quad M_4 = -P \frac{L-l}{L} l_5$$

Nadto tuż przed punktem przyłożenia siły P :

$$M = -P \frac{l}{L} (L-l)$$

Wyznamy ugięcie pręta w punkcie działania siły P — jej posunięcie p . W tym celu oznaczamy odpowiednio przez J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 momenty bezwładności kolejnych przęseł, przez: y_1, y_2, y_3, y_4 , — ugięcia punktów międzyprzęsłowych. W punktach podparcia y_0, y_5 są równe zeru, a przeto wzór Clapeyron'a, wypisany kolejno dla dwóch sąsiednich przęseł, da:

$$6E \left(\frac{-y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_1}{l_2} \right) = 2 \left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} \right) M_1 + \frac{l_2}{J_2} M_2$$

$$6 E \left(\frac{y_1 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_2}{l_3} \right) = \frac{l_2}{J_2} M_1 + 2 \left(\frac{l_2}{J_2} + \frac{l_3}{J_3} \right) M_2 + \frac{l_3}{J_3} M_3 - \\ - \frac{P}{l_3 J_3} \frac{l_3^2}{2} \left(l_3^2 - \frac{l_3^2}{4} \right)$$

$$6 E \left(\frac{y_2 - y_3}{l_3} + \frac{y_4 - y_3}{l_4} \right) = \frac{l_3}{J_3} M_2 + 2 \left(\frac{l_3}{J_3} + \frac{l_4}{J_4} \right) M_3 + \frac{l_4}{J_4} M_4 - \\ - \frac{P}{l_3 J_3} \frac{l_3^2}{2} \left(l_3^2 - \frac{l_3^2}{4} \right)$$

$$6 E \left(\frac{y_3 - y_4}{l_4} + \frac{-y_4}{l_5} \right) = \frac{l_4}{J_4} M_3 + 2 \left(\frac{l_4}{J_4} + \frac{l_5}{J_5} \right) M_4$$

Nadto dla dwóch środkowych przęseł $\left(\frac{1}{2} l_3 \right), \left(\frac{1}{2} l_3 \right)$:

$$6 E \left(\frac{y_2 - p}{\frac{1}{2} l_3} + \frac{y_3 - p}{\frac{1}{2} l_3} \right) = \frac{l_3}{2 J_3} M_2 + 2 \left(\frac{l_3}{2 J_3} + \frac{l_3}{2 J_3} \right) M + \frac{l_3}{2 J_3} M_5$$

Rugując z tych równań: y_1, y_2, y_3, y_4 otrzymamy szukane p .

C. Belka izostatyczna na sprężystych podporach. Odciętej x i rzędnej y przynależy bieżący punkt odkształconej — belki jednoprzęsłowej, końcami wspartej na niesprężystych podporach: posuwnej i przegubowej. Dla punktów podparcia:

$$y_0 = y_1 = 0$$

Tuż przed bieżącym punktem panuje moment zginający M . Tuż przed punktami podparcia momenty M_0, M_1 są równe zeru, zatem wzór Clapeyron'a (122) wypisany dla przęseł $(L - x), (x)$ da:

$$-\frac{y}{L-x} - \frac{y}{x} = S$$

gdzie, dla skrócenia oznaczono przez S dalsze wyrazy, zależne od x i M .

Odcięte tej samej belki, obciążonej zupełnie tak samo, lecz wspartej końcami na sprężystych podporach: posuwnej i przegubowej mogą być uważane za niezmiennie — przy ugięciach nieznacznych, praktycznie jedynie dopuszczalnych. Zatem odcięta x , moment M pozostaną te same; nie zmieni się również i S , natomiast rzędna y , punktu bieżącego będzie się różniła od poprzedniej y . Pionowe posuwy punktów podparcia, wspartych na podporach sprężystych, będą odpowiednio:

$$y_0 = -\frac{V_0}{c_0} \quad y_1 = -\frac{V_1}{c_1}$$

a przeto ten sam wzór (122), wypisany dla tych samych przesł $(L-x)$, (x) da:

$$\frac{y_0 - y_s}{L-x} + \frac{y_1 - y_s}{x} = S$$

Stąd bezpośrednio:

$$y_s = y + y_1 + \frac{y_0 - y_1}{L} x = y - \frac{V_1}{c_1} - \frac{\left(\frac{V_0}{c_0} - \frac{V_1}{c_1}\right)}{L} x$$

Zatem chcąc znaleźć ugięcie belki jednoprzęsłowej, wspartej na sprężystych podporach: przegubowej i posuwnej, wystarczy wyznaczyć to samo ugięcie tej samej belki, tak samo pionowo płasko obciążonej — na tych samych podporach, lecz niesprężystych i — dodać ugięcie, powstałe ze sprężystego osiadania podpór.

4. Wpływ sił ścinających. Pozioma belka o stałym przekroju pionowo płasko obciążona. Kierunek (w) różnozwrotny z osią X .

a. Wspornik na podporze stałej, niesprężystej. Jego ścianka czołowa dźwiga przyłożoną pośrodku siłę P pionową. A więc:

$$M = P(L-x) \quad y'' = \frac{P(L-x)}{EJ} - \frac{tP}{GF} \frac{d^2(L-x)}{dx^2} = \frac{P(L-x)}{EJ}$$

$$y' = -\frac{P(L-x)^2}{2EJ} - \frac{tP}{GF} \frac{d(L-x)}{dx} + C = -\frac{P(L-x)^2}{2EJ} + \frac{tP}{GF} + C$$

$$y = \frac{P(L-x)^3}{6EJ} - \frac{tP}{GF}(L-x) + Cx + D$$

W punkcie podparcia:

$$x_0 = y_0 = 0$$

natomiast:

$$y'_0 = \frac{tQ_0}{GF} = \frac{tP}{GF}$$

działa tu bowiem pionowa siła ścinająca P , dająca znikome odchylenia y'_0 długości dx pierwotnej osi belki. Zatem:

$$y'_0 = \frac{tP}{GF} = -\frac{PL^2}{2EJ} + \frac{tP}{GF} + C \quad C = \frac{PL^2}{2EJ}$$

$$D = -\frac{PL^3}{6EJ} + \frac{tP}{GF}L$$

Końcowe ugięcie:

$$f = D + Cl = \frac{PL^3}{3EJ} \left(1 + \frac{3t}{L^2} \frac{EJ}{GF} \right)$$

b. Belka pozioma, końcami wsparta na niesprężystych podporach: posuwnej i przegubowej. Siła P działa w odległości l od prawego punktu podparcia. Dla przęseł $(L-l), (l)$:

$$\begin{aligned} M &= -\frac{Pl}{L}(L-x) \Big| + P(l-x) \\ y' &= C + \frac{Pl}{2LEJ}(L-x)^2 + \frac{tPl}{LGF} \frac{d(L-x)}{dx} \Big| - \\ &\quad - \frac{P}{2EJ}(l-x)^2 - \frac{tP}{GF} \frac{d(l-x)}{dx} \\ y &= D + Cx - \frac{Pl}{6LEJ}(L-x)^3 + \frac{tPl}{LGF}(L-x) \Big| + \\ &\quad + \frac{P}{6EJ}(l-x)^3 - \frac{tP}{GF}(l-x) \end{aligned}$$

W punktach podparcia:

$$x=L \quad y=0 \quad x=y=0$$

a przeto:

$$C = -\frac{Pl}{6LEJ}(L^2 - l^2) \quad D = \frac{Pl}{6EJ}(L^2 - l^2)$$

Posunięcie siły P :

$$\begin{aligned} p &= D + Cl - \frac{Pl}{6LEJ}(L-l)^3 + \frac{tPl}{LGF}(L-l) = \\ &= \frac{Pl^2(L-l)^2}{3LEJ} \left[1 + \frac{3t}{6Fl(L-l)} \frac{EJ}{GF} \right] \end{aligned}$$

c. Belka pozioma, końcami wsparta na niesprężystych podporach: posuwnej i przegubowej. Całą jej długość pokrywa stałe obciążenie jednostkowe q . Zatem:

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{2} qL(L-x) + \frac{1}{2} q(L-x)^2 \\ y' &= C + \frac{qL(L-x)^2}{4EJ} - \frac{q(L-x)^3}{6EJ} + \frac{tqL}{2GF} \frac{d(L-x)}{dx} - \end{aligned}$$

$$-\frac{tq}{2GF} \frac{d(L-x)^2}{dx} = C + \frac{q}{12EJ} (L-x)^2 (L+2x) + \frac{tq}{2GF} (L-2x)$$

$$y = D + Cx - \frac{qL(L-x)^3}{12EJ} + \frac{q(L-x)^4}{24EJ} + \frac{tqL}{2GF} (L-x) -$$

$$-\frac{tq}{2GF} (L-x)^2 = D + Cx - q \frac{(L-x)^3 (L+x)}{24EJ} + \frac{tq}{2GF} (L-x)x$$

W punktach podparcia:

$$x = L$$

$$y = 0$$

$$x = y = 0$$

a przeto:

$$C = -\frac{qL^3}{24EJ} \quad D = \frac{qL^4}{24EJ}$$

Ugięcie pośrodku belki:

$$f = \frac{5qL^4}{384EJ} \left(1 + \frac{48t}{5L^2} \frac{EJ}{GF} \right)$$

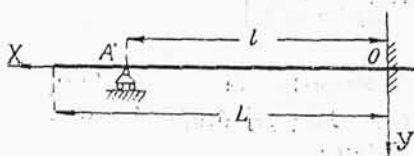
Jak widać z rozważań powyższych, wpływ sił ścinających na ugięcie belki zależy w znacznej mierze od *wiotkości* belki:

$$w = \frac{L}{i}$$

w mniej znacznej mierze również i od t , a więc od kształtu przekroju, a nadto — od stosunku współczynników sprężystości podłużnej i poprzecznej. Dla belek zwykle stosowanych w praktyce wpływ ten jest niewielki, a przeto przeważnie jest pomijany.

5. Belka jednoprzęsłowa hyperstatyczna ma dwie odmiany:

a. Belka, jednostronnie osadzona na niesprężystej podporze stałej i wsparta na podporze posuwnej (Rys. 72). Obciążenie pionowe w płaszczyźnie XY . Kierunek (w) wzrostu jego wypadkowych różno-



Rys. 72

zwrotny z osią X .

Po sprowadzeniu obciążenia lewego wspornika do punktu podparcia A otrzymamy tuż przed tym punktem moment zginający M_A . Ten moment jest równy zeru, gdy belka kończy się w punkcie A . Po sprowadzeniu całego obciążenia belki i lewej siły odporowej pionowej V_A do punktu podparcia O na

podporze stałej otrzymamy tuż przed tym punktem moment zginający M_0 .

Dla punktów podparcia:

$$x_A = l \quad y_A = 0 \quad x_o = y_o = y_o' = 0$$

Odciętej x przynależą rzędne y, y' bieżącego punktu odkształconej, a przeto wzór Clerc'a (119) lub (123), wypisany dla przęsła (l) — da M_0 , a następnie, łącznie z (120) lub (124) dla przęsła (x):

$$0 = \frac{y}{x} + S' \quad y' = \frac{y}{x} + S'' = S'' - S'$$

gdzie przez S', S'' oznaczono dalsze wyrazy, zależne od x, M_A, M_0 , od obciążenia zewnętrznego i momentu zginającego M — panującego tuż przed punktem bieżącym odkształconej.

Tak np. belka o stałym przekroju, osadzona na podporze stałej, drugim końcem opiera się na podporze posuwnej. Obie podpory niesprężyste. Stałe obciążenie jednostkowe q pokrywa całą długość L belki. Tutaj więc:

$$M_A = 0 \quad 0 = 2LM_0 - \frac{1}{4}qL^3 \quad M_0 = \frac{1}{8}qL^2 = \frac{1}{2}qL^2 + V_A L$$

$$V_A = -\frac{3}{8}qL \quad M = -\frac{3}{8}qL(L-x) + \frac{1}{2}q(L-x)^2$$

Zatem dla przęsła (x):

$$0 = \frac{y}{x} - \frac{1}{6EJ} \left(xM + 2xM_0 - \frac{1}{4}qx^3 \right)$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{6EJ} \left(2xM + xM_0 - \frac{1}{4}qx^3 \right)$$

Stąd bezpośrednio:

$$y = \frac{qx^2}{48EJ} (L-x)(3L-2x)$$

$$y' = \frac{qx}{48EJ} (6L^2 - 15Lx + 8x^2)$$

To samo otrzymamy, całkując równanie odkształconej:

$$M = V_A(L-x) + \frac{1}{2}q(L-x)^2$$

$$EJy' = C - \frac{1}{2} V_A (L-x)^2 - \frac{1}{6} q (L-x)^3$$

$$EJy = D + Cx + \frac{1}{6} V_A (L-x)^3 + \frac{1}{24} q (L-x)^4$$

W punktach podparcia:

$$x_A = L \quad y_A = 0$$

$$x_0 = y_0 = y'_0 = 0$$

a przeto:

$$D + CL = 0 \quad C = \frac{1}{2} V_A L^2 + \frac{1}{6} q L^3 \quad D = -\frac{1}{6} V_A L^3 - \frac{1}{24} q L^4$$

$$V_A = -\frac{3}{8} qL \quad C = -\frac{1}{48} qL^3 \quad D = \frac{1}{48} qL^4$$

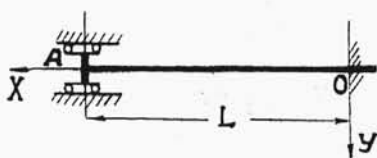
Najwyższy moment i największe ugięcie:

$$M_m = -\frac{9}{128} qL^3 \quad f = \frac{27 + 5\sqrt{33}}{2048 EJ} qL^4$$

przynależą odciętym:

$$x = \frac{5}{8} L \quad x = \frac{15 - \sqrt{33}}{16} L$$

b. Belka, końcami osadzona na niesprężystych podparach: prawej — stałej i lewej — łożyskowej (Rys. 73). Obciążenie pionowe w płaszczyźnie XY.



Rys. 73.

Kierunek (w) wzrostu jego wypadkowych jest różnowrotny z osią X. Oznaczmy odpowiednio przez M_A i M_0 — moment odprowy lewego punktu podparcia i moment zginający tuż przed prawym. Dla tych punktów:

$$x_A = L \quad y_A = y'_A = 0$$

$$x_0 = y_0 = y'_0 = 0$$

Odciętej x przynależą rzędne y, y' bieżącego punktu odkształconej. Wzory Clerc'a (119), (120) lub (123), (124), wypisane dla przęsła (L) dadzą M_A, M_0 — dla przęsła (x) — y, y' .

Tak np. dla belki o stałym przekroju, obciążonej pionową siłą P , działającą w odległości l od prawego punktu podparcia:

$$0 = LM_A + 2LM_0 - \frac{P}{L} (L-l)[L^2 - (L-l)^2]$$

$$0 = 2 L M_A + L M_0 - \frac{P}{L} l (L^2 - l^2)$$

Stąd bezpośrednio:

$$M_A = \frac{P l^2 (L - l)}{L^2} \quad M_0 = \frac{P l (L - l)^2}{L^3}$$

Nadto:

$$M_A + V_A L + P l = M_0 \quad V_A = -\frac{P l^2}{L^3} (3 L - 2 l)$$

a przeto dla przęsła (x):

$$\begin{aligned} M &= M_A + V_A (L - x) \quad L \geq x \geq l \\ 0 &= \frac{y}{x} - \frac{1}{6 E J} \left\{ x M + 2 x M_0 - \frac{P}{x} (x - l) [x^2 - (x - l)^2] \right\} \\ y' &= \frac{y}{x} + \frac{1}{6 E J} \left[2 x M + x M_0 - \frac{P}{x} l (x^2 - l^2) \right] \end{aligned}$$

oraz:

$$\begin{aligned} M &= M_A + V_A (L - x) + P (l - x) \quad l \geq x \geq 0 \\ 0 &= \frac{y}{x} - \frac{1}{6 E J} (x M + 2 x M_0) \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{6 E J} (2 x M + x M_0) \end{aligned}$$

Stąd bezpośrednio:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{P l^2 (L - x)^2}{6 L^3 E J} [L l - (3 L - 2 l) x] \quad y' = \frac{P l^2 (L - x)^2}{2 L^3 E J} (L - 2 x) \\ &\quad L \geq x \geq l \\ y &= \frac{P (L - l)^2 x^2}{6 L^3 E J} [3 L l - (L + 2 l) x] \\ y' &= \frac{P (L - l)^2 x}{2 L^3 E J} [2 L l - (L + 2 l) x] \quad l \geq x \geq 0 \end{aligned}$$

To samo otrzymamy całkując równanie odkształconej:

$$\begin{aligned} E J y'' &= M_A + V_A (L - x) + P (l - x) \\ E J y' &= C + M_A x - \frac{1}{2} V_A (L - x)^2 - \frac{1}{2} P (l - x)^2 \\ E J y &= D + C x + \frac{1}{2} M_A x^2 + \frac{1}{6} V_A (L - x)^3 + \frac{1}{6} P (l - x)^3 \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę współrzędne punktów podparcia, otrzymamy:

$$C + M_A L = 0 \quad D + CL + \frac{1}{2} M_A L^2 = 0$$

$$C - \frac{1}{2} V_A L^2 - \frac{1}{2} P l^2 = 0 \quad D + \frac{1}{6} V_A L^3 + \frac{1}{6} P l^3 = 0$$

Stąd bezpośrednio:

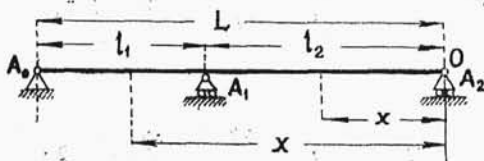
$$C = -\frac{Pl^2}{L}(L-l) \quad D = \frac{Pl^2}{2}(L-l)$$

$$V_A = -\frac{P}{L^3} l^2 (3L-2l) \quad M_A = \frac{P}{L^2} l^2 (L-l)$$

Tuż przed punktem przyłożenia siły P panuje skrajny moment zginający:

$$M_p = M_A + V_A(L-l) = -\frac{2Pl^2}{L^3}(L-l)^2$$

6. Belka dwuprzęsłowa o stałym przekroju (Rys. 74) na podporach: przegubowej i dwóch posuwnych. Obciążenie pionowe płaskie. Kierunek (w) wzrostu jego wypadkowych — różnowrotny z osią X . Belka nie wystaje poza skrajne punkty podparcia.



Rys. 74.

a. Podpory niesprężyste. Punkty podparcia na jednym poziomie. Stałe obciążenie q jednostkowe na całej długości L belki. Wobec zerowych wielkości skrajnych momentów M_0 i M_2 wzór (125) daje:

$$0 = 2LM_1 - \frac{1}{4} q(l_1^3 + l_2^3)$$

$$M_1 = \frac{q}{8L}(l_1^3 + l_2^3) = V_0 l_1 + \frac{1}{2} q l_1^2 \quad V_0 = -\frac{q}{8l_1}(3l_1^2 + l_1 l_2 - l_2^2)$$

$$M_1 = V_2 l_2 + \frac{1}{2} q l_2^2 \quad V_2 = \frac{q}{8l_2}(l_1^2 - l_1 l_2 - 3l_2^2)$$

Nadto wzór (131) daje

$$V_1 = -\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) M_1 - \frac{1}{2} qL = -\frac{qL}{8l_1 l_2}(L^2 + l_1 l_2)$$