

B. Część druga.

1. Zginanie mimośrodkowe słupa. Nieważki prosty pręt o stałym przekroju F osadzono u podstawy niesprężystie pionowo. W jego głównej płaszczyźnie XY , prostopadłej do osi Z najmniejszego momentu bezwładności J przekroju bieżącego, leży siła zewnętrzna P , niezmiennie pionowa, oraz — jej sztywny mimośród m , prostopadły do odkształconej.

Przy ugięciach słupa znikomych, praktycznie jedynie dopuszczalnych, mimośród m jest prawie poziomy. Wystarczy uprościć równanie odkształconej, zatem — dla dodatniej siły P , ściągającej (Rys. 83) i rozciągającej (Rys. 84):

$$y'' = n^2(m + f - y) \quad n^2 = \frac{P}{EJ} \quad y'' = n^2(m - f + y)$$

$$y = f + m + A \sin(nx) + B \cos(nx)$$

$$y = f - m + A \sinh(nx) + B \cosh(nx)$$

Stąd po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$x = y = y' = 0$$

$$x = l \quad y = f$$

otrzymamy odpowiednio:

$$y = (m + f)[1 - \cos(nx)] \quad y = (m - f)[\cosh(nx) - 1]$$

$$f = m \left[\frac{1}{\cos(nl)} - 1 \right] \quad f = m \left[1 - \frac{1}{\cosh(nl)} \right]$$

gdzie długość l pierwotnej osi słupa utożsamiono z długością jego odkształconej.

Nieznaczone wielkości rzędnych: y, f — cechują ugięcia znikome, zatem, przy m skończonym siła P , lub n — nie mogą daleko odbiegać od zera. Przy obciążeniach większych — właściwe wyniki mamy ze wzorów ścisłych, poprzednio wyprowadzonych.

Przy m znikomym małym — rozciągająca siła P , lub n nie może wzrastać powyżej granicy P_0 lub n_0 , dającej naprężenie dopuszczalne:

$$k_g = P_0 \left(\frac{1}{F} + \frac{m}{W} \right)$$

w górnym skrajnym przekroju — niebezpiecznym. Największa rzędna odkształconej f stale jest przytem mniejsza od znikomego małego mimośrodu m : słup jest praktycznie prosty i po odkształceniu.

Inaczej działa siła P ściskająca: im bardziej zbliża się do siły Euler'owskiej:

$$P_e = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

a więc im bardziej nl zbliża się do $\frac{1}{2}\pi$, tem szybciej wzrasta f dążąc do nieskończoności. Ten wzrost jest jednak ograniczony: siła P nie może przekroczyć granicy P_0 , dającej naprężenie dopuszczalne:

$$k_g = P_0 \left(\frac{1}{F} + \frac{m+f}{W} \right)$$

w dolnym osadzonym przekroju — niebezpiecznym. Zatem im bardziej zbliża się P do P_e , tem wyraźniej ugina się pręt praktycznie prosty.

Wzory powyższe służą do obliczania słupów przy mimośrodzie m , ściśle określonym, skończonym, lub znikomym. Przez W oznaczono w nich moment wytrzymałości przekroju poprzecznego względem osi Z .

2. Wzory Euler'a. Nieważki, praktycznie prosty pręt o stałym przekroju, unieruchomiono na podporach pionowo i obciążono ciężarem P , praktycznie współosiowym, możliwie najdokładniej przyłożonym do środka skrajnego górnego przekroju pręta. Pierwotna, praktycznie prosta oś pręta leży na dodatniej osi X ; główna jego płaszczyzna XY jest prostopadła do osi Z najmniejszego momentu bezwładności J przekroju bieżącego.

a. Pręt I niesprężystie osadzono u podstawy (Rys. 85). Równanie odkształconej:

$$y'' = n^2(f - y) \quad n^2 = \frac{P}{EJ} \quad y = A \sin(nx) + B \cos(nx) + f$$

po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$x = y = y' = 0 \quad x = l \quad y = f$$

daje:

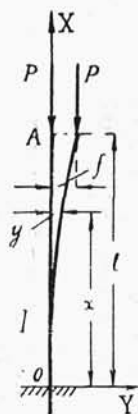
$$y = f[1 - \cos(nx)] \quad -f \cos(nl) = 0$$

Zatem — wyraźne ugięcie pręta I przy f różnym od zera możliwe jest tylko przy:

$$\cos(nl) = 0 \quad nl = \frac{1}{2}\pi$$

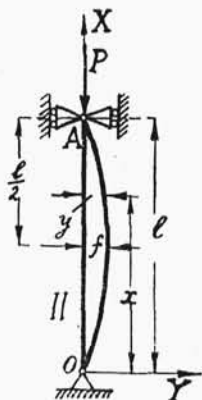
Stąd siła Euler'owska:

$$P_e = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}$$



Rys. 85.

b. Pręt II przegubowo końcami złączono z niesprężystymi podporami: dolną — przegubową i obustronnego działania górną — posuwną w kierunku pierwotnej osi X pręta. Osie przegubów (Rys. 86) obu podpór są prostopadłe do XY .



Rys. 86.

Siła odporowa pozioma podpory górnej jest niewątpliwie równa zero, a przeto równanie odkształconej:

$$y'' = -n^2 y \quad n^2 = \frac{P}{EJ}$$

$$y = A \sin(nx) + B \cos(nx)$$

po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$x = y = 0 \quad x = l \quad y = 0$$

daje:

$$y = A \sin(nx) = f \sin(nx) \quad f \sin(nl) = 0$$

gdzie przez f oznaczono ugięcie w połowie długości l pręta.

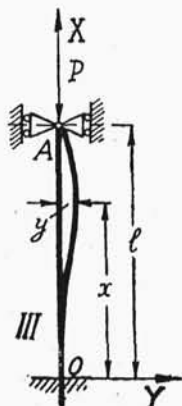
Zatem wyraźne ugięcie pręta II przy f różnym od zera możliwe jest tylko przy:

$$\sin(nl) = 0 \quad nl = \pi$$

skąd siła Euler'owska:

$$P_e = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

c. Pręt III niesprężystie osadzono (Rys. 87) u podstawy, górnym końcem przegubowo złączono z niesprężystą podporą obustronnego działania — posuwną w kierunku pierwotnej osi X pręta. Oś jej przegubu jest prostopadła do XY , — siła odporowa H — pozioma. Równanie odkształconej:



Rys. 87.

$$y'' = -n^2 y + \frac{H}{EJ} (l - x) \quad n^2 = \frac{P}{EJ}$$

$$y = A \sin(nx) + B \cos(nx) + \frac{H}{P} (l - x)$$

po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$x = y = y' = 0 \quad x = l \quad y = 0$$

daje:

$$A = \frac{H}{Pn} \quad B = -\frac{Hl}{P} \quad A \sin(nl) + B \cos(nl) = 0$$

skąd bezpośrednio:

$$H[\operatorname{tg}(nl) - nl] \cos(nl) = 0$$

Zerowa wielkość H daje zerową wielkość y przy wszelkiem x , zatem wyrażne ugięcie pręta III możliwe jest tylko przy:

$$\operatorname{tg}(nl) = nl \quad nl = 1,4303 \pi$$

skąd siła Euler'owska:

$$P_e = 2,046 \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EJ}{(0,7 l)^2}$$

d. Pręt IV — niesprężyste osadzono (Rys. 88) u podstawy i w tulei niesprężystej podpory łożyskowej górnej, dającej siłę odporową H równoległą do osi Y i moment odporowy N , prostopadły do XY . Równanie odkształconej:

$$y'' = -n^2 y + \frac{H}{EJ}(l-x) + \frac{N}{EJ} \quad n^2 = \frac{P}{EJ}$$

$$y = A \sin(nx) + B \cos(nx) + \frac{H}{P}(l-x) + \frac{N}{P}$$

po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$x = y = y' = 0 \quad x = l \quad y = y' = 0$$

daje:

$$A = \frac{H}{Pn} \quad B = -\frac{Hl + N}{P}$$

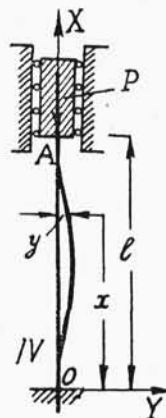
$$A \sin(nl) + B \cos(nl) + \frac{N}{P} = 0$$

$$A \cos(nl) - B \sin(nl) - \frac{H}{Pn} = 0$$

skąd, rugując A, B , otrzymamy:

$$H[1 - \cos(nl)] + Nn \sin(nl) = 0$$

$$H[nl - \sin(nl)] + Nn[1 - \cos(nl)] = 0$$



Rys. 88.

układ równań, dający zerowe wielkości H, N, A, B, y przy wszelkiem x , a przeto wyraźne ugięcie pręta możliwe jest tylko wtedy, gdy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos(nl) & \sin(nl) \\ nl - \sin(nl) & 1 - \cos(nl) \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \left[\sin\left(\frac{nl}{2}\right) - \frac{nl}{2} \cos\left(\frac{nl}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{nl}{2}\right) = 0$$

to jest, gdy:

$$\sin\left(\frac{nl}{2}\right) = 0 \quad nl = 2\pi$$

Stąd siła Euler'owska:

$$P_e = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,5l)^2}$$

3. Obszar słuszności wzorów Euler'a. Wyżej wyprowadzone cztery wzory można ująć w jeden wspólny wzór Euler'a:

$$P_e = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

gdzie L oznacza tak zwaną *długość sprowadzoną*, różną od rzeczywistej pierwotnej długości l — w ogólnym przypadku.

Dla prętów wyżej rozpatrywanych:

$$\text{I. } L = 2l \quad \text{II. } L = l \quad \text{III. } L = 0,7l \quad \text{IV. } L = 0,5l$$

Powyższy wzór ogólny daje Eulerowskie *naprężenie wybaczające*:

$$N_e = \frac{P_e}{F} = \frac{\pi^2 Ei^2}{L^2} = \frac{\pi^2 E}{w^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152)$$

gdzie i oznacza promień bezwładności najmniejszego momentu J stałego przekroju F pręta, a iloraz:

$$w = \frac{L}{i}$$

stanowi *wiotkość* pręta.

Wzory Euler'a jako pochodne równania odkształconej, mogą być tylko słuszne w zakresie stosowalności tego równania, a więc wyłącznie tylko *w obszarze sprężystości i proporcjonalności tworzywa*. Zatem *naprężenie wybaczające Euler'owskie* N_e nie może przekraczać skrajnego naprężenia N_s tego obszaru.

Inaczej mówiąc, wzór Euler'a może być stosowany wyłącznie nie tylko przy wiotkości w pręta większej od granicznej:

$$w_e = \pi \sqrt{\frac{E}{N_s}}$$

Ten wniosek znalazł ściśle potwierdzenie w źródłowych Kármán'owskich próbach *stali* o cechach wytrzymałościowych:

$$R_r = 6800 \text{ kg/cm}^2 \quad S_c = 2600 \text{ kg/cm}^2 \quad E_c = 2170000 \text{ kg/cm}^2$$

Dla tego tworzywa:

$$N_e = \frac{21400000}{w^2}$$

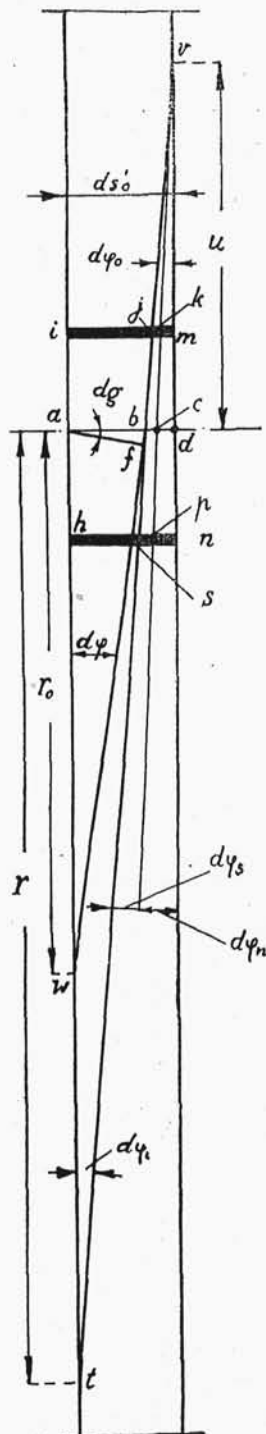
oraz:

$$w_e = 90,8$$

Zestawienie obliczonych N_e według tego wzoru oraz *naprężeń wybaczających* N_k , otrzymanych przy próbach Kármán'a:

w	$N_e \text{ kg/cm}^2$	$N_k \text{ kg/cm}^2$	$\Delta \%$
175,8	692	690	+ 0,3
146,0	1004	1000	+ 0,4
116,2	1585	1595	- 0,6
103,0	2017	2030	- 0,6
95,3	2356	2305	+ 2,2
91,3	2568	2500	+ 2,7
88,0	2763	2727	+ 1,3
82,0	3183	2740	+16,2

podkreśla wnioski wyżej wypowiedziane. W obszarze sprężystości i proporcjonalności wzory Euler'owskie dają wystarczająco



Rys. 89.

ściśle wyniki — zawodzą bezwzględnie po przekroczeniu granicy sprężystości.

4. Wzór L. K. Po przekroczeniu układu naprężeń S , przynależnych granicy sprężystości tworzywa, odkształceniom sprężystym towarzyszą ściśle z niemi związane odkształcenia niesprężyste h . Zależność pomiędzy odkształceniami sprężystymi a naprężeniami R sprowadza się do linowego prawa Hooke'a dla tworzyw szlachetnych, słusznego w obszarze, zazwyczaj daleko sięgającym poza granicę sprężystości.

Odształcenia niesprężyste h , występujące przy naprężeniach $R > S$ mogą być wyrażone w zależności od przyrostów $R - S$. W pierwszym przybliżeniu:

$$h = \frac{R - S}{A}$$

spółczynnik niesprężystości A gra rolę współczynnika sprężystości prawa Hooke'a.

Chcąc na tej drodze otrzymać dopełnienie wzoru Euler'a rozpatrujemy (Rys. 86) pręt II o najprostszej długości sprowadzonej L , równej pierwotnej długości l pręta. Przy obciążeniu siłą P ścisnącą, praktycznie osiową, a nadto stopniowo rosnącą od zera, — pręt ulega skróceniu, a następnie poczyną się wybaczają: odciętej x przynależy znikoma rzędna y odkształconej, różna od zera.

W założeniu niezmienności przekrojów płaskich przy niesprężystym zginaniu, — pierwotnie równoległe płaskie ścianki płytki bieżącej (Rys. 89) pochyłają się o kąt $d\varphi_0$ względnego obrotu około osi v , przyczem długość

$$ad = ds_0$$

pierwotnej osi pręta obróci się o:

$$bd = e_0 ds_0 = u d\varphi_0$$

W bryle, zaznaczonej śladem *snmj*, zawarte są skrócenia złożone z odkształceń sprężystych i niesprężystych. Założenie niezmienności przekrojów dotyczy niewątpliwie i jednych i drugich; inaczej mówiąc, po odciążeniu — przekrój poprzeczny *mn*, niezmiennie płaski, trwale już będzie pochylony pod kątem $d\varphi_n$ ku sąsiadnemu *ih*, a pochylenie sprężyste:

$$d\varphi_s = d\varphi_0 - d\varphi_n$$

zmaleje do zera. Oś *v* obrotu o kąty $d\varphi_s$, $d\varphi_n$ należy przytem niewątpliwie uważać za wspólną ze względu na nierozdzielne powstawanie odkształceń sprężystych i niesprężystych, zgola jednak od siebie niezależnych. Zatem skrócenie *bd* ma część sprężystą *bc* i niesprężystą *cd*: wydłużenie jednostkowe ujemne e_0 — stanowi sumę wydłużeń ujemnych: sprężystego e_s i niesprężystego e_n .

Skrócenia sprężyste, zawarte w bryle *spkj*, przynależą naprężeniom, równoważącym zewnętrznemu obciążeniu mimośrodowe: przeto, oś *v* obrotu stanowi linię obojętną przekroju *pk*. Jej odległość *u* od pierwotnej osi *ad* pręta czyni zadość równaniu:

$$\frac{P \cos \varphi}{F} - \frac{Py}{J} u = 0$$

gdzie φ oznacza znikomy kąt nachylenia stycznej odkształconej — ku pierwotnej osi *X* pręta. Stąd bezpośrednio:

$$u = \frac{J}{Fy}$$

Nadto przyrost siły ścinającej *Q*:

$$dQ = d(P \sin \varphi) = P \cos \varphi d\varphi \simeq Pd\varphi$$

odpowiadający długości odkształconej:

$$ab = af = ds = (1 - e_0) ds_0$$

da przesunięcie *dg*, zmieniające kąt $d\varphi_0$ i przynależny mu promień krzywizny *r* na:

$$d\varphi = d\varphi_0 + dg$$

i na ostateczny promień krzywizny r_0 pręta odkształconego.



W obszarze niesprężystości wydłużenie e_0 i przesunięcie dg złożone są z części sprężystych i niesprężystych:

$$e_0 = e_s + e_n \quad dg = dg_s + dg_n$$

przyczem, w pierwszym przybliżeniu:

$$e_s = \frac{P \cos \varphi}{EF} = \frac{P}{EF} = \frac{N}{E} \quad N = \frac{P}{F}$$

$$dg_s = \frac{tP}{GF} d\varphi = \frac{tN}{G} \frac{d\varphi}{ds} ds$$

a przeto, w myśl poprzednio wypowiedzianej uwagi:

$$e_n = \frac{N - N_s}{B} \quad dg_n = \frac{t}{C} (N - N_s) \frac{d\varphi}{ds} ds$$

gdzie przez: B, C oznaczono odpowiednio *spółczynniki niesprężystości podłużnej i poprzecznej*, przez N_s — *napężenie na granicy sprężystości tworzywa*.

Zatem ze wzorów wyżej wyprowadzonych mamy:

$$d\varphi_0 = d\varphi - dg = \frac{e_0}{u} ds_0 = \frac{e_0}{u} \frac{ds}{1 - e_0}$$

inaczej jeszcze:

$$\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{dg}{ds} \right) (1 - e_0) = \frac{e_0}{u}$$

Stąd, po odrzuceniu małych wyższych rzędów:

$$\left(1 - \frac{N}{E} - \frac{N - N_s}{B} - t \frac{N}{G} - t \frac{N - N_s}{C} \right) \frac{d\varphi}{ds} = \frac{F}{J} \left(\frac{N}{E} + \frac{N - N_s}{B} \right) y$$

i uwzględnieniu przybliżonej zależności:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r_0} = \pm \frac{d^2 y}{dx^2} = \pm y''$$

otrzymamy:

$$y'' = -n^2 y$$

gdzie:

$$n^2 = \frac{F}{J} \frac{\frac{N}{E} + \frac{N - N_s}{B}}{1 - \frac{N}{E} - \frac{N - N_s}{B} - t \frac{N}{G} - t \frac{N - N_s}{C}}$$

Całka tego równania:

$$y = A \sin (nx) + B \cos (nx)$$

wobec warunków brzegowych:

$$x = y = 0 \qquad x = L \qquad y = 0$$

daje:

$$\sin (nL) = 0 \qquad nL = \pi$$

skąd bezpośrednio:

$$\frac{\pi^2}{w^2} = \frac{\frac{N}{E} + \frac{N - N_s}{B}}{1 - \frac{N}{E} - \frac{N - N_s}{B} - t \frac{N}{G} - t \frac{N - N_s}{C}}$$

gdzie przez:

$$w = \frac{L}{i} = L \sqrt{\frac{F}{J}}$$

oznaczono *wiotkość* pręta.

Stosunek współczynników sprężystości i niesprężystości jest praktycznie jednakowy i równy:

$$\frac{B}{E} = \frac{C}{G} = a$$

a przeto, po zebraniu wyrazów otrzymamy *naprężenie wybacza-
jące*:

$$N_w = \frac{N_s}{1 + \frac{\frac{1}{E} \left(1 + \frac{\pi^2}{w^2}\right) + \frac{t}{G} \frac{\pi^2}{w^2}}{\frac{1}{B} \left(1 + \frac{\pi^2}{w^2}\right) + \frac{t}{C} \frac{\pi^2}{w^2}}} + \frac{G}{w^2} \frac{1}{\left(\frac{G}{E} + \frac{G}{B}\right) \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{w^2}\right) + \frac{t}{w^2} \left(1 + \frac{G}{C}\right)}$$

i ostatecznie:

$$N_w = S_w + b \frac{G}{w^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

gdzie:

$$S_w = \frac{N_s}{1 + a} \quad b = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left[\frac{G}{\pi^2 E} + \left(t + \frac{G}{E}\right) \frac{1}{w^2} \right]}$$

W tym ostatecznym wzorze $L.K.$ dla naprężenia wybacza-
jącego w obszarze niesprężystości: S_w oznacza granicę sprężysto-
ści przy wybaczeniu, b — współczynnik stały praktycznie, G —
współczynnik sprężystości poprzecznej tworzywa, w — wiotkość
pręta, czyli stosunek jego długości sprowadzonej L do najmniej-
szego ramienia bezwładności stałego przekroju poprzecznego
pręta.

Dla stali współczynnik a waha się w dość szczupłych gra-
nicach. Wynosi średnio:

$$a = 0,04 \quad \frac{G}{E} = 0,385$$

a przeto przy tych danych współczynnik b praktycznie jest stały
i równy jedności. Ta sama jego wartość:

$$b = 1$$

daje wystarczająco ściśle wyniki dla pewnych metali posłusz-
nych prawu Hooke'a a nawet i dla drewna.

Granica N_s jest średnio o 7% wyższa od S_c , a przeto S_w
jest w przybliżeniu o 3% większe od S_c — granicy sprężystości
przy ściskaniu.

Przy tych danych wyniki ostatecznego wzoru bardzo dobrze
zgadzają się z Kármán'owskimi próbami stali, o których wyżej
była mowa. Dla tego tworzywa:

$$R_r = 6800 \text{ kg/cm}^2 \quad S_c = 2600 \text{ kg/cm}^2 \quad E_c = 2170000 \text{ kg/cm}^2$$

a przeto:

$$N_w = 2600 \times \frac{1,07}{1,04} + \frac{0,385}{w^2} \times 2170000 = 2676 + \frac{835000}{w^2}$$

Graniczną wiotkość

$$w_e = 87,6$$

otrzymamy z równania

$$N_w = 2676 + \frac{835000}{w_e^2} = N_e = \frac{21400000}{w_e^2}$$

Zestawienie wyliczonych N_w z powyższego wzoru L. K. oraz naprężeń wybaczających N_K , otrzymanych przy próbach Kármán'a.

w	$N_w \text{ kg/cm}^2$	$N_K \text{ kg/cm}^2$	$\Delta \%$
22,0	4401	4330	+ 1,6
24,8	4034	3900	+ 3,4
28,8	3683	3445	+ 6,9
38,2	3253	3250	+ 0,1
47,3	3049	3060	- 0,3
48,2	3035	3020	+ 0,5
53,6	2967	3165	- 6,2
58,6	2919	3130	- 6,7
73,1	2832	2950	- 4,0
82,0	2801	2740	+ 2,2
88,0	2784	2720	+ 2,4
91,3	2776	2500	+ 11,0

aż nadto uwypukla praktyczną doniosłość tego wzoru.

5. Wzory Przerwy-Tetmajer'a. Wzory te czysto doświadczalne, oparte na pokaźnej ilości spostrzeżeń, uzależniają *naprężenie wybaczające* N_T obszaru niesprężystości od wiotkości:

$$w = L \sqrt{\frac{F}{J}}$$

pręta o stałym przekroju F i sprowadzonej długości L . Przez J oznaczono najmniejszy moment bezwładności przekroju F .

Naprężenie wybaczające N_T w kg/cm^2 będzie:

a. Dla sośniny, świerczyny, jedliny:

$$N_T = 293 - 1,94 w \quad 100 \geq w \geq 1,8$$

b. Dla żeliwa:

$$N_T = 7760 - 120 w + 0,53 w^2 \quad 80 \geq w \geq 5$$

c. Dla żelaza zgrzewnego:

$$N_T = 3030 - 12,9 w \quad 112 \geq w \geq 10$$

d. Dla stali miękkiej: ($R_r = 3500 \div 4500 \text{ kg/cm}^2$)

$$N_T = 3100 - 11,4 w \quad 105 \geq w \geq 10$$

e. Dla stali twardej: ($R_r = 5500 \div 6500 \text{ kg/cm}^2$)

$$N_T = 3350 - 6,2 w \quad 80 \geq w \geq 10$$

6. Stopień pewności. *Dopuszczalne naprężenie k_w wiotkiego pręta ściskanego nie może przekraczać k ; nadto, k_w winno być wielokrotnie niższe od naprężenia wybaczającego N_w . Zatem:*

$$N_w = u_w k_w$$

gdzie u_w oznacza odpowiedni *stopień pewności*, zależny od tworzywa i rodzaju obciążenia.

Przy obciążeniu stałym dla żelaza zgrzewnego i stali:

$$u_w = 3 \div 5$$

dla słupów żeliwnych, odlewanych pionowo:

$$u_w = 6 \div 8$$

dla belek i słupów drewnianych:

$$u_w = 3 \div 10$$

Nadto dla stali przy obciążeniu powtarzanem:

$$u_w = 8 \div 11$$

przemieniem:

$$u_w = 15 \div 25$$

Siła nośna słupa o stałym przekroju winna być również u_w razy mniejsza od siły wybaczającej.

7. Pręt osadzony sprężystie. Rozpatrujemy pręt IV na podporach sprężystych. Dolna podpora stała daje siły odporowe: V_0 — pionową i H_0 , leżącą na osi Y , a nadto — moment odprowy N_0 , prostopadły do XY . Odpowiednie posuwy sprężyste oznaczymy przez h_0 i m_0 . Górna podpora, łożyskowa daje H , N , h , m , przyczem:

$$h_0 = -a_0 H_0 \quad m_0 = -b_0 N_0 \quad h = -aH, \quad m = -bN$$

gdzie przez a_0, b_0, a, b oznaczono odpowiednie współczynniki sprężystości podpór. Z równań statyki mamy:

$$V_0 + P = 0 \quad H_0 + H = 0 \quad Ph + Hl + N + N_0 = 0$$

skąd bezpośrednio:

$$h_0 = a_0 H \quad m_0 = b_0 (N + Hl + Ph) = b_0 [N + (l - aP) H]$$

Równanie odkształconej:

$$y'' = n^2 (h - y) + \frac{H}{EJ} (l - x) + \frac{N}{EJ} \quad n^2 = \frac{P}{EJ}$$

$$y = A \sin (nx) + B \cos (nx) + h + \frac{H}{P} (l - x) + \frac{N}{P}$$

po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$x = 0 \quad y = h_0 \quad y' = m_0 \quad x = l \quad y = h \quad y' = m$$

daje:

$$A = \frac{H}{n} \left[\frac{1}{P} + b_0 (l - aP) \right] + b_0 \frac{N}{n} \quad B = H \left(a_0 + a - \frac{l}{P} \right) - \frac{N}{P}$$

$$A \sin (nl) + B \cos (nl) + \frac{N}{P} = 0$$

$$A \cos (nl) - B \sin (nl) - \frac{H}{Pn} + \frac{bN}{n} = 0$$

Stąd rugując A, B otrzymamy:

$$H[1 - \cos (nl) + b_0 l P - a b_0 P^2] + N[b_0 P + b P \cos (nl) + n \sin (nl)] = 0$$

$$H[a_0 n P + a n P - n l + \sin (nl)] + N[-n + n \cos (nl) - b P \sin (nl)] = 0$$

układ równań, dających zerowe wielkości H, N, A, B, y przy wszelkimi x , a przeto wyrażne ugięcie pręta możliwe jest tylko wtedy, gdy wyznacznik powyższych dwóch równań:

$$\begin{aligned} & 4n \left[\sin \left(\frac{nl}{2} \right) - \frac{nl}{2} \cos \left(\frac{nl}{2} \right) \right] \sin \left(\frac{nl}{2} \right) + (b_0 + b) P [\sin (nl) - \\ & - nl \cos (nl)] + (a_0 + a) n^2 P \sin (nl) + a_0 b_0 n P^2 + a b n P^2 \cos (nl) + \\ & + b_0 b l P^2 \sin (nl) + (a_0 b + a b_0) n P^2 \cos (nl) - a b_0 b P^3 \sin (nl) = 0 \end{aligned}$$

Z tego wzoru możemy otrzymać wszystkie cztery wzory Euler'a biorąc dla pręta I:

$$a = b = \infty$$

$$a_0 = b_0 = 0$$

dla pręta II:

$$b_0 = b = \infty$$

$$a_0 = a = 0$$

dla pręta III:

$$b = \infty$$

$$a_0 = a = b_0 = 0$$

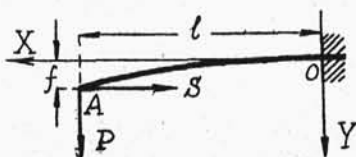
i dla pręta IV:

$$a_0 = b_0 = a = b = 0$$

C. Część trzecia.

1. Zginanie mimośrodowe. Nieważki prosty pręt o stałym przekroju F unieruchomiono na niesprężystych podporach poziomo. Nieodkształcona pręta leży na dodatniej osi X , wyprowadzonej ze środka prawego skrajnego przekroju. Oś Y skierowano w dół, oś Z — poza główną płaszczyznę bezwładności XY pręta, prostopadłą do osi głównego momentu J przekroju bieżącego.

a. Wspornik (Rys. 90). Dla siły S dodatniej ściskającej mamy z (149) i (146):



Rys. 90.

$$0 = -\frac{Sf + Pl - Sf}{l} + (Sf + Pl) \frac{n \cos(nl)}{\sin(nl)} \quad n^2 = \frac{S}{EJ}$$

$$Sy = Sf + (Sf + Pl - Sf) \frac{l-x}{l} - (Sf + Pl) \frac{\sin[n(l-x)]}{\sin(nl)}$$

$$f = \frac{P}{S} \left[\frac{\operatorname{tg}(nl)}{n} - l \right] \quad y = \frac{P}{S} \left[\frac{\sin(nl) - \sin[n(l-x)]}{n \cos(nl)} - x \right]$$