

II. ROZDZIAŁ DRUGI.

N A P R Ę Ż E N I A.

A. Część pierwsza.

1. **Naprężenia normalne i styczne.** Ciało odkształcone, pozostające w trwałej równowadze wewnętrznej pod jarzmem zrównoważonego układu sił zewnętrznych, nie różni się od ciała sztywnego, podlega przeto wszelkim prawom statyki. To samo dotyczy również i wszelkiej jego części, wyodrębnionej zapomocą przekrojów, myślowo poprowadzonych: ta część trwać będzie w równowadze pod obciążeniem zewnętrznym, jej przynależnym, o ile zastąpimy oddziaływania części pozostałych, odciętych, odpowiedniami układami sił zastępczych.

Wypadkowa tych sił zastępczych, przyłożonych do jednostki pola przekroju, zwie się *naprężeniem* i wyraża w jednostkach siły na jednostkę pola (kg/cm^2 lub kg/mm^2). Naprężenie ma w ogólnym wypadku składową, normalną do jednostki pola i dwie styczne. Składowa normalna zwie się *naprężeniem normalnem*, styczna — *naprężeniem stycznem*.

2. **Znakowanie naprężeń.** W obranym układzie prostokątnych osi współrzędnych, bieżący punkt P ciała, pozostającego w trwałej równowadze odkształcenia stanowi wierzchołek sześcianu $dx \cdot dy \cdot dz$. Na sześcián działa obciążenie zewnętrzne (np. siła ciężkości) w postaci wypadkowej R , przyłożonej do środka sześcianu i wyrażonej w jednostkach siły na jednostkę objętości (kg/cm^3 lub kg/mm^3). Zatem do środka sześcianu przyłożona jest siła $R dx \cdot dy \cdot dz$, lub jej składowe:

$$X dx dy dz \quad Y dx dy dz \quad Z dx dy dz$$

Przy niezmienniej, trwałej równowadze wewnętrznej ciała odkształconego, oddziaływania jego części, przylegających do ścianek sześcianu, dają naprężenia, zależne tylko od współrzędnych x, y, z punktu bieżącego P . Trzy ścianki przecinają się w tym punkcie. Do środka jednej z nich $dy \cdot dz$ przyłożone są (Rys. 19) naprężenia: *normalne* N_x i dwa *styczne* T_{xy} i T_{xz} . Do środka drugiej $dz \cdot dx$: normalne N_y i dwa styczne T_{yz} i T_{yx} , wreszcie do środka trzeciej $dx \cdot dy$ odpowiednie: N_z , T_{zx} , T_{zy} .

Na trzech przeciwnych ściankach panują naprężenia normalne współosiowe, lecz różnowrotne:

$$N'_x = N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx$$

$$N'_y = N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy$$

$$N'_z = N_z + \frac{\partial N_z}{\partial z} dz$$

a nadto odpowiednio równoległe, lecz różnowrotne naprężenia styczne:

$$T'_{xy} = T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} dx$$

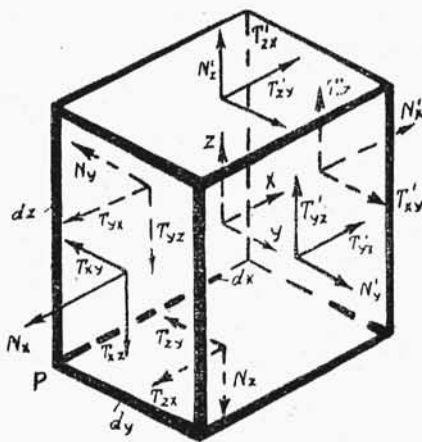
$$T'_{xz} = T_{xz} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} dx$$

$$T'_{yz} = T_{yz} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} dy$$

$$T''_{yx} = T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dy$$

$$T''_{zx} = T_{zx} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} dz$$

$$T'_{zy} = T_{zy} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} dz$$



Rys 19.

Dolny wskaźnik naprężenia normalnego oznacza równoległą oś współrzędnych. Naprężenia normalne, zwrócone wewnątrz sześcianu są ujemne, zwrócone na zewnątrz — dodatnie.

Pierwszy dolny wskaźnik naprężenia stycznego oznacza przynależność do naprężenia normalnego, czyli wspólność punktu przyłożenia. Drugi dolny wskaźnik oznacza równoległą oś współrzędnych. Na ściankach sześcianu przecinających się w bieżącym punkcie P , naprężenia styczne *ujemne* mają zwroty osi

równoległych, *dodatnie* zaś — mają zwroty wprost przeciwne. Na trzech pozostałych ściankach przeciwnych — naprężenia styczne *dodatnie* mają zwroty równoległych osi współrzędnych, *ujemne* zaś — zwroty wprost przeciwne. Wszystkie naprężenia na Rys. 19 są dodatnie.

3. Składowe naprężenia. Mnożąc naprężenia, panujące na ściankach sześcianu (Rys. 19) przez pola tych ścianek, otrzymamy układ sił zastępczych, równoważących wypadkową obciążenia zewnętrznego sześcianu. Równania warunkowe równowagi momentów, branych względem trzech prostopadłych krawędzi sześcianu, po skróceniu przez $dx dy dz$ i odrzuceniu wyrazów znikomo małych, dadzą trzy zależności **Cauchy**:

$$T_{yz} = T_{zy} = T_x \quad T_{xz} = T_{zx} = T_y \quad T_{xy} = T_{yx} = T_z \quad (28)$$

Tą samą drogą otrzymamy z trzech pozostałych warunków równowagi sił:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} + X &= \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_z}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + Y &= \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T_x}{\partial z} + \frac{\partial T_z}{\partial x} + Y = 0 \\ \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + Z &= \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial T_y}{\partial x} + \frac{\partial T_x}{\partial y} + Z = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Naprężenie N_x, N_y, N_z normalne i T_x, T_y, T_z — styczne noszą miano *składowych naprężeń* w bieżącym punkcie ciała odkształconego.

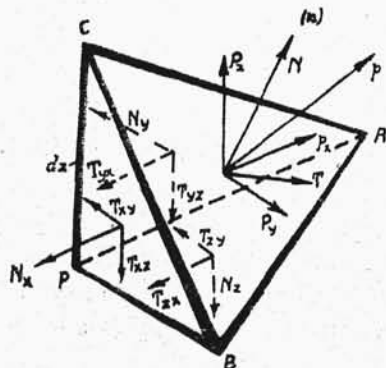
4. Układ naprężeń. Ukośna płaszczyzna (Rys. 20) przekroju wyodrębnia z sześcianu (Rys. 19) — *czworościan* o krawędziach dx, dy, dz , wyprowadzonych z bieżącego punktu P równoległe do osi współrzędnych X, Y, Z .

Oznaczmy przez dF pole ukośnej ścianki ABC , przez:

$$l = \cos \alpha \quad m = \cos \beta$$

$$n = \cos \gamma$$

spółczynniki kierunkowe jego normalnej (n), tworzącej odpo-



Rys. 20.

wiednio kąty α, β, γ z osiami współrzędnych. Pola trzech pozostałych ścianek PBC, PAC i PAB będą więc równe: ldF, mdF i ndF , jako rzuty pola dF .

Oddziaływanie odciętej części sześcianu na ukośną ściankę ABC da naprężenie zastępcze p , pochylone ku osiom współrzędnych pod kątami: χ, ϕ, ω . Składowe tego naprężenia:

$$p_x = p \cos \chi \quad p_y = p \cos \phi \quad p_z = p \cos \omega$$

otrzymamy w postaci;

$$\begin{aligned} p_x &= N_x l + T_x m + T_y n \\ p_y &= T_z l + N_y m + T_x n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30) \\ p_z &= T_y l + T_x m + N_z n \end{aligned}$$

wprost z warunkowych równań równowagi sił zastępczych czworoscianu, po skróceniu przez dF i odrzuceniu wyrazów znikomo małych. Stąd bezpośrednio p i jego kąty kierunkowe.

Naprężenie, znikomo różne od p panować będzie na poletku dF , równoległym do ABC , lecz wyprowadzonym z bieżącego punktu P ; stąd wniosek, że równania (30) dają *układ naprężeń p* w bieżącym punkcie ciała odkształconego. Ich *składowe normalne N* , prostopadłe do dF — otrzymamy z równania:

$$\begin{aligned} N &= p_x l + p_y m + p_z n = N_x l^2 + N_y m^2 + N_z n^2 + \\ &+ 2 T_x mn + 2 T_y ln + 2 T_z lm \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31) \end{aligned}$$

a *składowe styczne T* — ze wzoru:

$$T = \sqrt{p^2 - N^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

5. Naprężenia główne. Z bieżącego punktu P wyprowadzamy wektor r , pochylony ku osiom współrzędnych pod kątami α, β, γ , a nadto czyniący zadość równaniu:

$$Nr^3 = \pm a^3$$

Pęk takich wektorów da pełny obraz układu naprężeń normalnych N w punkcie P . Współrzędne:

$$X = rl \quad Y = rm \quad Z = rn$$

końców wektorów r czynią zadość równaniu:

$$N_x X^2 + N_y Y^2 + N_z Z^2 + 2T_x YZ + 2T_y XZ + 2T_z XY = \pm a^2$$

powierzchni drugiego stopnia, środkowej, o głównych osiach, wyznaczających trzy tak zwane *kierunki główne*. W układzie osi głównych równanie tej powierzchni będzie miało postać najprostszą:

$$N_1 X^2 + N_2 Y^2 + N_3 Z^2 = \pm a$$

a przeto dla kierunków głównych: $T' = T'' = T''' = 0$. Stąd wniosek: *W każdym punkcie ciała odkształconego istnieją trzy prostopadłe kierunki główne naprężeń, prostopadłych do swych pooletek, na których panują. Przynależne tym kierunkom naprężenia główne:*

$$N_1, N_2, N_3$$

stanowią niewątpliwie *extrema* normalnych składowych układu naprężeń w bieżącym punkcie ciała odkształconego. To znaczy że dla kierunków głównych $dN = 0$. Nadto i $T = 0$, a zatem i $dp = 0$, co bezpośrednio wynika ze wzoru (32). Stąd wniosek, że *naprężenia główne stanowią extrema układu naprężeń w każdym punkcie ciała odkształconego*. Dla nich więc: $\lambda = \alpha, \phi = \beta, \omega = \gamma$; podstawienie w (30) da trzy równania, jednorodne względem l, m, n . Ich wyznacznik winien być wobec tego równy zeru; stąd równanie:

$$N^3 - (N_x + N_y + N_z)N^2 + (N_x N_y + N_x N_z + N_y N_z - T_x^2 - T_y^2 - T_z^2)N - N_x N_y N_z + N_x T_x^2 + N_y T_y^2 + N_z T_z^2 + 2T_x T_y T_z = 0 \quad (33)$$

Jego pierwiastki dają N_1, N_2, N_3 .

Spółczynniki tego równania są niezmiennikami: nie zależą od wyboru osi współrzędnych. Pierwszy, równy sumie pierwiastków, wziętej z odwrotnym znakiem, daje zależność:

$$N_x + N_y + N_z = N_1 + N_2 + N_3 \quad (34)$$

Spółczynniki kierunkowe główne: l_0, m_0, n_0 , czynią zadość równaniom:

$$\begin{aligned} \frac{N_x l_0 + T_x m_0 + T_y n_0}{l_0} &= \frac{T_z l_0 + N_y m_0 + T_x n_0}{m_0} = \\ &= \frac{T_y l_0 + T_x m_0 + N_z n_0}{n_0} \quad (35) \end{aligned}$$

6. Elipsoida naprężeń. W układzie osi głównych, to jest wyprowadzonych z bieżącego punktu P ciała odkształconego w trzech kierunkach głównych wzory (30) dadzą:

$$p_x = N_1 l \quad p_y = N_2 m \quad p_z = N_3 n$$

składowe naprężenia

$$p = \sqrt{N_1^2 l^2 + N_2^2 m^2 + N_3^2 n^2}$$

Są to zarazem i współrzędne końca wektora p , zatem, po podstawieniu w:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

otrzymamy:

$$\frac{p_x^2}{N_1^2} + \frac{p_y^2}{N_2^2} + \frac{p_z^2}{N_3^2} = 1$$

równanie tak zwanej *elipsoidy naprężeń* w bieżącym punkcie ciała odkształconego. O tę powierzchnię oparą się końce naprężeń p , jako wektorów, wyprowadzonych z punktu P .

Gdy:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N$$

elipsoida staje się *kulą naprężeń*: w bieżącym punkcie ciała odkształconego wszystkie naprężenia są równe N .

7. Skrajne naprężenia styczne. W układzie osi głównych równanie (31) daje:

$$N = N_1 l^2 + N_2 m^2 + N_3 n^2$$

a przeto:

$$\begin{aligned} T^2 = p^2 - N^2 &= N_1^2 l^2 + N_2^2 m^2 + N_3^2 n^2 - \\ &- (N_1 l^2 + N_2 m^2 + N_3 n^2)^2 \quad \dots \quad (36) \end{aligned}$$

Ten wzór uzależnia T od zmiennych, związanych równaniem

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Zwykle sposoby szukania największości i najmniejszości względnych dadzą *extrema* naprężeń stycznych:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} (N_3 - N_2) & \text{dla } l = 0, \quad m = n = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ T_2 &= \frac{1}{2} (N_1 - N_3) & \text{dla } m = 0, \quad n = l = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ T_3 &= \frac{1}{2} (N_2 - N_1) & \text{dla } n = 0, \quad l = m = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (37)$$

Bezwzględnie największe naprężenie styczne w bieżącym punkcie ciała odkształconego stanowi połowę różnicy naprężeń głównych: największego i najmniejszego.

B. Część druga.

1. Układ normalnych naprężeń. Powierzchnia (II. A. 5) może być kulista w szczególnym przypadku obojętnych kierunków głównych. Odpowiedni układ naprężeń obejmuje:

$$N_x = N_y = N_z = N \quad T_x = T_y = T_z = 0$$

Zatem, w bieżącym punkcie ciała odkształconego panują tylko naprężenia normalne N — stałe dla wszelkich: l, m, n . Kierunki główne są obojętne — dowolne.

W szczególnym przypadku niezależności N od współrzędnych — we wszystkich punktach ciała odkształconego panuje to samo naprężenie N normalne, stałe dla wszelkich kierunków, a obciążenie pokrywa tylko całą powierzchnię zewnętrzną ciała w stosunku $N \text{ kg/cm}^2$, nie działa więc na punkty wewnętrzne. Wynika to wprost z równań (29), (30), które dają:

$$R = 0 \quad p = N$$

Odwrotnie: we wszystkich punktach ciała odkształconego panują jednakowe naprężenia normalne N , stałe dla wszelkich kierunków, gdy całą powierzchnię tego ciała pokrywa stałe obciążenie $N \text{ kg/cm}^2$ i niema wypadkowych sił zewnętrznych, działających na wewnętrzne punkty ciała.

2. Płaski układ naprężeń. Układ naprężeń zwie się płaskim przy zerowej wielkości jednego z naprężeń głównych, dajmy na to N_3 . W tem założeniu powierzchnia (II. A. 5) wyrazi się równaniem:

$$N_1 X^2 + N_2 Y^2 = \pm a^2$$

lub też:

$$N_x X^2 + N_y Y^2 + 2T_z XY = \pm a^2$$

w układzie osi głównych, lub jakichkolwiek innych, współosiowych. Zatem:

$$N_z = T_x = T_y = 0$$

a pozostałe składowe naprężeń zależą tylko od współrzędnych: x, y . Równania (29) dają:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_z}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial x} + Y = 0$$

z warunkiem, aby Z , składowa sił zewnętrznych, działających na punkt bieżący, była równa zeru.

W szczególnym przypadku składowych sił zewnętrznych:

$$X = Y = 0$$

istnieje tak zwana *funkcja naprężeń* $f(x, y)$, przyczem

$$N_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad N_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad T_z = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

3. Wykres Mohr'a, służy do wyznaczania naprężeń p , przy należnych współczynnikach kierunkowym: l, m, n .

a. Dane są naprężenia główne: N_1, N_2, N_3 ; kąty kierunkowe α, β, γ , przyczem:

$$l = \cos \alpha \quad m = \cos \beta \quad n = \cos \gamma$$

Wobec możliwości każdorazowego przemianowania osi, zawsze możemy założyć, że $N_1 \geq N_2 \geq N_3$.

b. **Budowa.** W układzie osi prostokątnych ON, OT' (Rys. 21) w obranej skali na dodatniej osi ON odcinamy naprężenia główne dodatnie, na ujemnej — ujemne. Zatem: (na rysunku te naprężenia są dodatnie):

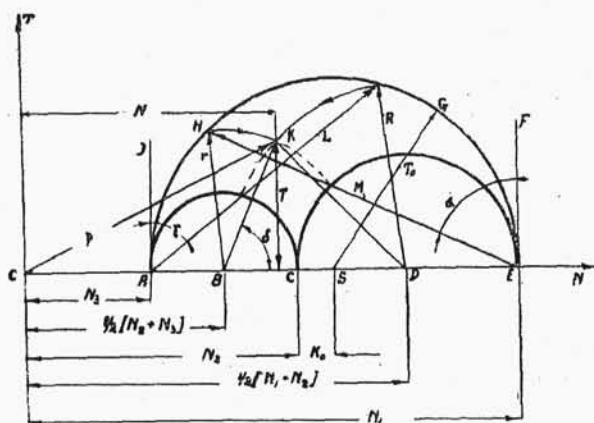
$$\overline{OE} = N_1 \quad \overline{OC} = N_2 \quad \overline{OA} = N_3$$

Z kolei na odcinkach:

$$\overline{AE} = N_1 - N_3 \quad \overline{CE} = N_1 - N_2 \quad \overline{AC} = N_2 - N_3$$

jako na średnicach, zataczamy półkola, przez skrajne punkty A, E prowadzimy AJ, EF prostopadłe do osi ON i odkładamy dane kąty:

$$\sphericalangle FEH = \alpha \quad \sphericalangle JAG = \gamma$$



Rys. 21

Boki ich M, L przedłużamy aż do przecięcia się z największym półkołem w punktach H, G i ze środków B, D średnic AC, CE promieniami:

$$\overline{BH} = r \quad \overline{DG} = R$$

zataczamy łuki aż do przecięcia się w punkcie K .

Promień wodzący tego punktu \overline{OK} da nam w obranej skali naprężenie p ; odcięta punktu K da w tej skali *składową normalną* N naprężenia p , rzędna zaś — *styczną* T .

c. Dowód. Jak widać z rysunku:

$$\overline{BE} = N_1 - \frac{1}{2}(N_2 + N_3) \quad \overline{AD} = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) - N_3$$

Z trójkątów AHE, AGE mamy:

$$M = (N_1 - N_3) \sin \alpha \quad L = (N_1 - N_3) \sin \gamma$$

a przeto z trójkątów BHE, AGD :

$$\begin{aligned} r^2 &= (N_1 - N_3)^2 \sin^2 \alpha + \left[N_1 - \frac{1}{2}(N_2 + N_3) \right]^2 - \\ &\quad - 2(N_1 - N_3) \left[N_1 - \frac{1}{2}(N_2 + N_3) \right] \sin^2 \alpha \\ R^2 &= (N_1 - N_3)^2 \sin^2 \gamma + \left[\frac{1}{2}(N_1 + N_2) - N_3 \right]^2 - \\ &\quad - 2(N_1 - N_3) \left[\frac{1}{2}(N_1 + N_2) - N_3 \right] \sin^2 \gamma \end{aligned}$$

Inaczej jeszcze:

$$r^2 = \frac{1}{4} (N_2 - N_3)^2 + (N_1 - N_3) (N_1 - N_2) l^2$$

$$R^2 = \frac{1}{4} (N_1 - N_2)^2 + (N_1 - N_3) (N_2 - N_3) n^2$$

Dalej z trójkątów OKB , BKD mamy:

$$p^2 = r^2 + \frac{1}{4} (N_2 + N_3)^2 + r (N_2 + N_3) \cos \delta$$

$$R^2 = r^2 + \frac{1}{4} (N_1 - N_3)^2 - r (N_1 - N_3) \cos \delta$$

jako że:

$$\overline{BD} = \frac{1}{2} (N_1 + N_2) - \frac{1}{2} (N_2 + N_3)$$

Stąd, po wyrugowaniu $\cos \delta$, podstawieniu wartości r^2 , R^2 i uwzględnieniu zależności:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

otrzymamy:

$$p^2 = N_1^2 l^2 + N_2^2 m^2 + N_3^2 n^2$$

jak w (II. A. 6). Nadto:

$$N = \frac{1}{2} (N_2 + N_3) + r \cos \delta$$

a przeto w ten sam sposób:

$$N = \frac{1}{4} (N_1 + 2N_2 + N_3) + \frac{r^2 - R^2}{N_1 - N_3} = N_1 l^2 + N_2 m^2 + N_3 n^2$$

zgodnie z (II. A. 7).

4. Równowaga płytki. Dwa sąsiednie przekroje F i F' pręta, po odkształceniu zmienione w (F) i (F') , wyodrębniają płytkę *odkształconą* z pomiędzy dwóch bocznych części pręta: C — od strony (F) C' — od strony (F') . Odkształcona przecina ścianki (F)

i (F') w punktach O i O' — dawnych środkach pierwotnych przekrojów F i F' . Obciążenia zewnętrzne części C i C' po odpowiednim sprowadzeniu do punktów O i O' dadzą wypadkowe: siły R i R' oraz momenty M i M' .

Obciążenie zewnętrzne samej płytki w ogólnym przypadku złożone jest z sił działających na jej powierzchni bocznej i sił, przyłożonych do środków mas jej elementów objętościowych (np. siła ciężkości). To obciążenie, wobec nieznaczących wymiarów płytki, daje znikome wypadkowe: siłę dr i moment dm . Zatem warunki równowagi płytki będą:

$$\overline{R} + \overline{R'} + \overline{dr} = 0 \quad \overline{M} + \overline{M'} + \overline{dm} = 0$$

5. Układ osi. Boczna powierzchnia pręta prostego kończy się obustronnie płaskimi ściankami, grającymi rolę skrajnych przekrojów. Środek jednego z nich stanowić ma początek osi współrzędnych stałych. Dodatnia oś X pokrywa się z osią pręta; osie Y, Z leżą w głównych jego płaszczyznach bezwładności. Dla oka, patrzącego na strzałkę jednej z osi współrzędnych, kierunek biegu wskazówki zegara jest *prawy*: patrząc na strzałkę osi X w prawo należy obrócić dodatnią oś Y , aby pokryła dodatnią oś Z . *Prawy* jest kierunek obrotu pary sił składowej momentu *dodatniej*.

Odcięta x wyodrębnia środek O pola F bieżącego poprzecznego przekroju. Sąsiedni przekrój, przynależny odciętej $x + dx$, łącznie z poprzednim, wyodrębnia płytkę znikomej grubości dx , a przeto jego pole $F' = F + dF$ i obwód — prawie, że się utożsamiają w rzucie z polem F i jego obwodem.

Inaczej mówiąc, każdemu punktowi:

$$x, y, z$$

pola F odpowiada punkt:

$$x + dx, y, z$$

pola F' , można więc całą płytkę podzielić na elementy objętościowe sześciennie o wspólnych, przylegających do siebie bocznych ściankach: $dx \cdot dy$, $dx \cdot dz$ i przeciwległych — czołowych — $dF = dy \cdot dz$, leżących w polach F i F' .

6. Warunki równowagi. W bieżącym punkcie powierzchni (F) odkształconego przekroju F panują składowe naprężenia:

$$N_x, \quad T_y, \quad T_z$$

zastępczego układu oddziaływania płytki na sąsiednią część C pręta.

W myśl uwag ogólnych (II. A. 1), mnożąc te składowe przez odpowiednie elementy powierzchni (F) przekroju odkształconego, otrzymamy układ sił elementarnych, równoważących wypadkowe R i M obciążenia zawnętrznego części C pręta odkształconego.

Utożsamiając (F) i F , co niewątpliwie jest zgoła uprawnione przy odkształceniach znikomych, jedynie dopuszczalnych w praktyce, mamy:

$$\begin{aligned} \int N_x dF &= R_x & \int T_z dF &= R_y & \int T_y dF &= R_z \\ \int (y T_y - z T_z) dF &= M_x & \int z N_x dF &= M_y & . . . & (38) \\ & & \int y N_x dF &= -M_z \end{aligned}$$

gdzie całkowaniem należy objąć pole F .

7. Rodzaje obciążeń. Obciążenia przekroju mogą być złożone, lub proste. Proste, czyli podstawowe obciążenie jest:

a. Osiowe, gdy sprowadza się do *siły osiowej* O_x , leżącej na stycznnej odkształconej pręta, a więc, gdy:

$$R_x = O_x, \quad R_y = R_z = M_x = M_y = M_z = 0$$

Siły osiowe, zwrócone *ku* ściankom płytki, zwą się *ściskającymi*, siły osiowe, zwrócone *nazewnątrz* — *rozciągającymi*. Pierwsze należy znakować ujemnie, drugie — dodatnio.

b. Ścinające, gdy sprowadza się do *siły ścinającej*:

$$\bar{Q} = \bar{Q}_y + \bar{Q}_z$$

prostopadłej do odkształconej pręta, a więc gdy:

$$R_y = Q_y \quad R_z = Q_z \quad R_x = M_x = M_y = M_z = 0$$

c. Skręcające, gdy sprowadza się do *momentu skręcającego* M_0 , stycznego do odkształconej pręta, a więc gdy:

$$M_x = M_0 \quad R_x = R_y = R_z = M_y = M_z = 0$$

d. Zginające, gdy sprowadza się do *siły osiowej* O_x , stycznej do odkształconej pręta i do prostopadłego *momentu zginającego*:

$$\overline{M}_y = \overline{M}_y + \overline{M}_z$$

a zatem:

$$R_x = O_x \quad R_y = R_z = M_z = 0,$$

Wszelki inny układ składowych R i M zwie się *obciążeniem złożonym*.

8. Warunki brzegowe. Zewnętrzne ścianki skrajnych elementów objętościowych *brzegowych* płytki tworzą jej powierzchnię boczną. Kąt nachylenia ich normalnych zewnętrznych ku osi X jest prosty, lub prawie prosty dla pręta o przekroju stałym, lub nader powoli zmiennym. Przy odkształceniach nieznacznych, jedynie dopuszczalnych w praktyce, kąt ten ulega zmianie znikomej i nadal więc nie wiele się różni od 90° . Zatem normalne zewnętrzne powierzchni bocznej płytki mają spójzniki kierunkowe:

$$l = 0 \quad m = \cos \beta \quad n = \sqrt{1 - m^2} = \sin \beta$$

W ogólnym przypadku na tę powierzchnię działa obciążenie zewnętrzne w stosunku $p \text{ kg/cm}^2$. Jego składowe będą, zgodnie z (30):

$$p_x = T_{x0} m + T_{y0} n$$

$$p_y = N_{y0} m + T_{x0} n$$

$$p_z = T_{x0} m + N_{z0} n$$

Dolny zerowy wskaźnik w tych wzorach oznacza przynależność składowych naprężeń — wewnętrznym ściankom *brzegowych* elementów sześciennych płytki.

9. Założenie Barré de Saint-Venant'a. Według tego założenia, we wszystkich punktach pręta prostego, bezwładnościowo jednorodnego, o stałym przekroju lub nader powoli zmiennym — składowe naprężeń:

$$T_z = N_y = N_z = 0$$

gdy na powierzchni bocznej tego pręta niema obciążenia zewnętrznego. Zatem, wobec:

$$p_x = p_y = p_z = 0$$

tylko jeden warunek brzegowy:

$$T_{z_0} m + T_{y_0} n = 0$$

wymaga spełnienia.

Przy odkształceniach nieznacznych, jedynie dopuszczalnych w praktyce, obwód pola F ulega tylko znikomym zmianom, a przeto z jego równania:

$$K(y_0, z_0) = 0$$

otrzymamy według znanego wzoru dla współczynników kierunkowych normalnej zewnętrznej:

$$m q_0 = n p_0$$

gdzie:

$$p_0 = \frac{\partial K}{\partial y_0} \quad q_0 = \frac{\partial K}{\partial z_0}$$

Stąd ostatecznie:

$$T_{y_0} q_0 + T_{z_0} p_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

dla bieżącego punktu z_0, y_0 na obwodzie pola F płytki.

Nadto przy odkształceniach nieznacznych, warunki równowagi (29) dadzą:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_z}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + Y &= 0 \quad \frac{\partial T_y}{\partial x} + Z = 0 \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

10. Naprężenia osiowe. Założmy dodatkowo, że we wszystkich punktach pręta prostego, bezwładnościowo jednorodnego, o przekroju stałym lub nader powoli zmiennym, składowe naprężeń:

$$T_y = T_z = 0$$

Ostatni (39) warunek brzegowy jest niewątpliwie spełniony. Równania (38) dają:

$$R_y = R_z = M_x = 0$$

$$\int N_x dF = O_x \quad \int z N_x dF = M_y \quad \int y N_x dF = -M_z$$

a przeto założenie powyższe może być słuszne tylko przy obciążeniu płytki *osiowem*, lub *zginającym*.

Trzy ostatnie równania spełnimy, biorąc najprostszą, linjową zależność

$$N_x = \frac{O_x}{F} - \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

jako że dla osi głównych Y, Z pola F przekroju pręta momenty statyczne i odśrodkowy (I. B. 7) są równe zeru. Podstawienie w (40) daje bezpośrednio:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{O_x}{F} \right) + X = 0 \quad \frac{dM_y}{dx} = \frac{dM_z}{dx} = 0 \quad Y = Z = 0 \quad (42)$$

warunki konieczne słuszności poczynionych założeń.

C. Część trzecia.

1. Odształcenie podłużne. Wydłużenia główne:

$$e_1 = e_x \quad e_2 = e_3 = -\frac{e_x}{a} \quad a > 0$$

wyodrębniają *odkształcenie podłużne* w bieżącym punkcie. Przy tem odkształceniu wydłużenie *podłużne*, w kierunku osi głównej X kojarzy się z a -krotnie mniejszem wydłużeniem *poprzednem*, odwrotnego znaku, jednakowem we wszystkich kierunkach, prostopadłych do osi X . Łatwo to udowodnić, biorąc pod uwagę, że wzór (5) daje tu:

$$e = e_x \left(l^2 - \frac{1-l^2}{a} \right)$$