

KOMISJA WYDAWNICZA
TOW. BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

LEON KARASIŃSKI
PROF. ZW. POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ



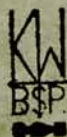
WYTRZYMAŁOŚĆ TWORZYW

WYDANIE TRZECIE W NOWEM OPRACOWANIU

TOM PIERWSZY
(STANOWI ZAMKNIĘTĄ CAŁOŚĆ)

TWORZYWO—TO, Z CZEGO SIĘ COŚ TWORZY;
W OGÓLNOŚCI MATERJAŁ.

SŁOWNIK JĘZYKA POLSKIEGO, WYDA-
NIE M. ORGELBRANDA, WILNO, 1861. Str. 1737.



WARSZAWA — 1930

C

Nr 1041

Politechnika Warszawska

KOMISJA WYDAWNICZA

Tow. Bratniej Pomocy Studentów
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

WARSZAWA, POLNA 3. TELEFON 182-10.

GMACH POLITECHNIKI

Godziny urzędowe między 13 — 14½

P O L E C A:

z wydawnictw własnych następujące dzieła naukowe:

DRUKIEM:

ZŁ. GR.

<i>Gieysztor I.</i> Eksploatacja handlowa kolei żelaznych 1925 str. 114 . . .	12.—
<i>Podoski R. Inż.</i> Tramwaje i Koleje elektryczne Tom I. 1922, w opar-	
wie str. 456	12.—
Tom II, 1922, w oparwie str. 400	12.—
<i>Wasiutyński A. Prof.</i> Drogi żelazne 1925 str. 680 broszur.	36.—
w ozdobnej oparwie płóciennnej	40.—
<i>Wierzbicki W. Dr.</i> Mechanika budowli 1929 str. 603	40.—
<i>Pożaryski M. Prof.</i> Naukowe podstawy elektrotechniki 1927 str. 369 . . .	14.—
— Pomiary elektryczne w technice 1928 str. 158	6.80
<i>Skotnicki Cz. Prof.</i> Technika odwadniania bagien i ich użytkowanie	
rolnicze 1929 str. 192 broszur.	12.80
w oparwie	15.80
<i>Stefanowski B. Prof.</i> Termodynamika techniczna 1925 str. 396 . . .	12.—
— Gospodarka cieplna i jej kontrola w zakładach przemysłowych	
1925 str. 287	12.—
<i>Piotrowski J. Inż.</i> Wydajność obrabiarek i narzędzi do metali i wyzna-	
czanie czasu obróbki 1923 str. 110	4.—
<i>Czopowski H. Prof.</i> Mechanika teoretyczna 1921 wyd. II. Tom I.	
Statyka str. 252	6.—
Tom II. Kinematyka str. 128	3.—
Tom III. Dynamika punktu materialnego str. 172	6.—
Tom IV. Dynamika układów str. 252	6.—
<i>Drewnowski K. Prof.</i> Materiały i układy izolacyjne wysokiego napię-	
cia 1927 str. 160	8.—
<i>Struszyński M. Inż.</i> Analiza techniczna. str. 543 broszurowana . . .	28.—
w ozdobnej opr. płóc.	32.40
<i>L. H. Nishian i D. B. Steinman.</i> Wykreślna metoda obliczania belek	
ciągłych, str. VIII+40	3.90

ORAZ LITOGRAFIOWANE:

z Matematyki wyższej, Geometrii analitycznej, wykreślnej, Fizyki, Chemii, Metalurgii, Odlewnictwa, Mechaniki, Statyki wykreślnej, Statyki budowli, Hydrauliki, Maszynoznawstwa, Części maszyn, Silników wodnych i pomp, Silników spalinowych, Dźwigni, Kotłów parowych, Elektrotechniki, Żelbetnictwa, Budowy dróg i mostów, Budownictwa wodnego, Budownictwa przemysłowego, Technologii farbiarstwa, Technologii węglowodanów, Miernictwa, Meljoracji i t. p.

Na żądanie wysyłamy bezpłatnie obszerne opisowe katalogi.



WYTRZYMAŁOŚĆ TWORZYW

539.3/6

KOMISJA WYDAWNICZA
TOW. BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

LEON KARASIŃSKI
PROF. ZW. POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

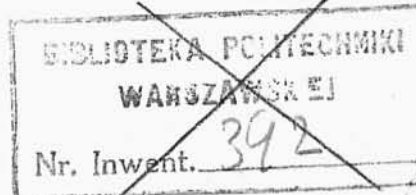
WYTRZYMAŁOŚĆ TWORZYW

WYDANIE TRZECIE W NOWEM OPRACOWANIU

TOM PIERWSZY

TWORZYWO—TO, Z CZEGO SIĘ COŚ TWORZY;
W OGÓLNOŚCI MATERJAŁ.

SŁOWNIK JĘZYKA POLSKIEGO, WYDA-
NIE M. ORGELBRANDA, WILNO, 1891. Str. 1737.



WARSZAWA — 1930

539.3234



~~1044~~

2.47



MP.29

BG02P/273-12

I. ROZDZIAŁ PIERWSZY.

ODKSZTAŁCENIA.

A. Część pierwsza.

1. Odkształcenia ciał stałych. *Wszelka zmiana względnego położenia części ciała stałego zwie się odkształceniem.*

Bieżący punkt p ciała stałego ma współrzędne x, y, z w układzie osi prostokątnych z tym ciałem związanych. Sąsiedni punkt q o współrzędnych: $x + dx, y + dy, z + dz$ wyodrębnia długostkę:

$$ds = \overline{pq}$$

pochyłoną ku osiom współrzędnych pod kątami α, β, γ , przyczem:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$l = \cos \alpha = \frac{dx}{ds} \quad m = \cos \beta = \frac{dy}{ds} \quad n = \cos \gamma = \frac{dz}{ds}$$

Po odkształceniu punkt p zajmie miejsce p' o współrzędnych: $x + u, y + v, z + w$, punkt q — miejsce q' o współrzędnych: $x + dx + u + du, y + dy + v + dv, z + dz + w + dw$, a przeto pierwotnej długości ds po odkształceniu odpowiadać będzie długośćka:

$$ds' = \overline{p'q'}$$

nachyloną ku osiom współrzędnych pod kątami α', β', γ' , przyczem:

$$ds'^2 = (dx + du)^2 + (dy + dv)^2 + (dz + dw)^2$$

$$l' = \cos \alpha' = \frac{dx + du}{ds'} \quad m' = \cos \beta' = \frac{dy + dv}{ds'}$$

$$n' = \cos \gamma = \frac{dz + dw}{ds'}$$

Składowe u, v, w posunięcia $\overline{pp'}$ noszą miano *posunięć osiowych*. Przy odkształceniu trwałem, niezmiennem w czasie, posunięcia osiowe mogą zależeć tylko od współrzędnych punktu bieżącego: x, y, z , zatem w pierwszym przybliżeniu:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

2. Wydłużenia, przesunięcia i skręcenia osiowe.

Przyrost:

$$\delta ds = ds' - ds$$

zwie się wydłużeniem bezwzględnem długości ds . Stosunek:

$$e = \frac{\delta ds}{ds}$$

nosi miano wydłużenia jednostkowego, krócej — *wydłużenia* długości ds . Stąd bezpośrednio:

$$ds' = (1 + e) ds$$

Przy odkształceniach *nieznacznych* drugie potęgi e, du, dv, dw — mogą być pominięte, a przeto ze wzorów powyższych otrzymamy:

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} l^2 + \frac{\partial v}{\partial y} m^2 + \frac{\partial w}{\partial z} n^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) mn + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) ln +$$

$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) lm \quad \dots \dots \dots (1)$$

Wobec zupełnej dowolności wyboru punktu q , długostkę ds można kolejno utożsamić z dx, dy, dz . Po uwzględnieniu odpowiednich wartości l, m, n , wzór (1) da *wydłużenia osiowe*:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

długostek osiowych dx , dy , dz w bieżącym punkcie p .

Pozostałe współczynniki wzoru (1) noszą miano *przesunięć osiowych*:

$$g_x = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad g_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad g_z = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Łatwo jest uwidocznic ich znaczenie, zważywszy, że przy odkształceniu koniec długostki dy posunie się w kierunku Z o:

$$\frac{\partial w}{\partial y} dy$$

a koniec długostki dz — w kierunku osi Y o:

$$\frac{\partial v}{\partial z} dz$$

Tym posunięciom przynależą odpowiednie odchylenia długostek: dy , dz o kąty:

$$\Theta' = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \Theta'' = \frac{\partial v}{\partial z}$$

obrotu w płaszczyźnie, prostopadłej do osi X . Zatem pierwotnie prostopadłe długostki osiowe dy , dz po odkształceniu pochyłają się ku sobie o kąt:

$$\Theta' + \Theta'' = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = g_x$$

Ten przyrost kątowy stanowi miarę względnego *przesunięcia* w płaszczyźnie, prostopadłej do osi X — dwóch przeciwległych ścianek równoległych do tej osi, a więc: dwóch ścianek $dx \cdot dy$ lub $dx \cdot dz$ sześciianu $dx \cdot dy \cdot dz$, zbudowanego w bieżącym punkcie p . Stąd nazwa *przesunięć*.

Dla oka, patrzącego z obszaru współrzędnych x dodatnich, wskazówka zegara spotyka pierwiej oś Y , a następnie oś Z , w tym więc *dodatnim* kierunku mierzony kąt względnego obrotu długostek dy , dz wyrazi się wzorem: $\Theta' - \Theta''$. Zatem różnice:

$$\begin{aligned} o_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & o_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ o_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

noszą miano *skręceń osiowych* w bieżącym punkcie p .

3. Kierunki główne. Wydłużenia i przesunięcia osiowe:

$$e_x, e_y, e_z, g_x, g_y, g_z$$

stanowią tak zwane *składowe* odkształcenia w bieżącym punkcie p ciała stałego, od nich bowiem zależy wydłużenie:

$$e = e_x l^2 + e_y m^2 + e_z n^2 + g_x mn + g_y ln + g_z lm \quad (5)$$

pierwotnej długości ds o współczynnikach kierunkowych l, m, n , dowolnych, choć związanych zależnością:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (6)$$

Wyprowadźmy z punktu p wektor r , pochylony ku osiom współrzędnych pod kątami α, β, γ , a nadto czyniący zadość równaniu:

$$er^2 = \pm a^2$$

Pęk takich wektorów da pełny obraz odkształcenia w sąsiedztwie punktu p . Współrzędne:

$$X = rl \quad Y = rm \quad Z = rn$$

końców wektorów r czynią zadość równaniu:

$$e_x X^2 + e_y Y^2 + e_z Z^2 + g_x YZ + g_y XZ + g_z XY = \pm a^2$$

powierzchni stopnia drugiego, środkowej, o głównych osiach, wyznaczających trzy tak zwane *kierunki główne*. W układzie osi głównych równanie tej powierzchni będzie miało postać najprostszą:

$$e_1 X^2 + e_2 Y^2 + e_3 Z^2 = \pm a^2$$

a przeto dla kierunków głównych: $g' = g'' = g''' = 0$. Stąd wniosek:

W każdym punkcie ciała stałego istnieją trzy kierunki główne niezmiennie prostopadłe i po odkształceniu. Przynależne im wydłużenia główne

$$e_1, e_2, e_3$$

stanowią niewątpliwie *extrema* wydłużeń e , zależnych od zmiennej l, m, n , związanych warunkiem (6), a przeto zwykłymi sposobami szukania największości i najmniejszości względnych z łatwością mogą być wyznaczone, jako pierwiastki równania:

$$e^3 - (e_x + e_y + e_z) e^2 + [e_x e_y + e_x e_z + e_y e_z - \frac{1}{4} (g_x^2 + g_y^2 + g_z^2)] e + \frac{1}{4} (e_x g_x^2 + e_y g_y^2 + e_z g_z^2 - g_x g_y g_z) - e_x e_y e_z = 0 \quad (7)$$

Spółczynniki tego równania są niezmiennikami: nie zależą od wyboru osi współrzędnych. Pierwszy, równy sumie pierwiastków, wziętej ze znakiem odwrotnym, daje zależność:

$$e_x + e_y + e_z = e_1 + e_2 + e_3 = e_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Niezmiennik e_0 zwie się *rozszerzalnością*, wyraża bowiem przyrost jednostkowy pierwotnej objętości dV sześciianu $dx \cdot dy \cdot dz$, zbudowanego w bieżącym punkcie ciała stałego. Po odkształceniu, objętość sześciianu będzie w przybliżeniu.

$$dV' = (1 + e_x) (1 + e_y) (1 + e_z) dx dy dz \simeq (1 + e_0) dV$$

skąd bezpośrednio:

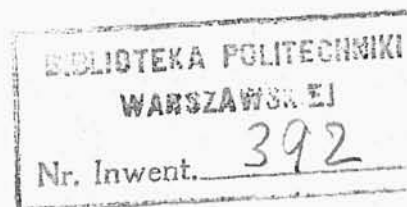
$$e_0 = \frac{dV' - dV}{dV}$$

Spółczynniki kierunkowe główne: l_0, m_0, n_0 czynią zadość równaniom:

$$\frac{2e_x l_0 + g_z m_0 + g_y n_0}{l_0} = \frac{g_z l_0 + 2e_y m_0 + g_x n_0}{m_0} = \frac{g_y l_0 + g_x m_0 + 2e_z n_0}{n_0} \quad (9)$$

4. Równania warunkowe. Różniczkowanie (2) i (3) daje *równania warunkowe*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 g_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10) \\ \frac{\partial^2 g_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \right] \\
2 \frac{\partial^2 e_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial g_x}{\partial x} - \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \right] \quad \dots \quad (11) \\
2 \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} - \frac{\partial g_z}{\partial z} \right]
\end{aligned}$$

Tym równaniom czynić winny zadość wydłużenia i przesunięcia osiowe w każdym punkcie ciała stałego.

W szczególnym wypadku zerowych wartości skręceń osiowych:

$$o_x = o_y = o_z = 0$$

istnieje tak zwana *funkcja odkształceń* f , która daje:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\partial f}{\partial x} & v &= \frac{\partial f}{\partial y} & w &= \frac{\partial f}{\partial z} \quad \dots \quad (12) \\
e_x &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & e_y &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & e_z &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \\
g_x &= 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & g_y &= 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & g_z &= 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

5, Wzory ścisłe. Gdy odkształcenia nie są znikome, we wzorze dla ds' trzeba zachować drugie potęgi e , du , dv , dw , a przeto:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{ds'}{ds} \right)^2 &= (1 + e)^2 = (1 + 2e_x)l^2 + (1 + 2e_y)m^2 + (1 + 2e_z)n^2 + \\
&+ 2g_x mn + 2g_y ln + 2g_z lm \quad \dots \quad (13)
\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\
e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad \dots \quad (14) \\
e_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_x &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \\
g_y &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \quad \dots \quad (15) \\
g_z &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned}$$

Stąd bezpośrednio wydłużenia:

$$\sqrt{1-2e_x}-1 \quad \sqrt{1-2e_y}-1 \quad \sqrt{1-2e_z}-1$$

przynależne długościom osiowym dx , dy , dz w bieżącym punkcie p . Wyprowadźmy z tego punktu drugą długośćkę:

$$ds_1 = \overline{pq_1}$$

pochyloną ku ds pod kątem Θ . Jej składowe będą: dx_1 , dy_1 , dz_1 , jej współczynniki kierunkowe: l_1 , m_1 , n_1 . Po odkształceniu punkt q_1 zajmie miejsce q'_1 , zatem długośćka:

$$ds'_1 = \overline{p'q'_1}$$

utworzy z ds' kąt Θ' . Jej składowe będą: $dx_1 + du_1$, $dy_1 + dv_1$, $dz_1 + dw_1$, przyczem w myśl wzorów punktu pierwszego:

$$du_1 = \frac{\partial u}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial y} dy_1 + \frac{\partial u}{\partial z} dz_1$$

$$dv_1 = \frac{\partial v}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial v}{\partial y} dy_1 + \frac{\partial v}{\partial z} dz_1$$

$$dw_1 = \frac{\partial w}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial w}{\partial y} dy_1 + \frac{\partial w}{\partial z} dz_1$$

zatem na mocy znanego wzoru:

$$ds' ds'_1 \cos \Theta' = (dx + du)(dx_1 + du_1) + (dy + dv)(dy_1 + dv_1) + (dz + dw)(dz_1 + dw_1)$$

skąd ostatecznie:

$$\left(\frac{ds'}{ds}\right) \left(\frac{ds'_1}{ds_1}\right) \cos \Theta' = \cos \Theta + 2(e_x l l_1 + e_y m m_1 + e_z n n_1) + \\ + g_x(m n_1 + m_1 n) + g_y(n l_1 + n_1 l) + g_z(l m_1 + l_1 m) \quad . \quad (16)$$

Ten wzór daje odpowiednio:

$$\frac{g_x}{\sqrt{(1+2e_y)(1+2e_z)}} \quad \frac{g_y}{\sqrt{(1+2e_x)(1+2e_z)}} \quad \frac{g_z}{\sqrt{(1+2e_x)(1+2e_y)}}$$

dla *cosinus'ów* kątów nachylenia: dy ku dz , dz ku dx i dx ku dy po odkształceniu.

Wreszcie na mocy znanego wzoru:

$$\frac{dV'}{dV} = 1 + e_0 = J \frac{x+u, y+v, z+w}{x, y, z}$$

gdzie J użyto za znak wyznacznika „Jakobianu“. Stąd bezpośrednio:

$$(1+e_0)^2 = (1+2e_x)(1+2e_y)(1+2e_z) + 2g_x g_y g_z - \\ - (1+2e_x)g_x^2 - (1+2e_y)g_y^2 - (1+2e_z)g_z^2 \quad . \quad (17)$$

B. Część druga.

1. Układy odkształceń. Składowe odkształceń mogą być zadane w postaci sześciu ciągłych funkcji współrzędnych bieżącego punktu ciała nieodkształconego, z warunkiem jednak tożsamościowego spełnienia równań (10), (11). W ten sposób otrzymany układ równań, linowych względem pierwszych cząstkowych pochodnych zmiennych u, v, w , ma rozwiązanie ogólne kształtu:

$$u' + u'' \quad v' + v'' \quad w' + w''$$

złożone z jakiegokolwiek rozwiązania szczególnego u', v', w' — i — uzupełniającego: u'', v'', w'' , czyniącego zadość równaniom:

$$e_x = e_y = e_z = g_x = g_y = g_z = 0$$

Ten ostatni układ, po przeróżniczkowaniu względem x, y, z da 18 równań linowych, jednorodnych względem tyłuż drugich pochodnych cząstkowych u, v, w . Zatem, wobec niewątpliwie zerowych wartości wszystkich tych pochodnych:

$$u'' = u_0 - ry + qz \quad v'' = v_0 - pz + rx \quad w'' = w_0 - qx + py$$

Są to równania Euler'a, wyznaczające znikome posunięcia osiowe bieżącego punktu ciała sztywnego. Ich stałe: u_0, v_0, w_0 wyrażają znikome ruchy postępowe w kierunku osi X, Y, Z ; — stałe zaś p, q, r , — znikome ruchy obrotowe około tych osi.

Zatem — wyłącznie tylko posunięcia u' , v' , w' cechują właściwy układ odkształceń, przynależny danym ich składowym.

2. Równomierna rozszerzalność. Powierzchnia (I. A. 3.) może być kulą w szczególnym przypadku obojętnych kierunków głównych. Odpowiedni układ odkształceń:

$$e_x = e_y = e_z = \frac{1}{3} e_0 \quad g_x = g_y = g_z = 0$$

przynależy tak zwanej *równomiernej rozszerzalności*, którą oczywiście upodobnić można rozszerzalności cieplikowej.

Wszystkie długostki ds , wyprowadzone z bieżącego punktu, wydłużają się, lub skracają w jednakowym stosunku, a kąty ich wzajemnego nachylenia pozostają niezmiennie te same przy odkształceniu. Kierunki główne są obojętne — dowolne.

3. Odkształcenia płaskie. Układ odkształceń zwie się płaskim przy zerowej wielkości jednego z wydłużeń głównych. Zatem, gdy $e_3 = 0$, powierzchnia (I. A. 3.) wyrazi się równaniem

$$e_1 X^2 + e_2 Y^2 = \pm a^2$$

lub też

$$e_x \lambda^2 + e_y Y^2 + g_z XY = \pm a^2$$

w układzie osi głównych, lub jakichkolwiek innych współsiłkowych.

Odpowiedni układ odkształceń:

$$e_z = g_x = g_y = 0$$

przynależy *odkształceniu płaskiemu*.

Posunięcie osiowe w jest w danym przypadku stałe i niezależne od współrzędnych punktu bieżącego ciała nieodkształconego. Posunięcia osiowe u , v , zależą tylko od współrzędnych x , y .

4. Odkształcenia prętów. Geometrycznie pręt stanowi bryłę o powierzchni bocznej, zakreślonej w przestrzeni, jako ślad ruchu zamkniętej krzywej płaskiej. Podczas ruchu środka pola tej krzywej nie schodzi z łuku krzywej ciągłej, nie mającej punktów osobliwych, a płaszczyzna pola — pozostaje stale prostopadła do tego łuku.

Pole owej zamkniętej krzywej zwie się *przekrojem poprzecznym* pręta, sama krzywa — *obwodem* przekroju. Łuk krzywej, na której leżą środki przekrojów poprzecznych, nosi miano *osi* pręta. Pręt prosty ma prostą oś, — krzywy płaski — oś krzywą.

płaską, — wichrowy — krzywą przestrzenną. Środek krzywizny osi nie może leżeć wewnątrz pręta.

Składowe odkształceń pręta, zależą od wyboru osi stałych, z nim związanych. Dalsze badania dadzą wytyczne właściwego wyboru tych osi.

5. Momenty przekrojów płaskich. W układzie dowolnych osi prostokątnych ξ, η , wyprowadzonych z bieguna ω , jako początku współrzędnych, obwód pola F przekroju wyrazi się równaniem:

$$\Omega(\xi, \eta) = 0$$

Polu F przynależą:

$$S_{\xi} = \int \eta dF, S_{\eta} = \int \xi dF — \text{momenty statyczne względem osi } \xi \text{ i osi } \eta$$

$$J_{\xi} = \int \eta^2 dF, J_{\eta} = \int \xi^2 dF — \text{momenty bezwładności względem osi } \xi \\ \text{i osi } \eta$$

$$J_{\xi\eta} = \int \xi\eta dF — \text{moment odśrodkowy względem prostokątnych} \\ \text{osi } \xi, \eta$$

$$J_{\omega} = \int \rho^2 dF = \int (\xi^2 + \eta^2) dF — \text{moment biegunowy względem bie-} \\ \text{guna } \omega.$$

W tych wzorach przez ξ, η oznaczono współrzędne prostokątne, przez ρ — promień wodzący bieżącego punktu pola przekroju. Całkowaniem należy objąć pole F , zatem granice dla η — wyznaczyć w zależności od ξ w postaci pierwiastków równania obwodu, a dla ξ — w postaci pierwiastków równania, jakie otrzymamy rugując η z układu:

$$\Omega = 0 \quad \frac{d\Omega}{d\eta} = 0$$

Wszelki moment przekroju, złożonego z części, równy jest sumie jednoimiennych momentów owych części, względem tych samych osi. Moment statyczny przekroju względem osi, dzielącej ten przekrój na dwie symetryczne części, jest równy zeru. Zerową wartość ma moment odśrodkowy przekroju względem owej osi symetrii i jakiegokolwiek innej osi prostopadłej. Moment

bezwładności przekroju względem osi, dzielącej ten przekrój na dwie symetryczne części, równy jest podwojonemu momentowi bezwładności jednej z nich — względem owej osi symetrii. Wszystkie te wnioski wypływają wprost z pojęcia całki jako granicy sumy.

6. Momenty względem osi środkowych. W układzie osi prostokątnych X_0, Y_0 , środkowych, wyprowadzonych ze środka przekroju, równoległe do ξ, η , momenty, wyżej podane, będą odpowiednio:

$$S_{x_0}, S_{y_0}, J_{x_0}, J_{y_0}, J_{x_0 y_0}, J_0$$

Spółrzędne ξ_0, η_0 środka przekroju, przynależne osiom starym ξ, η , czynią zadość równaniom:

$$F\xi_0 = S_\eta \quad F\eta_0 = S_\xi$$

Oznaczmy przez ρ_0 — promień wodzący środka przekroju. Po podstawieniu wartości:

$$\xi = \xi_0 + x_0 \quad \eta = \eta_0 + y_0 \quad \rho_0^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} S_{x_0} &= 0 & S_{y_0} &= 0 \\ J_\xi &= J_{x_0} + F\eta_0^2 & J_\eta &= J_{y_0} + F\xi_0^2 \\ & & & \dots \dots (18) \\ J_{\xi\eta} &= J_{x_0 y_0} + F\xi_0 \eta_0 & J_\omega &= J_0 + F\rho_0^2 \end{aligned}$$

Moment statyczny przekroju względem osi środkowej jest równy zeru. Moment bezwładności przekroju względem osi mimośrodkowej równy jest takiemuż momentowi względem osi środkowej, równoległej, więcej iloczyn pola tego przekroju przez kwadrat odległości owej osi mimośrodkowej od środka przekroju. Moment ośrodkowy przekroju względem mimośrodkowych osi prostokątnych równy jest takiemu momentowi względem osi środkowych, równoległych, więcej pole tego przekroju, mnożone przez iloczyn odległości owych osi mimośrodkowych od środka przekroju. Moment biegunowy przekroju względem mimośrodkowego bieguna równy jest takiemuż momentowi względem środka przekroju, więcej — iloczyn pola tego przekroju przez kwadrat odległości owego mimośrodkowego bieguna od środka przekroju.

7. Osie główne bezwładności. Osie X, Y nowego układu prostokątnego wyprowadzamy ze środka przekroju pod jedna-

kwymi kątami φ nachylenia ku odpowiednim osiom X_0, Y_0 starego układu, również prostokątnego, środkowego. Ten obrót osi o kąt φ da nowe współrzędne punktu bieżącego:

$$x = x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi \quad y = -x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi$$

i nowe momenty, przynależne osiom X, Y :

$$J_x = \int y^2 dF = J_{x_0} \cos^2 \varphi + J_{y_0} \sin^2 \varphi - J_{xy_0} \sin 2\varphi$$

$$J_y = \int x^2 dF = J_{x_0} \sin^2 \varphi + J_{y_0} \cos^2 \varphi + J_{xy_0} \sin 2\varphi \quad . \quad . \quad (19)$$

$$J_{xy} = \int xy dF = \frac{1}{2} (J_{x_0} - J_{y_0}) \sin 2\varphi + J_{xy_0} \cos 2\varphi$$

Szczególne wartości kąta φ czyniące zadość równaniu:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 J_{xy_0}}{J_{y_0} - J_{x_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

daje na mocy ostatniego wzoru:

$$J_{xy} = 0$$

a nadto spełnia warunki ekstremum:

$$\frac{dJ_x}{d\varphi} = -\frac{dJ_y}{d\varphi} = (J_{y_0} - J_{x_0}) \sin 2\varphi - 2 J_{xy_0} \cos 2\varphi = 0$$

Ta wartość φ wyznacza kierunki tak zwanych *środkowych głównych osi bezwładności* przekroju. Przynależny tym osiom głównym moment odśrodkowy przekroju jest równy zeru.

Momenty bezwładności przekroju względem jego osi głównych, zwane *momentami głównymi*, stanowią największość i najmniejszość momentów bezwładności tego przekroju względem wszelkich osi środkowych.

8. Wzory przejścia. Prostokątne osie X_0, Y_0 wyprowadzamy ze środka przekroju pod tym samym kątem nachylenia φ ku

odpowiednim osiom głównym X, Y tego przekroju. Wzory (19) dadzą:

$$\begin{aligned} J_{xo} &= J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \cos 2\varphi \\ J_{yo} &= J_x \sin^2 \varphi + J_y \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (J_x + J_y) - \frac{1}{2} (J_x - J_y) \cos 2\varphi \quad (21) \\ J_{xyo} &= \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2\varphi \end{aligned}$$

Dodając dwa pierwsze wzory otrzymamy:

$$J_{xo} + J_{yo} = J_x + J_y = \int (x^2 + y^2) dF = J_0 \quad . \quad . \quad (22)$$

Suma momentów bezwładności przekroju względem dwóch dowolnych osi prostokątnych, środkowych, jest stała i równa momentowi biegunowemu tego przekroju względem środka przekroju, jako bieguna.

Z kolei odejmując dwa pierwsze wzory otrzymamy:

$$J_{xo} - J_{yo} = (J_x - J_y) \cos 2\varphi$$

stąd, po uwzględnieniu ostatniego wzoru:

$$J_{xo} - J_{yo} = (J_x - J_y) \sqrt{1 - \frac{4 J_{xyo}^2}{(J_x - J_y)^2}}$$

i ostatecznie:

$$\frac{1}{2} (J_x - J_y) = \pm \sqrt{\frac{1}{4} (J_{xo} - J_{yo})^2 + J_{xyo}^2}$$

Zatem, na mocy (22):

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2} (J_{xo} + J_{yo}) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (J_{xo} - J_{yo})^2 + J_{xyo}^2} \\ J_y &= \frac{1}{2} (J_{xo} + J_{yo}) \mp \sqrt{\frac{1}{4} (J_{xo} - J_{yo})^2 + J_{xyo}^2} \end{aligned} \quad . \quad . \quad (23)$$

W tych wzorach należy brać górne znaki, gdy $J_x > J_y$, dolne, gdy $J_x < J_y$.

Wytrzymałość tworzyw.



nr 29

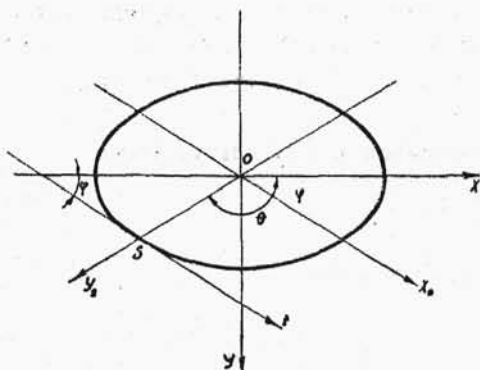
9. Środkowa elipsa bezwładności. Moment bezwładności przekroju może być wyrażony jako iloczyn pola tego przekroju przez kwadrat ramienia bezwładności i . Zatem

[illegible]

W układzie środkowych głównych osi bezwładności przekroju równanie:

$$\frac{x^2}{l_n^2} + \frac{y^2}{l_x^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

wyznacza *środkową elipsę bezwładności* przekroju, zbudowaną na ramionach jego głównych momentów bezwładności, jako na półosiach. Napiszmy jej równanie w postaci:



Rys. 1.

$$\frac{x^2}{J_y} + \frac{y^2}{J_x} = \frac{1}{F} \quad (26)$$

i poprowadźmy styczną t , równoległą do danej (Rys. 1) osi środkowej X_0 , nachylonej pod kątem φ ku głównej osi X przekroju. Oś Y_s , poprowadzona przez punkt styczności s , zwie się *osią sprzężoną* z X_0 . Oznaczmy przez x, y współrzędne prostokątne punktu sty-

czności s , przez ρ , θ jego współrzędne biegunowe. Kierunki φ , θ osi współrzędnych X_0 , Y_0 noszą miano *kierunków sprzężonych średnic* środkowej elipsy bezwładności przekroju. Według znanych wzorów:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = -\frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{x}{y} = -\frac{J_x}{J_y} \operatorname{ctg} \theta$$

i ostatecznie:

$$J_x + J_y \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \Theta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Tą zależnością związane są kąty kierunkowe sprzężonych średnic środkowej elipsy bezwładności przekroju.

W szczególnym wypadku, gdy:

$$J_x = J_y = J$$

elipsa — staje się *środkowem kołem bezwładności* przekroju, a sam przekrój zwię się bezwładnościowo obojętnym, ponieważ jego momenty bezwładności mają stałą wartość J dla wszelkich osi środkowych, a moment odśrodkowy jest równy zeru dla jakichkolwiek osi prostokątnych, środkowych. Wypływa to wprost ze wzorów (23).

10. Rodzaje prętów. W układzie środkowych głównych osi bezwładności Y, Z przekroju poprzecznego, jego obwód może być wyrażony równaniem:

$$K(y, z) = 0$$

Tożsamość tego równania dla wszystkich przekrojów poprzecznych stanowi cechę wyróżniającą *pręta o stałym przekroju*, zmienność zaś — o *przekroju zmiennym*.

Zmienność przekroju winna być jednak ciągła i nader powolna: obwody dwóch sąsiednich przekrojów poprzecznych mogą się tylko znikomo różnić w rzucie na płaszczyznę, prostopadłą do prostej, łączącej środki obu tych przekrojów.

Powierzchnia, lub płaszczyzna, w której leżą jednoimienne główne osie bezwładności wszystkich przekrojów poprzecznych pręta, nosi miano *głównej powierzchni*, lub *płaszczyzny bezwładności* pręta.

Pręt prosty jest *bezwładnościowo jednorodny*, gdy jednoimienne główne osie bezwładności wszystkich przekrojów poprzecznych leżą odpowiednio w dwóch jego głównych płaszczyznach bezwładności, przecinających się prostopadle wzdłuż prostej osi X pręta. Zatem w jednej płaszczyźnie leżą osie główne Y , w drugiej, prostopadłej — osie Z wszystkich przekrojów poprzecznych.

Pręt krzywy płaski jest bezwładnościowo jednorodny, gdy jednoimienne główne osie wszystkich przekrojów poprzecznych leżą odpowiednio w dwóch jego głównych powierzchniach bezwładności: w płaszczyźnie osi pręta i w prostopadłej powierzchni cylindrycznej, przechodzącej przez tę oś. Zatem w głównej płaszczyźnie bezwładności pręta leży jego oś pierwotna i główne osie Y wszystkich przekrojów poprzecznych, — w głównej powierzchni bezwładności — leżą osie Z , jako tworzące tej powierzchni cylindrycznej, przechodzącej przez oś pręta.

Nadal już pod słowem pręt będziemy rozumieli wyłącznie tylko pręt bezwładnościowo jednorodny, o przekroju stałym, lub nader powoli zmiennym. Wszelkie odchylenia będą każdorazowo omawiane i rozpatrywane oddzielnie.

11. Płytką. Dwa sąsiednie przekroje poprzeczne pręta nieodkształconego wyodrębniają zeń płytkę. Ich środki O, O' leżą na osi pręta, ich pola F, F' różnią się znikomą o dF . Boczna powierzchnia płytki stanowi część bocznej powierzchni pręta.

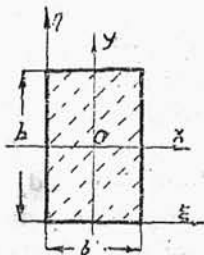
Po odkształceniu środki O, O' będą leżały na odkształconej osi pręta, zwanej wprost *odkształconą*. Pierwotnie płaskie ścianki płytki w ogólnym przypadku ulegną zwichrzeniu, a przeto nie dla wszelkich układów odkształceń słuszne jest tak zwane założenie Bernoulli, które głosi, że *płaskie przekroje poprzeczne pręta nie wichrzą się przy odkształceniu i są prostopadłe do odkształconej*.

C. Część trzecia.

1. Prostokąt (Rys. 2). Dla osi wierzchołkowych mamy bezpośrednio:

$$J_{\xi} = \int_0^b d\xi \int_0^h \eta^2 d\eta = \frac{1}{3} b h^3 \quad J_{\eta} = \int_0^b \xi^2 d\xi \int_0^h d\eta = \frac{1}{3} b^3 h$$

$$J_{\xi\eta} = \int_0^b d\xi \int_0^h \eta d\eta = \frac{1}{4} b^2 h^2$$



Rys. 2.

Dla osi środkowych głównych:

$$J_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{1}{12} b h^3$$

$$J_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy = \frac{1}{12} b^3 h$$