

*Rolimierz  
Hoyce R. 189*

*Rolimierz  
Hoyce*



LEON KARASIŃSKI.

# WYTRZYMAŁOŚĆ TWORZYW.

WARSZAWA.

NAKŁADEM „KOMISJI WYDAWNICZEJ” TOWARZYSTWA BRATNIEJ POMOCY  
STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ.

1918.

*i. z. 1895*



B.1718

Geprüft und auch für die Ausfuhr freigegeben.  
Warschau, den 22. 4. 1918. T. № 9952. Dr. № 785.

DRUK TOW. AKC. S. ORGELBRANDA SYNÓW W WARSZAWIE.

BZ06PK/002-19







## CZĘŚĆ PIERWSZA.

# NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA.

### ROZDZIAŁ PIERWSZY.

#### USTALENIE POJĘĆ ZASADNICZYCH.

**§ 1. Nauka o wytrzymałości tworzyw.** Wszelki twór budowlany lub techniczny stanowi zwartą całość, złożoną z oddzielnych ogniw, trwale ze sobą powiązanych. Ten układ ogniw pod jarzmem sił zewnętrznych pracuje celowo, powinien przeto być trwały i pewny w działaniu. Jego ogniwa muszą być trwałe i niezmiennie, bo każde wyraźniejsze odkształcenie wewnętrzne psuje wzajemne ustosunkowanie ogniw, dając zazwyczaj groźne zaburzenia, kończące się zniszczeniem całego układu. Skrzywienie koła wykołaja parowóz. Słowem — nadmierne odkształcenia ogniw burzą stateczność układu. Stąd konieczność *przewidywania* odkształceń i uzależniania odporności ogniwa od wymiarów wytycznych i kształtu. Wiotka karta papieru, zwinięta w rurkę, ujawnia sztywność dość znaczną. Ten prosty przykład wystarcza, aby podkreślić konieczność istnienia nauki o *wytrzymałości tworzyw*. Należy ona do gromady nauk mechaniki stosowanej, obejmujących rozległy obszar wiedzy doświadczalnej a zbudowanych na wspólnej podstawie — mechanice teoretycznej.

Wśród nich *wytrzymałość tworzyw jest nauką odkształceń ciała obciążonego*.

**§ 2. Odkształcenia ciał stałych.** Ustalone w mechanice teoretycznej czysto oderwane pojęcie ciała sztywnego, niezmiennego, traci swą moc obowiązującą wobec powyższego określenia, gdzie bierzemy pod uwagę ciała *odkształcające się*, a więc istotne ciała stałe, określając je w sposób następujący: *ciało stałe stanowi układ cząsteczkowy wyraźnego kształtu, sprzeciwiający się wszelkim zmianom, wywoływanym w układzie jego cząsteczek*.

Aby ten opór pokonać, należy użyć sił zewnętrznych. W tym jedynie wypadku kształt pierwotny ciała stałego ulegnie zmianie, ciało odkształci się. Siły te będziemy nazywali *odkształcającymi*. Zatem ciało obciążone ulega odkształceniu, podczas gdy ciało wolne od sił zewnętrz-

nych — żadnych odkształceń nie ujawnia, przyczem, zgodnie z tem, cośmy dotychczas ustalili, —

*Odształceniem nazywamy wszelką zmianę w układzie cząsteczek ciała obciążonego, to jest znajdującego się pod jarzmem sił zewnętrznych.*

Badanie warunków powstawania odkształceń na tle działania sił zewnętrznych rozszerza nasze pojęcia o budowie wewnętrznej ciała stałego, jako układu cząsteczkowego. Ponieważ liczba cząsteczek tego układu nie może oczywiście ulec zmianie przy odkształceniu, przeto zmuszeni jesteśmy przypuścić istnienie przestrzeni międzycząsteczkowych, a, co za tem idzie, i *odległości międzycząsteczkowych, zmieniających się pod działaniem energetycznych czynników zewnętrznych*, jako to obciążenia układem sił, lub nagrzania. Stąd wnioskujemy, że *wszelkie odkształcenie ciała stałego powstaje na tle szeregu zmian poszczególnych odległości międzycząsteczkowych, wywołanych działaniem czynników energetycznych.*

Ciało stałe nie jest więc zwykłym zlepkiem cząsteczek: jest ono raczej mgławicowym rojem cząstek odległych od siebie, a stanowiących jeden trwały układ. W ciele nieobciążonem, a więc nie ujawniającem żadnych odkształceń, odległości międzycząsteczkowe są niezmiennie. Dowodzi to istnienia trwałego stanu równowagi wewnętrznej — *sztynnego powiązania cząsteczek układu siłami wiążącemi.* Te siły wzajemnie się znoszą w działaniu, wytwarzając w ten sposób zupełny bezruch wewnętrzny ciała swobodnego, nieobciążonego. Pod wpływem energetycznych czynników zewnętrznych równowaga zostaje zachwiana: czynniki wprowadzają *nowe dodatkowe siły międzycząsteczkowe — naprężenia odkształcające, zupełnie niezależne od sił wiążących.* Na tle działania tych sił dodatkowych poszczególne cząsteczki otrzymują odnośne przyspieszenia: *powstają ruchy wewnętrzne i zmiany odległości międzycząsteczkowych ciała obciążonego.*

Ponieważ jednak wszelka zmiana we wzajemnym ustosunkowaniu cząsteczek ciała stałego wywołuje w niem, jak wiemy, siły oporowe wewnętrzne, przeto na tle owych ruchów międzycząsteczkowych powstają w ciałach stałych siły międzycząsteczkowe, czyli *naprężenia oporowe*, które się sprzeciwiają zmianom dokonywanym i chcą je sprowadzić do zera. *Naprężenia oporowe powstają wyłącznie na tle zmian odległości międzycząsteczkowych i rosną wraz z niemi*, stanowiąc naturalny hamulec działania sił odkształcających, bo zmiany wewnętrznego układu cząsteczek ciała trwają dopóty, póki rosnące naprężenia oporowe nie zniweczą naprężeń odkształcających. Od tej chwili równowaga wewnętrzna ustala się ponownie: *ciało wchodzi w nowy stan równowagi trwałej* na tle zahamowania ruchów cząsteczkowych; od tej chwili naprężenia odkształcające i oporowe stanowią zrównoważony układ *sił wewnętrznych*, znoszących się wzajemnie, bo równych, lecz skierowanych przeciwnie. Możemy przeto utożsamić oba rodzaje naprężeń, o ile bierzemy pod uwagę ciało od-



kształcone; natomiast w ciałach odkształcających się naprężenia oporowe są oczywiście mniejsze.

Otrzymaany stan równowagi ciała obciążonego zachodzi przy zmienionych odległościach międzycząsteczkowych i trwa dopóty, póki ciało ulega obciążeniu odkształcającemu. Jest to więc *trwały stan równowagi ciała odkształconego, stan równowagi naprężonej*.

Gdy obciążenie powiększymy w tym samym kierunku — powtórzy się przebieg tylko co opisany: otrzymamy nowe odkształcenia dodatkowe na tle trwałego stanu równowagi, różnego jednak od poprzedniego. Dalsze powiększanie obciążenia w tym samym kierunku da szereg nowych odkształceń dodatkowych, każdorazowo powstających na tle trwałego stanu równowagi ciała obciążonego; powtarzać się to będzie jednak tylko do pewnej wartości granicznej obciążenia, bo dalsze, nawet najdrobniejsze powiększenie w tym samym kierunku natężenia sił odkształcających wywoła już nadmierne ruchy cząsteczek, wykluczające wszelką możliwość równowagi wewnętrznej tworzywa: odległości międzycząsteczkowe wzrosną poza wpływ sił wewnętrznych — układ już nie zdoła rozwinąć naprężeń oporowych — przyspieszenia cząstek nie będą zahamowane — nastąpi rozdział cząstek, czyli *pęknięcie ciała*.

Nie możemy więc dowolnie obciążać ciała stałego: *jednokierunkowe powiększanie sił zewnętrznych musi w końcu zburzyć układ obciążony*. Wytrzymałość tworzyw winna wyznaczyć z góry to obciążenie *niebezpieczne*, wywołujące w ogólnym wypadku niszczący układ odkształceń tworzywa. Przy obecnym stanie nauki określenie obciążeń burzących nie nastęrcza żadnych trudności, to też wypadki pęknięcia ogniów stają się coraz rzadsze, zwłaszcza, że obciążenia praktycznie dopuszczalne, są zazwyczaj dosyć niskie, dają więc odkształcenia nader nieznaczące.

**§ 3. Odkształcenia sprężyste i trwałe.** Weźmy pod uwagę ciało stałe, pozostające w stanie trwałej równowagi pod jarzmem układu sił zewnętrznych, odkształcających. W pewnej chwili zmagła usuńmy ciało rozpatrywane z pod wpływu sił zewnętrznych, które w niem wywołały układ naprężeń odkształcających, oraz równoważący układ naprężeń oporowych. Ciało, pozostawione samemu sobie, wejdzie w nowy stan równowagi, przyczem wogóle mogą zajść trzy wypadki:

1. Może się zdarzyć, że odkształcenie zginie wraz z obciążeniem odkształcającem. To znaczy, że naprężenia oporowe, niezrównoważone działaniem naprężeń odkształcających, które znikają wraz z obciążeniem zewnętrznym w danym wypadku, przywrócą pierwotne odległości międzycząsteczkowe, jakie istniały w ciele nieobciążonem, i po dokonaniu tej pracy, zginą wraz z odkształceniem, które je wywołało. Mamy tu więc do czynienia ze zjawiskiem *odwracalnem*: znika wszelki ślad działania sił

odkształcających — ciało powraca do pierwotnego stanu równowagi: odkształcenie jest *sprężyste*. Rurka kauczukowa rozciągnięta, powraca do swej pierwotnej postaci.

*Nazywamy sprężystem odkształcenie, znikające wraz z obciążeniem, które je wywołało.*

2. Z kolei może się również okazać, że odkształcenie pozostanie niezmienione po wyzwoleniu ciała z pod jarzma sił odkształcających. To znaczy, że naprężenia pozostaną w napięciu, jako dodatkowe siły międzycząsteczkowe *wiążące* i nie sprowadzą do zera odkształceń, które je wywołały. Tutaj więc układ sił wiążących wewnętrznych zasadniczo się zmieni po odciążeniu: kosztem pracy sił odkształcających *wytworzy się jakoby inne ciało stałe*, różne od poprzedniego. Ciało to do pierwotnego stanu równowagi już nie powróci, bo odkształcenie stało się *trwałem*. Mamy tu więc do czynienia ze zjawiskiem *nieodwracalnym*. Gлина wilgotna zmienia swą postać pod uciskiem sił zewnętrznych i nie powraca do kształtu pierwotnego.

*Nazywamy trwałem odkształcenie, pozostające w ciele wyzwolonem z pod jarzma sił odkształcających.*

3. Może się wreszcie zdarzyć, że odkształcenie częściowo tylko zginie wraz z obciążeniem odkształcającem. Mamy wtedy do czynienia ze zjawiskiem *częściowo* tylko *odwracalnym*, a tego rodzaju odkształcenia nazywamy *mieszanemi*, ponieważ możemy je zawsze rozpatrywać, jako złożone z odkształceń sprężystych i trwałych.

Słowem, jedynie w pierwszym wypadku działanie obciążenia przemija bez śladu: w pozostałych powrót do pierwotnego stanu jest niemożliwy: ciało przybiera nieco odmienną postać po jednorazowym obciążeniu i odciążeniu, nie może być przeto użyte jako ogniwo. Wyznaczanie granicy odkształceń sprężystych stanowi jedno z ważniejszych zadań Wytrzymałości Tworzyw. Do tego celu dążymy, zbierając dane doświadczalne, dotyczące warunków powstawania odkształceń sprężystych na tle naprężeń, które je wywołały. Odkształcenia możemy mierzyć wprost, a naprężenia wyznaczać, jako pewien rodzaj sił na mocy praw mechaniki. To też niekiedy nazywają *wytrzymałość tworzyw — mechaniką sił wewnętrznych*.

**§ 4. Wyznaczanie naprężeń ciała obciążonego.** Wyznaczanie naprężeń dokonywa się na mocy podstawowej zasady Wytrzymałości Tworzyw. Głosi ona, że: *wszelki przekrój myślowo poprowadzony w ciele odkształconem jest wykonalny istotnie, a poszczególne części rozciątego w ten sposób ciała odkształconego, stanowią również ciała stałe, podległe ogólnym prawom mechaniki.*

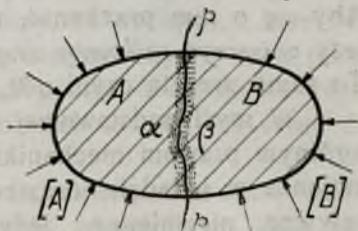
Zasada ta jest oczywista wtedy jedynie, gdy wyodrębniona część



daje się istotnie wyciąć z macierzystego ciała stałego, co niewątpliwie nie zawsze można skutecznie wobec niedokładności naszych środków technicznych. Tem niemniej prawo powyższe należy *à priori* uznać, jako słuszne bezwzględnie we wszystkich wypadkach, a więc nawet i wtedy, gdy wyodrębniona cząstka ciała stałego jest znikomo mała.

Aby wyznaczyć naprężenia na mocy tej zasady, bierzemy pod uwagę jakiegokolwiek ciało stałe, pozostające w trwałym stanie równowagi odkształconej pod jarzmem układu [E] sił zewnętrznych i prowadzimy myślowo powierzchnię  $pp$ , zupełnie zresztą dowolnego kształtu [Rys. 1], dzieląc nią ciało rozpatrywane na części A i B.

Oznaczmy przez [A] układ sił zewnętrznych, działających na część A, przez [B] układ sił, odkształcających drugą część B. W ten sposób dzielimy całkowity układ [E] na dwa składowe układy, co wyrażamy obrazowo pisząc  $[A] + [B] = [E]$ . Nadto, cząsteczki ciała stałego, sąsiadujące ze sobą wzdłuż powierzchni  $pp$ , zostały również podzielone na dwie gromady  $\alpha$  i  $\beta$  cząstek, obustronnie rozsianych wzdłuż tej powierzchni.



Rys. 1.

Przed odkształceniem były one inaczej rozłożone. Łączyły je siły wiążące, skojarzone parami. Nie było ruchów cząsteczkowych, bo siły wiążące wzajemnie się znosiły, tworząc zrównoważony układ sił wiążących [W] ciała nieobciążonego. Po obciążeniu pojawiły się dodatkowe naprężenia odkształcające. Wówczas to wyprowadzone z równowagi więzów cząsteczki utworzyły sąsiadujące ze sobą gromady  $\alpha$  i  $\beta$ . Nastąpił nowy stan równowagi, przyczem do istniejącego już dawniej układu [W] sił wiążących dołączył się nowy również zrównoważony układ naprężeń obu gromad, powstałych na tle działania sił zewnętrznych, odkształcających. Oba te układy stanowią zespół sił międzycząsteczkowych przekroju, przynależnych do gromad  $\alpha$  i  $\beta$ .

Oznaczmy przez  $[\alpha]$  układ naprężeń, przynależnych do cząstek  $\alpha$ , a działających na cząsteczki  $\beta$ , oraz przez  $[\beta]$  układ naprężeń, siedliskujących w gromadzie  $\beta$ , a działających na cząsteczki  $\alpha$ . Wobec istnienia równowagi odkształconej, oba powyższe układy stanowić muszą łącznie zrównoważony układ naprężeń przekroju, zatem siły układów  $[\alpha]$  i  $[\beta]$  wzajemnie się znoszą, co wyrażamy obrazowo pisząc  $[\alpha] + [\beta] = 0$ , lub jeszcze inaczej  $[\alpha] = -[\beta]$ .

Zwróćmy uwagę, że siły układu  $[\alpha]$  będą niejako siłami zewnętrznymi dla cząstek gromady  $\beta$ , ponieważ wychodzą z zewnątrz, z gromady  $\alpha$ ; tak samo również siły układu  $[\beta]$  będą miały wszelkie cechy sił zewnętrznych w stosunku do cząstek gromady  $\alpha$ , jako pochodzące z zewnątrz,

z gromady  $\beta$ . W ten sposób część A ulega jarzmu układów [A] i  $[\beta]$ , a druga część B jarzmu układów [B] i  $[\alpha]$ . Nadto na cząstki obu gromad, sąsiadujące poprzez powierzchnie dotyku, działają siły wiążące układu [W], zupełnie zresztą niezależne od tylko co wymienionych czterech układów sił.

Części A i B pozostają w równowadze, bo i całe ciało znajduje się w stanie trwałej równowagi. Jednakowoż równowaga obu części natychmiast będzie zachwiana, gdy powierzchnia  $pp$  stanie się powierzchnią istotnego przekroju a więc zarazem i powierzchnią rozdziału części A i B. Aby się o tem przekonać, rozetnijmy ciało wzdłuż  $pp$ . W tym celu należy *zniszczyć całkowity zespół sił międzycząsteczkowych obu gromad  $\alpha$  i  $\beta$* . To samo zresztą czyni nóż, krając.

W myśl podstawowej zasady obie rozcięte części winny podlegać ogólnym prawom mechaniki. Obie są przytem odkształcone, a więc niezmiennie w układzie cząsteczkowym, zachowują się przeto, jako ciała sztywne, niezmiennie. Jedyne obciążenie części A stanowi obecnie już tylko układ sił zewnętrznych [A], jedyne obciążenie części B układ [B]. W ogólnym wypadku układy te pojedynczo wzięte nie są zrównoważone, a zatem i części rozcięte nie mogą być w równowadze. Po rozcięciu ciało *rozpadnie się* w obie strony.

Chcąc temu przeszkodzić, trzeba zrównoważyć obciążenia rozciętych części A i B. Najprościej byłoby przywrócić całkowicie stan poprzedzający rozcięcie. Można by mianowicie *skleić* rozcięte połowy, tworząc sztuczną spoiwość powierzchni dotyku. W tym celu należy wskrzesić działanie układów [W]  $[\alpha]$  i  $[\beta]$ , a zapanuje poprzedni stan równowagi ciała odkształconego.

A zatem tylko co wymienione układy zrównoważyć muszą działanie układów [A] i [B] na części A i B. Ponieważ jednak układ [W] od pozostałych nie zależy zupełnie, przeto układów [A] i [B] zrównoważyć nie może. Wystarczy więc, gdy wskrzesimy jeno działanie układów  $[\alpha]$  i  $[\beta]$ . Inaczej mówiąc, część rozcięta A pozostanie w równowadze pod jarzmem układów [A] i  $[\beta]$ , stanowiących jej obciążenie zewnętrzne po rozcięciu, a część B zachowa swą równowagę, skoro ją obciążymy układami [B] i  $[\alpha]$ , jako jej przynależnym obciążeniem zewnętrznym. Obrazowo możemy wypisać warunek równowagi części A w postaci  $[A] + [\beta] = 0$ . Podobnież dla części B będzie  $[B] + [\alpha] = 0$ . Stąd bezpośrednio  $[\beta] = -[A]$  oraz  $[\alpha] = -[B]$ .

*Układ naprężeń, przynależnych do cząstek jednostronnie rozszianych wzdłuż powierzchni, dowolnie wewnątrz ciała odkształconego poprowadzonej, równoważy obciążenie zewnętrzne tej części ciała odkształconego, która sąsiaduje drugostronnie poprzez ową powierzchnię z gromadą cząstek rozpatrywanych.*

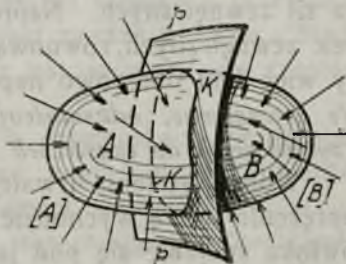


Wyżej zaznaczyliśmy, że  $[\alpha] = -[\beta]$ , zatem być musi również  $[B] = [A]$ , skąd bezpośrednio  $[A] + [B] = 0$ . Ponieważ jednak z założenia  $[A] + [B] = [E]$ , przeto  $[E] = 0$ .

*Obciążenie zewnętrzne ciała odkształconego stanowi zrównoważony układ sił.*

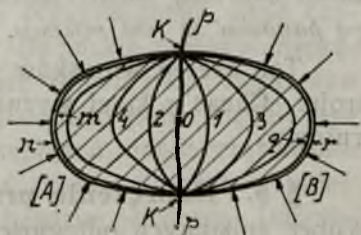
Inaczej mówiąc, siły układu odkształcającego winny być w równowadze po odkształceniu. Zatem wyznaczanie naprężeń wkracza w dziedzinę statyki. Przy rozrywaniu sznurka siły ciągnące obu rąk wzajemnie się równoważą. Ten sam sznurek, pociągany za jeden koniec, będzie się jedno włókno za ręką nieodkształcony. Stąd widzimy, że obciążenia niezrównoważone nie dają odkształceń, czyli ruchów wewnętrznych, lecz przyspieszenie masy ciała czyli ruch zewnętrzny. Wypadki obciążeń niezrównoważonych należą więc raczej do mechaniki ciał sztywnych, a nie do Wytrzymałości Tworzyw.

Nie braliśmy dotąd jeszcze pod uwagę kształtu powierzchni przekroju. Ponieważ, jak to już wiemy z założenia, przekrój  $pp$  ciała odkształconego (Rys. 2) jest zupełnie dowolny, przeto możemy go mniej lub więcej uwypuklać we wnętrzu ciała odkształconego w tym, lub w owym kierunku, pozostawiając jednak bez zmiany pierwotną przestrzenną krzywą  $K$ , leżącą w przekroju  $p$ , a zaznaczającą się jako ślad tego przekroju na powierzchni ciała stałego. Otrzymamy w ten sposób dowolną ilość przekrojów, oznaczonych cyframi parzystymi po lewej, a nieparzystymi po prawej stronie pierwotnego zasadniczego przekroju, oznaczonego zerem na (Rys. 3).



Rys. 2.

Wzdłuż każdego z tylko co wymienionych przekrojów możemy wyznaczyć gromady cząsteczek  $\alpha$  i  $\beta$ , skupionych odpowiednio po obu stronach przekroju. Do lewych gromad cząsteczkowych  $\alpha$  przynależą odnośne układy naprężeń  $[\alpha]$ , działających na prawe gromady cząsteczek  $\beta$ ; z kolei w tych prawych gromadach cząsteczek siedliskują układy naprężeń  $[\beta]$ , działające na lewe gromady cząsteczek poprzez odnośny przekrój. Te prawe i lewe układy naprężeń każdego przekroju wzajemnie się znoszą, jako złożone z naprężeń odpowiednio równych, a skierowanych przeciwnie. Obrazowo to można wyrazić szeregiem równań  $[\alpha]_i = -[\beta]_i$ ; gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Równania te warunkują równowagę przekrojów, wypeł-



Rys. 3.

*niających wewnątrz ciała odkształconego, a równowaga przekrojów stanowi o równowadze wewnętrznej ciała odkształconego. A zatem we wszystkich punktach wewnątrz ciała odkształconego panują naprężenia, pozostające w równowadze napiętej na tle działania sił zewnętrznych, odkształcających.*

Podobne warunki zachodzą również i na powierzchni. Skrajne przekroje  $m$  i  $q$  możemy niewątpliwie poprowadzić w bezpośrednim sąsiedztwie powierzchni bocznych  $n$  i  $r$ , stanowiących wspólnie powłokę zewnętrzną ciała odkształconego. Stąd wniosek, że i powierzchnie  $n$  i  $r$  muszą być również w równowadze, inaczej mówiąc, że cząsteczki ciała, jednostronnie rozsiane wzdłuż tych powierzchni, pozostają w równowadze trwałej, mimo działania sił zewnętrznych na powłokę zewnętrzną ciała odkształconego. Jest to możliwe wówczas jedynie, gdy wśród cząsteczek powierzchni  $n$  i  $r$  powstaną odpowiednie układy  $[n]$  i  $[r]$  naprężeń, równoważących działanie sił odkształcających. Słowem, powierzchnie  $n$  i  $r$  są poniekąd przekrojami granicznymi ciała odkształconego — przekrojami o jednostronnem li tylko skupieniu cząsteczek, podlegających działaniu sił zewnętrznych. Naprężenia, przynależne do gromady tych cząsteczek zewnętrznych, równoważone są działaniem sił zewnętrznych. Możemy więc i tu obrazowo napisać  $[n] = -[A]$  oraz  $[r] = -[B]$ . A zatem *siły zewnętrzne, odkształcające, wywołują równoważny układ naprężeń, przynależnych do cząsteczek zewnętrznych ciała odkształconego.*

Wobec istnienia trwałej równowagi dochodzimy do przekonania, że naprężenia mogą wychodzić poza powłokę li tylko w tym wypadku, gdy powłoka znajduje się pod jarzmem sił zewnętrznych, naprężenia powłokowe muszą bowiem niweczyć działanie sił odkształcających; nie mogą więc powstawać tam, gdzie na powłoce niema obciążenia. W takich miejscach mogą jawić się tylko naprężenia wewnętrzne, nie wychodzące poza powłokę zewnętrzną, a więc jedynie styczne do powłoki ciała odkształconego.

*Na powłoce ciała odkształconego, wolnej od jarzma sił zewnętrznych niema naprężeń zewnętrznych; jedynie naprężenia styczne do powłoki mogą panować w tem miejscu.*

Ten szereg wniosków pozwala wyznaczać całe układy naprężeń przekroju. Chcąc z kolei wyznaczyć poszczególne naprężenia układu, rozpatrujemy:

### **§ 5. Naprężenia przekrojów płaskich ciała odkształconego.**

Wobec znikomych odległości pomiędzy cząsteczkami ciała stałego, obszar działania naprężeń wydaje się być nader ograniczonym, możemy więc śmiało założyć, iż działanie naprężeń nie sięga zbyt głęboko, rozszerzając się jedynie na cząsteczki bezpośrednio ze sobą sąsiadujące poprzez powierzchnię przekroju. Nadto zakładamy, że cząsteczki są *jednostajnie*



*rozłożone wzdłuż powierzchni przekroju.* To założenie odpowiada istotnej budowie wewnętrznej *ciała jednolitego*, ponieważ ciało tego rodzaju stanowi układ cząsteczek jednostajnie skupionych w każdym punkcie tego układu. Dla ciała niejednolitego będzie to zaledwie przybliżony obraz warunków istotnych, ponieważ jednak w budownictwie technicznym stosujemy wyłącznie prawie ciała jednolite [żelazo zlewne, stal] przeto przypuszczenie powyższe jest zupełnie uprawnione w przeważnej większości wypadków, a wystarczająco zbliżone do rzeczywistości dla reszty.

Jeżeli nadto, zamiast przekroju dowolnego kształtu, rozpatrywać będziemy *przekrój płaski*, tnąc ciało odkształcone płaszczyzną, to po obu jej stronach będziemy mieli gromady cząsteczek powiązanych naprężeniami. Gromady te będą płaskie o jednostajnej, choć znikomej grubości. Stanowiąc będą *ściany* przekroju. Wobec znikomej grubości obie te warstwy mogą być rozpatrywane, jako *pola materjalne o jednostajnem skupieniu* cząsteczek, to jest, inaczej mówiąc o *niezmiennej gęstości*. To znaczy, że w jednostce pola, gdziekolwiek wyznaczonej na ściankach przekroju płaskiego, ilość cząsteczek pola materjalnego jest zawsze ta sama. Stąd wniosek oczywisty, że pole przekroju płaskiego jest *miarą ilości* cząsteczek, rozsianych wzdłuż tego przekroju.

To też zamiast naprężeń, siedliskujących w cząsteczkach przekroju, lub do nich przyłożonych, możemy rozpatrywać naprężenia, przynależne do jednostki pola, jako wyobrazicielki pewnej ilości cząsteczek przekroju płaskiego. Tego rodzaju naprężenia zwiemy *naprężeniami jednostkowymi* i wyznaczamy ich wartość w jednostkach siły na jednostkę przekroju — a więc w *kilogramach na centymetr kwadratowy* [ $\text{KG}/\text{CM}^2$ ]. Przez tę jednostkę przekroju przechodzą różnokierunkowe naprężenia międzycząsteczkowe, przynależne do poszczególnych drobin. Skoro więc miasto tych wszystkich naprężeń cząsteczkowych rozpatrujemy jedno naprężenie jednostkowe, to tym samym bierzemy niejako ich średnią wartość, co jest dostatecznie uprawnione przy nieznacznych wymiarach jednostki pola. Łatwo się o tem przekonać. Niech  $n$  oznacza przypuszczalną ilość cząsteczek w jednostce pola rozpatrywanego, a  $t$  (łacińskie tensio = naprężenie) oznacza naprężenie jednostkowe, panujące w tem polu; iloraz  $t:n$  da wartość średnią naprężenia dla cząsteczek jednostki pola. Będzie ona tym bardziej zbliżona do istotnej wartości naprężeń międzycząsteczkowych, im jednostajniejszy jest rozkład naprężeń cząsteczkowych w poletku, a więc im ono jest mniejsze, a tworzywo bardziej jednolite. Dawniej wymiary poletka brano nader nieznaczne, bo wynoszące zaledwie *mili-metr kwadratowy*, z czasem przekonano się jednak, iż *pole*  $\text{cm}^2$  zupełnie wystarcza, to też jest ono dzisiaj powszechnie stosowane.

Że naprężenia jednostkowe stanowią znacznie ściślejszą miarę istotnych naprężeń międzycząsteczkowych dla ciała jednolitego, niż dla ciała

różnolitego, o tem z łatwością można się przekonać rozumując w sposób następujący: weźmy w przekroju płaskim ciała odkształconego dwie jednostki pola o naprężeniach jednostkowych równych. W ciele jednolitem liczba cząsteczek będzie niewątpliwie ta sama dla obu poletek, przeto cząsteczki obu jednostek pola będą ulegać jednakowym średnim naprężeniom  $t : n$  międzycząsteczkowym. Tutaj więc naprężenie jednostkowe stanowi dobrą miarę naprężeń międzycząsteczkowych.

Inaczej atoli rzecz się ma dla ciała niejednolitego. Tu ilość cząsteczek będzie wogóle różna dla obu poletek:  $n_1$  cząsteczek pierwszego będzie ulegało średniemu naprężeniu  $t : n_1$ , podczas gdy  $n_2$  cząsteczek drugiego będzie pod jarzmem naprężenia średniego  $t : n_2$ . Tu więc przy jednakowych naprężeniach jednostkowych cząsteczki obu poletek *nie są jednakowo naprężone*. Stąd wnioskujemy, że w ciele jednolitem odkształconem naprężenie jednostkowe stanowi miarę średniego naprężenia cząsteczek jednostki pola przekroju płaskiego, podczas gdy w ciele niejednolitem stanowi ono zaledwie miarę naprężeń międzycząsteczkowych przybliżoną.

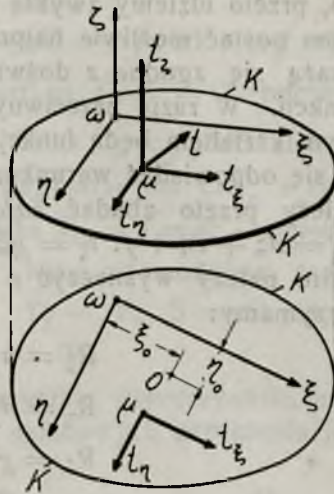
Wobec jednak braku jakichkolwiek danych, dotyczących stopnia skupienia cząsteczkowego w ciałach niejednolitych (ciała włókniste, kamienie, drzewo), zmuszeni jesteśmy mimo to rozpatrywać naprężenia jednostkowe, jako miarę naprężeń międzycząsteczkowych; czynimy to jednak z ostrożnością należytą.

Oznaczmy więc raz na zawsze przez  $t^{KG/CM^2}$  naprężenie jednostkowe, panujące w danej jednostce przekroju płaskiego, dowolnie przez ciało odkształcone przeprowadzonego. W ogólnym wypadku wartości  $t$  będą różne dla poszczególnych punktów przekroju; może się jednak zdarzyć, że  $t$  będzie *geometrycznie jednakowe* dla wszystkich punktów przekroju, a wtedy mówimy, że przekrój jest *jednostajnie naprężony*. W obu wypadkach zadaniem Wytrzymałości Tworzyw jest wyznaczyć wartości naprężeń jednostkowych dla poszczególnych punktów przekroju.

**§ 6. Wyznaczanie naprężeń jednostkowych przekroju płaskiego ciała jednolitego.** Bierzemy pod uwagę przekrój płaski  $p$  ciała jednolitego odkształconego. Jego rozcięte części A i B pozostają pod jarzmem odnośnych układów [A] i [B] sił zewnętrznych odkształcających. Po obu stronach przekroju, w gromadach cząsteczkowych  $\alpha$  i  $\beta$  siedliskują układy naprężeń  $[\alpha]$  i  $[\beta]$ . Ponieważ  $[\alpha] = -[\beta]$  oraz  $[A] = -[\beta]$  i  $[B] = -[\alpha]$ , przeto możemy rozpatrywać układy [A] i  $[\beta]$ ; stanowiące obciążenie jednej tylko części ciała obciążonego, dajmy na to części A. Chcąc warunek  $[A] + [\beta] = 0$  wyrazić w postaci zwykłych warunków równowagi układów sił [A] i  $[\beta]$ , bierzemy pod uwagę układ osi spółrzędnych prostokątnych, obierając początek osi  $\omega$  gdziekolwiek w płaszczyźnie przekroju (Rys. 4), choćby nawet poza jego obwodem. Osie  $\omega\xi$ ,  $\omega\eta$  ukła-



damy jakkolwiek w płaszczyźnie przekroju, a oś  $\omega\zeta$  prowadzimy prostopadle do tej płaszczyzny. W układzie tylko co obranych osi współrzędnych wyznaczmy współrzędne  $\xi, \eta, \zeta$  zupełnie dowolnego punktu  $\mu$ , leżące w przekroju, przyczem oczywiście  $\zeta=0$ . Oznaczmy jak zwykle przez  $t^{KG}/\text{cm}^2$  naprężenie jednostkowe, panujące w punkcie  $\mu$ . Jeżeli przez  $dF = d\xi d\eta$  oznaczmy różniczkę pola, przynależną do punktu  $\mu$  ( $\xi, \eta, 0$ ) to poletko  $dF \text{ cm}^2$  podlegać będzie działaniu siły elementarnej  $t dF \text{ kg}$ , a układ sił  $t dF$  poletek całego przekroju będzie niewątpliwie układem [β], o którym była mowa nieco wyżej. Wobec zupełnej niezmienności przestrzeni międzycząsteczkowych ciała odkształconego, jego część A zachowuje się jak ciało sztywne, możemy więc sprowadzić układ [A] sił zewnętrznych, odkształcających do początku współrzędnych  $\omega$  jako ośrodka sprowadzenia, a otrzymane w ten sposób wypadkowe siła  $R$  i moment  $M$  zastąpią działanie układu [A], równoważąc zarazem układ sił  $t dF$  przekroju.



Rys. 4.

Oznaczmy składowe naprężenia jednostkowego przez  $t_\xi, t_\eta, t_\zeta$ . Mnożąc je przez  $dF$  otrzymamy składowe siły  $t dF$ . Ponieważ składowe  $R$  i  $M$  są odpowiednio  $R_\xi, R_\eta, R_\zeta$  i  $M_\xi, M_\eta, M_\zeta$ , przeto warunki równowagi obu układów z łatwością otrzymać możemy pisząc

$$\begin{aligned} R_\xi &= \Sigma t_\xi dF, & R_\eta &= \Sigma t_\eta dF, & R_\zeta &= \Sigma t_\zeta dF, \\ M_\xi &= \Sigma [\eta t_\zeta dF - \zeta t_\eta dF] = \Sigma \eta t_\zeta dF, & \dots & \dots & \dots & (1) \\ M_\eta &= \Sigma [\zeta t_\xi dF - \xi t_\zeta dF] = -\Sigma \xi t_\zeta dF, \\ M_\zeta &= \Sigma [\xi t_\eta dF - \eta t_\xi dF]. \end{aligned}$$

Prawe strony tych równań wypisaliśmy bez znaków ujemnych, wyznaczyliśmy przeto naprężenia układu — [β] czyli układu [α], co zresztą nie gra żadnej roli, wobec tożsamości obu układów naprężeń. Z równości tych niepodobna wyznaczyć składowych naprężeń bez założeń dodatkowych. W ogólnym wypadku składowe  $t_\xi, t_\eta, t_\zeta$  mają wartości różne dla poszczególnych punktów przekroju, są więc funkcjami współrzędnych  $\xi, \eta$  tych punktów. Nadto od czasu nie zależą zupełnie, mamy tu bowiem do czynienia z ciałem już odkształconem o wartościach naprężeń trwale ustalonych. Możemy przeto napisać  $t_\xi = \Theta(\xi, \eta), t_\eta = \Phi(\xi, \eta), t_\zeta = \Psi(\xi, \eta)$ , a w równaniach (1) miasto sum podstawić wszędzie znaki całkowania po  $dF$ .

Uzależnienie  $t_\xi, t_\eta, t_\zeta$  od współrzędnych punktów przekroju dałoby

możność ustalenia praw zmienności naprężeń, gdybyśmy mogli wyznaczyć kształt tylko co wypisanych funkcji. Ponieważ jednak nie znamy go, przeto idziemy zwykłą w takich razach drogą: nadajemy tym funkcjom postać możliwie najprostszą i badamy wyniki otrzymane. Gdy te okażą się zgodne z doświadczeniem, wnioskujemy o trafnym wyborze funkcji. W razie przeciwnym obieramy inną zawilszą postać. Najprostszym kształtem będą funkcje *linjowe* współrzędnych  $\xi, \eta$ . Ta postać zdaje się odpowiadać warunkom istotnym w pewnych prostych wypadkach, należy przeto zbadać *założenie funkcji linjowych*  $t_x = a\xi + b\eta + c$ ,  $t_y = d\xi + e\eta + f$ ,  $t_z = g\xi + h\eta + j$ , zawierających stałe współczynniki, które należy wyznaczyć z warunków równowagi (1). Po podstawieniu otrzymamy:

$$R_x = a \int \xi dF + b \int \eta dF + c \int dF,$$

$$R_y = d \int \xi dF + e \int \eta dF + f \int dF,$$

$$R_z = g \int \xi dF + h \int \eta dF + j \int dF,$$

$$M_x = g \int \xi \eta dF + h \int \eta^2 dF + j \int \eta dF,$$

$$M_y = -g \int \xi^2 dF - h \int \xi \eta dF - j \int \xi dF$$

$$M_z = d \int \xi^2 dF + e \int \xi \eta dF + f \int \xi dF - a \int \xi \eta dF - b \int \eta^2 dF - c \int \eta dF$$

Te równania można uprościć, obierając początek osi spólrzędnych w *środku masy*  $O$  przekroju. Spólrzędne  $\xi_0, \eta_0$  tego środka czynią zadość równaniom  $F\xi_0 = \int \xi dF$ ,  $F\eta_0 = \int \eta dF$ , gdzie  $F$  oznacza pole przekroju, a całki  $\int \xi dF, \int \eta dF$  są to tak zwane *momenty statyczne* przekroju. Z tego środka prowadzimy oś  $OZ$  prostopadle do przekroju, pozostałe dwie osie  $OX, OY$  kierujemy wzdłuż *głównych osi przekroju*. W układzie tych nowych osi spólrzędne punktu  $\mu$  będą odpowiednio  $x, y$  oraz  $z = 0$ , iloczyn  $dF = dx dy$  da różniczkę pola, a składowe naprężenia jednostkowego będą, jak pierwiej, funkcjami odnośnych współrzędnych linjowemi:  $t_x = ax + by + c$ ,  $t_y = dx + ey + f$ ,  $t_z = gx + hy + j$ . Zazwyczaj oznaczamy  $t_x$  przez  $\tau_y$ ,  $t_y$  przez  $\tau_x$  oraz  $t_z$  przez  $\sigma_z$ . Nieco dalej wyjaśnimy treść wewnętrzną tego znakowania. Nadto składową siły  $R$  równoległą do osi  $OZ$ , oznaczamy przez  $S$ , składową, leżącą w przekroju przez  $T$ , a rzuty tej ostatniej na osi  $OX, OY$  odpowiednio przez  $T_x, T_y$ . Składowe momentu  $M$  niech będą  $M_x, M_y$  oraz  $M_z = M_0$ . Z równań statyki otrzymamy:

$$T_x = a \int x dF + b \int y dF + c \int dF, T_y = d \int x dF + e \int y dF + f \int dF, S = g \int x dF + h \int y dF + j \int dF$$



$$M_x = g \int xy dF + h \int y^2 dF + j \int y dF,$$

$$M_y = -g \int x^2 dF - h \int xy dF - j \int x dF.$$

$$M_0 = d \int x^2 dF + e \int xy dF + f \int x dF - a \int xy dF - b \int y^2 dF - c \int y dF.$$

Tutaj przedewszystkiem  $\int dF = F$  a nadto  $\int x dF = \int y dF = 0$ , początek bowiem osi leży w środku masy przekroju. Całka  $I_x = \int y^2 dF$  stanowi tak zwany *moment bezwładności przekroju względem osi OX*, a całka  $I_y = \int x^2 dF$  — względem osi OY, wreszcie całka  $J_{xy} = \int xy dF$  — *moment odśrodkowy przekroju względem osi OX, OY*. Niżej udowodnimy, że dla osi głównych  $J_{xy} = 0$ , a zatem  $T_x = cF$ ,  $T_y = jF$ ,  $S = jF$ ,  $M_x = hJ_x$ ,  $M_y = -gJ_y$ ,  $M_0 = dJ_y - bJ_x \dots \dots (2)$ .

Z tych równości możemy wyznaczyć wszystkie współczynniki, prócz  $a, b, d, e$ , będziemy mieli przeto wzory dla składowych naprężenia jednostkowego:

$$t_x = ax + by + \frac{T_x}{F} = \tau_y, \quad t_y = dx + ey + \frac{T_y}{F} = \tau_x, \quad t_z = -\frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{S}{F}.$$

W celu ujednostajnienia tylko co otrzymanych wzorów możemy jeszcze dodatkowo oznaczyć

$$a = \frac{H}{J_y}, \quad b = -\frac{K}{J_x}, \quad d = \frac{L}{J_y}, \quad e = \frac{N}{J_x},$$

a otrzymamy postać ostateczną wzorów:

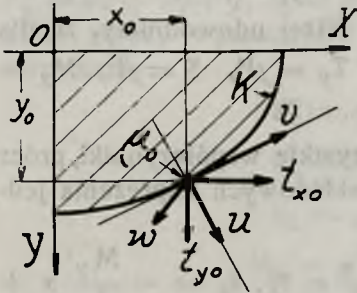
$$t_x = \frac{H}{J_y} x - \frac{K}{J_x} y + \frac{T_x}{F} = \tau_y, \quad t_y = \frac{L}{J_y} x + \frac{N}{J_x} y + \frac{T_y}{F} = \tau_x, \\ t_z = -\frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{S}{F} = \sigma_z \dots (3)$$

Spółczynniki  $K, L$  czynią tu zadość równaniu  $K + L = M_0$ , zależą zatem wyłącznie od tej składowej momentu, pozostałe dwa  $H$  i  $N$ , jako nie objęte warunkami (2), nie dają się wyznaczyć w wypadku ogólnym. W szczególnym natomiast możemy niekiedy wyznaczyć ich wartość z warunków dodatkowych, dotyczących powłoki ciała odkształconego. Weźmy pod uwagę jakikolwiek punkt  $\mu_0$ , leżący na obwodzie przekroju. Jego spólrzędne  $x_0, y_0$  czynią będą zadość równaniu obwodu  $K(x, y) = 0$ . Składowe naprężenia, panującego w tym punkcie będą odpowiednio

$$t_{x_0} = \frac{H}{J_y} x_0 - \frac{K}{J_x} y_0 + \frac{T_x}{F}, \quad t_{y_0} = \frac{L}{J_y} x_0 + \frac{N}{J_x} y_0 + \frac{T_y}{F}.$$

Możemy je zresztą przedstawić nieco inaczej, w postaci sum składowych trzech na-

prężen, pisząc  $t_{x_0} = u_x + v_x + w_x$ ,  $t_{y_0} = u_y + v_y + w_y$ , gdzie przez  $u_x, u_y$  oznaczyliśmy składowe naprężenia, leżące na normalnej obwodu, przez  $v_x, v_y$  składowe naprężenia stycznego do obwodu, wreszcie przez  $w_x, w_y$  składowe naprężenia  $T:F$ , panującego zresztą we wszystkich punktach przekroju, jego bowiem rzuty  $w_x = T_x : F$ ,  $w_y = T_y : F$  stanowią stałe wyrazy ogólnych wzorów dla  $t_x, t_y$ . Załóżmy, że naprężenia  $v$  mają kierunek wspólny na całym obwodzie przeciw strzałce zegara, że naprężenia  $u$  wychodzą poza przekrój (Rys. 5); proste rozważania geometryczne dadzą nam wzory



Rys. 5.

$$u_x dx_0 + u_y dy_0 = 0 \text{ oraz } \frac{v_x}{dx_0} = \frac{v_y}{dy_0}.$$

Ponieważ nadto, różniczkując, mamy  $\frac{\partial K}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial K}{\partial y_0} dy_0 = 0$ , przeto ostatecznie otrzymamy dwa równania warunkowe postaci:  $u_x : \left[ \frac{\partial K}{\partial x_0} \right] = u_y : \left[ \frac{\partial K}{\partial y_0} \right]$  oraz  $v_x \frac{\partial K}{\partial x_0} + v_y \frac{\partial K}{\partial y_0} = 0$ , które się winny wypełniać

tożsamościowo dla wszystkich punktów obwodu.

Odształcenia powłoki zewnętrznej mogą być dostrzeżone z łatwością, to też w niektórych prostszych wypadkach otrzymujemy na tej drodze dostateczne wskazówki co do kierunku działania naprężeń, możemy przeto wyznaczyć  $u$  i  $v$ . Zważywszy nadto, że

$$u_x + v_x = \frac{H}{J_y} x_0 - \frac{K}{J_x} y_0 \text{ oraz } u_y + v_y = \frac{L}{J_y} x_0 + \frac{N}{J_x} y_0 \text{ w pewnych wypadkach określimy brakujące współczynniki } K, H, L, N.$$

Tą drogą ostatecznie otrzymane wzory dla składowych naprężeń odpowiadają istotnym warunkom w następujących prostych wypadkach obciążenia odkształcającego.

1. WYPADEK A. *Zewnętrzny układ [A] sił odkształcających sprowadza się do pojedynczej siły S, prostopadłej do przekroju płaskiego, a przyłożonej do środka jego masy. Jest to wypadek ściskania lub rozciągania.*

2. WYPADEK B. *Układ [A] sprowadza się do pojedynczej siły T, leżącej w przekroju. Jest to wypadek ścinania.*

3. WYPADEK C. *Układ [A] sprowadza się do pojedynczego momentu M<sub>0</sub>, prostopadłego do przekroju. Jest to wypadek skręcania.*

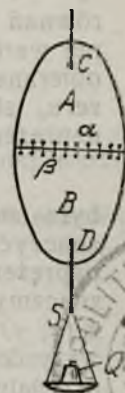
4. WYPADEK D. *Układ [A] sprowadza się do momentów M<sub>x</sub>,*



$M_y$ , leżących w przekroju, oraz do siły  $S$ , prostopadłej do tego przekroju. Jest to wypadek zginania.

**§ 7. Przykłady i ćwiczenia.** 1. By unaocnić przebieg powstawania naprężeń w przekroju, bierzemy kawałek skóry (Rys. 6), rozcinamy go w poprzek pośrodku, przebijamy otworki wzdłuż obu brzegów przekroju, i, przewlekając sznurek gumowy przez te otworki, trwale łączymy oba kawałki tak, aby krawędzie przekroju się zeszyły. Wymaga to niewątpliwie pewnego natężenia sznurka gumowego. W ten sposób stworzyliśmy sztuczny obraz przekroju ciała stałego. Szeregi dziurek obustronnie wzdłuż brzegów przekroju rozsiane, wyobrazają gromady cząsteczek przekroju; sznurek zastępuje więzy tych cząstek, a jego natężenie działa, jak siły wiążące. Dzięki im obie połowy  $A$  i  $B$  zachowują się jak jedna całość. Wieszamy je pionowo na linie, przedzierzgniętej przez górny otwór  $C$ , przez dolny otwór  $D$  przewlekamy drugą linkę z szalką do ciężarków. Nieznaczna waga całości niewiele zmieni w układzie, dopiero gdy na szalkę położymy ciężar  $Q$ , utworzy się w miejscu rozcięciem szpara mniej lub więcej szeroka. Linka przeniosła działanie ciężarów na dolną część skóry, ta znowu oddała je sznurkom wiążącym: powstały w nich naprężenia odkształcające, sznurki poczęły się wydłużać, wreszcie sprężystość gumy wywołała naprężenia oporowe, które zahamowały odkształcenia. Nastąpił stan równowagi. Po dodaniu nowego ciężarka szpara powiększa się, naprężenia w sznurkach rosną; natomiast po zdjęciu tego ciężarka szpara maleje wraz z naprężeniami. Zupełnie tak samo działa każdy ciężarek następny — ostatni wywoła nadmierne naprężenia: pękną sznurki wiążące. Położymy ze dwa ciężarki na szalkę i rozetnijmy wszystkie sznurki wiążące. Układ rozpadnie się: część dolna oddzieli się od górnej, przestaną bowiem działać naprężenia, utrzymujące równowagę odkształconą układu. Można by jednak część jego dolną utrzymać w równowadze, zastępując tylko co zniszczony układ naprężeń — odpowiednim układem sił zewnętrznych, równoważących ciężarki — wtedy równowaga całości trwałaby i nadal bez zmiany. Gdybyśmy chcieli jednak powrócić do stanu, poprzedzającego rozcięcie sznurków, to oprócz układu sił, równoważących ciężarki, trzeba by jeszcze powołać do życia układ dodatkowy, zastępujący działanie sił wiążących. Wtedy obie części nie tylko pozostałyby w dotyku obok siebie, lecz nadto stanowiłyby jedną całość, jak przed rozcięciem sznurków wiążących. Należy tu jeszcze podkreślić, że naprężenia od sił wiążących nie zależą, muszą bowiem równoważyć ciężarki położone na szalce. Ten prosty przykład wyraźnie więc zaznacza różnicę, zachodzącą pomiędzy siłami wiążącymi a naprężeniami, powstającymi na tle działania sił odkształcających.

Stosując miasto sznurków gumowych — sznurki z tworzywa rozciągliwego, możemy unaocnić powstawanie odkształceń mniej lub więcej trwałych, bo tego rodzaju więzy po zdjęciu z szalki ciężarków pozostaną jednak nieco rozciągnięte, rozcięte końce skóry nie zejną



Rys. 6

się, odkształcenie będzie trwało nadal po odciążeniu. Tutaj obciążenie zewnętrzne zmieniło układ sił wiążących.

2. Przy danem obciążeniu zewnętrznym naprężenia przekroju są ściśle określone. Nie możemy przeto wyznaczać dowolnie składowych naprężeń, ponieważ w ogólnym wypadku równania  $t_x = A$ ,  $t_y = B$ ,  $t_z = C$  wyłączają się wzajemnie, są bowiem w nadmiarze. Z trzech równań trzeba wyznaczyć dwie niewiadome — współrzędne punktu o danej wartości naprężenia. Stąd wniosek, że  $A$ ,  $B$ ,  $C$  nie mogą być obierane dowolnie. Wyznacznik tych trzech równań musi być równy zeru, słowem musi istnieć pewna zależność  $f(A, B, C) = 0$ , aby naprężenie

$$t = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

było istotnie jednym z naprężeń układu, wtedy bowiem możemy wyznaczyć współrzędne punktu, w którym panuje owo z góry określone naprężenie. Ten punkt może jednak nie leżeć w przekroju. Wyznaczymy równanie obwodu przekroju rozpatrywanego w postaci  $K(x, y) = 0$ . Skoro  $K(x, y)$  staje się zerem na obwodzie, to dla wszystkich punktów przekroju jest jednakowego znaku takiego, jaki przynależą do środka przekroju, gdzie  $x = y = 0$ . W ten sposób, badając znak funkcji  $K(x, y)$  z łatwością możemy określić, czy punkt wyznaczony leży w przekroju. Stanowi to drugi warunek konieczny.

3. Nazwaliśmy przekrój jednostajnie naprężonym, gdy wszystkie jego naprężenia były geometrycznie równe. Wtedy  $t_x = A = \text{const.}$ ,  $t_y = B = \text{const.}$ ,  $t_z = C = \text{const.}$  Warunki równowagi statycznej będą tu

$$\begin{aligned} T_x &= \int t_x dF = AF, & T_y &= \int t_y dF = BF, \\ S &= \int t_z dF = CF, & M_x &= \int y t_z dF = C \int y dF = 0, \\ M_y &= - \int x t_z dF = - C \int x dF = 0, \\ M_o &= \int x t_y dF - \int y t_x dF = B \int x dF - A \int y dF = 0. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$R = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + S^2} = F \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = tF \text{ oraz } M = 0.$$

*Przekrój może być jednostajnie naprężony jedynie wtedy, gdy układ sił odkształcających po sprowadzeniu do środka przekroju daje wypadkowy moment równy zeru.*

Jest to warunek konieczny, lecz nie dostateczny.

4. Wyznamy średnią wartość naprężenia przekroju, czyli jego średnie naprężenie. Składowe tego naprężenia wyznaczają się z równań

$$t_{xs}F = \int t_x dF, \quad t_{ys}F = \int t_y dF, \quad t_{zs}F = \int t_z dF.$$

Czyli więc

$$\begin{aligned} t_{xs}F &= T_x, & t_{ys}F &= T_y, & t_{zs}F &= S, \text{ stąd} \\ t_s &= \sqrt{t_{xs}^2 + t_{ys}^2 + t_{zs}^2} = \frac{R}{F} \end{aligned}$$



Srednie naprężenie przekroju równe jest sile wypadkowej, jaką daje odosny układ sił odkształcających po sprowadzeniu do środka przekroju, dzielonej przez pole przekroju. Jest to wynik ogólny, niezależny od postaci funkcji naprężeń.

5. Wychodząc z założenia funkcji linjowych, otrzymamy dla środka przekroju, gdzie  $x = y = 0$  składowe naprężenia

$$t_{x0} = \frac{T_x}{F}, \quad t_{y0} = \frac{T_y}{F}, \quad t_{z0} = \frac{S}{F}$$

Zatem  $t_{x0} = t_{xs}, \quad t_{y0} = t_{ys}, \quad t_{z0} = t_{zs}$ .

W środku przekroju panuje naprężenie równe średniej wartości naprężeń.

W założeniu funkcji linjowych składowych naprężeń przekroju, jego naprężenia środkowe i średnie są równe.

## ROZDZIAŁ DRUGI.

### MOMENTY PRZEKROJÓW PŁASKICH.

§ 1. Wyznaczanie momentów przekrojów płaskich. Weźmy pod uwagę przekrój płaski ciała jednolitego (Rys. 7), czyli pole  $F$  ograniczone obwodem  $K$ . Krzywą  $K$  określamy równaniem  $K(\xi, \eta) = 0$  w układzie osi prostokątnych  $\omega\xi, \omega\eta$ , leżących w przekroju. W poprzednim rozdziale otrzymaliśmy, prócz pola  $F = \int dF$ , całki następujące:

$\int \eta dF = F\xi_0$  — moment statyczny względem osi  $\omega\xi$ ,

$\int \xi dF = F\eta_0$  — moment statyczny względem osi  $\omega\eta$ ,

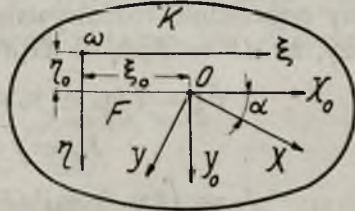
$\int \eta^2 dF = J_\xi$  — moment bezwładności względem osi  $\omega\xi$ ,

$\int \xi^2 dF = J_\eta$  — moment bezwładności względem osi  $\omega\eta$ , oraz

$\int \xi\eta dF = J_{\xi\eta}$  — moment odśrodkowy względem osi  $\omega\xi, \omega\eta$ .

We wszystkich tych całkach  $dF = d\xi d\eta$  oznacza różniczkę pola, a całkowanie winno się rozszerzać na cały przekrój. Są to więc całki podwójne typu  $\int \xi^m \eta^n d\xi d\eta$ . Granice całkowania po  $\eta$  będą w nich wogóle zależne od  $\xi$  i określą się, jako pierwiastki równania  $K(\xi, \eta) = 0$ ; granice całkowania po  $\xi$  będą stałe, wyznaczyć je można w postaci pierwiastków równania, które otrzymamy, rugując  $\eta$  z równań

$$K(\xi, \eta) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial K(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0.$$



Rys. 7.

Wychodząc z rozpatrywania całki, jako granicy sumy, z łatwością możemy dla tych wszystkich powyżej ustalonych momentów przekroju wypowiedzieć następujące twierdzenie:

*Moment przekroju złożonego równy jest sumie odpowiednich momentów części przekroju, branych względem tej samej osi.*

W ogólnym wypadku wartości momentów zależą od układu osi spólrzędnych. Momenty  $F_{\xi}$ ,  $F_{\eta}$ ,  $J_{\xi\eta}$  mogą być przytem dodatnie, ujemne lub równe zero, pozostałe zaś  $F$ ,  $J_{\xi}$ ,  $J_{\eta}$  są rdzennie dodatnie. Widzieliśmy już, że zerowym wartościom pierwszych trzech momentów odpowiada najprostsza postać składowych naprężeń — trzeba więc umieć obrać układ odpowiednich osi spólrzędnych, aby możliwie największa ilość momentów miała wartość równą zero. W tym celu przedewszystkiem wyznaczamy:

**§ 2. Osie środkowe przekroju.** Wyznaczamy spólrzędne  $\xi_0, \eta_0$  *środką przekroju*  $O$ , które, jak wiemy z mechaniki, czynią zadość równaniom  $F_{\xi_0} = F_{\eta}$ ,  $F_{\eta_0} = F_{\xi}$  i umieszczamy w tym punkcie początek nowych osi spólrzędnych  $OX_0, OY_0$ , równoległych do starych, a więc również prostokątnych. W układzie tych nowych osi *środkowych* ponownie wyznaczamy momenty przekroju. Opierając się na wzorach przejścia od starych do nowych osi spólrzędnych  $\xi = \xi_0 + x_0$ ,  $\eta = \eta_0 + y_0$ , możemy poprzednio rozpatrywane całki wyrazić za pomocą nowych, zważywszy, że  $dF = d\xi d\eta = dx_0 dy_0 = dF_0$ . Będziemy przeto mieli kolejno

$$F_{\xi} = \int (\eta_0 + y_0) dF_0 = F_{\eta_0} + \int y_0 dF_0 = F_{\eta_0} + F_{x_0},$$

$$F_{\eta} = \int (\xi_0 + x_0) dF_0 = F_{\xi_0} + F_{y_0}$$

$$J_{\xi} = \int (\eta_0 + y_0)^2 dF_0 = F_{\eta_0}^2 + 2\eta_0 \int y_0 dF_0 + \int y_0^2 dF_0 = \\ = F_{\eta_0}^2 + 2\eta_0 F_{x_0} + J_{x_0}.$$

$$J_{\eta} = \int (\xi_0 + x_0)^2 dF_0 = F_{\xi_0}^2 + 2\xi_0 \int x_0 dF_0 + \int x_0^2 dF_0 = F_{\xi_0}^2 + 2\xi_0 F_{y_0} + J_{y_0}.$$

$$J_{\xi\eta} = \int (\xi_0 + x_0)(\eta_0 + y_0) dF_0 = F_{\xi_0}\eta_0 + \xi_0 \int y_0 dF_0 + \eta_0 \int x_0 dF_0 + \\ + \int x_0 y_0 dF_0 = F_{\xi_0}\eta_0 + \xi_0 F_{x_0} + \eta_0 F_{y_0} + J_{x_0 y_0}.$$

Wiemy z założenia, że  $F_{\xi_0} = F_{\eta}$  oraz  $F_{\eta_0} = F_{\xi}$ , a zatem z pierwszych dwóch równań mamy bezpośrednio  $F_{x_0} = F_{y_0} = 0$ . Ponieważ wobec dowolności osi  $\omega_{\xi}$ ,  $\omega_{\eta}$  kierunek osi  $OX_0, OY_0$  jest również zupełnie dowolny, przeto *moment statyczny przekroju, brany względem osi środkowej jest równy zero.*

W dalszym ciągu, wobec  $F_{x_0} = F_{y_0} = 0$ , mamy  $J_{\xi} = J_{x_0} + F_{\eta_0}^2$ ,  $J_{\eta} = J_{y_0} + F_{\xi_0}^2$  stąd: *moment bezwładności przekroju względem dowolnej osi równy jest momentowi bezwładności względem osi środkowej, równole-*



głej, dodanemu do pola przekroju, pomnożonego przez kwadrat odległości tej osi dowolnej od środka przekroju.

Wobec  $F_{x_0} = F_{y_0} = 0$  mamy również  $J_{\xi\eta} = J_{x_0y_0} + F_{\xi_0\eta_0}$ , skąd moment odśrodkowy przekroju względem dowolnych osi współrzędnych prostokątnych równy jest momentowi odśrodkowemu względem osi środkowych równoległych, dodanemu do pola przekroju, mnożonego przez iloczyn odległości tych osi dowolnych od środka przekroju.

**§ 3. Osie główne przekroju.** Idąc dalej po drodze tu wyznaczonej, bierzemy pod uwagę nowy układ osi  $OX, OY$ , środkowych, tworzących kąt  $\alpha$  pomiędzy osiami  $OX$  i  $OX_0$  i znów w układzie tych osi wyznaczamy momenty przekroju. Są to osie środkowe, zatem dla nich

$\int ydF = F_x = 0, \int xdF = F_y = 0$ , nadto ponieważ  $x = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha$ ,  
 $y = -x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha$  oraz  $dF = dx dy = dx_0 dy_0 = dF_0$ , przeto

$$J_x = \int [-x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha]^2 dF_0 = J_{x_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha - J_{x_0y_0} \sin 2\alpha,$$

$$J_y = \int [x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha]^2 dF_0 = J_{x_0} \sin^2 \alpha + J_{y_0} \cos^2 \alpha + J_{x_0y_0} \sin 2\alpha,$$

$$J_{xy} = \int [x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha] [-x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha] dF_0 = -J_{y_0} \sin \alpha \cos \alpha + J_{x_0y_0} [\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha] + J_{x_0} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} [J_{x_0} - J_{y_0}] \sin 2\alpha + J_{x_0y_0} \cos 2\alpha.$$

Dobierzemy kąt  $\alpha$  w taki sposób, aby  $J_{xy} = 0$ . Układ osi  $OX, OY$ , do tej wartości  $\alpha = \alpha_0$  kąta przynależny, zwiemy układem osi *głównych* przekroju. Dla tych osi

$$J_{xy} = \frac{1}{2} [J_{x_0} - J_{y_0}] \sin 2\alpha_0 + J_{x_0y_0} \cos 2\alpha_0 = 0$$

stad  $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2J_{x_0y_0} : [J_{y_0} - J_{x_0}]$ .

Wyznamy kąt  $\alpha_0$  czyniący zadość temu warunkowi. Prócz  $\alpha_0$  czynić mu będzie zadość jeszcze i  $\alpha_0 + \pi/2$ , można więc zawsze znaleźć dwie wartości kąta  $\alpha$ , różniące się o kąt prosty, a wyznaczające kierunki osi *głównych* przekroju. Dla tych osi  $J_{xy} = 0$ , ta wartość wyróżnia układ osi *głównych* z pośród innych układów osi *środkowych*, przynależnych do różnorodnych wartości kąta  $\alpha$ .

Istnieje i druga własność osi *głównych*. Wyznamy pochodne

$$\frac{dJ_x}{d\alpha} = -2 \cos \alpha \sin \alpha J_{x_0} + 2 \sin \alpha \cos \alpha J_{y_0} - 2 \cos 2\alpha J_{x_0y_0} =$$

$$= [J_{y_0} - J_{x_0}] \cos 2\alpha \left\{ \operatorname{tg} 2\alpha - \frac{2 J_{x_0y_0}}{J_{y_0} - J_{x_0}} \right\}$$

$$\frac{dJ_y}{d\alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha J_{x_0} - 2 \cos \alpha \sin \alpha J_{y_0} + 2 \cos 2\alpha J_{x_0y_0} =$$

$$= -[J_{y_0} - J_{x_0}] \cos 2\alpha \left\{ \operatorname{tg} 2\alpha - \frac{2 J_{x_0y_0}}{J_{y_0} - J_{x_0}} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J_x}{d\alpha^2} &= 2 \operatorname{Cos} 2\alpha [J_{y_0} - J_{x_0}] + 4 \operatorname{Sin} 2\alpha J_{xy_0} = \\ &= 4 J_{xy_0} \operatorname{Cos} 2\alpha \left\{ \frac{J_{y_0} - J_{x_0}}{2 J_{xy_0}} + \operatorname{tg} 2\alpha \right\} \\ \frac{d^2 J_y}{d\alpha^2} &= -2 \operatorname{Cos} 2\alpha [J_{y_0} - J_{x_0}] - 4 \operatorname{Sin} 2\alpha J_{xy_0} = \\ &= -4 J_{xy_0} \operatorname{Cos} 2\alpha \left\{ \frac{J_{y_0} - J_{x_0}}{2 J_{xy_0}} + \operatorname{tg} 2\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Widzimy stąd, że drugie pochodne są zawsze różnych znaków, a pierwsze stają się równe zeru dla  $\alpha_0$  lub  $\alpha_0 + \pi/2$ ; te wartości wyznaczają, jak wiemy, kierunki *osi głównych przekroju*. Zatem odwrotność znaków drugich pochodnych wskazuje, iż mamy tu do czynienia z największością i najmniejszością momentów. Stąd: *istnieją zawsze dwa wzajemnie prostopadłe kierunki, odpowiadające największości i najmniejszości momentów bezwładności przekroju, branych dla osi środkowych*.

Oba te kierunki dają w istocie rzeczy jeden i ten sam układ krzyżujących się *osi głównych przekroju*, z tą jeno różnicą, że przy  $\alpha = \alpha_0 + \pi/2$  osie są obrócone o kąt prosty. A więc, gdzie przy  $\alpha = \alpha_0$  była oś  $OY$ , tam przy  $\alpha = \alpha_0 + \pi/2$  będzie oś  $OX$ , gdzie była oś  $OX$  ujemna, tam leżeć będzie oś  $OY$  dodatnia. Słowem, osie będą przemianowane. Ponieważ jednak przemianowanie osi powoduje przemianowanie całek  $J_x$ ,  $J_y$  na  $J_y$ ,  $J_x$ , przeto kąt  $\alpha_0$  wyznaczy maximum i minimum momentów w sposób odwrotny, niż kąt  $\alpha_0 + \pi/2$ . Widać to również bezpośrednio ze wzorów wyżej wyprowadzonych, mamy bowiem  $\operatorname{Cos} 2\alpha_0 = -\operatorname{Cos}(2\alpha_0 + \pi)$ , co powoduje zmianę znaku obu wtórych pochodnych przy zmianie  $\alpha_0$  na  $\alpha_0 + \pi/2$ .

*Największości i najmniejszości momentów bezwładności przekroju wyznaczają kierunki jego osi głównych prostokątnych środkowych.*

Układ osi głównych środkowych jest najwygodniejszy, daje bowiem największą ilość wartości momentów zerowych. Przypuśćmy, żeśmy wyznaczyli kierunki osi głównych  $OX$ ,  $OY$  przekroju. Dla tych osi  $F_x = F_y = J_{xy} = 0$  a  $J_x$ ,  $J_y$  są to *główne momenty bezwładności przekroju*. Dla jakiegokolwiek nowego układu środkowych osi prostokątnych  $Ov$ ,  $Ou$  — wyznaczamy kąt  $\varphi$  pomiędzy osią  $Ov$  a osią główną  $OX$ , zatem  $v = x \operatorname{Cos} \varphi + y \operatorname{Sin} \varphi$ ,  $u = -x \operatorname{Sin} \varphi + y \operatorname{Cos} \varphi$ . Dla tych nowych osi będzie więc  $J_v = J_x \operatorname{Cos}^2 \varphi + J_y \operatorname{Sin}^2 \varphi - J_{xy} \operatorname{Sin} 2\varphi = J_x \operatorname{Cos}^2 \varphi + J_y \operatorname{Sin}^2 \varphi$ , możemy przeto, znając  $J_x$ ,  $J_y$  wyznaczyć moment bezwładności  $J_v$  względem jakiegokolwiek osi środkowej  $Ov$ , nachylonej pod kątem  $\varphi$  ku osi  $OX$ . Stąd: *główne momenty bezwładności przekroju całkowicie określają rodzaj zmienności momentu bezwładności, branego względem dowolnej osi środkowej.*



Wyliczanie momentów podług tego wzoru jest jednak dosyć kłopotliwe, prościej możemy to uskutecznić, rozpatrując tak zwaną elipsę przekroju środkową lub koło bezwładności przekroju.

**§ 4. Środkowa elipsa przekroju.** Wprowadźmy pojęcie *ramienia bezwładności*, czyniącego zadość równaniu  $Fi^2 = J$ . Stąd ramię bezwładności, przynależne do danego momentu

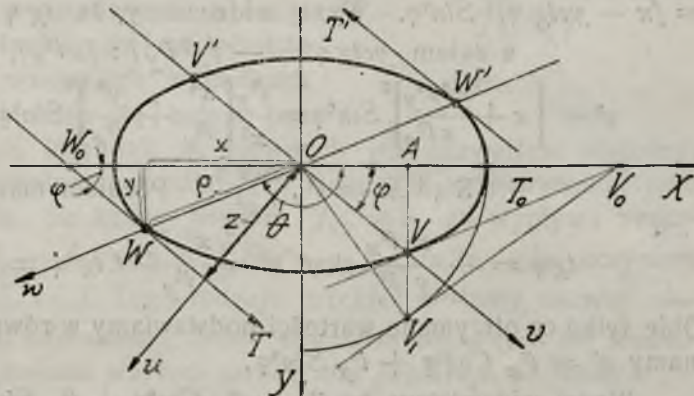
$$i = \sqrt{J/F}$$

określa się, jako *odcinek równy pierwiastkowi kwadratowemu z momentu, dzielonego przez pole przekroju*. Niech będzie:

$$i_v = \sqrt{J_v/F}, \quad i_x = \sqrt{J_x/F}, \quad i_y = \sqrt{J_y/F},$$

a wtedy wyżej wyprowadzony wzór da bezpośrednio  $i_v^2 = i_x^2 \cos^2\varphi + i_y^2 \sin^2\varphi$ . Aby go wykreślić, budujemy w układzie osi głównych środkową elipsę przekroju, określoną równaniem  $[x:i_y]^2 + [y:i_x]^2 = 1$ . Elipsę tego rodzaju wykreślimy łatwo, zważywszy, że jej półos jedna jest równa  $i_x$ , a druga:  $i_y$ . Aby z pomocą tej krzywej wyznaczyć  $i_v$  dla dowolnej osi  $Ov$  środkowej, pochylonej pod kątem  $\varphi$  ku osi  $OX$ , należy (Rys. 8) zbudować styczną  $T$  elipsy środkowej, pochyloną ku osi  $OX$  pod kątem  $\varphi$ .

Ta styczna  $T$ , równoległa do osi  $Ov$ , wyznaczy punkt dotyku  $W$  elipsy o współrzędnych  $x, y$  prostokątnych lub też  $\rho, \theta$  biegunowych. Przedłużając promień wodzący  $\rho$  w obie strony, otrzymamy nową oś  $Ow$ , pochyloną ku osi  $OX$



Rys. 8.

pod kątem  $\theta$ . Oś  $Ov$  przecina elipsę w punktach  $V$  i  $V'$ , a oś  $Ow$  w punktach  $W$  i  $W'$ . Odcinki  $VV'$  i  $WW'$  nazywamy *średnicami elipsy sprzężonymi*, możemy przeto również nazywać osie  $Ov, Ow$  *osiami sprzężonymi elipsy przekroju środkowej*. Budowa stycznej  $T$  nie następuje żadnej trudności. Wykreślamy ze środka elipsy koło promieniem równym półosi wielkiej  $i_y$ . Pion  $AV$ , prostopadły do osi  $OX$ , a przechodzący przez punkt  $V$  przecięcia się elipsy z osią  $Ov$ , wyznaczy na tym kołe

punkt  $V_1$ . Budując styczną koła w punkcie  $V_1$  i przedłużając ją do przecięcia się z osią  $OX$ , wyznaczmy punkt  $V_0$ , przez który przechodzi styczna  $T_0$  elipsy, przynależna do punktu  $V$ . W dalszym ciągu przez środek elipsy prowadzimy oś  $Ow$ , równoległą do stycznej  $T_0$  i przez jej punkty  $W$  i  $W'$  przecięcia się z elipsą — proste  $T$  i  $T'$ , równoległe do  $Ov$ . Obie te proste będą stycznymi elipsy, jedna z nich będzie tworzyła kąt  $\varphi$ , druga kąt  $180 - \varphi$  z osią  $OX$ , jak to widać na (Rys. 8), gdzie styczne owijają elipsę w kierunku przeciwnym strzałce zegara. Szukaną styczną będzie prosta  $T$ , przechodząca przez punkt  $W$ , przecięcia się osi  $Ow$  z elipsą tuż za punktem  $V$  w kierunku rosnących kątów biegunowych  $\Theta$ , które odliczamy w kierunku strzałki zegara.

Wyznamy równanie stycznej  $T$ , przechodzącej przez punkt  $W(x, y)$  w postaci  $Y - y = tg\varphi [X - x]$ , gdzie  $tg\varphi = y'$ .

Różniczkując, mamy z równania elipsy

$\frac{x}{i^2 y} + \frac{yy'}{i^2 x} = 0$ , a zatem  $y' = tg\varphi = - [xi^2_x] : [yi^2_y]$ . Wyznamy odległość stycznej  $T$  od środka przekroju. Odległość tę mierzymy oczywiście wzdłuż  $Ou$ , osi prostopadłej do  $Ov$ , a więc i do  $T$ . Oznaczmy ją przez  $z$ .

Na mocy znanego wzoru  $z = [xtg\varphi - y] : \sqrt{1 + tg^2\varphi}$  ponieważ dla środka przekroju  $X = Y = 0$ . Stąd  $z^2 = [xtg\varphi - y]^2 : [1 + tg^2\varphi] = [x - yctg\varphi]^2 Sin^2\varphi$ . Wyżej widzieliśmy, że  $tg\varphi = - [xi^2_x] : [yi^2_y]$

a zatem  $yctg\varphi = - [y^2 i^2_y] : [xi^2_x]$ , co da

$$z^2 = \left[ x + \frac{y^2 i^2_y}{x i^2_x} \right]^2 Sin^2\varphi = \frac{i^4 y}{x^2} \left[ \frac{x^2}{i^2_y} + \frac{y^2}{i^2_x} \right]^2 Sin^2\varphi = \frac{i^4 y}{x^2} Sin^2\varphi.$$

Stąd  $x^2 = i^4 y \frac{Sin^2\varphi}{z^2}$ . Pozaatem mamy

$$tg\varphi = - \frac{x i^2_x}{y i^2_y} \text{ skąd } y^2 = \frac{x^2 i^4_x}{i^4_y} Ctg^2\varphi = i^4_x \frac{Cos^2\varphi}{z^2}.$$

Obie tylko co otrzymane wartości podstawiamy w równanie elipsy, a otrzymamy  $z^2 = i^2_x Cos^2\varphi + i^2_y Sin^2\varphi$ .

Wyżej widzieliśmy, że  $i^2_v = i^2_x Cos^2\varphi + i^2_y Sin^2\varphi$ , przeto  $z = i_v$ . *Ramię momentu bezwładności, przynależnego do danej osi środkowej, wyznacza się odległością środka przekroju od prostej, równoległej do tej osi, a stycznej do elipsy środkowej przekroju.*

Jest to nader ważna własność elipsy. Aby otrzymać jej drugą własność, wyznaczamy spólrzędne biegunowe wyżej rozpatrywanego punktu  $W$ , a mianowicie, jego promień wodzący  $\rho = OW$  i kąt biegunowy  $\Theta$ .

$$\text{Stąd } x = \rho Cos\Theta, y = \rho Sin\Theta, \text{ co daje } tg\varphi = - \frac{i^2_x \rho Cos\Theta}{i^2_y \rho Sin\Theta},$$



skąd bezpośrednio  $i^2_x + i^2_y \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\Theta = 0$ . Mnożąc wzór tylko co otrzymany przez  $F$ , to jest przez pole przekroju, będziemy mieli:

$F i^2_x + F i^2_y \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\Theta = 0$  skąd  $J_x + J_y \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\Theta = 0$ . To równanie uzależnia współczynniki kierunkowe kątów  $\varphi$  i  $\Theta$ . Wyżej mówiliśmy, że przynależne do tych kierunków średnice  $VV'$  i  $WW'$  stanowią osie sprzężone elipsy  $Ov$  i  $Ow$ , zatem zależność  $J_x + J_y \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\Theta = 0$  wyznacza kierunki osi sprzężonych środkowej elipsy przekroju.

W szczególnym wypadku, gdy oba główne momenty przekroju są równe, to jest, gdy  $J_x = J_y = J$ , elipsa bezwładności staje się kołem o promieniu  $i = \sqrt{J/F}$ .

Tutaj oczywiście  $z = \rho = i$ , a przeto  $J_v = F i^2 = J$ , jak to zresztą najlepiej uwypukla (Rys. 9), na którym wyraźnie widać styczną  $T$ , równoległą do osi  $Ov$ , nachylonej ku  $OX$  pod kątem  $\varphi$ . Ten sam wynik otrzymać można i czysto analitycznie z równania

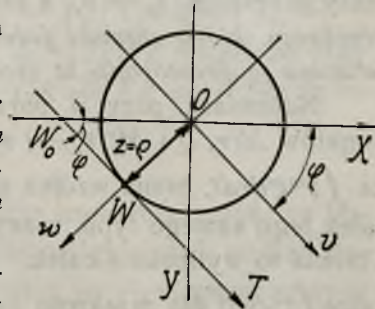
$$J_v = J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi = J(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = J.$$

Stąd wnioskujemy, że *przekrój o jednakowych obu momentach głównych ujawnia stałą wartość momentów bezwładności dla wszystkich osi środkowych.*

Stosuje się to niewątpliwie do przekrojów kołowych, pierścieniowych i wieloboków prawidłowych. We wszystkich wypadkach, gdy elipsa środkowa staje się kołem bezwładności środkowem, kierunek osi głównych jest oczywiście obojętny: każda para osi prostokątnych środkowych może być rozpatrywana, jako osie główne przekroju, dla każdej bowiem  $J_{xy} = 0$ , co wypływa bezpośrednio ze wzoru  $J_v = J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi - J_{xy} \sin 2\varphi$ , gdy uczynimy w nim  $J_x = J_y = J_v = J$ . Tego rodzaju przekrój możemy nazwać *obojętnym*. Stąd: *moment odśrodkowy, brany względem dowolnych osi środkowych prostokątnych, posiada wartość zerową dla przekroju obojętnego.*

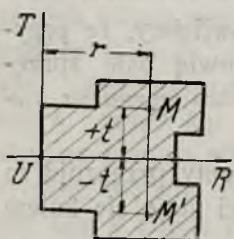
W zwykłym przekroju ma to miejsce wyłącznie tylko dla jednej pary osi prostokątnych — osi głównych przekroju. Niekiedy można zgóry przewidzieć zerową wartość momentu odśrodkowego, a mianowicie w wypadku istnienia symetrii przekroju w kierunku prostopadłym do danej osi, zwanej osią symetrii. Aby to udowodnić, bierzemy pod uwagę przekrój symetryczny względem osi  $UR$  w kierunku prostopadłym do tej prostej (Rys. 10). Poprowadźmy oś  $UT$  równoległą do kierunku symetrii przekroju przez jakikolwiek punkt  $U$ , leżący na  $UR$ .

Rozpatrując całkę  $\int r t dF = J_{rt}$  w układzie tych osi, jako sumę



Rys. 9.

składników  $r t d r d t$ , z łatwością zauważymy, że  $J_{rt} = 0$ . Wynika to bezpośrednio z określenia osi  $UR$ , jako osi symetrii, możemy bowiem zawsze dla jakiegokolwiek punktu  $M(r, t)$  przekroju — wyznaczyć punkt  $M'(r, -t)$ , symetryczny względem osi  $UR$ , a również należący do przekroju; każdej przeto różniczce  $r t d r d t$  odpowiadać będzie różniczka  $-r t d r d t$  pod znakiem całki, która musi przeto równać się zeru. To rozumowanie dotyczy wszelkiej całki typu



Rys. 10.

$\int r^m t^n d r d t$ , przy  $n$  nieparzystym, wtedy bowiem różniczki  $r^m t^n d r d t$ , wyznaczone dla punktów symetrycznych są różnego znaku i przy całkowaniu dadzą w sumie ze-

ro. Mamy więc również  $\int t d r d t = 0$ . To znaczy, że spórzędna środka masy przekroju  $t_0 = 0$ , a zatem *środek przekroju leży na osi symetrii przekroju, która stanowi jedną z głównych osi tego przekroju. Druga — przecina ją prostopadle w środku przekroju.*

Natomiast, przy  $n$  parzystym różniczki  $r^m t^n d r d t$ , wyznaczone dla punktów  $M(r, t)$  i  $M'(r, -t)$  symetrycznych, będą jednakowego znaku i całka  $\int r^m t^n d r d t$ , brana wzdłuż całego pola, będzie sumą dwóch jednakowych całek tego samego typu, branych dla obu części symetrycznych przekroju. Ułatwia to wyliczanie całek. Gdybyśmy, dajmy na to, chcieli wyznaczyć całkę  $\int t^n d r d t$  dla przekroju symetrycznego względem osi  $UR$ , to należałoby ją wyznaczyć jeno dla jednej z dwu części symetrycznych przekroju, a wynik otrzymany — podwoić. Będzie to wartość szukana. To samo dotyczy całki  $\int d r d t$  wyznaczającej pole przekroju. Zatem *obie części symetryczne przekroju mają te same pola.*

**§ 5. Wykres Mohr'a.** Wykreślanie elipsy środkowej jest niewygodne: w zastosowaniu zmuadne, to też zazwyczaj stosujemy *wykres kołowy Mohr'a*. W tym celu rozpatrujemy układ osi głównych  $OX, OY$  przekroju, oraz główne momenty  $J_x, J_y$ , przyczem zakładamy, że  $J_x \geq J_y$ . Gdyby się okazało odwrotnie, to przemianowaniem osi znowu uczynimy zadość temu warunkowi. Ze środka przekroju prowadzimy nową parę osi prostokątnych  $Ov, Ou$  i oznaczamy kąt  $\varphi$  nachylenia osi  $Ov$  ku  $OX$ . Ponieważ  $v = x \cos \varphi + y \sin \varphi$ , oraz  $u = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$ , przeto

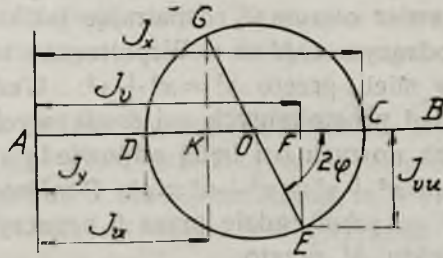
$J_v = \int [-x \sin \varphi + y \cos \varphi]^2 dF = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi$  oraz  $J_{uv} = \int [x \cos \varphi + y \sin \varphi] [-x \sin \varphi + y \cos \varphi] dF = [J_x - J_y] \sin \varphi \cos \varphi$ . Wzór dla  $J_u$  pomijamy, możemy go bowiem wypisać każdorazowo wprost, zmieniając we wzorze dla  $J_v$  kąt  $\varphi$  na  $\varphi + \pi/2$ . Na mocy wzorów  $2 \cos^2 \varphi = 1 + \cos 2\varphi$



oraz  $2 \sin^2 \varphi = 1 - \cos 2\varphi$  mamy

$$J_v = \frac{1}{2} [J_x + J_y] + \frac{1}{2} [J_x - J_y] \cos 2\varphi \text{ oraz } J_{uv} = \frac{1}{2} [J_x - J_y] \sin 2\varphi.$$

Te wzory dają wykres *Mohr'a* (Rys. 11). Odkładamy na prostej  $AB$  odcinki  $AD = J_y$ ,  $AC = J_x$ . Na różnicy  $DC$  tych odcinków, jako na średnicy, budujemy koło, przyczem  $AO = \frac{1}{2} [J_x + J_y]$ , gdzie przez  $O$  oznaczyliśmy środek koła. Jego promień będzie  $R = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} [J_x - J_y]$ . Odkładając od punktu  $C$  kąt  $\sphericalangle COE = 2\varphi$ , prowadzimy średnicę  $GE$  i prostopadłe  $GK$  i  $FE$  do  $AB$ . Zatem  $OF = R \cos 2\varphi$  i ostatecznie



Rys. 11.

$$AF = AO + OF = \frac{1}{2} [J_x + J_y] + \frac{1}{2} [J_x - J_y] \cos 2\varphi = J_v. —$$

Aby otrzymać  $J_u$  należy miasto  $\varphi$  brać  $\varphi + \frac{\pi}{2}$ , czyli miasto  $2\varphi$  brać  $2\varphi + \pi$ , zatem  $AK = J_u$ . Również mamy  $GK = EF = R \sin 2\varphi = \frac{1}{2} [J_x - J_y] \sin 2\varphi = J_{uv}$ .

Wyznaczyliśmy więc  $J_v$ ,  $J_u$ ,  $J_{uv}$ .

Odwrotne zagadnienie również nie nastęrcza trudności, możemy bowiem wyznaczyć zawsze  $J_x$ ,  $J_y$  oraz kierunki osi głównych według danych  $J_v$ ,  $J_u$ ,  $J_{uv}$ , przynależnych do jakiegokolwiek pary osi prostokątnych środkowych. W tym celu odkładamy na prostej  $AB$ , począwszy od punktu  $A$  odcinki  $AF = J_v$  oraz  $AK = J_u$ , przyczem znów zakładamy, jak wyżej, że  $J_v > J_u$ . Następnie budujemy prostopadłe do  $AB$  odcinki  $EF = KG = J_{uv}$ . Łączymy  $E$  z  $G$  i zataczamy promieniem  $\frac{1}{2} EG = R$  koło, które wyznaczy na  $AB$  punkty  $C$  i  $D$ . Będziemy przeto mieli  $AC = J_x$ ,  $AD = J_y$ , a kąt odchylenia osi  $Ov$  od  $OX$  określi połowa łuku  $CE$ .

Możemy również wyznaczyć  $J_x$ ,  $J_y$  rachunkowo. Z wykresu widzimy, że  $AO = \frac{1}{2} [AF + AK] = \frac{1}{2} [J_v + J_u]$ , nadto  $FO = \frac{1}{2} [AF - AK] = \frac{1}{2} [J_v - J_u]$  oraz  $OC = R = \sqrt{FO^2 + FE^2}$ , zatem wobec tego, że  $J_x = AO + OC$  oraz  $J_y = AO - OC$  będziemy mieli dla *momentów głównych*

$$J_x = \frac{1}{2} [J_v + J_u] + \sqrt{\frac{1}{4} [J_v - J_u]^2 + J_{uv}^2},$$

$$J_y = \frac{1}{2} [J_v + J_u] - \sqrt{\frac{1}{4} [J_v - J_u]^2 + J_{uv}^2} \dots (5)$$

Nadto rzut oka na wykres pozwoli nam wyprowadzić nader ciekawą włas-

ność momentów bezwładności przekroju. Ponieważ

$$OA = \frac{1}{2} [J_x + J_y] = \frac{1}{2} [J_v + J_u], \text{ przeto } J_x + J_y = J_v + J_u.$$

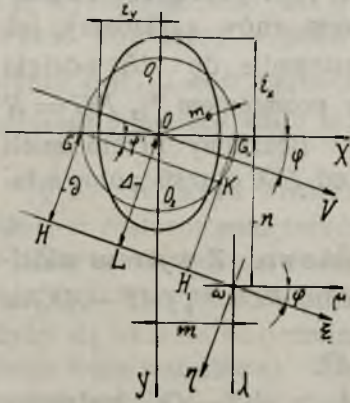
**§ 6. Moment biegunowy przekroju.** Ten sam wynik możemy również otrzymać, rozpatrując jakikolwiek punkt  $M$  przekroju o promieniu wodzącym  $OM = \rho$ . Współrzędne tego punktu niech będą  $x, y$ . Będziemy mieli przeto  $\rho^2 = x^2 + y^2$ . Weźmy nadto pod uwagę jakikolwiek inny układ prostokątnych osi środkowych  $Ov, Ou$ . Spółrzędne punktu  $M$  dla tych nowych osi będą odpowiednio  $v, u$ , przyczem znowu  $\rho^2 = v^2 + u^2$ . Stąd  $x^2 + y^2 = v^2 + u^2 = \rho^2$ . Ponieważ  $dF = dx dy$ , lub też  $dF = dv du$ , albo  $dF = \rho d\rho d\theta$ , gdzie przez  $\theta$  oznaczyliśmy kąt biegunowy, przynależny do punktu  $M$ , przeto

$$\int x^2 dF + \int y^2 dF = \int v^2 dF + \int u^2 dF = \int \rho^2 dF$$

co daje bezpośrednio  $J_x + J_y = J_v + J_u = J_0$ , gdzie przez  $J_0 = \int \rho^2 dF$  oznaczyliśmy *moment biegunowy przekroju*.

Stąd wnioskujemy, że *suma momentów bezwładności, przynależnych do dwu prostokątnych osi środkowych jest wielkością stałą, niezależną od kierunku osi i daje wartość momentu biegunowego przekroju.*

**§ 7. Oś mimośrodkowe.** Weźmy pod uwagę osie prostokątne mimośrodkowe  $\omega\xi, \omega\eta$ , wyprowadzone z dowolnego punktu  $\omega$ . Oznaczmy przez  $m, n$  spółrzędne tego punktu (rys. 12) w układzie osi głównych



Rys. 12.

$OX, OY$  środkowych przekroju i poprowadźmy przezeń osie  $\omega\mu, \omega\lambda$ , równoległe do osi głównych  $OX, OY$ . Kąt nachylenia osi  $\omega\xi$  ku  $\omega\mu$  niech będzie  $\varphi$ ; nadto przez  $J_x, J_y$  oznaczmy główne momenty przekroju, przez  $J_\mu, J_\lambda, J_\xi, J_\eta$  — momenty bezwładności mimośrodkowe względem osi  $\omega\mu, \omega\lambda, \omega\xi, \omega\eta$ , wreszcie przez  $J_{\mu\lambda}, J_{\xi\eta}$  odnośne momenty odśrodkowe. Na mocy wzorów przejścia  $\xi = \mu \cos \varphi + \lambda \sin \varphi, \eta = -\mu \sin \varphi + \lambda \cos \varphi$  otrzymamy

$$J_\xi = \int \eta^2 dF = \int [-\mu \sin \varphi + \lambda \cos \varphi]^2 d\mu d\lambda = J_\mu \cos^2 \varphi + J_\lambda \sin^2 \varphi - J_{\mu\lambda} \sin 2\varphi,$$

$$J_\eta = \int \xi^2 dF = \int [\mu \cos \varphi + \lambda \sin \varphi]^2 d\mu d\lambda = J_\mu \sin^2 \varphi + J_\lambda \cos^2 \varphi + J_{\mu\lambda} \sin 2\varphi,$$

$$J_{\xi\eta} = \int \xi \eta dF = \int [\mu \cos \varphi + \lambda \sin \varphi] [-\mu \sin \varphi + \lambda \cos \varphi] d\mu d\lambda = \frac{1}{2} [J_\mu - J_\lambda] \sin 2\varphi + J_{\mu\lambda} \cos 2\varphi.$$



Zupełnie podobne wzory mieliśmy wyżej dla osi środkowych, powtarzając przeto słowo w słowo szereg rozumowań, możemy wypowiedzieć następujący uogólniony wniosek: *istnieją zawsze dwa wzajemnie prostopadłe kierunki, odpowiadające największości i najmniejszości momentów bezwładności przekroju, branych dla osi mimośrodkowych. Te skrajne wartości przynależą do osi mimośrodkowych prostokątnych, dla których moment odśrodkowy ma wartość równą zeru.*

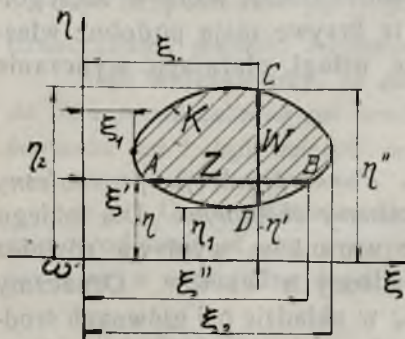
Chcąc wyznaczyć kierunek tych osi, należy znaleźć odnośny kąt  $\varphi$  z równania  $\operatorname{tg} 2\varphi = 2 J_{\mu\lambda} : [J_\lambda - J_\mu]$ . Osie prostokątne w ten sposób wyznaczone zowiemy *osiami głównymi mimośrodkowymi*, a przynależne do nich *skrajne momenty bezwładności momentami głównymi mimośrodkowymi*, przyczem niewątpliwie i tu znów: *główne momenty bezwładności mimośrodkowe całkowicie określają rodzaj zmienności momentu bezwładności, branego względem dowolnej osi mimośrodkowej*. I tu przeto możemy wyznaczyć *elipsę bezwładności mimośrodkową*, która w szczególnym wypadku może przejść w *koło*. Obie te krzywe mają podobne własności. I tu wykres *Mohr'a* oddaje cenne usługi, ułatwiając wyliczanie momentów.

**§ 8. Punkty obojętne przekroju.** *Punkt przekroju, przynależny do koła bezwładności, mimośrodkowego, zowiemy obojętnym.* Dla takiego punktu  $J_\xi = J_\eta = J_\mu = J_\lambda = J$ . Z tych warunków wypływa również  $J_{\mu\lambda} = J_{\xi\eta} = 0$  na mocy tylko co wyprowadzonych wzorów. Oznaczmy współrzędne punktu obojętnego przez  $m_0 n_0$  w układzie osi głównych środkowych  $OX, OY$ . Ponieważ niewątpliwie  $J_\mu = J_x + F n_0^2$ ,  $J_\lambda = J_y + F m_0^2$  oraz  $J_{\mu\lambda} = F m_0 n_0$ , przeto dla punktu obojętnego  $J_x + F n_0^2 = J_y + F m_0^2$  czyli  $i_x^2 + n_0^2 = i_y^2 + m_0^2$  oraz  $m_0 n_0 = 0$ . Niech będzie dajmy na to  $i_x > i_y$  czyli  $J_x > J_y$ . W tym wypadku  $n_0 = 0$  oraz  $m_0 = \pm \sqrt{i_x^2 - i_y^2}$ . Aby wykreślić otrzymane w ten sposób punkty obojętne, zataczamy ze środka przekroju koło, przechodzące przez ogniska elipsy środkowej. To *koło ogniskowe* wyznaczy na drugiej osi punkty obojętne przekroju. Z łatwością można to spostrzedz, zważywszy, że odległość ogniskowa wynosi  $\sqrt{i_x^2 - i_y^2}$  w wypadku gdy  $i_x > i_y$ . Dla przekroju obojętnego  $m_0 = n_0 = 0$  oba punkty obojętne leżą w środku przekroju.

*Istnieją zawsze dwa punkty obojętne, leżące na prostej, przechodzącej przez małą oś środkowej elipsy bezwładności w odległości ogniskowej od środka przekroju; panuje w nich stała wartość momentów bezwładności mimośrodkowych oraz zerowa wartość momentu odśrodkowego dla wszelkich osi prostokątnych, przez te punkty przechodzących. Dla przekrojów obojętnych istnieje tylko jeden punkt obojętny — środek przekroju.*

Punkty obojętne umożliwiają wyznaczanie momentów bezwładności mimośrodkowych. Prowadzimy (Rys. 12) oś  $OV$  pod kątem  $\varphi$  do osi  $OX$ , a wtedy dla tej osi  $J_v = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi = F (i_x^2 \cos^2 \varphi + i_y^2 \sin^2 \varphi) = F [i_x^2 - (i_x^2 - i_y^2) \sin^2 \varphi] = F [i_x^2 - m_0 \sin^2 \varphi]$ . Ponieważ osie  $OV$  i  $\omega_{\xi}$  są równoległe, przeto  $J_{\xi} = J_v + F \Delta^2$ , gdzie  $\Delta$  oznacza odległość  $OL$  środka przekroju od osi  $\omega_{\xi}$ . Stąd  $J_{\xi} = F [i_x^2 + \Delta^2 - m_0 \sin^2 \varphi] = F [i_x^2 + (\Delta + m_0 \sin \varphi) (\Delta - m_0 \sin \varphi)]$ . Poprowadźmy z punktów obojętnych  $G$  i  $G_1$  odcinki  $GH = \delta$  i  $G_1H_1 = f$  prostopadłe do osi  $\omega_{\xi}$  oraz  $GK \parallel \omega_{\xi}$ . Ponieważ niewątpliwie kąt  $G_1GK = \varphi$ , przeto  $\delta = \Delta - m_0 \sin \varphi$  oraz  $f = \Delta + m_0 \sin \varphi$  i ostatecznie  $J_{\xi} = F [i_x^2 + fd]$ .

**§ 9. Momenty przekrojów wypukłych.** Nazywamy przekrój wypukłym, gdy jakakolwiek prosta przecina jego obwód w dwu punktach. Weźmy pod uwagę przekrój wypukły (Rys. 13). Zgodnie z założeniem



Rys. 13.

wszelka prosta, w odległości  $\eta$  równoległe do osi  $\omega_{\xi}$  poprowadzona, przecinie obwód przekroju w punktach  $A (\xi', \eta)$  i  $B (\xi'', \eta)$ , a prosta w odległości  $\xi$  równoległa do osi  $\omega_{\eta}$  poprowadzona da punkty przecięcia obwodu  $C (\xi, \eta')$  i  $D (\xi, \eta'')$ . Oznaczmy skrajne spółrządne obwodu, równoległe do  $\omega_{\xi}$  przez  $\xi_1$  i  $\xi_2$ , a równoległe do  $\omega_{\eta}$  przez  $\eta_1$  i  $\eta_2$ , przyczem musi być oczywiście  $\xi_2 \geq \xi \geq \xi_1$  oraz  $\eta_2 \geq \eta \geq \eta_1$ . W tym założeniu mamy bezpośrednio

$$\int \xi^m \eta^n dF = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi^m d\xi \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta^n d\eta \quad \int \xi^m \eta^n dF = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta^n d\eta \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi^m d\xi \quad (6).$$

Tutaj obie wartości  $\eta_1$  i  $\eta_2$  są w ogólnym wypadku zależne od  $\xi$  i otrzymane być mogą jako pierwiastki równania obwodu  $K(\xi, \eta) = 0$ , rozwiązanego względem  $\eta$ . Rozwiązując to samo równanie względem  $\xi$  otrzymamy  $\xi_1$  i  $\xi_2$  w funkcji  $\eta$ . Nadto skrajne wartości  $\xi_1$  i  $\xi_2$  otrzymamy, jako pierwiastki stałe równania, które wyznaczymy, rugując  $\eta$  z równań

$$K(\xi, \eta) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial K(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0.$$

Podobnie wartości  $\eta_1$  i  $\eta_2$  otrzymamy jako pierwiastki stałe równania, które wyznaczymy, rugując tym razem  $\xi$  z równań

$$K(\xi, \eta) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial K(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0.$$



Gdy  $m = 0$ , a więc dla  $F, F_{\xi}, J_{\xi}$  będziemy mieli

$$\int \eta^n dF = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta^n d\eta \int_{\xi'}^{\xi''} d\xi = \int_{\eta_1}^{\eta_2} [\xi'' - \xi'] \eta^n d\eta = \int_{\eta_1}^{\eta_2} Z \eta^n d\eta \dots (7).$$

Całkę tę wyznaczymy z łatwością, wyraziwszy  $z = \xi'' - \xi' = AB$  w zależności od  $\eta$ . Gdy z kolei  $\eta = 0$ , a więc dla  $F, F_{\eta}, J_{\eta}$  będziemy mieli znowu:

$$\int \xi^m dF = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi^m d\xi \int_{\eta'}^{\eta''} d\eta = \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\eta'' - \eta'] \xi^m d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} W \xi^m d\xi \dots (8)$$

gdzie należy oczywiście wyznaczyć  $w = \eta'' - \eta' = CD$  w funkcji od  $\xi$ , aby móc całkować. Tylko co wyprowadzone wzory stanowią nieraz dość znaczne ułatwienie przy wyznaczaniu momentów, należy jeno przekrój dzielić na składowe przekroje wypukłe.

**§ 10. Momenty przekrojów rzutowanych.** Rzucając wszystkie punkty przekroju na daną płaszczyznę otrzymamy przekrój rzutowany. Momenty przekroju rzutowanego zależą od momentów przekroju macierzystego. Aby to udowodnić, ułożmy oś  $\omega_{\xi}$  na prostej przecięcia się płaszczyzn obu przekrojów. W dowolnym punkcie  $\omega$  tej osi poprowadzimy oś prostopadłą  $\omega_{\eta}$ , w płaszczyźnie przekroju macierzystego leżącą i oś  $\omega_{\eta_1}$  w płaszczyźnie jego rzutu. W ten sposób oś  $\omega_{\eta_1}$  będzie rzutem osi  $\omega_{\eta}$ , przyczem pierwotne spółrzedne  $\eta$  zmieniają się w rzucie w jednakowym stosunku, przechodząc w rzuty  $\eta_1$ . Zatem  $\eta_1 = \eta \cos \alpha$ , gdzie przez  $\alpha$  oznaczyliśmy kąt, jaki tworzą osie  $\omega_{\eta}$  i  $\omega_{\eta_1}$ . Stąd również  $d\eta_1 = \cos \alpha d\eta$ , cały bowiem przekrój macierzysty wydłuży się w rzucie jednostajnie w kierunku prostopadłym do osi  $\omega_{\xi}$ , przyczem jednak wszystkie jego odcięte  $\xi$  pozostaną niezmienione. Wobec  $\xi_1 = \xi$  możemy tedy napisać w ogólnym wypadku:

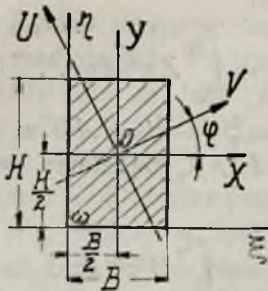
$$\int \xi_1^m \eta_1^n d\xi_1 d\eta_1 = \cos^{n+1} \alpha \int \xi^m \eta^n d\xi d\eta = \cos^{n+1} \alpha \int \xi^m \eta^n dF \dots (9).$$

*Moment przekroju rzutowanego równy jest odnośnemu momentowi przekroju macierzystego, pomnożonemu przez  $[\cos \alpha]^{n+1}$ .*

**§ 11. Przykłady i ćwiczenia. 1<sup>o</sup>. Przekrój prostokątny.**

Oznaczmy przez  $H$  wysokość, przez  $B$  podstawę prostokąta (rys. 14). Przez środek przekroju  $O$  prowadzimy  $OX \parallel B$  i  $OY \parallel H$ . Jako wzajemnie prostopadłe dwie osie symetrii przekroju, stanowią one układ osi głównych. Dla tych osi  $F_x = F_y = J_{xy} = 0$ . Wyznaczmy pozostałe momenty. W tym celu wypisujemy równanie obwodu

$$K(x, y) = \left[ y^2 - \frac{H^2}{4} \right] \left[ x^2 - \frac{B^2}{4} \right] = 0,$$



Rys. 14.

czyli łączne równanie czterech prostych

$$y = \frac{H}{2}, y = -\frac{H}{2}, x = \frac{B}{2}, x = -\frac{B}{2}.$$

Da ono po rozwiązaniu względem  $y$  granice całkowania

$$y'' = \frac{H}{2}, y' = -\frac{H}{2}$$

w danym wypadku zupełnie niezależne od zmiennej  $x$ . Aby z kolei wyznaczyć granice całkowania po tej zmiennej, bierzemy

$$\frac{\partial K(xy)}{\partial y} = 2y = 0$$

i tę wartość podstawiamy w równanie obwodu. Jako wynik wyrugowania  $y$  otrzymamy

$$x^2 = \frac{B^2}{4} \text{ stąd } x_1 = -\frac{B}{2}, x_2 = \frac{B}{2}$$

zatem

$$J_x = \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-H/2}^{H/2} y^2 dy = 1/12 BH^3, J_y = \int_{-B/2}^{B/2} x^2 dx \int_{-H/2}^{H/2} dy = 1/12 B^3 H \dots \dots \dots (10).$$

Dla osi jakiegokolwiek  $OV$  pochylonej pod kątem  $\varphi$  ku osi głównej  $OX$  będziemy mieli

$$J_v = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi = \frac{BH}{12} [H^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi],$$

a dla prostopadłej  $OU$  podobnie:  $J_u = J_x \sin^2 \varphi + J_y \cos^2 \varphi = \frac{BH}{12} [H^2 \sin^2 \varphi + B^2 \cos^2 \varphi]$  Nadto  $J_{uv} = 1/2 [J_x - J_y] \sin 2\varphi = 1/24 BH [H^2 - B^2] \sin 2\varphi.$

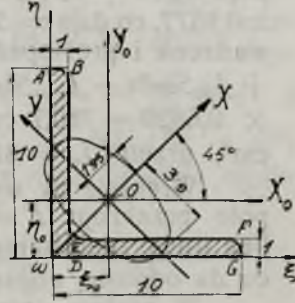
Dla jakichkolwiek innych osi równoległych do głównych, lecz odległych o  $\xi_0 \eta_0$  od środka mamy wartości momentów  $J_\xi = J_x + F \eta_0^2, J_\eta = J_y + F \xi_0^2, J_{\xi\eta} = F \xi_0 \eta_0.$  Dla osi wierzchołkowych nadto  $\xi_0 = \frac{B}{2}, \eta_0 = \frac{H}{2}$  zatem  $J_\xi = 1/12 BH^3 + 1/4 BH^3 = 1/3 BH^3, J_\eta = 1/12 B^3 H + 1/4 B^3 H = 1/3 B^3 H, J_{\xi\eta} = 1/4 B^2 H^2.$  Nadto oczywiście  $F_\xi = \eta_0 F = 1/2 BH^2$  oraz  $F_\eta = \xi_0 F = 1/2 BH^2.$

Chcąc wyznaczyć elipsę środkową przekroju określamy wartość

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \frac{H}{\sqrt{12}}, i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \frac{B}{\sqrt{12}}.$$



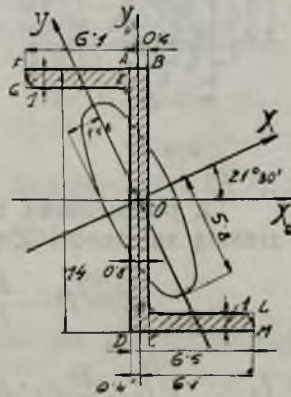
**2°. Kątownik równoramienny.** Bierzemy pod uwagę przekrój kątownika równoramiennego № 10. Pomijając drobne zaokrąglenia, wyznaczmy jego momenty przekroju, a nadto podamy w nawiasach [—] ściłą ich tabliczną wartość, jaką otrzymalibyśmy, biorąc pod uwagę zaokrąglenia. Przedewszystkiem wyznaczmy środek  $O$  przekroju (rys. 15). Pole przekroju  $F = 10 \times 1 + 9 \times 1 = 19 \text{ cm}^2$  [19,2], przy-  
 czem rozpatrujemy przekrój, jako złożony z dwu prostokątów  $AB\omega D$  i  $DEFG$ . Podział ten i nadal utrzymamy przy wyznaczaniu momentów. Dla osi wierzchołkowych, idących wzdłuż pasów  $\omega A$  i  $\omega G$ , będziemy mieli  $F_{\xi} = 1 \times 10 \times 5 + 1 \times 9 \times 0,5 = 54,5 \text{ cm}^2$ , a więc spólrzędna środka  $\eta_0 = F_{\xi} : F = 2,87 \text{ cm}$ . [2,82]. Ponieważ mamy tu do czynienia z przekrojem równoramiennym, posiadającym oś symetrii  $\omega X$ , pochyloną ku  $\omega \xi$  pod kątem  $45^\circ$ , przeto na mocy symetrii  $\eta_0 = \xi_0 = 2,87 \text{ cm}$ . Nadto  $J_{\xi} = \frac{1}{3} \times 1 \times 10^3 + \frac{1}{3} \times 9 \times 1^3 = 336,3 \text{ cm}^4$ .



Rys 15.

Prowadząc przez środek osie  $OX_0, OY_0$  równoległe do wierzchołkowych, mamy  $J_{x_0} = J_{\xi} - F\eta_0^2 = 336,3 - 19 \times 2,87^2 = 179,8 \text{ cm}^4$  [177], przy-  
 czem na mocy symetrii  $J_{y_0} = J_{x_0} = 179,8 \text{ cm}^4$ .  
 Zatem we wzorze dla  $\tan 2\alpha$  mianownik będzie równy zero, co da  $\alpha = 45^\circ$ , o ile  $J_{x_0 y_0} \neq 0$ . Należy to sprawdzić, inaczej bowiem, przy  $J_{x_0 y_0} = 0$  mielibyśmy miasto elipsy — koło bezwładności środkowe. Mamy  $J_{\xi \eta} = 1 \times 10 \times 5 \times 0,5 + 1 \times 9 \times 0,5 \times 5,5 = 49,8 \text{ cm}^4 = J_{x_0 y_0} - F\xi_0 \eta_0$ .  
 Stąd  $J_{x_0 y_0} = 49,8 - 19 \times 2,87^2 = -106,7 \text{ cm}^4$  i ostatecznie  $J_x = J_{x_0} \cos^2 45^\circ + J_{y_0} \sin^2 45^\circ - J_{x_0 y_0} \sin 90^\circ = 179,8 + 106,7 = 286,5 \text{ cm}^4$ . [280].  
 Momentu  $J_y$  można nie wyliczać, ponieważ  $J_x + J_y = J_{x_0} + J_{y_0} = 2 \times 179,8 \text{ cm}^4$ , a zatem  $J_y = 359,6 - 286,5 = 73,1 \text{ cm}^4$  [73,3].  
 Nadto z łatwością znajdziemy  $i_x = 3,88 \text{ cm}$ . [3,82] oraz  $i_y = 1,96 \text{ cm}$ . [1,95], będziemy więc mogli wykreślić odnośną elipsę.

**3°. Zetownik.** Choć przekrój zetownika nie ma osi symetrii, to jednak odrazu spostrzec się daje, że jego środek (rys. 16) leży w punkcie  $O$ , na połowie wysokości średnika  $ABCD$ . Środkową oś  $OX_0$  prowadzimy przez oś średnika, drugą oś  $OY_0$  kierujemy prostopadle i rozpatrujemy przekrój, jako złożony z trzech prostokątów  $AEGF, ABCD$  i  $CKLM$ . Pomijając drobne zaokrąglenia mamy przeto  $J_{x_0} = \frac{1}{12} \times 0,8 \times 14^3 + 2 \times \frac{1}{12} \times 5,7 \times 1^3 + 2 \times 5,7 \times 1 \times 6,5^2 = 665,5 \text{ cm}^4$  [676],  
 $J_{y_0} = \frac{1}{12} \times 14 \times 0,8^3 + 2 \times \frac{1}{12} \times 1 \times 5,7^3 + 2 \times 5,7 \times 1 \times [0,4 + \frac{1}{2} \times 5,7]^2 = 151,9 \text{ cm}^4$  [148]. Nadto, ponieważ moment odśrodkowy średnika jest oczywiście zerem dla osi  $OX_0, OY_0$ , przeto należy jeno wy-



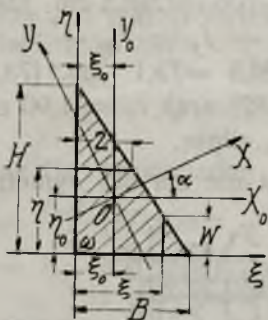
Rys. 16.

znaczyć momenty odśrodkowe obu bocznych prostokątów, aby otrzymać  $J_{xy_0}$ . Oznaczmy przez  $\xi_0, \eta_0$  spólrzędne środków owych prostokątów. Moment odśrodkowy każdego z nich będzie  $F_0 \xi_0 \eta_0$ , gdzie  $F_0$  oznacza pole prostokąta bocznego. Zatem  $J_{xy_0} = 5,7 \times 1 \times [7 - 0,5] \times [-3,25] + 5,7 \times 1 \times [-6,5] \times 3,25 = -240,8 \text{ cm}^4$  [239]. Stąd  $\operatorname{tg} 2\alpha = 2J_{xy_0} : [J_{y_0} - J_{x_0}] = -2 \times 240,8 : [151,9 - 665,5] = 0,9377$ , co daje  $\alpha = 21^\circ 30' [21^\circ 5']$ . Oś główna  $OX$ , pod tym kątem poprowadzona i prostopadła do niej  $OY$  wyznaczają momenty:  $J_x = J_{x_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha - J_{xy_0} \sin 2\alpha = 665,5 \times 0,9304^2 + 151,9 \times 0,3665^2 + 240,8 \times 0,6820 = 760,7 \text{ cm}^4$  [768]. Ponieważ  $J_x + J_y = J_{x_0} + J_{y_0} = 817,4 \text{ cm}^4$ , przeto  $J_y = 817,4 - 760,7 = 56,7 \text{ cm}^4$  [56,4].

Wreszcie by wyznaczyć elipsę bezwładności środkową, określamy pole przekroju  $F = 14 \times 0,8 + 2 \times 1 \times 5,7 = 22,6 \text{ cm}^2$  [22,9] skąd bez trudu znajdziemy  $i_x = 5,80 \text{ cm}$  [5,79] oraz  $i_y = 1,58 \text{ cm}$  [1,57], co da odnośną elipsę.

W praktyce przeważnie przekroje złożone są z prostokątów. Powyższe dwa przykłady wskazują, jak wyznaczać momenty takich przekrojów. Czasami spotykamy jednak składowe przekroje—trójkąty lub trapezy. Trapez możemy zawsze rozłożyć na prostokąt i dwa trójkąty prostokątne, a trójkąt na dwa trójkąty prostokątne, chcąc przeto rozszerzyć zakres naszych badań należy wziąć pod uwagę:

**4<sup>o</sup>. Trójkąt prostokątny.** Wierzchołkową oś  $\omega \xi$  prowadzimy przez podstawę  $B$  trójkąta—drugą oś  $\omega \eta$  przez wysokość  $H$ . Przeciwnoprostokątna odetnie na osiach odcinki  $B$  i  $H$ . Z łatwości (rys. 17) daje się tu zauważyć, iż  $\xi_1 = 0, \xi_2 = B, \eta_1 = 0, \eta_2 = H$ , a nadto  $\xi' = 0, \xi'' = Z, \eta' = 0, \eta'' = W$ , jak to zresztą najlepiej widać z rysunku. Ponieważ z góry wiemy, gdzie szukać środka przekroju, przeto odrazu wyznaczamy te momenty, które posłużą do określenia kąta  $\alpha$ ; a więc



Rys. 17.

$$J_{\xi} = \int_0^H \eta^2 d\eta \int_0^Z d\xi = \int_0^H Z \eta^2 d\eta,$$

$$J_{\eta} = \int_0^B \xi^2 d\xi \int_0^W d\eta = \int_0^B W \xi^2 d\xi,$$

$$J_{\xi\eta} = \int_0^H \eta d\eta \int_0^Z \xi d\xi = 1/2 \int_0^H Z^2 \eta d\eta.$$

Z podobieństwa trójkątów z łatwością ustalimy następujące proste zresztą zależności  $Z : B = [H - \eta] : H, W : H = [B - \xi] : B$  skąd

$$Z = B - \frac{B}{H} \eta \text{ oraz } W = H - \frac{H}{B} \xi \text{ i ostatecznie:}$$

$$J_{\xi} = \int_0^H [B - \frac{B}{H} \eta] \eta^2 d\eta = 1/12 B H^3, \quad J_{\eta} = \int_0^B [H - \frac{H}{B} \xi] \xi^2 d\xi = 1/12 B^3 H,$$



$$J_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \int_0^H [B - \frac{B}{H}\eta]^2 \eta d\eta = \frac{1}{24} B^2 H^2.$$

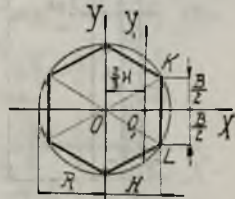
Ponieważ spólrzędne środka przekroju są  $\xi_0 = \frac{B}{3}$ ,  $\eta_0 = \frac{H}{3}$ , przeto dla osi  $OX_0$   $OY_0$ , środkowych a równoległych będziemy mieli  $J_{x_0} = J_{\xi} - F\eta_0^2 = \frac{1}{12} BH^3 - \frac{1}{2} BH \times \frac{1}{9} H^2 = \frac{1}{36} BH^3$ ,  $J_{y_0} = J_{\eta} - F\xi_0^2 = \frac{1}{12} B^3H - \frac{1}{2} BH \times \frac{1}{9} B^2 = \frac{1}{36} B^3H$ ,  $J_{x_0y_0} = J_{\xi\eta} - F\xi_0\eta_0 = \frac{1}{24} B^2H^2 - \frac{1}{2} BH \times \frac{H}{3} \times \frac{B}{3} = -\frac{1}{72} B^2H^2$ . Stąd  $I_{g2\alpha} = 2J_{x_0y_0} : [J_{y_0} - J_{x_0}] = -\frac{2}{72} B^2H^2 : \frac{1}{36} BH [B^2 - H^2] = = BH : [H + B] [H - B]$  i ostatecznie na mocy wzorów ogólnych będziemy mieli dla momentów głównych:

$$J_x = \frac{1}{2} [J_{x_0} + J_{y_0}] + \sqrt{\frac{1}{4} [J_{x_0} - J_{y_0}]^2 + J_{x_0y_0}^2} = \\ = \frac{HB}{72} [H^2 + B^2 + \sqrt{[H^2 - B^2]^2 + H^2B^2}].$$

$$J_y = \frac{1}{2} [J_{x_0} + J_{y_0}] - \sqrt{\frac{1}{4} [J_{x_0} - J_{y_0}]^2 + J_{x_0y_0}^2} = \\ = \frac{HB}{72} [H^2 + B^2 - \sqrt{[H^2 - B^2]^2 + H^2B^2}],$$

z których bezpośrednio wyznaczymy również i  $i_x$ ,  $i_y$ .

**5°. Wielobok prawidłowy.** Tego rodzaju przekroje, jako posiadające więcej niż dwie osie symetrii, należą do przekrojów obojętnych. Wystarcza przeto wyznaczyć ich moment bezwładności dla jakiegokolwiek osi środkowej  $OX$ . Aby to skutecznie, dzielimy przekrój (rys. 18) na  $n$  trójkątów, odpowiednio do  $n$  boków wielokąta, za pomocą  $n$  promieni wierzchołkowych. Weźmy pod uwagę jeden z tych trójkątów  $OKL$ ; oś środkową  $OX$  skierujemy prostopadłe do boku  $B$  — podstawy trójkąta. Wysokość jego niech będzie  $H$ . Promień koła opisanego  $R = OK = OL = \sqrt{H^2 + \frac{1}{4}B^2}$ . Na mocy wzorów, wyżej wyprowadzonych, moment trójkąta  $OKL$  względem osi  $OX$  będzie



Rys. 18.

$J = 2 \times \frac{1}{12} \times H \times \left[\frac{B}{2}\right]^3 = \frac{1}{48} HB^3$ , a względem osi  $O_1Y_1$ , przechodzącej przez środek  $O_1$  trójkąta  $OKL$ , będzie

$$J_1 = 2 \times \frac{1}{36} \times H^3 \times \frac{B}{2} = \frac{1}{36} BH^3.$$

Ponieważ oś  $OY$  wierzchołkowa jest równoległa do środkowej osi  $O_1Y_1$ , przeto dla tej osi moment bezwładności

$$J'' = J_1 + F \times OO_1^2 = \frac{1}{36} BH^3 + \frac{1}{2} BH \times \left[\frac{2}{3} H\right]^2 = \frac{1}{4} BH^3.$$

Nazwijmy wierzchołkowym momentem biegunowym trójkąta tylko co rozpatrywanego moment  $J_w = J' + J'' = \frac{1}{48} HB^3 + \frac{1}{4} BH^3$ .

Z łatwością postrzec się daje, że moment biegunowy przekroju  $J_o = nJ_w = J_x + J_y$ . Ponieważ jednak dla przekroju obojętnego  $J_x = J_y = J$  przeto

$$J = \frac{1}{2} J_o = \frac{n}{2} J_w = \frac{n}{2} BH \left[ \frac{1}{48} B^2 + \frac{1}{4} H^2 \right] = F \left[ \frac{1}{48} B^2 + \frac{1}{4} H^2 \right] = \\ = \frac{F}{4} \left[ H^2 + \frac{B^2}{12} \right] = \frac{F}{4} \left[ R^2 - \frac{1}{6} B^2 \right],$$

gdzie przez  $F$  oznaczyliśmy pole wieloboku. Dla sześciokąta dajmy na to mamy  $B = R$ , a przeto  $J = \frac{5}{24} FR^2 = \frac{5}{16} \sqrt{3} R^4$ .

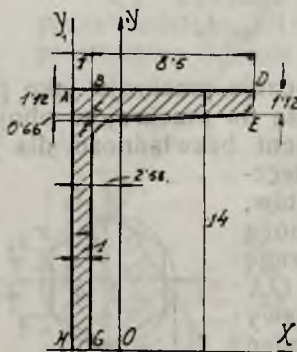
Nader ciekawy wypadek otrzymany gdy  $B = 0$ , wtedy bowiem wielobok przechodzi w koło. Dla tego przekroju będzie więc

$$J = \frac{1}{4} FR^2 = \frac{1}{4} \pi R^4.$$

**6°. Ceownik.** Bierzemy pod uwagę przekrój ceownika № 28 (podany na rys. 19). Pomijamy drobne zaokrąglenia i wyznaczamy jego momenty, pisząc w nawiasach ścisłą ich tabliczną wartość, jaką otrzymalibyśmy, uwzględniając owe zaokrąglenia w przekroju.

Wobec zupełnej symetrii przekroju bierzemy pod uwagę jego połowę, ponad osią symetrii  $HX$  leżącą, która jest oczywiście wobec tego osią główną przekroju. Chcąc wyznaczyć momenty, dzielimy przekrój na dwa prostokąty  $ABGH$ , i  $BDEC$  oraz trójkąt  $ECF$ . Przedewszystkiem wyznaczamy pole przekroju, nie znamy bowiem położenia jego środka  $O$ . Połowa pola  $\frac{1}{2}F = 1 \times 14 + 8,5 \times 1,12 + \frac{1}{2} \times 8,5 \times 0,66 = 26,3 \text{ cm}^2$ . Stąd  $F = 52,6 \text{ cm}^2$  [53,3]. Chcąc dalej znaleźć moment statyczny przekroju względem osi  $HY_1$ , biegnącej wzdłuż środniaka, piszemy sumę odnośnych momentów:  $F_1 = -2 \times 14 \times 1 \times 0,5 + 2 \times 8,5 \times 1,12 [1 + 0,5 \times 8,5] + 2 \times \frac{1}{2} \times 8,5 \times 0,66 \times [1 + \frac{1}{3} \times 8,5] = 135,7 \text{ cm}^3$ .

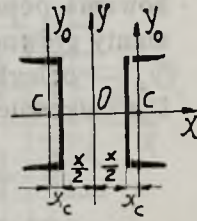
Stąd spórzędna środka przekroju  $HO = F_1 : F = 2,58 \text{ cm}$  [2,53]. Przez wyznaczony w ten sposób środek  $O$  prowadzimy drugą oś główną  $OY$ . A zatem dla momentów głównych będziemy mieli:  $J_x = 2 \times \left[ \frac{1}{3} \times 1 \times 14^3 + \frac{1}{12} \times 8,5 \times 1,12^3 + 8,5 \times 1,12 \times (14 - 0,5 \times 1,12)^2 + \frac{1}{36} \times 8,5 \times 0,66^3 + \frac{1}{2} \times 8,5 \times 0,66 \times (14 - 1,12 - \frac{1}{3} \times 0,66)^2 \right] = 6251,2 \text{ cm}^4$  [6276].  $J_y = 2 \times \left[ \frac{1}{12} \times 14 \times 1^3 + 14 \times 1 \times (2,58 - 0,5)^2 + \frac{1}{12} \times 1,12 \times 8,5^3 + 8,5 \times 1,12 \times (1 + \frac{1}{2} \times 8,5 - 2,58)^2 + \frac{1}{36} \times 0,66 \times 8,5^3 + \frac{1}{2} \times 0,66 \times 8,5 \times (1 + \frac{1}{3} \times 8,5 - 2,58)^2 \right] = 405,2 \text{ cm}^4$  [399]. Dalej mamy  $i_x = 10,84 \text{ cm}$  [10,85] oraz  $i_y = 2,77 \text{ cm}$  [2,74].



Rys. 19.



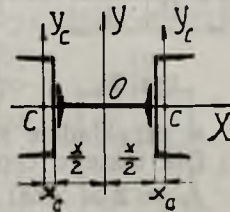
**7°. Przekrój dwuceownikowy.** Dwa równoległe ceowniki dają przekrój dwuceownikowy (Rys. 20). Wyznamy jego momenty w założeniu ceowników № 22, ustawionych środkami ku sobie w odległości  $x$  cm, jak to zresztą najlepiej uwypukla rysunek. Środek przekroju złożonego, wytworzonego w ten sposób leży oczywiście na osi symetrii  $OY$  równoległej do obu środków poprowadzonej w odległości  $\frac{1}{2}x$  od obu ceowników. Druga oś symetrii  $OX$  prostopadła do obu środków, przechodzi przez środki  $C$  obu składowych ceowników przekroju. Są to niewątpliwie główne osie przekroju złożonego, jako osie symetrii. Korzystając z tablic, wyznaczamy momenty główne przekroju. W tym celu przez oba środki  $C$  ceowników prowadzimy osie  $CY_0$  prostopadłe do  $OX$ . Otrzymane w ten sposób osie  $CX$ ,  $CY_0$  stanowią układ osi głównych ceownika. Dla tych osi tablice ceowników podają  $J_{xc} = 2690 \text{ cm}^4$   $J_{yc} = 197 \text{ cm}^4$ . Nadto pole ceownika  $F = 37,4 \text{ cm}^2$ , a odległość środka ceownika  $C$  od ścianki zewnętrznej środnika  $x_c = 2,14 \text{ cm}$ . Tyle nam dają tablice. Zatem dla złożonego przekroju mamy  $J_x = 2 J_{xc} = 5380 \text{ cm}^4$   $J_y = 2 J_{yc} + 2 F [\frac{1}{2}x + x_c]^2 = 394 + 18,7 [x + 4,28]^2 = [18,7 x^2 + 160 x + 736,6] \text{ cm}^4$ .



Rys. 20.

Ten wymiar  $x$  możemy wyznaczyć dowolnie, to też zazwyczaj wybieramy  $x$  w taki sposób, aby  $J_x = J_y$ , to jest aby przekrój był obojętny. To da nam  $18,7 x^2 + 160 x + 736,6 = 5380$ . Jedyne dodatni pierwiastek tego równania będzie  $x = 12,0 \text{ cm}$ . Dla tej szczególnej wartości  $x$  będziemy mieli  $J_x = J_y = 5380 \text{ cm}^4$ .

**8°. Przekrój dwuceownikowy ze środnikiem dwuteowym.** Łącząc dwuteownikiem środniki ceowników, otrzymujemy przekrój złożony (Rys. 21) o dwóch osiach symetrii  $OX$ ,  $OY$ , jego osiach głównych. Weźmy pod uwagę, dajmy na to, ceowniki № 20 i dwuteownik № 20. Przez  $C$  oznaczamy środek ceownika składowego, przez  $F_c$  jego pole, przez  $x_c$  odległość środka  $C$  od strony zewnętrznej środnika. Prowadząc osie  $CY_c$  prostopadłe do  $OX$ , będziemy mieli z tablic dla osi głównych  $CX$ ,  $CY_c$  ceowników momenty  $J_{xc} = 1911 \text{ cm}^4$   $J_{yc} = 148 \text{ cm}^4$ . Również z tablic dla dwuteownika będziemy mieli, zważywszy że osie  $OX$ ,  $OY$  są jego osiami głównymi — momenty  $J_{x0} = 117 \text{ cm}^4$   $J_{y0} = 2139 \text{ cm}^4$ . Stąd dla całego przekroju  $J_x = 2 J_{xc} + J_{x0} = 3939 \text{ cm}^4$ .  $J_y = 2 J_{yc} + 2 F_c [\frac{1}{2}x + x_c]^2 + J_{y0} = 2 \times 148 + 2 \times 32,2 \times [10 + 2,01]^2 + 2139 = 11724 \text{ cm}^4$ , ponieważ tutaj  $x$  równe jest wysokości dwuteownika, to jest  $x = 20 \text{ cm}$ , a  $F_c = 32,2 \text{ cm}^2$  i  $x_c = 2,01 \text{ cm}$  według tablic.



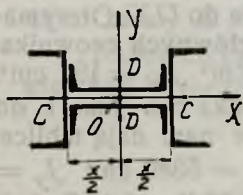
Rys. 21.

**9°. Przekrój czteruceownikowy.** Dwuteownik tylko co roz-

patrywanego przekroju zastępujemy dwoma ceownikami, ustawionymi symetrycznie a równoległe do osi  $OX$ . Odległość pomiędzy ściankami zewnętrznymi ich środków niech będzie  $y \geq 0$ . Zachowując znakowania poprzedniego przykładu, oznaczamy nadto przez  $J_{xs}$   $J_{ys}$  momenty główne ceowników środkowych, przez  $F_s$  ich pola, a przez  $y_s$  — odległość ich środków  $D$  od ścianek zewnętrznych środków. Dla całkowitego przekroju będziemy mieli

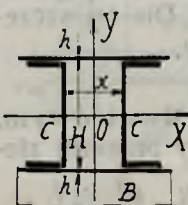
$$J_x = 2 J_{xc} + 2 J_{xs} + 2 F_s \left[ \frac{1}{2} y + y_s \right]^2,$$

$$J_y = 2 J_{ys} + 2 J_{yc} + 2 F_c \left[ \frac{1}{2} x + x_c \right]^2.$$



Rys. 22.

Weźmy (Rys. 22) pod uwagę przekrój złożony z czterech ceowników № 20 i założmy  $y = 2,0$  cm. Dla takiego przekroju  $x = 20$  cm,  $F_c = F_s = 32,2$  cm<sup>2</sup>  $x_c = y_s = 2,01$  cm,  $J_{xc} = J_{ys} = 1911$  cm<sup>4</sup>  $J_{yc} = J_{xs} = 148$  cm<sup>4</sup>, a przeto  $J_x = 2 \times 1911 + 2 \times 148 + 2 \times 32,2 [0,5 \times 2 + 2,01]^2 = 4700,9$  cm<sup>4</sup>,  $J_y = 2 \times 148 + 2 \times 32,2 [0,5 \times 20 + 2,01]^2 + 2 \times 1911 = 13407$  cm<sup>4</sup>



Rys. 24.

**10°. Przekrój dwuceownikowy z nakładkami.** Nitując obustronnie płaskowniki symetryczne (Rys. 23), wzmacniamy przekrój dwuceownikowy. Aby wyliczyć jego momenty, zachowujemy znakowania poprzednie, a nadto przez  $H$  oznaczamy wysokość ceownika składowego, a przez  $h$  grubość obu nakładek  $B$  szerokich. Szerokość pasów ceownika niech będzie, dajmy na to,  $b$ , a wtedy  $B = 2b + x + 2 \times 0,5$  cm, nakładki bowiem zazwyczaj na 0,5 cm wystają poza pasy ceowników. Zatem  $J_x = 2 J_{xc} + 2 \times \frac{1}{12} \times B \times h^3 + 2 Bh [\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}h]^2$ ,  $J_y = 2 J_{yc} + 2 F_c [\frac{1}{2}x + x_c]^2 + 2 \times \frac{1}{12} hB^3$ .

Weźmy pod uwagę № 22 ceownika i założmy, jak w przykładzie siódmym  $x = 12$  cm. Niech będzie nadto  $h = 1$  cm. Dla takiego ceownika  $b = 8$  cm, stąd  $B = 29$  cm oraz

$$J_x = 2 \times 2690 + 2 \times \frac{1}{12} \times 29 \times 1^3 + 2 \times 29 \times 1 \times [\frac{1}{2} \times 22 + \frac{1}{2}]^2 = 13055$$

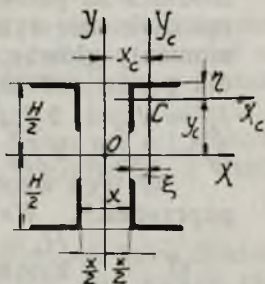
$$\text{cm}^4, J_y = 2 \times 197 + 2 \times 37,4 [0,5 \times 12 + 2,14]^2 + 2 \times \frac{1}{12} \times 1 \times 29^3 = 9415$$

$$\text{cm}^4. \text{ Porównywując wartości momentów tu otrzymane z odnośnymi wartościami przykładu siódmego, widzimy, że dodanie nakładek znacznie zwiększa wartość momentów przekroju.}$$

**11°. Przekrój czworokątnikowy.** Słupy ciężkie mają zazwyczaj przekrój złożony z czterech kątowników, tworzących jakby dwa ceowniki o przerwanym środku (Rys. 24). Tego rodzaju przekrój ma oczywiście dwie osie symetrii  $OX$ ,  $OY$  — osie główne przekroju. Oznaczmy przez  $F_c$  pole kątownika składowego, przez  $C$  jego środek, przez  $x$  odległość pomiędzy ściankami zewnętrznymi pasów,



równoległych do  $OY$ , przez  $H$  — odległość pomiędzy ściankami zewnętrznymi pasów, równoległych do  $OX$ , wreszcie przez  $CX_c$ ,  $CY_c$  osie kątownika środkowe, równoległe do  $OX$ ,  $OY$ . W układzie osi  $OX$ ,  $OY$  współrzędne środka  $c$  oznaczamy przez  $x_c$ ,  $y_c$ , a wtedy dla przekroju złożonego możemy wypisać momenty główne  $J_x = 4J_{xc} + 4F_c y_c^2$ ,  $J_y = 4J_{yc} + 4F_c x_c^2$ , gdzie przez  $J_{xc}$ ,  $J_{yc}$  nazwalibyśmy momenty bezwładności kątownika względem osi  $CX_c$ ,  $CY_c$ . Wymiar  $x$  możemy dobrać tak, aby było  $J_x = J_y$ , zatem dla obojętnego przekroju winno być  $J_{xc} - J_{yc} = F_c (x^2_c - y^2_c)$ .

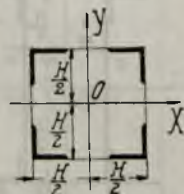


Rys. 24.

Oznaczmy przez  $\xi$  odległość środka  $C$  kątownika od jego ścianki zewnętrznej, równoległej do osi  $OY$ , przez  $\eta$  — odległość środka  $C$  od ścianki zewnętrznej, równoległej do  $OX$ . Wtedy  $x_c = 1/2 x + \xi$ ,  $y_c = 1/2 H - \eta$  zatem mamy  $J_{xc} - J_{yc} = F_c [(1/2 x + \xi)^2 - (1/2 H - \eta)^2]$ .

Dla kątowników równoramiennych, najczęściej używanych  $J_{xc} = J_{yc}$ , zatem  $1/2 H - \eta = 1/2 x + \xi$ , nadto  $\xi = \eta$ , a przeto  $x = H - 4\xi$ . Weźmy, jako przykład, przekrój, złożony z czterech kątowników równoramiennych  $90 \times 90 \times 9$  i załóżmy, że  $H = 20$  cm. Z tablic mamy  $J_{xc} = J_{yc} = 116$  cm<sup>4</sup>,  $F_c = 15,5$  cm<sup>2</sup>,  $\xi = \eta = 2,54$  cm, a zatem  $x = 20 - 4 \times 2,54 = 9,84$  cm. Niech będzie  $x = 10$  cm, a wtedy  $x_c = 5 + 2,54 = 7,54$  cm,  $y_c = 10 - 2,54 = 7,46$  cm,  $J_x = 4 \times 116 + 4 \times 15,5 \times 7,46^2 = 3914,4$  cm<sup>4</sup>.  $J_y = 4 \times 116 + 4 \times 15,5 \times 7,54^2 = 3988,8$  cm<sup>4</sup>. Drobną różnicą wartości momentów pochodzi stąd, żeśmy nieco zaokrąglili wartość  $x$ .

**12°. Przekrój czworokątnikowy kwadratowy.** Te same momenty główne posiada również odmiana (Rys. 25) przekroju tylko co rozpatrywanego, o czym z łatwością możemy się przekonać wypisując wartości  $J_x$  dla tego przekroju. Ponieważ przekrój ten można otrzymać z poprzednio rozpatrywanego, przestawiając prawą jego część na miejsce lewej, przeto niewątpliwie układ cząsteczek w stosunku do osi  $OX$  nie może ulec zmianie, będziemy mieli przeto tę samą wartość dla  $J_x = 4 J_{xc} + 4 F_c y_c^2 = 4 J_{xc} + 4 F_c [1/2 H - \eta]^2$ .



Rys. 25.

Gdy wszystkie kątowniki składowe tego przekroju są równoramienne, wtedy cały przekrój jest obojętny, wtedy bowiem  $J_x = J_y$ ; w przeciwnym razie  $J_y = 4 J_{yc} + 4 F_c x_c^2 = 4 J_{yc} + 4 F_c [1/2 H - \xi]^2$ , przyczem zachowujemy znakowanie przykładu poprzedniego.

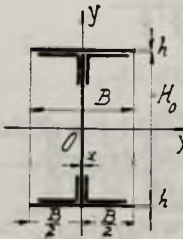
**13°. Blachownica dwuteowa.** Korzystając ze wzorów tylko co wyprowadzonych, z łatwością wyznaczymy momenty przekroju,

złożonego z blachy środkowej  $H_0$  wysokiej,  $x$  grubej, oraz dwu pasów blaszanych  $B$  szerokich,  $h$  grubych, przynitowanych u skrajów środka za pomocą kątowników. W ten sposób wytworzony przekrój ma dwie osie symetrii  $OX, OY$ . Aby znaleźć przynależne do nich momenty główne, oznaczamy pole i momenty środka znacznikiem  $s$ , dla pasów znacznikiem  $p$  i dla kątowników znacznikiem  $c$ , a wtedy mamy:

$$J_x = J_{xs} + 2 J_{xp} + 2 F_p \left[ \frac{1}{2} H_0 + \frac{1}{2} h \right]^2 + 4 J_{xc} + 4 F_c \left[ \frac{1}{2} H_0 - \eta \right]^2,$$

$$J_y = J_{ys} + 2 J_{yp} + 4 J_{yc} + 4 F_c \left[ \frac{1}{2} x + \xi \right]^2.$$

W tych wzorach opieraliśmy się na znakowaniu obu przykładów poprzednich. Weźmy, dajmy na to, (Rys. 26) wysokość środka  $H_0 = 50$  cm  $x = 1$  cm. U obu jego końców przynitujemy kątowniki  $80 \times 120 \times 10$ , krótszemi ramionami dotykając środka, a do nich — pasy nieco u boków wystające, a więc, powiedzmy, 28 cm szerokie i 1 cm grube. Tablice kątowników dają  $J_{xc} = 98,2$  cm<sup>4</sup> dla osi środkowej, równoległej do ramienia dłuższego  $J_{yc} = 276$  cm<sup>4</sup> dla osi środkowej, równoległej do pasa krótszego,  $\xi = 3,92$  cm odległość środka od ścianki zewnętrznej ramienia krótszego, a  $\eta = 1,95$  cm odległość środka od ścianki zewnętrznej ramienia dłuższego; wreszcie  $F_c = 19,1$  cm<sup>2</sup>.

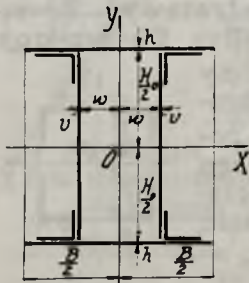


Rys. 26.

Stąd  $J_x = \frac{1}{12} \times 1 \times 50^3 + 2 \times \frac{1}{12} \times 28 \times 1^3 + 2 \times 28 \times 1 \times \left[ \frac{1}{2} \times 50 + \frac{1}{2} \right]^2 + 4 \times 98,2 + 4 \times 19,1 \times \left[ \frac{1}{2} \times 50 - 1,95 \right]^2 = 87819,6$  cm<sup>4</sup>.

$J_y = \frac{1}{12} \times 50 \times 1^3 + 2 \times \frac{1}{12} \times 1 \times 28^3 + 4 \times 276 + 4 \times 19,1 \times \left[ \frac{1}{2} + 3,92 \right]^2 = 6259,5$  cm<sup>4</sup>.

**14<sup>o</sup>. Blachownica dwuceowa.** Dwie równoległe (Rys. 27) blachy pionowe  $H_0$  wysokie,  $v$  grube dotykają pasów poprzecznych  $B$  szerokich,  $h$  grubych, przynitowanych za pośrednictwem kątowników do blach. Całość w ten sposób otrzymana tworzy przekrój złożony o dwu osiach symetrii  $OX, OY$ . Korzystając ze znakowania przykładu poprzedniego, z łatwością możemy wyznaczyć momenty główne przekroju. W tym celu oznaczamy przez  $2w$  rozstawienie blach środkowych.



Rys. 27.

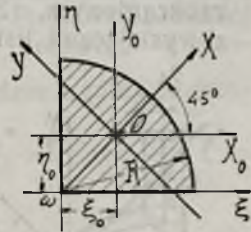
Wysokość blach środkowych niech będzie, dajmy na to 50 cm, grubość 1 cm. Do tych blach nitujemy kątowniki  $80 \times 120 \times 10$  ramionami krótszemi, a do ich ramion dłuższych — oba pasy, nieco po bokach wystające. Rozstawienie blach środkowych wynosi powiedzmy  $2w = 20$  cm zatem szerokość obu pasów  $B = 50$  cm, a grubość 1 cm. Stąd, jak dla przykładu tylko co wyżej rozpatrzonego  $J_x = 2 \times \frac{1}{12} \times 1 \times 50^3 + 2 \times \frac{1}{12} \times 50 \times 1^3 + 2 \times 50 \times 1 \times \left[ \frac{1}{2} \times 50 + \frac{1}{2} \right]^2 + 4 \times 98,2 +$



$$+ 4 \times 19,1 \times [1/2 \times 50 - 1,95]^2 = 126851,0 \text{ cm}^4, J_y = 2 \times 1/12 \times 50 \times 1^3 + 2 \times 50 \times 1 \times [1/2 \times 20 + 1/2]^2 + 2 \times 1/12 \times 1 \times 50^3 + 4 \times 276 + 4 \times 19,1 \times [1/2 \times 20 + 1 + 3,92]^2 = 49977,8 \text{ cm}^4.$$

W obu tylko co rozpatrywanych wypadkach wyznaczyliśmy momenty główne przekroju całkowitego, nie uwzględniając otworów na nity, które nieraz dość znacznie osłabiają przekrój i obniżają wartość momentów. Dla odróżnienia nazywamy przekroje bez potrącania dziur na nity przekrojami brutto. W przekroju dziura na nit stanowi prostokąt — łatwo przeto tę przerwę przekroju uwzględnić, a wtedy otrzymamy przekrój netto.

**15°. Ćwiartka koła.** Gdybyśmy chcieli posunąć dalej dokładność naszych wyznaczeń momentów, należałoby brać pod uwagę zaokrąglenia przekrojów, które w większości wypadków stanowią ćwiartki koła. Należy przeto obecnie wyznaczyć momenty dla tego przekroju (Rys. 28), jako składowego wielu innych. Wierzchołek  $\omega$  kąta prostego ćwiartki obieramy jako biegun osi wierzchołkowych  $\omega\xi$ ,  $\omega\eta$ . Oś  $\omega\xi$  może być nadto rozważana, jako oś biegunowa spórzędnych:  $\rho$  — promienia wodzącego oraz  $\theta$  kąta biegunowego, który będziemy odliczali od osi biegunowej przeciw strzałce zegara. Wtedy  $\xi = \rho \cos\theta$ ,  $\eta = \rho \sin\theta$ , a poletko  $dF = \rho d\rho d\theta$ , jak uczy rachunek nieskończonościowy. A zatem kolejno będziemy mieli:



Rys. 28.

$$F_\xi = \int \eta dF = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{R^3}{3};$$

$$J_\xi = \int \eta^2 dF = \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{R^4}{4} \int_0^\pi \left[ \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} \right] d\theta = \frac{1}{16} \pi R^4 - \frac{R^4}{16} \int_0^\pi \cos 2\theta d(2\theta) = \frac{1}{16} \pi R^4,$$

$$J_{\xi\eta} = \int \xi\eta dF = \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{16} R^4 \int_0^\pi \sin 2\theta d(2\theta) = \frac{R^4}{8},$$

nadto  $F = \frac{1}{4} \pi R^2$ .

Wobec oczywistej symetrii przekroju względem osi  $\omega X$ , pochylonej ku obu osiom pod kątem  $45^\circ$ , będziemy mieli  $F_\eta = F_\xi$ , oraz  $J_\eta = J_\xi$ . Współrzędne środka  $O$  przekroju będą również jednakowe

$$\xi_0 = \eta_0 = \frac{F_\eta}{F} = \frac{F_\xi}{F} = \frac{4R}{3\pi}. \text{ Poprowadzimy osie środkowe } OX_0,$$

$OY_0$  równoległe do wierzchołkowych. Dla tych osi będziemy mieli

$$J_{x_0} = J_\xi - F\eta_0^2 = \frac{1}{16} \pi R^4 - \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{16 R^2}{9 \pi^2} = \left[ \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right] R^4 = J_{y_0} \text{ oraz}$$

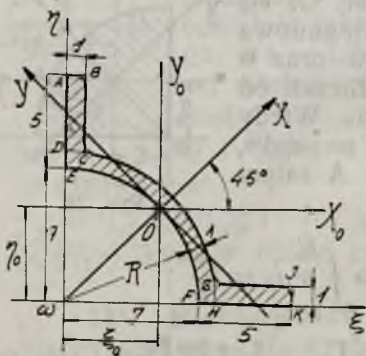
$$J_{xyo} = J_{\xi\eta} - F \xi_0 \eta_0 = \frac{1}{8} R^4 - \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{16 R^2}{9\pi^2} = \left[ \frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} \right] R^4.$$

Ponieważ osie główne  $OX, OY$  tworzą z  $OX_0, OY_0$  kąty  $45^\circ$ , przeto możemy bezpośrednio napisać, że  $J_x = J_{x_0} \cos^2 45^\circ + J_{y_0} \sin^2 45^\circ - J_{xyo} \sin 90^\circ = \frac{\pi}{16} R^4 - \frac{4R^4}{9\pi} - \frac{R^4}{8} + \frac{4R^4}{9\pi} = \left[ \frac{\pi}{2} - 1 \right] \frac{R^4}{8}$

$$J_y = J_{x_0} \sin^2 45^\circ + J_{y_0} \cos^2 45^\circ + J_{xyo} \sin 90^\circ = \frac{\pi}{16} R^4 - \frac{4R^4}{9\pi} + \frac{R^4}{8} - \frac{4R^4}{9\pi} = \left[ \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi} \right] \times R^4.$$

Jako bezpośrednie zastosowanie wzorów tylko co otrzymanych, bierzemy pod uwagę:

**16°. Słupownik.** Tak nazywamy (rys. 29) ceownik o średnicy zaokrąglonym. Znitowane bokami cztery słupowniki tworzą cylinder z wystającymi listwami podłużnymi. Całość tworzy słup. Stąd nazwa.



Rys. 29.

Wyznamy momenty przekroju, podając obok w nawiasach ściśle tabliczne ich wartości; jak zwykle pomijac będziemy drobne zaokrąglenia. Aby umożliwić zadanie, prowadzimy łuki  $DC$  i  $GH$ , dzieląc w ten sposób cały przekrój na dwa boczne prostokąty  $ABCD$  i  $GHJK$ , oraz środkową krzywą część  $DEFH$ . Prowadzimy nadto przez zewnętrzne ścianki pasów osie  $\omega\xi, \omega\eta$ . Dla tych

osi  $F_\xi = F_\eta = \frac{8^3}{3} - \frac{7^3}{3} + 4 \times 1 \times 1 \times [8 + 0,5 \times 4] + 4 \times 1 \times \frac{1}{3} = 98,3 \text{ cm}^3$ .  
Nadto pole  $F = \frac{1}{4}\pi 8^2 - \frac{1}{4}\pi 7^2 + 2 \times 4 \times 1 \times 1 = 19,8 \text{ cm}^2$  [20]. Stąd mamy spół-

rzędne środka  $\xi_0 = \eta_0 = \frac{F_\xi}{F} = 4,97 \text{ cm}$ . [4,97].

Korzystając nadal ze wzorów dla momentów ćwiartki koła, możemy napisać  $J_\xi = J_\eta = \frac{1}{16} \pi 8^4 - \frac{1}{16} \pi 7^4 + \frac{1}{12} \times 1 \times 4^3 + 4 \times 1 \times [8 + 0,5 \times 4]^2 + \frac{1}{12} \times 4 \times 1^3 + 4 \times 1 \times [\frac{1}{2}]^2 = 739,8 \text{ cm}^4$  [745],  
 $J_{\xi\eta} = \frac{1}{8} 8^4 - \frac{1}{8} 7^4 + 4 \times 1 \times [8 + 0,5 \times 4] \times \frac{1}{2} + 4 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 10 = 251,6 \text{ cm}^4$ .

Prowadząc równoległe do wierzchołkowych osie  $OX_0, OY_0$  środkowe, będziemy mieli dla nich  $J_{x_0} = J_\xi - F \eta_0^2 = 739,8 - 19,8 \times 4,97^2 = 250,7 \text{ cm}^4 = J_{y_0}$ ;  $J_{xyo} = J_{\xi\eta} - F \xi_0 \eta_0 = 251,6 - 19,8 \times 4,97^2 = -237,5 \text{ cm}^4$ . Ponieważ  $J_{x_0} = J_{y_0}$  oraz  $J_{xyo} \neq 0$ , przeto oś główna  $OX$  pochyla się ku osi  $OX_0$  pod kątem  $45^\circ$ . Dla tej osi  $J_x = J_{x_0} \cos^2 45^\circ + J_{y_0} \sin^2 45^\circ - J_{xyo} \sin 90^\circ = \frac{1}{2} [J_{x_0} + J_{y_0}] - J_{xyo} = 488,2 \text{ cm}^4$  [479]. Nadto  $J_x + J_y = J_{x_0} + J_{y_0} = 501,4 \text{ cm}^4$  i ostatecznie  $J_y = 501,4 - 488,2 = 13,2 \text{ cm}^4$  [13,3].



**17°. Przekrój kołowy.** Bierzemy pod uwagę jakiegokolwiek układ osi środkowych prostokątnych. Będą to osie główne przekroju  $OX$ ,  $OY$ . Nadto, niech  $\rho$  oznacza promień wodzący jakiegokolwiek punktu przekroju, a  $\theta$  — odnośny kąt biegunowy. Biegunowy moment bezwładności kołowego przekroju będzie więc

$$J_o = \int \rho^2 dF = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} \pi R^4, \text{ gdzie przez } R \text{ oznaczyliśmy}$$

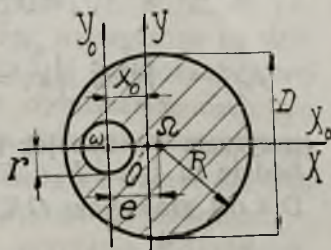
promień koła. Wobec tego, że przekrój kołowy należy do rodzaju obojętnych, jego  $J_x = J_y = \frac{1}{2} J_o$ , a zatem  $J_x = J_y = \frac{1}{4} \pi R^4$  oraz  $i_x = i_y = \sqrt{\frac{1}{4} \pi R^4 : \pi R^2} = \frac{1}{2} R$ .

*Przekrój kołowy ma koło środkowe bezwładności o promieniu dwukrotnie mniejszym.*

**18°. Przekrój eliptyczny.** Wielką półoś elipsy oznaczamy przez  $a$ , małą przez  $b$ ; dają one kierunki osi głównych przekroju, jako jego osie symetrii. Niech  $a$  leży na  $OX$ ,  $b$  na  $OY$ . Ponieważ przekrój eliptyczny można rozpatrywać, jako rzut przekroju kołowego o promieniu  $a$  pod kątem  $\alpha = \arccos \frac{b}{a}$ , przeto na zasadzie ogólnych wzorów dla przekrojów rzutowanych będziemy mieli  $J_x = \cos^3 \alpha \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi}{4} ab^3$ ,  $J_y = \cos \alpha \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi}{4} a^3 b$ .

Nadto pole elipsy  $F = \cos \alpha \pi a^2 = \pi ab$ , a przeto  $i_x = \frac{1}{2} b$ ,  $i_y = \frac{1}{2} a$ . *Przekrój eliptyczny ma elipsę środkową bezwładności o półosiach dwukrotnie mniejszych.*

**19°. Pierścień kołowy mimośrodkowy.** Promieniem  $r$  zataczamy (rys. 30) koło ze środka  $\omega$ , leżącego na osi  $\omega X$ . Od tego punktu w kierunku dodatnim odkładamy  $\omega\Omega = e$  i zataczamy koło promieniem  $R$  ze środka  $\Omega$  tak, aby było  $R > r + e$ . W ten sposób wytworzony pierścień kołowy o mimośrodku  $e$  ma oś symetrii  $\omega X$  — oś główną. Chcąc wyznaczyć oś drugą, prowadzimy przez środek  $\omega$  oś  $\omega Y_o \perp \omega X$ . Dla tej osi moment statyczny przekroju będzie  $F_{y_o} = \pi R^2 e$ . Ponieważ pole  $F = \pi (R^2 - r^2)$ , przeto współrzędną  $x_o$  środka  $O$  otrzymamy w postaci  $x_o = \frac{F_{y_o}}{F} = \frac{R^2 e}{R^2 - r^2}$ . Przez wyznaczony w ten sposób środek prowa-



Rys. 30.

dziemy oś główną  $OY$ . Dla osi głównych  $J_x = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$

$$\text{oraz } J_y = \frac{\pi R^4}{4} + \pi R^2 (e - x_o)^2 - \frac{\pi r^4}{4} - \pi r^2 x_o^2 = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) + \pi R^2 [e -$$

$$- R^2 e : (R^2 - r^2)^2 - \pi r^2 \frac{R^4 e^2}{(R^2 - r^2)^2} = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) + \frac{\pi e^2}{(R^2 - r^2)^2} [r^4 R^2 - r^2 R^4] = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) - \frac{\pi e^2 R^2 r^2}{R^2 - r^2}.$$

Dla zwykłego przekroju kołowego *pierścieniowego* o promieniu  $R$  zewnętrznym i  $r$  wewnętrznym mamy  $e = 0$ . Tutaj więc  $J_x = J_y = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$ . Ten sam wynik otrzymać można również i bezpośrednio, rozpatrując pierścień, jako różnicę dwóch przekrojów kołowych.

**20°. Przekrój paraboliczny.** W układzie osi wierzchołkowych łuk paraboli (V. rys. 9) wyrazi się równaniem  $\eta^2 = 2p\xi$ . Poprowadzmy prostą  $\xi = a$ , a otrzymamy odcinek paraboli symetryczny względem osi  $\omega\xi$ . Aby wyznaczyć jego drugą oś symetrii szukamy momentów. W tym celu piszemy równanie obwodu w postaci  $K(\xi, \eta) = (\eta^2 - 2p\xi)(\xi - a) = 0$ . Da ono dwa pierwiastki  $\eta' = -\sqrt{2p\xi}$ ,  $\eta'' = \sqrt{2p\xi}$ , jako granice całkowania po  $\eta$ . Aby otrzymać granice całkowania po  $\xi$ , wyłączamy  $\eta$  z równań  $K(\xi, \eta) = 0$  i  $\frac{\partial K}{\partial \eta} = 0$ , co daje  $2\eta = 0$ , a zatem  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = a$ . Wobec symetrii przekroju  $F_\xi = J_{\xi\eta} = 0$ , a zatem możemy wypisać kolejno momenty pozostałe:

$$F = \int dF = \int_0^a d\xi \int_{\eta'}^{\eta''} d\eta = \frac{4}{3} a \sqrt{2pa} = \frac{4}{3} ab,$$

$$F_{\eta} = \int_0^a d\xi \int_{\eta'}^{\eta''} d\eta = 2 \sqrt{2p} \int_0^a \sqrt{\xi^3} d\xi = \frac{4}{5} a^2 \sqrt{2pa} = \frac{4}{5} a^2 b,$$

$$J_{\xi} = \int_0^a d\xi \int_{\eta'}^{\eta''} \eta^2 d\eta = \frac{2}{3} \sqrt{(2p)^3} \int_0^a \sqrt{\xi^5} d\xi = \frac{4}{15} ab^3,$$

$$J_{\eta} = \int_0^a d\xi \int_{\eta'}^{\eta''} \xi^2 d\eta = 2 \sqrt{2p} \int_0^a \sqrt{\xi^5} d\xi = \frac{4}{7} a^3 \sqrt{2pa} = \frac{4}{7} a^3 b;$$

przyczem  $b^2 = 2pa$  jak to zresztą wskazuje rysunek. Spółrzędna środka będzie tu  $\xi_0 = F_{\eta} : F = \frac{3}{5} a$ . Prowadzimy przezeń oś główną  $OY$ . Dla osi głównych:  $OX$ , leżącej na osi  $\omega\xi$  i  $OY$  będziemy mieli  $J_x = J_{\xi} = \frac{4}{15} ab^3$ ,  $J_y = J_{\eta} - F_{\xi_0}^2 = \frac{4}{7} a^3 b - \frac{4}{3} ab \frac{9}{25} a^2 = \frac{16}{175} a^3 b$ .



## CZĘŚĆ PIĄTA.

# ZGINANIE.

### ROZDZIAŁ PIERWSZY:

### NAPRĘŻENIA GNĄCE.

#### § 1. Wyznaczanie składowych naprężeń jednostkowych.

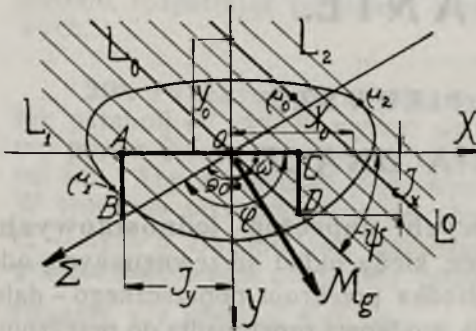
Bierzemy pod uwagę obciążenie gnące, kiedy układ sił zewnętrznych, odkształcających, po sprowadzeniu do środka przekroju poprzecznego – daje moment, leżący w przekroju, oraz siłę środkową prostopadłą do przekroju. Wobec  $T_x = T_y = M_o = 0$  składowe naprężenia dla osi głównych będą:

$$t_x = \frac{H}{J_y} x - \frac{K}{J_x} y = \tau_y; \quad t_y = \frac{L}{J_y} x + \frac{N}{J_x} y = \tau_x, \quad t_z = -\frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{S}{F} = \sigma_z.$$

Badanie układu naprężeń jednostkowych, panujących w poszczególnych punktach przekroju płaskiego, sprowadza się do badania wzorów wyżej wypisanych. Ostatni wyznacza naprężenia normalne, pozostałe dwa wyrokują o naprężeniach, leżących w przekroju. Pozostawimy je na razie bez uwagi, a to dla tego, że współczynniki  $H, K, L, N$ , powiązane jedynym warunkiem  $K + L = 0$ , winny być wyznaczone na drodze czysto doświadczalnej z warunków zachowania się powłoki bocznej przekroju przy odkształceniu. Tymczasem jednak o odkształceniach nic nie wiemy, jak również i o składowych naprężeniach jednostkowych  $\tau_x, \tau_y$ , leżących w przekroju, ponieważ wszystkie współczynniki we wzorze dla tych naprężeń są niewyznaczone. Lepiej więc o nich nie mówić do czasu.

Rozpoczynamy przeto badanie naprężenia  $\sigma_z$ , wyraźnie podkreślając, że wzór wyżej podany dotyczy układu osi głównych przekroju poprzecznego płaskiego, a  $x, y$  oznaczają w nim współrzędne punktu  $\mu$ , dowolnie w przekroju obranego. Osie główne przekroju nazywamy przez  $OX, OY$  — trzecią oś  $OZ$  kierujemy ze środka przekroju prostopadle do  $OX, OY$ , leżących w przekroju tak, aby *wskazówka zegara, leżącego pośrodku pola tarczą zwróconą w kierunku dodatniej osi  $OZ$ , spotykała w swym biegu pierwotnie oś  $OX$ , a potem dopiero dodatnią oś  $OY$ .*

W układzie tych osi składowe  $M_x, M_y$  wyznaczają moment, leżący w przekroju. Wyobrażamy go zwykle odcinkiem, nadając mu każdorazowo taki kierunek, aby *umieściwszy oko w początku współrzędnych i spoglądając w kierunku odcinka, wyobrażającego moment, widać było obrót, jaki się stara wywołać para momentu, zawsze przeciwko strzałce zegara*. W ten sposób określamy kierunek momentu, a zarazem i kąt  $\omega$  jego nachylenia ku głównej osi  $OX$  przekroju (rys. 1). Stosowanie się do powyższego



Rys. 1.

prawa pozwala uniknąć gmatwani-  
ny, wynikającej z rozpatrywania  
momentów dodatnich i ujemnych,  
wszystkie bowiem, podług powyż-  
szego pravidła wyznaczone mo-  
menty mogą być uważane za do-  
datnie, jako należące do tego sa-  
mego typu obrotowego. Nazwijmy  
moment, leżący w przekroju, *mo-  
mentem gnącym* i oznaczmy przez  
 $M_g$ , a wtedy  $M_x = M_g \cos \omega$ ,  
 $M_y = M_g \sin \omega$ , co należy pod-

stawić we wzór dla  $\sigma_z$ .

Może się zdarzyć w szczególnym wypadku, że  $S = O$ , wtedy jedynym obciążeniem przekroju jawi się moment gnący  $M_g$ , który z istoty rzeczy nie może być równy zeru, inaczej bowiem mielibyśmy przekrój nieobciążony, lub obciążony, siłą  $S$  — rozciągającą, czy ściskającą, a ten wypadek poznaliśmy już dawniej.

## § 2. Badanie rozkładu naprężeń gnących sprowadza się do

badania wzoru dla  $\sigma_z = -\frac{M_g \sin \omega}{J_y} x + \frac{M_g \cos \omega}{J_x} y + \frac{S}{F}$ , naprężenia

normalnego, występującego w punkcie  $\mu(x, y)$  danego przekroju (rys. 1) poprzecznego  $F$ , odkształconego pod jarzmem środkowej siły  $S$  prostopadłej do przekroju, oraz momentu gnącego  $M_g$ , leżącego w przekroju, a pochylonego pod kątem  $\omega$  ku osi głównej  $OX$ . Przedewszystkiem łatwo

zauważymy, że dla początku współrzędnych  $O(0,0)$  będzie  $\sigma_{z0} = \frac{S}{F}$ , a zatem: *naprężenie normalne, panujące w środku przekroju, jest niezależne od momentu gnącego i równe środkowej sile normalnej, dzielonej przez pole przekroju*. W szczególnym wypadku gdy  $S = 0$ , zarazem i  $\sigma_{z0} = 0$ . *W środku przekroju obciążonego momentem gnącym panuje zerowe naprężenie normalne*.

Z kolei, dając naprężeniu  $\sigma_z$  wartość ściśle określoną  $\sigma_g$ , czyli ina-



czej mówiąc, uważając  $\sigma_z$  w równaniu jako stałą, otrzymamy równanie

$$\text{linjowe: } -\frac{M_g \sin \omega}{J_y} X + \frac{M_g \cos \omega}{J_x} Y + \frac{S}{F} - \sigma_g = 0, \text{ wiążące współrzędne}$$

$X, Y$  tych wszystkich punktów  $\mu$  przekroju, w których panuje owo stałe naprężenie normalne. A więc punkty, w których panuje naprężenie normalne stałe, leżą wszystkie na prostej, zwanej linią równego naprężenia.

Nadto linie równych naprężeń tworzą rój prostych równoległych, pochylonych pod kątem  $\Psi = \arctg [J_x \operatorname{tg} \omega : J_y]$  ku osi  $OX$  — głównej osi przekroju. Z łatwością to udowodnimy, rozpatrując tylko co napisane wyżej równanie roju linii równych naprężeń  $L_i$ .

Ponieważ tedy:  $\operatorname{tg} \Psi = J_x \operatorname{tg} \omega : J_y$ , przeto oba te współczynniki kątowe są zawsze jednakowych znaków, a zatem — moment gnący i linia równego naprężenia, przechodząca przez środek przekroju, leżą zawsze w tym samym kącie osi współrzędnych. Wniosek, tylko co tu wypowiedziany, traci całkowicie swą moc wtedy, gdy moment gnący leży na jednej z głównych osi przekroju, a więc gdy  $\operatorname{tg} \omega = 0$  lub  $\operatorname{tg} \omega = \pm \infty$ . W tym szczególnym wypadku będziemy mieli odpowiednio:  $\operatorname{tg} \Psi = 0$ , lub  $\operatorname{tg} \Psi = \pm \infty$ , a zatem rój jest równoległy do głównej osi przekroju, gdy na niej leży moment gnący.

Poprowadźmy płaszczyznę przez oś  $OZ$ , prostopadłą do momentu gnącego. Wyznaczy ona ślad na przekroju — prostą  $O\Sigma$ , którą osią sił zwać będziemy. Kierunek osi sił ustalamy z łatwością, zważywszy, że tworzy ona z osią  $OX$  kąt  $\varphi = \omega + \frac{\pi}{2}$ , jak to najlepiej zresztą uwypukla

rysunek. Stąd  $\operatorname{tg} \omega = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$ , co podstawivszy we wzór odnośny, otrzymamy  $J_x + J_y \operatorname{tg} \Psi \operatorname{tg} \varphi = 0$ . Podobny wzór otrzymaliśmy przy badaniu elipsy bezwładności środkowej. Wnioskujemy zeń: kierunki linii równych naprężeń oraz kierunek osi sił wyznaczają kierunki średnic sprzężonych elipsy bezwładności środkowej.

Stąd łatwy sposób wyznaczania kierunku linii  $L_i$  roju. Gdy dana jest oś sił lub moment gnący, odkładamy na osi  $OX$  odcinek  $OA = J_y$ , tak, aby prostopadła  $AB \perp OA$  przecięła dodatnią część osi sił. Wtedy  $\operatorname{tg} \varphi = \pm AB : J_y$ .

Z kolei na tejże osi  $OX$  odkładamy odcinek  $OC = AB$  tego samego znaku, co i  $AB$  i w jego końcowym punkcie prowadzimy prostopadłą do  $OX$  w kierunku momentu gnącego. Odkładając na niej  $CD = J_x$ , prowadzimy oś  $OD$ , która wyznaczy kierunek roju. Łatwo to udowodnić, zważywszy, że  $\operatorname{tg} (\angle DOC) = J_x : AB$ . Ponieważ kąty  $\angle DOC$  i  $\varphi$  leżą zawsze w sąsiednich ćwiartkach, przeto  $\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} (\angle DOC) = -J_x AB : J_y AB$

stąd  $J_x + J_y \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}(\operatorname{DOC}) = 0$  i ostatecznie  $\operatorname{DOC} = \Psi$ , co należało udowodnić.

**§ 3. Linja obojętna.** W szczególnym wypadku, gdy  $\sigma_g = 0$  otrzymujemy równanie:  $-\frac{M_g \operatorname{Sin}\omega}{J_y} X + \frac{M_g \operatorname{Cos}\omega}{J_x} Y + \frac{S}{F} = 0$  linii obojętnej, geometrycznego miejsca tych wszystkich punktów  $\mu_0(X, Y)$ , w których panuje zerowa wartość naprężenia normalnego. Ponieważ najwidoczniej istnieje tylko jedna *linja obojętna*, przeto stanowić ona musi granicę, oddzielającą dziedzinę naprężeń ujemnych od dodatnich.

Czy linja obojętna istotnie leży w przekroju?

W szczególnym wypadku, gdy  $S = 0$ , równanie linii obojętnej ma postać:  $-\frac{\operatorname{Sin}\omega}{J_y} X + \frac{\operatorname{Cos}\omega}{J_x} Y = 0$ , wskazującą, że *linja obojętna zawsze przechodzi przez środek przekroju, obciążonego momentem gnącym jedynie*. W danym wypadku rozróżnić trzeba dwa obszary: we wszystkich punktach pierwszego panować będą naprężenia jednego znaku, we wszystkich punktach drugiego — naprężenia znaku odwrotnego — na granicy tych obszarów, na linii obojętnej, przechodzącej przez środek, panować będzie wartość zerowa naprężeń normalnych. Są to *naprężenia gnące pierwszego rodzaju*.

W ogólnym wypadku, gdy  $S \neq 0$  — *linja obojętna nie może przechodzić przez środek przekroju, obciążonego środkową siłą normalną i momentem gnącym*. Może jednak mimo to leżeć w przekroju, i dzielić go na owe dwa obszary naprężeń różnego znaku. Może być również styczną obwodu, a wtedy we wszystkich punktach przekroju panować będą naprężenia jednego znaku, z wyjątkiem jednej tylko gromady punktów obwodu, leżących na owej stycznej, z wyjątkiem jej punktów lub punktu styczności, gdzie naprężenie normalne jest równe zeru. Jest to *drugi rodzaj naprężeń gnących*.

Wreszcie linja obojętna może leżeć poza przekrojem. To znaczy, że we wszystkich jego punktach panować będą naprężenia jednego znaku tylko dodatnie, lub też tylko ujemne. W tym wypadku linja obojętna stanowi jeno pojęcie geometryczne, istotnego jednak znaczenia nie posiada, jako nie należąca do przekroju. *Ten trzeci rodzaj naprężeń gnących* w istocie rzeczy niczem się nie różni od drugiego.

Weźmy pod uwagę jakikolwiek punkt  $\mu(x, y)$  leżący w przekroju w odległości  $e$  od linii obojętnej. Panuje w nim naprężenie normalne dodatnie lub ujemne  $\sigma_x = -\frac{M_g \operatorname{Sin}\omega}{J_y} x + \frac{M_g \operatorname{Cos}\omega}{J_x} y + \frac{S}{F}$ , w zależności od położenia tego punktu względem linii obojętnej.



Jeżeli odległości  $e$  w obszarze naprężeń dodatnich będziemy uważali za dodatnie, a w sąsiednim obszarze naprężeń ujemnych—rozpatrywali je jako ujemne, to na zasadzie znanego wzoru będziemy mogli napisać:

$$e = \left[ -\frac{M_g \sin \omega}{J_y} x + \frac{M_g \cos \omega}{J_x} y + \frac{S}{F} \right] : \sqrt{\frac{M_g^2 \sin^2 \omega}{J_y^2} + \frac{M_g^2 \cos^2 \omega}{J_x^2}} =$$

$$= \sigma_z : M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}} \quad \text{stad:} \quad \sigma_z = e M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}$$

Wzór ten wyprowadzony został w założeniu momentu gnącego dodatniego, różnego od zera. Głosi on, że *naprężenie normalne rośnie proporcjonalnie do odległości od linii obojętnej; skrajne wartości naprężeń normalnych panują w najbardziej oddalonych od linii obojętnej punktach przekroju.* A więc na obwodzie.

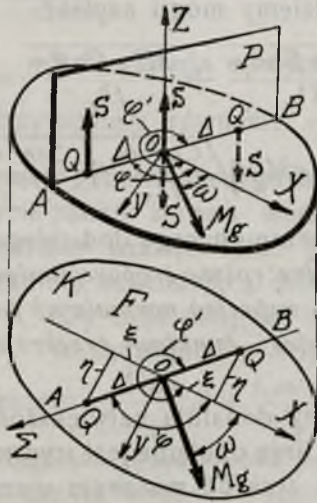
Gdy linia obojętna przecina przekrój—mamy dodatnią największość i najmniejszość ujemną naprężeń normalnych; gdy linia obojętna jest styczną przekroju, naprężenia normalne zmieniają się od zera do minimum ujemnego, albo też od zera do maximum dodatniego; wreszcie, gdy linia naprężeń leży poza przekrojem, naprężenia normalne rosną od minimum dodatniego do maximum dodatniego, lub też maleją od maximum ujemnego do minimum ujemnego, pozostając w obu wypadkach ciągle jednakowego znaku. We wszystkich tych trzech wypadkach naprężenia normalne rosną linjowo i oczywiście ciągle jednokierunkowo, lub w taki sam sposób maleją. Wyznaczenie ich skrajnych wartości nie nastrecza żadnych trudności — należy tylko zbudować skrajne linie  $L_1$  i  $L_2$  roju, styczne obwodu, a oddalone o  $e_1$  i  $e_2$  od linii obojętnej. Wartości  $e_1$  i  $e_2$  wyznaczają skrajne wartości naprężeń

$$\sigma_{z1} = e_1 M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}} \quad \sigma_{z2} = e_2 M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}} \quad \dots (2).$$

Bezwzględnie większa z tych dwóch wartości stanowi o bezpieczeństwie przekroju. W wypadku naprężeń gnących pierwszego rodzaju naprężenia skrajne, tylko co wypisane, są znaków odwrotnych, tutaj więc  $\sigma_{z1} \sigma_{z2} < 0$ . W wypadku naprężeń gnących drugiego rodzaju jedno z nich staje się zerem, to też iloczyn  $\sigma_{z1} \sigma_{z2} = 0$ , wreszcie w wypadku naprężeń gnących trzeciego rodzaju oba naprężenia skrajne są jednakowego znaku, a iloczyn  $\sigma_{z1} \sigma_{z2} > 0$ . A przeto *skrajne wartości naprężeń całkowicie określają rozkład naprężeń gnących przekroju.*

Wobec tego należy ustalić warunki powstawania układów naprężeń gnących owych trzech typów w zależności od sił zewnętrznych, odkształcających. Najłatwiej to skutecznie rozpatrując:

§ 4. **Obciążenia mimośrodowe.** Bierzemy pod uwagę (Rys. 2) obciążenie przekroju środkową siłą  $S$  prostopadłą do jego pola i momentem gnącym  $M_g$ , leżącym w tym polu.



Rys. 2.

Działanie momentu gnącego możemy niewątpliwie zastąpić działaniem jego pary, leżącej w płaszczyźnie, która przechodzi przez oś  $OZ$ , znacząc w przekroju ślad — oś sił  $O\Sigma$ . Wyznamy ramię tej pary z równania  $M_g = \pm \Delta S$  czyli  $\Delta = \pm M_g : S$ . Podwójny znak jest tu konieczny, bo owo ramię  $\Delta$  ma być rdzennie dodatnie, a nadto z założenia  $M_g > 0$  podczas gdy  $S \cong 0$ .

Gdy wypadkowa  $S$  obciążenia zewnętrznego jest dodatnia, wtedy para  $\Delta S$  łącznie z tą siłą da wypadkową  $S$ , również dodatnią, a przyłożoną do punktu  $Q$  o spólrzędnych biegunowych: promieniu wodzącym  $\Delta$  i kącie biegunowym  $\varphi = \omega + \frac{\pi}{2}$ , jak to zresztą najłatwiej zau-

ważyć z rysunku. Natomiast, gdy wypadkowa  $S$  jest ujemna, wtedy para —  $\Delta S$ , łącznie z tą siłą daje wypadkową  $S$ , również ujemną, lecz przyłożoną do punktu  $Q$  o spólrzędnych biegunowych:  $\Delta$  i  $\varphi = \omega + \frac{3}{2} \pi$ . Wynika to bezpośrednio z omówień wyżej poczynionych. W obu wypadkach obciążenie przekroju stanowić przeto będzie pojedyncza siła  $S$ , dodatnia lub ujemna, mimośrodowo przyłożona do punktu  $Q$  o spólrzędnych biegunowych — promieniu wodzącym  $\Delta$  i kącie biegunowym  $\varphi$ . Wyznamy spólrzędne prostokątne tych punktów. W wypadku siły środkowej  $S$  dodatniej będziemy mieli niewątpliwie

$$\xi = \Delta \cos \varphi = \frac{M_g}{S} \cos \left( \omega + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{M_g}{S} \sin \omega;$$

$$\eta = \Delta \sin \varphi = \frac{M_g}{S} \sin \left( \omega + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{M_g}{S} \cos \omega, \text{ a dla siły środkowej } S$$

$$\text{ujemnej } \xi = \Delta \cos \varphi = -\frac{M_g}{S} \cos \left( \omega + \frac{3}{2} \pi \right) = -\frac{M_g}{S} \sin \omega$$

$$\eta = \Delta \sin \varphi = -\frac{M_g}{S} \sin \left( \omega + \frac{3}{2} \pi \right) = \frac{M_g}{S} \cos \omega. \quad \text{Ponieważ nadto}$$

$$M_x = M_g \cos \omega, \quad M_y = M_g \sin \omega, \text{ przeto dla obu wypadków } \xi = -\frac{M_y}{S},$$

$$\eta = \frac{M_x}{S}, \text{ co daje } M_x = S\eta, \quad M_y = -S\xi. \text{ Stąd wnioskujemy bezpo-}$$

średnio, że obciążenie przekroju siłą środkową doni prostopadłą i momen-



tem gnącym można zastąpić siłą pojedynczą, równoległą i równą poprzedniej, a przyłożoną mimośrodkowo do pewnego punktu, leżącego w płaszczyźnie przekroju. Tego rodzaju obciążenie zwać będziemy mimośrodkowym obciążeniem siłą  $S$ , a punkt  $Q$  uczepienia tej siły — *środkiem naprężeń* przekroju. Jako środek sprowadzenia sił, może on i nie leżeć w przekroju, a nawet w szczególnym wypadku, gdy  $S = 0$ , środek naprężeń ulata w nieskończoność, wtedy bowiem  $\xi = \eta = \infty$ . Nie należy się temu dziwić, jest to bowiem wypadek działania momentu gnącego, czyli pary dwóch sił równych zeru na ramię nieskończenie wielkie. Włączając i ten skrajny wypadek w krąg naszych rozważań, otrzymamy ogólny wzór dla naprężenia gnącego

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{J_y}x + \frac{M_x}{J_x}y + \frac{S}{F} = S \left[ \frac{\xi x}{J_y} + \frac{\eta y}{J_x} + \frac{1}{F} \right] \dots \dots (3)$$

gdzie wchodzi współrzędne środka naprężeń. W tej nowej postaci wypisany wzór pozwoli otrzymać nowe, nader cenne własności układu naprężeń gnących.

**§ 5. Środek naprężeń.** Bierzemy pod uwagę przekrój płaski, obciążony siłą  $S$  mimośrodkową, działającą w środku naprężeń  $Q$  ( $\xi, \eta$ ) prostopadle do przekroju. Równanie linii obojętnej będzie tu

$$\frac{\xi}{J_y} X + \frac{\eta}{J_x} Y + \frac{1}{F} = 0.$$

Ta prosta przecina osie  $OX, OY$  w punktach  $[X_0, O], [O, Y_0]$ , przy czym  $X_0 = -J_y : F\xi, Y_0 = -J_x : F\eta$ .

Spółrzędne  $\xi, \eta$  i  $X_0, Y_0$  są zawsze różnych znaków; stąd wnioskujemy, że *linja obojętna przecina boki ćwiartki osi współrzędnych, wierzchołkowo przeciwnieległej ćwiartce, w której leży środek naprężeń.*

Ten wniosek traci swą moc, gdy środek naprężeń leży na jednej z głównych osi przekroju. Wtedy albo  $\xi = 0$ , albo  $\eta = 0$  i odpowiednio do tego równanie linii obojętnej będzie:

$$\frac{\eta}{J_x} Y + \frac{1}{F} = 0, \text{ lub też: } \frac{\xi}{J_y} X + \frac{1}{F} = 0, \text{ a zatem linja obojętna jest pro-$$

stopadła do głównej osi przekroju, gdy na tej osi leży środek naprężeń.

Powyższe wzory dają  $\xi = -J_y : FX_0, \eta = -J_x : FY_0$ . Stąd łatwy sposób wyznaczania współrzędnych środka naprężeń według danej linii obojętnej przekroju. Lepiej to jednak czynić w sposób następujący. Weźmy na danej linii obojętnej (Rys. 1) dowolny zresztą punkt  $\mu_0 (x, y)$ . Równanie linii obojętnej, przez ten punkt przechodzącej będzie:  $Y - y = m (X - x)$ , gdzie  $m = \tan \varphi$ . Tylko co wypisane równanie różni się postacią jedynie od równania zwykłego  $\frac{\xi}{J_y} X + \frac{\eta}{J_x} Y + \frac{1}{F} = 0$  linii

obojętnej, to też współczynniki obu tych równań winny być proporcjonalne, musi być przeto:  $m : \left[ \frac{\xi}{J_y} \right] = -1 : \left[ \frac{\eta}{J_x} \right] = (y - mx) : \left[ \frac{1}{F} \right]$ , skąd otrzymamy bezpośrednio wzory:

$$\xi = \frac{mJ_y}{F(y-mx)}, \quad \eta = -\frac{J_x}{F(y-mx)} \dots \dots \dots (4)$$

wyznaczające współrzędne środka naprężeń, przynależnego do danej linii obojętnej. Ponieważ między współrzędnymi obranego punktu  $\mu_0$  i współrzędnymi jakiegokolwiek innego punktu  $\mu_1 (x_1, y_1)$  na linii obojętnej zachodzi związek  $y - mx = y_1 - mx_1$ , przeto *współrzędne środka naprężeń, przynależnego do danej linii obojętnej, mogą być wyrażone w funkcji współrzędnych jakiegokolwiek punktu na linii tej leżącego, oraz jej współczynnika katowego.*

Rozumowanie powyższe stosuje się do wszelkiego  $m$  skończonego; gdy jednak linia obojętka jest równoległa do osi  $OY$ , wtedy  $m = \infty$ , a równanie jej będzie  $X - x = 0$ . W danym wypadku warunki proporcjonalności współczynników będą:  $1 : \left[ \frac{\xi}{J_y} \right] = 0 : \left[ \frac{\eta}{J_x} \right] = -x : \left[ \frac{1}{F} \right]$ . Stąd otrzymamy wzory:  $\xi = J_y : Fx$ ,  $\eta = 0$ .

To samo również możemy otrzymać bezpośrednio, kładąc we wzorach ogólnych  $m = \infty$ . A zatem wzory wyżej wypisane dla  $\xi$  i  $\eta$  stosują się do wszelkich wartości  $m$ .

Gdyśmy w ten sposób udowodnili zupełnej ogólności wzorów (4), przypuszczamy, że nieskończona liczba linii obojętnych przechodzi przez dany punkt  $\mu_0 (x, y)$  przekroju. Każdej z tych linii obojętnych, a raczej każdej poszczególniej wartości współczynnika  $m$  we wzorach — odpowiada pewien ściśle określony środek naprężeń. Zespół tych wszystkich środków utworzy miejsce geometryczne. Z łatwością wyznaczymy jego równanie rugując  $m$  z równań dla  $\xi$ ,  $\eta$ . W tym celu mnożymy  $\xi$  przez  $x$ , a  $\eta$  przez  $y$  i dodajemy, otrzymując:

$$\frac{x}{J_y} \xi + \frac{y}{J_x} \eta + \frac{1}{F} = 0.$$

Tą drogą dostaliśmy równanie linii prostej, pochylonej ku osi  $OX$  pod kątem  $\chi = \text{arc tg} [-J_x x : J_y y]$ .

*Nieskończonej ilości linii obojętnych, przechodzących przez dany punkt, odpowiada nieskończona liczba środków naprężeń, tworzących linię prostą.*

Dalsze własności linii obojętnych poznamy, rozpatrując

**§ 6. Rdzeń przekroju.** Niechaj w układzie osi głównych  $OX, OY$  przekroju równanie  $K(x, y) = 0$  wyznacza krzywą wypukłą, nie mającą punktów osobliwych — obwód pola  $F$  przekroju (Rys. 3). Załóżmy,



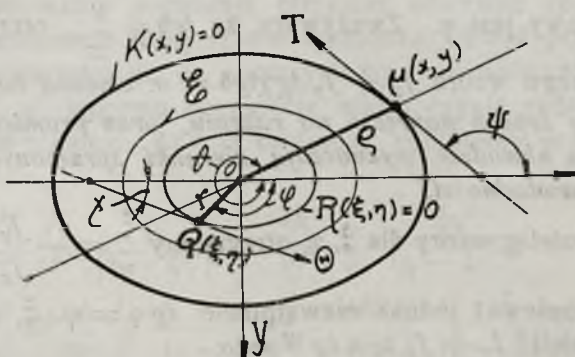
że linia obojętna jest styczną  $T$  obwodu w pewnym jego punkcie  $\mu(x, y)$ . Spółrzędne odnośnego środka naprężeń  $Q(\xi, \eta)$  będą odpowiednio:

$$\xi = \frac{J_y y'}{F(y - xy')}$$

$$\eta = -\frac{J_x}{F(y - xy')}$$

tutaj bowiem współczynnik kątowy linii obojętnej  $T$  wyznaczy się z równania obwodu w postaci:

$$m = \operatorname{tg} \psi = y' = \frac{dy}{dx} = -\left[ \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \right] : \left[ \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \right]$$



Rys. 3.

Rozpatrzmy cały układ linii obojętnych  $T$ , tworzących rój stycznych obwodu. Każdą z prostych tego roju w zupełności określają współrzędne  $x, y$  punktu styczności  $\mu$ , oraz współczynnik kątowy  $y'$  w tym punkcie. Do każdej linii obojętnej — stycznej obwodu przynależy pewien określony środek naprężeń, bo krzywa obwodu, jak to wynika z założenia, punktów osobliwych nie posiada, każdej więc parze wartości  $x, y$ , czyniącej zadość równaniu  $K(y, x) = 0$  odpowiada pewna wartość pochodnej  $y'$ , a więc i para wartości współrzędnych  $\xi, \eta$  odnośnego środka naprężeń. Geometrycznym miejscem wszystkich tych środków naprężeń będzie krzywa zwana *rdzeniem przekroju*.

Jej równanie otrzymamy, wyznaczając z równań, określających  $\xi$  i  $\eta$  — zmienne  $x, y$  w postaci funkcji  $x = f(\xi, \eta), y = g(\xi, \eta)$  i podstawiając je w równanie obwodu. Tą drogą otrzymamy równanie  $K(f, g) = 0$  *rdzenia*. Istnieć ono będzie zawsze, o ile tylko krzywa obwodu będzie ciągła, bez punktów osobliwych. A zatem: *linjom obojętnym — stycznym obwodu przekroju odpowiada krzywa — rdzeń przekroju — geometryczne miejsce odnośnych środków naprężeń*.

Oznaczmy przez  $\chi$  kąt, jaki tworzy z osią  $OX$  *styczna rdzenia*, przechodząca przez punkt  $Q$ . Różniczkowaniem bezpośrednim wzorów dla  $\xi, \eta$  znajdziemy:

$$d\xi = \frac{J_y}{F} \frac{yy' dx}{(y - xy')^2}, \quad d\eta = -\frac{J_x}{F} \frac{xy' dx}{(y - xy')^2},$$

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{J_x}{J_y} \frac{x}{y} = \operatorname{tg} \chi.$$

Z kolei oznaczmy przez  $\rho$  — promień wodzący punktu  $\mu$ , przez  $\theta$

jego kąt biegunowy, przez  $r$  promień wodzący odnośnego środka naprężeń. Ponieważ środek naprężeń leży na osi sił, przeto jego kąt biegunowy jest  $\varphi$ . Zważywszy, że  $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$ , otrzymamy na zasadzie powyższego wzoru  $J_x + J_y \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\theta = 0$ : styczna rdzenia, przechodząca przez dany środek naprężeń na rdzeniu, oraz promień wodzący odnośnego punktu na obwodzie wyznaczają kierunki sprzężonych średnic środkowej elipsy bezwładności.

Dzieląc wzory dla  $\xi$ ,  $\eta$ , otrzymamy  $\frac{\xi}{\eta} = -\frac{J_y}{J_x} y'$ , skąd  $y' = -\frac{J_x}{J_y} \frac{\xi}{\eta} = \operatorname{tg}\Psi$ .

Ponieważ jednak niewątpliwie  $\operatorname{tg}\varphi = \eta : \xi$ , przeto ostatecznie będziemy mieli:  $J_x + J_y \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\Psi = 0$ .

Styczna obwodu, przez dany punkt poprowadzona, oraz promień wodzący odnośnego środka naprężeń na rdzeniu—wyznaczają kierunki sprzężonych średnic elipsy bezwładności środkowej. Widzimy tu uderzające podobieństwo dwu ostatnich wniosków. Nie jest ono przypadkowe. Aby to udowodnić, określamy z równania dla  $\eta$  dwumian  $y - xy' = -\frac{J_x}{F\eta}$ .

Inaczej jeszcze

$$-\frac{J_x}{F\eta} = y \left(1 - \frac{x}{y} y'\right) = y \left[1 + \frac{J_x}{J_y} \frac{\xi}{\eta} \frac{x}{y}\right] = y \left[1 - \eta' \frac{\xi}{\eta}\right].$$

Ostatecznie przeto otrzymamy dla spółrzędnej

$$y = -\frac{J_x}{F(\eta - \xi\eta')}. \quad \text{Nadto } x = -\frac{J_y}{J_x} y\eta', \text{ skąd } x = \frac{J_y \eta'}{F(\eta - \xi\eta')}.$$

Te wzory dowodzą, że pomiędzy środkiem naprężeń na rdzeniu, a punktem odnośnym obwodu zachodzi wzajemność. Te same wzory łączą spółrzędne obu punktów wprost i odwrotnie. Tem się objaśnia owo podobieństwo wniosków. Sięga ono znacznie dalej nawet. Równanie stycznej w punkcie  $Q(\xi, \eta)$  rdzenia przekroju jest  $H - \eta = \eta'(\Xi - \xi)$ . Wobec tego, że  $\eta' = -x J_x : y J_y$ , otrzymamy  $H - \eta = -\frac{J_x x}{J_y y}(\Xi - \xi)$ .

Ponadto inaczej jeszcze:

$$\frac{\Xi x}{J_y} + \frac{Hy}{J_x} - \frac{\eta y}{J_x} - \frac{x\xi}{J_y} = \frac{x}{J_y} \Xi + \frac{y}{J_x} H + \frac{1}{F} = 0.$$

Otrzymane tu równanie stycznej rdzenia niczem się nie różni od równania linii obojętnej, przynależnej do środka naprężeń  $\mu(x, y)$ , leżącego na obwodzie pola. Stąd wniosek, że linja obojętna, przynależna do danego środka naprężeń, leżącego na obwodzie pola, stanowi styczną rdze-



nia w odnośnym punkcie. I w tym wniosku widzimy wzajemność między rdzeniem a obwodem.

Tylko co wyprowadzone wzory pozwalają otrzymać równanie rdzenia. Niechaj, jak dawniej, równanie  $K(x, y) = 0$  wyznacza obwód przekroju. Podstawiając w nie wartości dla  $x, y$ , otrzymamy równanie różniczkowe, zawierające  $\xi, \eta, \eta'$ , któremu oczywiście winno czynić zadość równanie rdzenia, jako jedna z całek. Aby ją otrzymać, całkujemy przez różniczkowanie:

$$\frac{dK}{d\xi} = \frac{\partial K}{\partial x} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{dy}{d\xi} = \frac{\partial K}{\partial x} \frac{J_y}{F} \frac{\eta \eta''}{(\eta - \xi \eta')^2} - \frac{\partial K}{\partial y} \frac{J_x}{F} \frac{\xi \eta''}{(\eta - \xi \eta')^2} = 0.$$

$$\text{Nadto: } \frac{\partial K}{\partial \eta'} = \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta'} + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta'} = \frac{\partial K}{\partial x} \frac{J_y}{F} \frac{\eta}{(\eta - \xi \eta')^2} - \frac{\partial K}{\partial y} \frac{J_x}{F} \frac{\xi}{(\eta - \xi \eta')^2} = \\ = \left[ \frac{dK}{d\xi} \right] : \eta''. \text{ Ostatecznie } \frac{\partial K}{\partial \eta'} = \frac{\partial K}{\partial \eta'} \eta'' = 0.$$

Stąd bezpośrednio wnioskujemy, że  $\eta'' = 0$ , co daje  $\eta' = a$ . W ten sposób całka ogólna równania różniczkowego jest

$$K \left( \frac{J_y a}{F(\eta - \xi a)}, \frac{-J_x}{F(\eta - \xi a)} \right) = 0.$$

Rozwiązując to równanie względem dwumianu zawierającego  $\xi, \eta$ , otrzymamy  $\eta - \xi a = b$ , gdzie  $a$  i  $b$  są to niewątpliwie zupełnie dowolne wielkości — stałe całkowania. Całka ogólna wyobraża przeto rój prostych — układ stycznych rdzenia. W samej rzeczy, funkcja  $K$  staje się zerem wyłącznie i tylko dla spórzędnych  $x, y$  obwodu, a zatem musi być

$$a = \eta' = -\frac{J_x}{J_y} \frac{x}{y} \text{ oraz, jako tego wynik: } b = \eta - \xi \eta' = -\frac{J_x}{F y},$$

$$\text{ostatecznie więc } \eta - \xi a - b = \eta + \frac{J_x}{J_y} \frac{x \xi}{y} + \frac{J_x}{F y} = \left[ \frac{\eta y}{J_x} + \frac{\xi x}{J_y} + \frac{1}{F} \right] \frac{J_x}{y} = 0$$

$$\text{a przeto } \frac{\xi x}{J_y} + \frac{\eta y}{J_x} + \frac{1}{F} = 0. \text{ Jest to równanie stycznej rdzenia, w niem}$$

$\xi, \eta$  grają rolę spórzędnych bieżących, a zmienna  $x$  odgrywa rolę parametru, zmieniającego się ciągle w pewnych ściśle określonych granicach wraz z  $y$ , zależnym od  $x$  na zasadzie równania  $K(x, y) = 0$ . Zatem tą drogą nie możemy otrzymać równania rdzenia z całki ogólnej, jeno równanie roju jego stycznych. Mimo to jednak czynić winno mu ono zadość. Równanie rdzenia stanowić musi całkę osobliwą, czyniącą zadość

nie równaniu  $\eta'' = 0$ , a raczej  $\frac{\partial K}{\partial \eta'} = 0$ . Rugując  $\eta'$  z równań  $K(x, y) = 0$

i  $\frac{\partial K}{\partial \eta'} = 0$  z łatwością ją wyznaczymy. Otrzymamy w ten sposób równanie  $R(\xi, \eta) = 0$  rdzenia naszego przekroju. Z rachunku całkowego wiemy jednak, że tą samą drogą otrzymać można równanie *owijającej* roju prostych  $\eta - \xi a = b$ , roju *linji obojętnych, przynależnych do środków naprężeń, leżących na obwodzie*. A zatem *rdzeń stanowi owijającą roju linji obojętnych, przynależnych do środków naprężeń, leżących na obwodzie przekroju*.

Tylko co podany sposób wyznaczania rdzenia szybciej prowadzi do celu. Niech, dajmy na to, obwód przekroju wyraża się równaniem drugiego stopnia  $K(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2fy + g = 0$ . Podstawiając wartości dla  $x, y$  i mnożąc przez  $F^2(\eta - \xi\eta')^2$ , otrzymamy  $K(x, y) = N\eta'^2 - 2M\eta' + R = 0$ , gdzie:  $N = aJ_y^2 - 2dFJ_y\xi + gF^2\xi^2$ ,  $M = bJ_xJ_y - dFJ_y\eta + fFJ_x\xi + gF^2\xi\eta$ ,  $R = cJ_x^2 - 2fFJ_x\eta + gF^2\eta^2$ .

Pozatem różniczkując bezpośrednio mamy:  $\frac{\partial K}{\partial \eta'} = 2N\eta' - 2M = 0$ , stąd  $\eta' = \frac{M}{N}$  i ostatecznie równanie rdzenia będzie:  $R(\xi, \eta) = \frac{NM^2}{N^2} - \frac{2M^2}{N} + R = R - \frac{M^2}{N} = 0$ . Inaczej jeszcze  $M^2 - RN = F^2J_x^2(f^2 - cg)\xi^2 + 2F^2J_xJ_y(bg - df)\xi\eta + F^2J_y^2(d^2 - ga)\eta^2 + 2FJ_x^2J_y(cd - bf)\xi + 2FJ_xJ_y^2(af - bd)\eta + J_x^2J_y^2(b^2 - ac) = 0$ .

*Rdzeń pola, ograniczonego krzywą drugiego stopnia, jest też krzywą drugiego stopnia.*

Z kolei niech znowu będzie równanie  $R(\xi, \eta) = 0$  rdzenia przekroju, którego obwód —  $K(xy) = 0$ . Kładąc w równaniu  $R(\xi, \eta) = 0$  wartości  $\xi, \eta$  otrzymamy równanie różniczkowe, zawierające  $x, y, y'$ , któremu czynić winno zadość równanie obwodu, jako jedna z całek. Rozwiązując zupełnie tak samo, jak poprzednio, otrzymamy:

$$R\left(\frac{J_y a}{F(y-ax)}, \frac{-J_x}{F(y-ax)}\right) = 0,$$

które wyraża rój stycznych obwodu. Zatem równanie obwodu nie daje się otrzymać z całki ogólnej przez nadanie stałej całkowania wartości szczególnej, stanowi przeto całkę osobliwą, którą otrzymamy, rugując  $y'$  z równań  $R(\xi, \eta) = 0$  i  $\frac{\partial R}{\partial y'} = 0$ . Tą samą drogą otrzymujemy równanie *owijającej roju prostych stycznych obwodu, stanowiących linje obojętne środków leżących na rdzeniu, a przeto: obwód danego pola stanowi owijającą roju linji obojętnych, przynależnych do środków naprężeń, leżących na rdzeniu*. Ten wniosek można również otrzymać wprost na zasadzie prawa wzajemności.



Dotychczas rozpatrywaliśmy krzywe obwodów, pozbawione punktów osobliwych; obecnie należy rozszerzyć obszar badań, biorąc (Rys. 4) pod uwagę część obwodu, złożoną z dwóch łuków  $\mu_1$  i  $\mu_2$ , zbiegających się pod kątem w punkcie  $\mu$ , który zwać będziemy *punktem zespolenia*. Styczne obu gałęzi tworzą w tym punkcie kąt różny od zera. Rozpatrując rój stycznych tej części obwodu, z łatwością dojdziemy do wniosku, na zasadzie już znanych własności, że:

1° każdemu łukowi krzywej obwodu (a więc łukom  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ) odpowiadają również ściśle określone łuki rdzenia ( $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ),

2° nieskończonej liczbie rzekomych stycznych, zawartych wewnątrz kąta, utworzonego przez skrajne styczne — obu łuków, zbiegających się w punkcie zespolenia, odpowiada prosta ( $T$ ), stanowiąca odnośną część rdzenia — zwana *prostą zespolenia*. Ta prosta stanowi wspólną styczną wyżej wspomnianych łuków rdzenia, równanie bowiem

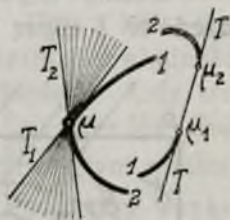
$$\frac{\Xi x}{J_y} + \frac{Hy}{J_x} + \frac{1}{F} = 0$$

wyznacza zarówno prostą zespolenia, jakoteż i styczne łuków  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  w punktach  $\mu_1$  i  $\mu_2$ , dla których punkt  $\mu$  jest odnośnym punktem obwodu. A przeto *gdy jakakolwiek część obwodu pola składa się z dwóch gałęzi, zbiegających się w punkcie zespolenia, wtedy odpowiednia część rdzenia będzie złożona z dwóch łuków, przynależnych do owych krzywych gałęzi obwodu, połączonych prostą zespolenia, styczną obu tych łuków. Prosta zespolenia stanowi odpowiednik punktu zespolenia.*

W podobny sposób z łatwością udowodnimy również, że, *gdy jakakolwiek część rdzenia składa się z dwóch krzywych łuków, połączonych ze sobą styczną zespolenia, wtedy odnośna część obwodu będzie złożona z dwóch krzywych, zbiegających się w punkcie zespolenia.*

Na mocy prawa wzajemności mamy nadto: *gdy jakakolwiek część rdzenia składa się z dwóch krzywych, zbiegających się pod kątem w punkcie zespolenia, wtedy odnośna część obwodu będzie złożona z dwóch łuków, przynależnych do owych krzywych gałęzi rdzenia, połączonych ze sobą prostą zespolenia, styczną obu łuków.* Wniosek odwrotny również jest słuszny. *Gdy jakakolwiek część obwodu składa się z dwóch łuków, połączonych wspólną styczną zespolenia, to odnośna część rdzenia będzie złożona z dwóch krzywych, zbiegających się pod kątem w punkcie zespolenia.*

Te wnioski pozwalają budować rdzeń dla wszelkiego przekroju, bo każdy obwód pola w ogólnym wypadku składa się w poszczególnych krzywych łuków, zbiegających się w punktach zespolenia, lub połączo-



Rys. 4.

nych prostemi zespolenia. Nadto pewne ułatwienie mogą dać następujące własności linii obojętnych:

Weźmy (Rys. 5) jakikolwiek przekrój, wyznaczmy jego obwód  $K$ , rdzeń  $R$  i elipsę środkową bezwładności  $E$ , której równanie

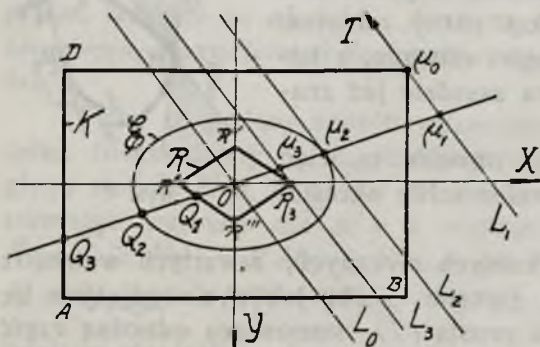
$$[x : i_y]^2 + [y : i_x]^2 = 1$$

możemy, dzieląc przez  $F$ , przedstawić w postaci:

$$\frac{x^2}{J_y} + \frac{y^2}{J_x} - \frac{1}{F} = 0. \text{ Obierzmy}$$

jakąkolwiek oś sił, a na niej środek naprężeń  $Q(\xi, \eta)$ , o współrzędnych biegunowych  $r, \varphi$ . Linja obojętna, do tego środka przynależna, będzie:

$$\frac{\xi}{J_y} X + \frac{\eta}{J_x} Y + \frac{1}{F} = 0.$$



Rys. 5.

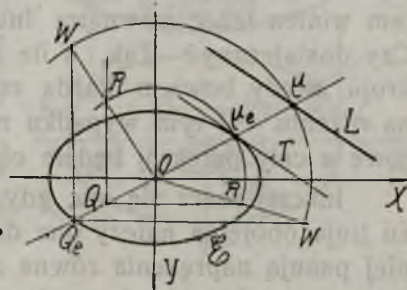
Spółrzędne punktu przecięcia się tej linii obojętnej z osią sił będą oczywiście czyniły zadość temu równaniu, oraz równaniu osi sił, które możemy wypisać w postaci  $Y = X \operatorname{tg} \varphi = mX$ . Oznaczmy współrzędne tego punktu przez  $X, Y$  prostokątne, przyczem  $r = \sqrt{X^2 + Y^2} = X \sqrt{1 + m^2} = X \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$  oznaczać będzie jego promień wodzący. Ponieważ dalej  $\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} \varphi$ , przeto  $Y \eta = m^2 X \xi$ , gdzie  $m = \operatorname{tg} \varphi$  i ostatecznie równanie linii obojętnej będzie  $X \xi \left[ \frac{1}{J_y} + \frac{m^2}{J_x} \right] + \frac{1}{F} = 0$ , a więc z tego równania wyżywa, że  $X \xi$  jest wielkością stałą,  $X \xi = -J_x J_y : [J_x + m^2 J_y] F$ ; zatem również  $Y \eta$  jest wielkością stałą, albowiem  $Y \eta = m^2 X \xi = -J_x J_y m^2 : [J_x + m^2 J_y] F$ . Podobnie też  $r \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \sqrt{X^2 + Y^2} = X \xi (1 + m^2) = -J_x J_y (1 + m^2) : [J_x + m^2 J_y] F$ : iloczyn ten jest również stałą. A zatem, gdy środek naprężeń posuwa się po osi sił — odnośna linja obojętna również się posuwa, pozostając równoległą do osi elipsy środkowej bezwładności, kierunkowo z osią sił sprzężonej. Nadto, gdy środek naprężeń leży w nieskończoności, to jest gdy  $\xi = \eta = \infty$ , wtedy  $X = Y = 0$ : linja obojętna przechodzi przez środek przekroju, gdy odnośny środek naprężeń jest nieskończenie daleki. Gdy środek naprężeń wychodzi z nieskończoności i posuwa się po osi sił ku początkowi współrzędnych —  $\xi, \eta$  maleją, a  $XY$  rosną — równocześnie więc linja obojętna, wychodząc ze środka przekroju, oddala się równoległe do siebie samej. Gdy środek naprężeń wkroczy na obwód w punkcie  $Q_3$ , linja obo-



jętna dotknie rdzenia w  $R_3$ , przyczem dotyk należy tu pojmować już to jako istotne stykanie się geometryczne, już to jako zwykłą tylko wspólność punktu bez wyraźnej styczności w ścisłym tego słowa znaczeniu, jak to właśnie ma miejsce w rozpatrywanym wypadku. Gdy z kolei środek naprężeń porzuca obwód i dąży ku środkowej elipsie bezwładności przekroju, odnośna linja obojętna oddala się jeszcze bardziej. Gdy środek wkroczy na elipsę w  $Q_2$  o spólrzędnych  $X_e, Y_e$ , odnośna linja obojętna stanie się styczną tej elipsy w średnicowo przeciwnym punkcie  $\mu_2 (-X_e, -Y_e)$ . Łatwo to udowodnić zważywszy, że spólrzędne punktu  $Q_2$ , leżącego z założenia na elipsie, czynić winny zadość jej równaniu  $\frac{X_0^2}{J_y} + \frac{Y_0^2}{J_x} - \frac{1}{F} = 0$ . Z drugiej znów strony równanie linii obojętnej, przynależnej do środka naprężeń  $Q_2(X_e, Y_e)$  będzie tu  $\frac{XX_e}{J_y} + \frac{YY_e}{J_x} + \frac{1}{F} = 0$ . Z porównania obu tych równań wynika, że  $X = -X_e$ ,

$Y = -Y_e$ , co należało udowodnić. Nadto owa linja obojętna, jako sprzężona kierunkowo z osią sił — musi być styczną elipsy. Widzimy stąd, że rdzeń zawarty jest całkowicie wewnątrz elipsy środkowej przekroju. Gdy znowu środek naprężeń porzuca elipsę dążąc ku krzywej rdzenia, odnośna linja obojętna jeszcze się bardziej oddala. Gdy środek naprężeń wkroczy na rdzeń w punkcie  $Q_1$ , linja obojętna dotknie obwodu, lub przejdzie przez jego punkt jedyny bez wyraźnej styczności, jak to ma miejsce w danym wypadku. Wreszcie, gdy środek naprężeń porzuci rdzeń i zbliży się do środka masy przekroju, odnośna linja obojętna porzuca obwód i oddala się w nieskończoność. Te wszystkie wnioski są oczywiste wobec stałości iloczynów  $X\xi, Y\eta$ . Gdy w nich  $\xi = \eta = 0$ , to wtedy  $X = Y = \infty$ .

Na zasadzie rozważań poprzednich łatwo jest ustalić wykreślny sposób budowania linii obojętnej, przynależnej do danego środka naprężeń (Rys. 6). W tym celu przez dany środek  $Q$  prowadzimy oś sił  $O\Sigma$ , która przetnie elipsę środkową bezwładności w punktach  $Q_e$  i  $\mu_e$ . Przez  $Q$  i  $Q_e$  prowadzimy proste równoległe do jednej z głównych osi przekroju. Kreśląc łuk  $\mu_e R$  promieniem  $O\mu_e$  do przecięcia się z ową prostą przez  $Q$  poprowadzoną, prowadzimy promień  $OR$  i przedłużamy do przecięcia się z równoległą przez  $Q_e$  poprowadzoną. Łuk, opi-



Rys. 6.

sany promieniem  $OW$  z owego punktu przecięcia, odcetnie na osi sił odcinek  $O\mu$ . Przez  $\mu$  przejdzie szukana linja obojętna, przynależna do  $Q$ . Aby ją ostatecznie wykreślić, należy zbudować styczną  $T$  elipsy bezwładności, przechodzącą przez  $\mu_e$ . Szukana linja obojętna będzie jej równoległą.

Zupełnie tak samo możemy wyznaczyć środek naprężeń, przynależny do danej linii obojętnej  $L$ . Prowadzimy styczną  $T$  elipsy bezwładności przekroju środkowej, równoległą do  $L$ . Ta styczna przejdzie przez punkt styczności  $\mu_e$  na elipsie. Łączymy  $\mu_e$  ze środkiem przekroju osią sił  $O\Sigma$ , która wyznaczy drugi punkt średnicowo przeciwny  $Q_e$  na elipsie oraz punkt  $\mu$  przecięcia się z daną linią obojętną. Przez punkt  $Q_e$  prowadzimy prostą równoległą do jednej z osi głównych przekroju. Zataczając łuk  $\mu W$  promieniem  $O\mu$  znajdujemy punkt przecięcia się  $W$  tego łuku z prostą tylko co poprowadzoną. Łączymy  $W$  z  $O$  i zataczamy łuk promieniem  $O\mu_e$ , który wyznaczy na  $OW$  punkt przecięcia  $R$ . Prosta  $RQ$  równoległa do  $Q_eW$  poprowadzona przetnie oś  $O\Sigma$  w  $Q$  — szukanym środkiem naprężeń.

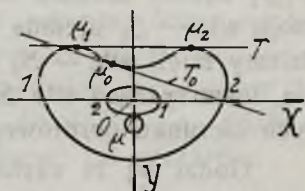
Aby to udowodnić oznaczamy  $OQ_e = r_e$ ,  $OQ = r$ ,  $O\mu_e = \rho_e$ ,  $O\mu = \rho$ . Wyżej widzieliśmy, że styczna  $T$  elipsy środkowej stanowi linję obojętną, przynależną do środka naprężeń  $Q_e$ , mamy więc  $r\rho = r_e\rho_e =$  stałej. To samo wynika z podobnych trójkątów  $\triangle Q_eWO$  i  $\triangle QRO$ , gdzie  $OQ_e : OQ = OW : OR = O\mu : O\mu_e$  czyli  $r_e : r = \rho : \rho_e$  i ostatecznie  $r_e\rho_e = r\rho$ , co należało udowodnić.

Na zasadzie wyżej wyłuszczonych wniosków z łatwością daje się zauważyć, że skoro środek naprężeń leży poza rdzeniem, przynależna doń linja obojętna przecina przekrój, a wtedy obciążenie przekroju składa się z naprężeń różnych znaków. W budownictwie tego rodzaju rozkładów naprężeń należy unikać, wobec nader małej wytrzymałości na rozciąganie kamieni, a zwłaszcza zapraw i cementu. Należy przeto przekroje obciążać jednoimiennymi naprężeniami cisnącymi. Stąd wskazówka praktyczna, że środek naprężeń nie powinien wychodzić poza rdzeń przekroju, a zatem winien leżeć wewnątrz lub na rdzeniu. Jest to warunek konieczny. Czy dostateczny? Tak, o ile styczne obwodu nie przecinają pola przekroju, wtedy bowiem każda ze stycznych ma odnośny środek naprężeń na rdzeniu. W tym wypadku na stycznych panować będą naprężenia zerowe a cały przekrój będzie obciążony naprężeniami jednego znaku.

Inaczej rzecz się ma, gdy styczna przekroju przecina jego pole. Jako linja obojętna należy ona do środka naprężeń leżącego na rdzeniu, na niej panują naprężenia równe zeru, skoro więc przecina pole przekroju, zatem go dzieli na dwa obszary o naprężeniach różnych co do znaku.

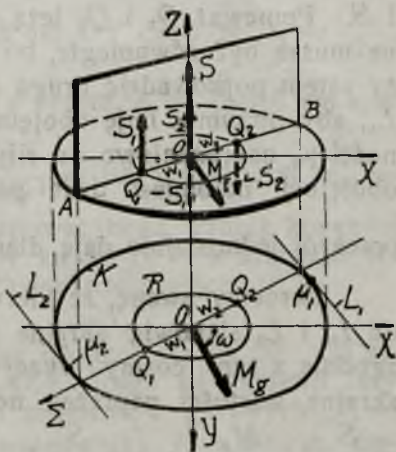


Ma to jedynie miejsce w tym wypadku, gdy na obwodzie przekroju zaznacza się zakłębienie, słowem gdy obwód nie jest krzywą wypukłą. Jest to samo przez się zrozumiałe: *styczna*  $T_0$  przekroju (Rys. 7) przechodząca przez punkt  $\mu_0$  zakłębienia musi przeciąć pole przekroju. Z tego powodu przy rozpatrywaniu rdzenia *należy* wyłączyć z pod rozpatrywania wszystkie styczne zakłębienia i ograniczyć się do wyznaczenia środka naprężeń, przynależnego do stycznej obwodu w punktach  $\mu_1$  i  $\mu_2$ , to jest do prostej zespolenia obu łuków, obejmujących zakłębienie. Ponieważ prostą zespolenia  $T$  i obu punktom styczności odpowiada jeden tylko środek naprężeń na rdzeniu, przeto pominięcie stycznych zakłębienia nie przerwie ciągłości rdzenia. Chcąc zatem wyznaczyć miejsce geometryczne skrajnych środków naprężeń, przynależnych do linii obojętnych, stycznych przekroju, lecz nie przecinających jego pola, należy pominąć wszystkie styczne zakłębień obwodu i ograniczyć się do rozpatrywania prostych zespolenia przerzuconych ponad zakłębieniami. Czyniąc tak wyłączamy z pod rozpatrywania część rdzenia, odpowiadającą zakłębieniu  $\mu_1\mu_0\mu_2$ , która stanowi *pętlę zewnętrzną*, uczeponą do punktu zespolenia  $\mu$  dwóch łuków rdzenia zbiegających się w tym punkcie, przynależnym do prostej zespolenia  $T$  obwodu. Łuki rdzenia  $1\mu$ ,  $2\mu$  przynależą do łuków  $1\mu_1$ ,  $2\mu_2$  obwodu, pętlica zaś jest zawsze zewnętrzna w stosunku do rdzenia, bo zakłębienie  $\mu_1\mu_0\mu_2$  jako bliżej środka leżące da szereg środków naprężeń dalej od środka leżących niż punkt  $\mu$ , przynależny do stycznej  $T$ . A zatem *jeżeli obwód przekroju posiada zakłębienie, to odpowiednia część rdzenia składa się z pętlicy leżącej na zewnątrz punktu zespolenia, przynależnego do prostej zespolenia, przerzuconej poprzez wklęsłość obwodu.*



Rys. 7.

**§ 7. Wyznaczanie skrajnych naprężeń normalnych przekroju za pomocą rdzenia.** Weźmy pod uwagę przekrój (Rys. 8), odkształcony pod jarzmem środkowej siły  $S$  doń prostopadłej oraz momentu gnącego  $M_g$ , pochylonego ku osi głównej  $OX$  przekroju pod kątem  $\omega$ , a leżącego w przekroju. Wyznamy oś sił  $O\Sigma$  momentu i rdzeń przekroju. Oś sił przetnie rdzeń w punktach  $Q_1$ ,  $Q_2$ , odcinając *promienie rdzenia*  $w_1$  i  $w_2$ . Rozłożmy moment gnący na parę sił w taki



Rys. 8.

sposób, aby jedna z sił pary działała w środku przekroju, a druga w  $Q_1$  lub  $Q_2$  na rdzeniu. W pierwszym wypadku siłę pary wyznaczmy z równania  $M_g = w_1 S_1$ , a w drugim z  $M_g = w_2 S_2$ . W pierwszym wypadku w  $Q_1$  będzie działała siła  $S_1 = M_g : w_1$  dodatnia, oraz w środku przekroju siła  $-S_1$  ujemna łącznie z siłą  $S$ . W drugim natomiast w  $Q_2$  będziemy mieli siłę  $-S_2 = M_g : w_2$  ujemną, a w środku siłę  $S_2$  dodatnią, towarzyszącą sile  $S$ . Wypływa to bezpośrednio z założeń, dotyczących kierunku obrotowego momentu.

Godzi się tu zaznaczyć, że promień  $w_1$ , jako leżący na osi sił tuż za momentem ma kąt biegunowy  $\varphi_1 = \omega + \frac{\pi}{2}$ , podczas gdy promień  $w_2$ , poprzedniemu przeciwny, przynależy do kąta biegunowego  $\varphi_2 = \omega + \frac{3}{2}\pi$ . W tym założeniu siła  $S_1$  przyłożona do  $Q_1$  jest zawsze dodatnia. Jej linja obojętna przecina boki przeciwległej ćwiartki, przechodząc przez punkt  $\mu_1$  obwodu. Wszystkie punkty tej linii  $L_1$ , a więc i punkt styczności  $\mu_1$  na obwodzie leżący, naprężeniowo od siły  $S_1$ , działającej w  $Q_1$ , nie zależą, ponieważ leżą na linii obojętnej, przynależnej do środka naprężeń  $Q_1$ . Natomiast pozostałe dwie siły środkowe  $-S_1$  i  $S$  dają dla punktu  $\mu_1$  naprężenie  $[-S_1 + S] : F = \frac{S}{F} - \frac{M_g}{Fw_1}$  takie samo, jak dla innych punktów przekroju, bo siły te, jako środkowe obciążają przekrój jednostajnie. Ponieważ sprowadziliśmy obciążenie przekroju od trzech sił tylko co wymienionych, przeto wzór otrzymany daje całkowitą wartość naprężenia w punkcie  $\mu_1$ .

Obciążenie zewnętrzne może być również sprowadzone do siły  $-S_2$  działającej mimośrodkowo w  $Q_2$  na rdzeniu oraz do sił środkowych  $S_2$  i  $S$ . Ponieważ  $Q_1$  i  $Q_2$  leżą na tej samej osi sił, przeto ich linje obojętne muszą być równoległe, bo są kierunkowo z tą osią sprzężone. Należy zatem poprowadzić drugą skrajną styczną obwodu  $L_2$ , równoległą do  $L_1$ , aby otrzymać linję obojętną dla środka naprężeń  $Q_2$ . Jej punkt styczności  $\mu_2$  naprężeniowo od siły  $-S_2$  nie zależy, leży bowiem na linii obojętnej, natomiast dwie pozostałe siły środkowe  $S_2$  i  $S$ , obciążające przekrój jednostajnie dają dlań naprężenie  $[S_2 + S] : F = \frac{S}{F} + \frac{M_g}{Fw_2}$ .

Zwróćmy uwagę, że kierunkowo sprzężone z osią sił styczne obwodu  $L_1$  i  $L_2$  stanowią skrajne proste roju linii równych naprężeń, to też, zgodnie z tem cośmy wyżej wyprowadzili, wiemy, że na nich panują skrajne wartości naprężeń normalnych  $\sigma_{s1}$  i  $\sigma_{s2}$ . Mamy więc  $\sigma_{s1} = \frac{S}{F} - \frac{M_g}{Fw_1}$ ,  $\sigma_{s2} = \frac{S}{F} + \frac{M_g}{Fw_2}$ . A zatem możemy wypowiedzieć na-



stępujący wniosek: skrajne wartości naprężeń normalnych przekroju, obciążonego środkową siłą doń prostopadłą, oraz momentem gnącym, leżącym w przekroju, można wyznaczyć, dzieląc przez przekrój sumę i różnicę owej siły i momentu, podzielonego przez odnośne promienie rdzenia, leżące na osi sił momentu. Różnicy odpowiada promień rdzenia, leżący na osi sił tuż za momentem gnącym, — sumie dalszy promień pierwszemu przeciwnieległy. Inaczej mówiąc — różnicy odpowiada promień przynależny do kąta  $\omega + \pi/2$ , a sumie — promień przynależny do  $\omega + 3/2 \pi$ , gdzie  $\omega$  oznacza kąt pochylenia momentu gnącego ku głównej osi przekroju.

**§ 8. Przykłady i ćwiczenia. 1. Przekrój prostokątny.** Moment gnący leży na jednej z głównych osi przekroju. Wyznaczyć skrajne naprężenia w założeniu podstawy  $B = 10$  cm, wysokości przekroju  $H = 12$  cm i  $M_g = 0,2$  (tn, m). Korzystając ze znakowania (I. Rys. 14) mamy  $J_x = 1/12 \times 10 \times 12^3 = 1440$  cm<sup>4</sup>  $J_y = 1/12 \times 12 \times 10^3 = 1000$  cm<sup>4</sup>.

A zatem równanie linii obojętnej będzie:  $-\frac{\sin \omega}{1000} X + \frac{\cos \omega}{1440} Y = 0$ , a naprężenia skrajne wyznaczą się ze wzoru:  $e M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{1440^2} + \frac{\sin^2 \omega}{1000^2}}$ , gdy

uczynimy w nim  $e = e_1$  i  $e = e_2$ .

Założmy przedewszystkiem, że moment leży na osi  $OX$ , zatem  $\omega = 0$  i linią obojętną będzie  $OX$ . Łatwo to spostrzec ze wzoru czyniąc w nim  $\cos \omega = 1$   $\sin \omega = 0$ . Tutaj więc  $e_1 = 1/2 H = 6$  cm,  $e_2 = -6$  cm. Zważywszy nadto, że  $M_g = 0,2 \times 1000 \times 100 = 20000$  (kg, cm), będziemy

mieli  $\sigma_{s1} = 6 \times 20000 \times \sqrt{\frac{1}{1440^2}} = 83$  kg/cm<sup>2</sup>  $\sigma_{s2} = -83$  kg/cm<sup>2</sup>.

Te dwie wartości różnią się znakiem jedynie; naprężenie rozciągające skrajne panuje wzdłuż podstawy dolnej przekroju, cisnące ujemne wzdłuż podstawy górnej.

Z kolei zakładamy, że moment leży na osi  $OY$  czyli że  $\omega = \frac{\pi}{2}$ .

Równanie linii obojętnej będzie tu  $X = 0$ , a przeto  $e_1 = \frac{B}{2} = 5$  cm  $e_2 =$

$= -5$  cm, a zatem  $\sigma_{s1} = 5 \times 20000 \sqrt{\frac{1}{1000^2}} = 100$  kg/cm<sup>2</sup> oraz  $\sigma_{s2} =$

$= -100$  kg/cm<sup>2</sup>. Te naprężenia skrajne panować będą wzdłuż krawędzi bocznych przekroju. Gdy oś  $OY$  skierujemy ku górze — w krawędzi lewej będziemy mieli naprężenie cisnące, w prawej rozciągające.

**2. Dwuteownik.** Weźmy pod uwagę dwuteownik № 20. Oś symetrii, prostopadłą do średnika nazywamy  $OX$ , druga oś symetrii leży wewnątrz średnika. Tablice dają wartości momentów głównych  $J_x = 2139$  cm<sup>4</sup>  $J_y = 117$  cm<sup>4</sup>. Wysokość dwuteownika  $H = 20$  cm, szerokość obu pasów  $B = 9$  cm. Moment gnący  $M_g = 0,5$  (tn, m) pochyła

się ku osi  $OX$  pod kątem  $\omega = 28^\circ 20'$ . Wyznaczyć skrajne naprężenia przekroju. Ponieważ  $\text{Sin}\omega = 0,47460$ ,  $\text{Cos}\omega = 0,88020$  przeto

$$\sigma_z = - \frac{50000 \times 0,4746}{117} X + \frac{50000 \times 0,8802}{2139} Y. \text{ Równanie linii obojęt-}$$

nej będzie, gdy uczynimy w tym wzorze  $\sigma_z = 0$  — co da  $Y = 9,8576 X$ . Przechodzi ona przez środek i pochyla się ku  $OX$  pod kątem  $\text{arctg} 9,8576 = 84^\circ 10'$ . Prowadząc skrajne styczne przekroju, równoległe do linii obojętnej, zauważymy, że dotkną one przekroju w punktach

$$\left(-\frac{B}{2}, \frac{H}{2}\right) \text{ oraz } \left(\frac{B}{2}, -\frac{H}{2}\right). \text{ Tam będą panować skrajne wartości na-}$$

prężen normalnych, które wyznaczymy, pisząc  $\sigma_{z1} = 50000 \times 0,4746 \times 4,5 : 117 + 50000 \times 0,8802 \times 10 : 2139 = 1118,2 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_{z2} = -1118,2 \text{ kg/cm}^2$ . Te same wyniki moglibyśmy otrzymać również, wyliczając  $e_1$  i  $e_2$ . —

**3. Kątownik.** Weźmy (I. Rys. 15) pod uwagę kątownik równoramienny  $cm : 10 \times 10 \times 1$  i założmy, że moment gnący  $M_g = 0,3$  ( $tn, m$ ) pochyla się ku osi głównej  $OX$  przekroju pod kątem  $\omega = 14^\circ 40'$ . Tablice dają dla osi symetrii przekroju  $OX$ , pochylonej ku obu pasom pod  $45^\circ$ , wartości  $J_x = 280 \text{ cm}^4$ , a dla  $OY$  ku  $OX$  prostopadłej:  $J_y = 73,3 \text{ cm}^4$ . Ponieważ tutaj  $\text{Sin}\omega = 0,25320$ ,  $\text{Cos}\omega = 0,96742$ , przeto

$$\text{dla naprężenia normalnego otrzymamy wzór } \sigma_z = - \frac{30000 \times 0,2532}{73,3} x + \frac{30000 \times 0,96742}{280} y. \text{ Czyniąc } \sigma_z = 0, \text{ otrzymamy równanie linii obojęt-}$$

nej w postaci ostatecznej  $Y = 0,99978 X$ . Przechodzi ona przez środek przekroju, pochylając się ku osi głównej  $OX$  pod kątem  $\approx 45^\circ$ . Jest to więc prosta prawie tożsamościowa z osią  $OY_0$ , kąt jej nachylenia ku osi  $OX$  jest jednak nieco mniejszy od  $45^\circ$ , przeto punkty najbardziej oddalone od linii obojętnej będą  $A$  i  $G$ . Wyznamy ich współrzędne. W układzie osi  $OX_0, OY_0$  będzie  $A(-2,82, 7,18)$  oraz  $G(7,18, -2,82)$  cm mamy bowiem dla tego przekroju  $\xi_0 = \eta_0 = 2,82$  cm. Zatem na mocy wzorów przejścia będziemy mieli w układzie osi głównych  $OX, OY$  dla punktu  $A$  współrzędne:  $x = -2,82 : \sqrt{2} + 7,18 : \sqrt{2} = 3,08$  cm,

$y = 2,82 : \sqrt{2} + 7,18 : \sqrt{2} = 7,07$  cm, a dla punktu  $G$  podobnie  $x = 3,08$  cm,  $y = -7,07$  cm. Zatem w  $A$  panować będzie naprężenie skrajne  $\sigma_{z1} = -30000 \times 0,2532 \times 3,08 : 73,3 + 30000 \times 0,96742 \times 7,07 : 280 = 413,6 \text{ kg/cm}^2$ , a w  $G$  panować będzie również naprężenie skrajne, lecz znaku przeciwnego  $\sigma_{z2} = -30000 \times 0,2532 \times 3,08 : 73,3 - 30000 \times 0,96742 \times 7,07 : 280 = -1052,0 \text{ kg/cm}^2$ . Bezwzględna wartość naprężenia w  $G$  jest większa. Można się było tego spodziewać, punkt bowiem  $G$  leży dalej od linii obojętnej niż  $A$ .



**4<sup>o</sup>. Przekrój kołowy.** Na przekrój kołowy średnicy  $D = 20$  cm działa moment gnący  $M_g = 3$  (tn, m) oraz siła środkowa  $S = 30, 120$  i  $150$  tn, prostopadła do przekroju. Wyznaczyć skrajne naprężenia normalne. Właściwie mówiąc są to trzy wypadki obciążenia mimośrodowego siłami  $S_1 = 30$  tn,  $S_2 = 120$  tn i  $S_3 = 150$  tn prostopadłymi do przekroju, a działającymi w odległości:  $\Delta_1 = 300000 : 30000 = 10$  cm,  $\Delta_2 = 300000 : 120000 = 2,5$  cm i  $\Delta_3 = 300000 : 150000 = 2$  cm. Ponieważ mamy tu do czynienia z przekrojem obojętnym, przeto oś  $OX$  możemy ułożyć na kresie momentu, a wtedy spólrzędne odnośnych środków naprężeń będą:  $Q_1(0,10)$ ,  $Q_2(0,2,5)$ ,  $Q_3(0,2)$  cm. Linje obojętne otrzymamy ze wzoru ogólnego  $\frac{\xi}{J_y} X + \frac{\eta}{J_x} Y + \frac{1}{F} = 0$ , gdzie  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ ,  $\eta_1 = 10$  cm,  $\eta_2 = 2,5$  cm,  $\eta_3 = 2$  cm, a nadto  $J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$  oraz  $F = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$ . Ostatecznie więc otrzymamy równanie linji obojętnej w postaci

$\frac{64}{\pi D^4} Y \eta + \frac{4}{\pi D^2} = 0$  czyli  $Y = -D^2 : 16 \eta$ . Zatem kolejno będziemy mogli napisać:  $Y_1 = -400 : 16 \cdot 10 = -2,5$  cm,  $Y_2 = -400 : 16 \cdot 2,5 = -10$  cm,  $Y_3 = -400 : 16 \cdot 2 = -12,5$  cm. Wszystkie te trzy linje obojętne są równolede do osi  $OX$ , przeto najbardziej oddalone punkty przekroju będą leżały na osi  $OY$ . W pierwszym wypadku będziemy mieli  $e_1 = 12,5$  cm,  $e_2 = -7,5$  cm, w drugim  $e_1 = 20,0$  cm,  $e_2 = 0$ , w trzecim  $e_1 = 22,5$  cm,  $e_2 = 2,5$  cm. Odnośne skrajne naprężenia otrzymamy ze wzoru

$$c M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}} = 300000 e \sqrt{\left[1 : \frac{\pi D^4}{64}\right]^2} = 300000 e : \left[\frac{\pi D^4}{64}\right] = 38,19 e.$$

W pierwszym wypadku będziemy mieli naprężenia skrajne różnych znaków  $\sigma_{z_1} = 477,4$   $\text{KG}/\text{CM}^2$  i  $\sigma_{z_2} = -286,4$   $\text{KG}/\text{CM}^2$ , w drugim  $\sigma_{z_1} = 763,8$   $\text{KG}/\text{CM}^2$  drugie zaś będzie równe zero — wszystkie naprężenia będą przeto dodatnie, wreszcie w trzecim wypadku  $\sigma_{z_1} = 859,3$   $\text{KG}/\text{CM}^2$ ,  $\sigma_{z_2} = 95,5$   $\text{KG}/\text{CM}^2$ . Mamy tu więc wszystkie trzy rodzaje układów naprężeń gnących odpowiednio do różnych wartości  $S$ .

**5<sup>o</sup>. Rdzeń przekroju prostokątnego.** Wychodzimy (rys. 5) z równań zasadniczych dla spólrzędnych rdzenia  $\xi = J_y, y' : F(y - xy')$ ,  $\eta = -J_x : F(x' - xy')$ . W danym wypadku oznaczając przez  $H$  wysokość przekroju, przez  $B$  jego podstawę, mamy  $J_x = \frac{1}{12} BH^3$ ,  $J_y = \frac{1}{12} B^3 H$ ,  $F = BH$ , a przeto  $J_x : F = \frac{1}{12} H^2$ ,  $J_y : F = \frac{1}{12} B^2$ . Równanie prostej, przechodzącej przez dolną podstawę przekroju będzie tu  $y = +\frac{1}{2} H$ , a zatem  $y' = 0$  stąd odpowiedni punkt rdzenia wyznaczą spólrzędne  $\xi = 0$   $\eta = -\frac{1}{12} H^2 : \frac{1}{2} H = -\frac{1}{6} H$ . Zatem podstawie  $AB$  przekroju odpowiadać będzie punkt  $R'$  rdzenia, podstawie  $D\mu_0$  symetryczny punkt  $R''$ , nadto odległość  $OR' = OR'' = \frac{1}{6} H = \frac{1}{6} AD$ . Z kolei równanie boku  $AD$  będzie  $x = -B/2$ , przyczem ta prosta jest równoległa do  $OY$ , a więc dla niej  $y' = \infty$ . Dzieląc wzór dla  $\xi$  przez  $y'$  otrzymamy  $\xi = J_y : F \left(\frac{y}{y'} - x\right)$ ,

stąd przy  $y' = \infty$  oraz  $x = -\frac{B}{2}$  będziemy mieli  $\xi = -\frac{1}{12} B^2 : \left(-\frac{B}{2}\right) = \frac{1}{6} B$ . Drugi wzór daje  $\eta = 0$  przy  $y' = \infty$ . Zatem—krawędzi  $AD$  odpowiadać będzie punkt  $R_1$  rdzenia. Krawędzi zaś  $B\mu_0$  punkt  $R''$ . *Rdzeń przekroju prostokątnego ma postać ukośnika, leżącego wierzchołkami na osiach głównych przekroju. Podstawa ukośnika równa jest jednej trzeciej podstawy prostokąta, wysokość—trzeciej części wysokości macierzystego przekroju.*

**6°. Rdzeń dwuteownika** wyznaczamy w podobny sposób. Główną oś  $OX$  kierujemy przez środek prostopadle do średnika, drugą  $OY$  układamy w średniku. Równanie dolnej krawędzi będzie  $y = \frac{H}{2}$ , w założeniu, że oś  $OY$  kierujemy ku dołowi i przez  $H$  oznaczamy wysokość dwuteownika, a przez  $B$  szerokość obu jego pasów. Zatem  $y' = 0$  i odpowiedni punkt rdzenia otrzyma współrzędne:  $\xi = 0, \eta = -\frac{J_x}{F} \frac{2}{H} = -2 J_x : FH$ . Symetryczny punkt rdzenia  $(0, 2 J_x : FH)$  będzie odpowiadał krawędzi górnego pasa. Równanie jej:  $y = -\frac{H}{2}$ . Miasto krawędzi bocznych — przekrój posiada wklęsłości, które należy, zgodnie z teorią ogólną, ominąć, przerzucając proste  $x = \frac{B}{2}$  i  $x = -\frac{B}{2}$ . Lewej krawędzi pionowej odpowiada równanie  $x = -\frac{B}{2}$  w założeniu, że oś  $OX$  kierujemy ku prawej ręce. Dla tej krawędzi nadto  $y' = \infty$ , a przeto odnośny punkt rdzenia będzie miał współrzędne  $\xi = \frac{J_x}{F} \left[ \frac{y}{y'} - x \right] = 2 J_y : FB$  oraz  $\eta = 0$ . Krawędzi prawej będzie wobec tego odpowiadał symetryczny punkt rdzenia  $(-2 J_y : FB, 0)$ . I tu więc rdzeń będzie w kształcie ukośnika, boki jego proste będą bowiem odpowiadały punktom węglowym obwodu, gdzie krawędzie pasów przecinają się z krawędziami bocznymi.

W założeniu dwuteownika № 30 będziemy mieli  $J_x = 9785 \text{ cm}^4$ ,  $J_y = 449 \text{ cm}^4$ ,  $F = 69 \text{ cm}^2$ ,  $H = 30 \text{ cm}$  oraz  $B = 12,5 \text{ cm}$ , a przeto podstawa rdzenia będzie wynosiła  $2 \xi = 4 J_y : FB = 2,08 \text{ cm}$  a wysokość  $2 \eta = 4 J_x : FH = 18,90 \text{ cm}$ . Jest to więc ukośnik wydłużony w kierunku osi  $OY$ . Gdybyśmy miasto dwuteownika mieli zwykły przekrój prostokątny — podstawa ukośnika byłaby równa  $12,5 : 3 = 4,17 \text{ cm}$  a wysokość  $30 : 3 = 10 \text{ cm}$ . Dwuteownik zatem ma rdzeń węższy lecz dłuższy od rdzenia odpowiedniego prostokątnego przekroju.

Te same wzory posłużyć mogą do obliczenia wymiarów rdzenia przekroju czworokątnikowego (I rys. 25), złożonego z czterech kątowników, dajmy na to,  $65 \times 65 \times 11 \text{ mm}$ . Jest to tak zwany *czworokątnikowy przekrój kwadratowy* o jednakowych momentach głównych bezwładności  $J_x = J_y = 4 J_{yc} + 4 F_c \left[ \frac{1}{2} H - \xi \right]^2$ , gdzie z tablic możemy wypisać  $J_{yc} = 48,7 \text{ cm}^4$ ,  $F_c = 13,2 \text{ cm}^2$ ,  $\xi = 2,0 \text{ cm}$ . Założmy  $H = 30 \text{ cm}$ , a wtedy

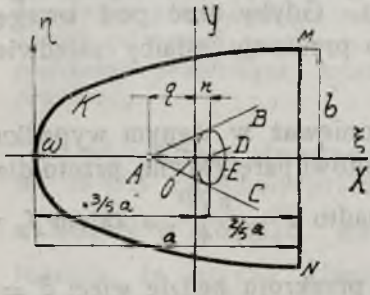


$J_x = J_y = 9118 \text{ cm}^4$ . Ponieważ nadto całkowity przekrój  $F = 4 F_c = = 52,8 \text{ cm}^2$ , przeto w danym wypadku rdzeń będzie miał postać kwadratu, leżącego wierzchołkami na osiach głównych przekroju. Przekątnie tego kwadratu będą równe  $4 J_x : FH = 23,02 \text{ cm}$ . Gdyby brać pod uwagę przekrój pełny  $30 \times 30 \text{ cm}$ , to rdzeń takiego przekroju miałby zaledwie przekątnie  $10 \text{ cm}$  długie.

**7°. Rdzeń przekroju kołowego.** Ponieważ w danym wypadku każda para osi prostokątnych środkowych stanowi parę główną, przeto dla jakiegokolwiek pary:  $J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$ , nadto  $F = \frac{\pi D^2}{4}$ , a zatem  $J_x : F = J_y : F = \frac{\pi D^4}{64} : \frac{\pi D^2}{4} = \frac{D^2}{16}$ . Dla tego przekroju będzie więc:  $\xi = \frac{D^2}{16} \frac{y'}{y - xy'}$ ,  $\eta = -\frac{D^2}{16} \frac{1}{y - xy'}$ , gdzie spólrzędne  $x, y$  czynić winny zadość równaniu koła czyli równaniu  $x^2 + y^2 = \frac{D^2}{4}$ . Różniczkując, mamy:  $2x + 2yy' = 0$ , skąd  $y' = -x : y$ , a przeto:  $\xi = \frac{D^2}{16} \frac{-x}{y^2 + x^2} = -x : 4$ ,  $\eta = -\frac{D^2}{16} \frac{1}{y + x^2/y} = -\frac{D^2}{16} \frac{y}{y^2 + x^2} = -y : 4$ . Stąd bezpośrednio otrzymamy  $x = -4\xi$ ,  $y = -4\eta$  i podstawiając w równanie obwodu mamy ostatecznie równanie rdzenia w postaci:  $\xi^2 + \eta^2 = [D : 8]^2$ . *Rdzeń przekroju kołowego jest kołem o średnicy czterokrotnie mniejszej.*

Dla przekroju pierścieniowego o średnicach:  $D$  zewnętrznej i  $d$  wewnętrznej mamy  $J_x : F = J_y : F = \left[ \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} \right] : \left[ \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \right] = = \frac{D^2 + d^2}{16}$ , a zatem tutaj będzie:  $\xi = \frac{D^2 + d^2}{16} \frac{y'}{y - xy'}$ ,  $\eta = -\frac{D^2 + d^2}{16} \frac{1}{y - xy'}$ , przyczem spólrzędne  $x, y$  czynić winny zadość równaniu  $x^2 + y^2 = \frac{D^2}{4}$ . I tu więc  $y' = -\frac{x}{y}$ , co podstawivszy we wzory:  $\xi = -\frac{D^2 + d^2}{16} \frac{x}{y^2 + x^2} = -\frac{D^2 + d^2}{4} \frac{x}{D^2}$ ,  $\eta = -\frac{D^2 + d^2}{16} \frac{y}{y^2 + x^2} = -\frac{D^2 + d^2}{4} \frac{y}{D^2}$ , otrzymamy  $x = -4\xi \frac{D^2}{D^2 + d^2}$ ,  $y = -4\eta \frac{D^2}{D^2 + d^2}$ . I ostatecznie podstawiając te wartości w równanie obwodu, otrzymamy równanie rdzenia  $\xi^2 + \eta^2 = \frac{D^2}{4} \left[ \frac{D^2 + d^2}{4 D^2} \right]^2 = \frac{[D^2 + d^2]^2}{64 D^2}$ . Zatem możemy wypowiedzieć ogólny wniosek: *rdzeń przekroju kołowego pierścieniowego jest kołem o średnicy  $\frac{D^2 + d^2}{4 D}$ .*

**8° Rdzeń pola parabolicznego.** Weźmy pod uwagę przekrój paraboliczny (Rys. 9). Środek jego znajduje się w odległości  $\omega O = \frac{3}{5} a$  od wierzchołka paraboli, przeto równanie względem osi głównych  $OX, OY$  obwodu pola będzie:  $K(x, y) = (y^2 - 2px - \frac{6}{5}pa)$  ( $x - \frac{2}{5}a$ ), łuk bowiem paraboli wyraża się  $\eta^2 = 2p\xi$  dla osi wierzchołkowych, a wzory przejścia są:  $\eta = y$  oraz  $\xi = \frac{3}{5}a + x$ .



Rys. 9.

Nadto dla osi głównych  $J_x = \frac{4}{15}ab^3$   
 $J_y = \frac{16}{175}a^3b$ , przyczem  $b^2 = 2pa$ , wreszcie  $F = \frac{4}{3}ab$ . Określmy na mocy tych danych rdzeń przekroju. Dla punktu  $M(\frac{2}{5}a, b)$  będziemy mieli linię prostą  $\frac{x\xi}{J_y} + \frac{y\eta}{J_x} + \frac{1}{F} = 0$  czyli  $\frac{175}{16} \times \frac{2}{5} \frac{a}{a^3b^3} \xi +$

$+ \frac{15}{4} \frac{b}{ab^3} \eta + \frac{3}{4ab} = 0$ , ostatecznie  $\frac{35}{2a} \xi + \frac{15}{b} \eta + 3 = 0$ . Ta prosta przecina oś  $OX$  w punkcie  $A(-\frac{6a}{35}, 0)$ , który to punkt rdzenia odpowiada prostej  $MN$  obwodu. Symetryczny punkt obwodu  $N$  da symetryczną prostą  $AB$  o równaniu  $\frac{35}{2a} \xi - \frac{15}{b} \eta + 3 = 0$ .

Następnie dla łuku parabolicznego  $M\omega N$  będziemy mieli na mocy ogólnego wzoru dla rdzenia, przynależnego do obwodu drugiego stopnia:  $\xi^2 \{ F^2 J_x^2 \frac{6}{5} pa \} + \eta^2 \{ F^2 J_y^2 p^2 \} - 2 \xi \{ F J_x^2 J_y p \} = 0$ . Po podstawieniu odnośnych wartości otrzymamy  $\xi^2 - \frac{4a}{35} \xi + \frac{12a^2}{245b^2} \eta^2 = 0$ . Niech

będzie  $n = \frac{2a}{35}$   $m = \frac{b}{\sqrt{15}}$ , a wtedy tylko co wypisane równanie przy-

bierze kształt:  $\frac{(\xi - n)^2}{n^2} + \frac{\eta^2}{m^2} = 1$ , otrzymamy przeto dla łuku paraboli elipsę, jako odnośną część składową rdzenia. Środek tej elipsy  $E$  leży na osi  $OX$  w odległości  $n = \frac{2a}{35}$  od środka przekroju. Elipsa przechodzi

przez środek  $O$ . Jej mała półoś wynosi  $n = \frac{2a}{35}$ , duża zaś  $m = \frac{b}{\sqrt{15}}$ .

Obie powyżej otrzymane proste  $AB$  i  $AC$  są styczne tej elipsy, co z łatwością można udowodnić i bezpośrednio. W danym wypadku zatem rdzeń składa się z dwóch prostych, zbiegających się w punkcie zespólnia  $A$ , stycznych elipsy  $E$ .

**9° Skrajne naprężenia przekroju prostokątnego** wyznaczmy za pomocą promieni rdzenia w wypadku rozpatrywanego przez nas obciążenia, kiedy moment gnący  $M_g = 0,2 (tn, m)$  leży na jednej z głów-



nych osi przekroju. Załóżmy przedewszystkiem że moment leży na osi  $OX$ , a zatem jego osią sił staje się oś  $OY$ . Odnośne promienie rdzenia będą tu  $w_1 = w_2 = \frac{1}{6} H$ , a przeto prowadząc, jak dawniej, oś  $OY$  pionowo ku górze, będziemy mieli dla podstawy górnej skrajną wartość naprężenia  $\sigma_{s1} = -\frac{M_g}{Fw_1} = -20000 \times 6 : H^2 B = -20000 \times 6 : 12^2 \times 10 = -83 \text{ KG/CM}^2$ , a dla podstawy dolnej przekroju  $\sigma_{s2} = +\frac{M_g}{Fw_2} = +83 \text{ KG/CM}^2$ . Te same wyniki otrzymaliśmy bezpośrednio, rozpatrując przykład pierwszy. To samo również otrzymamy w wypadku, gdy moment leżeć będzie na osi  $OY$ , wtedy bowiem oś  $OX$  będzie jego osią sił, a odnośne promienie rdzenia będą  $w_1 = w_2 = \frac{1}{6} B$ . Tutaj więc dla lewej krawędzi będziemy mieli naprężenie  $\sigma_{s1} = -\frac{M_g}{Fw_1} = -20000 \times 6 : B^2 H = -20000 \times 6 : [10^2 \times 12] = -100 \text{ KG/CM}^2$ , a dla prawej krawędzi pionowej  $\sigma_{s2} = \frac{M_g}{Fw_2} = 100 \text{ KG/CM}^2$ .

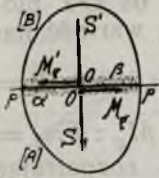
**10°. Skrajne naprężenia przekroju kołowego** mogą być również wyznaczone za pomocą rdzenia w wypadku obciążenia rozpatrywanego w przykładzie czwartym nieco powyżej. Skierujemy oś  $OY$  w dół, oś  $OX$  w prawo. Ponieważ moment  $M_g = 3 (tn, m)$  leży na  $OX$ , przeto osią sił jego będzie  $OY$ . Ta oś przetnie u góry i u dołu obwód przekroju. Dla punktu górnego będziemy mieli  $\sigma_{s1} = \frac{S}{F} - \frac{M_g}{Fw_1}$ , podczas gdy dla punktu dolnego będzie  $\sigma_{s2} = \frac{S}{F} + \frac{M_g}{Fw_2}$ . W danym wypadku  $w_1 = w_2 = \frac{D}{8} = \frac{20}{8} = 2,5 \text{ cm}$ . a nadto  $F = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 20^2}{4} = 314,159 \text{ cm}^2$ , stąd  $\frac{M_g}{Fw_2} = \frac{M_g}{Fw_1} = \frac{300000}{2,5 \times 314,159} = 382,0 \text{ KG/CM}^2$ . Dalej, kolejno czyniąc  $s = 30, 120$  i  $150 \text{ tn}$ , będziemy mieli  $\frac{S}{F} = 95,5$ , lub  $382,0$ , albo też  $477,5 \text{ KG/CM}^2$ . W tych trzech wypadkach otrzymamy przeto:  $\sigma_{s1} = -286,5 \text{ KG/CM}^2$ , lub też  $\sigma_{s1} = 0$ , albo  $\sigma_{s1} = 95,5 \text{ KG/CM}^2$  oraz  $\sigma_{s2} = 477,5 \text{ KG/CM}^2$ , albo  $\sigma_{s2} = 764 \text{ KG/CM}^2$ , lub też  $\sigma_{s2} = 859,5 \text{ KG/CM}^2$ . Odnajdujemy te same wartości, któreśmy wyżej inną drogą otrzymali. Podany tu sposób o wiele szybciej prowadzi do celu.

## ROZDZIAŁ DRUGI.

### ODKSZTAŁCENIA GNĄCE.

**§ 1. Odkształcenia gnące płytki.** Weźmy pod uwagę (Rys. 10) jakąkolwiek bryłę, odkształconą pod jarzmem sił zewnętrznych i załóżmy, że pewien przekrój płaski  $pp$  dzieli jej obciążenie na dwa układy  $[A]$

i  $[B]$  sił odkształcających, które po sprowadzeniu do środka przekroju dadzą obciążenia gnące. To znaczy, że układ  $[A]$  da siłę środkową  $S$  normalną i moment gnący  $M_g$ , a układ  $[B]$  da odpowiednio  $S'$  i  $M'_g$ . Ponieważ  $[A] + [B] = 0$ , zatem być musi również  $\overline{M}_g + \overline{M}'_g = 0$  oraz  $\overline{S} + \overline{S}' = 0$ . Te równania obrazowo wskazują, że momenty gnące muszą być równe, lecz *różnoskretne*, a więc, zgodnie z tem cośmy o kierunkach momentów mówili, muszą być skierowane odwrotnie. Nadto siły osiowe również winny się znosić w działaniu. Muszą być przeto równe, lecz skierowane przeciwnie. Godzi się tu



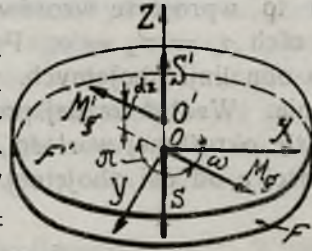
Rys. 10.

wyraźnie zaznaczyć, że moment  $M_g$  i siła  $S$ , zastępując działanie układu  $[A]$ , równoważą układ naprężeń  $[\beta]$ , a więc siedliskują w gromadzie cząsteczek  $\alpha$  — powłoki przekroju, podczas gdy moment  $M'_g$  i siła  $S'$ , równoważąc naprężenia  $[\alpha]$ , siedliskują w gromadzie cząsteczek  $\beta$  — sąsiedniej drugiej powłocy przekroju. Należałoby więc, właściwie mówiąc, miasto przekroju płaskiego rozpatrywać obie jego powłoki, wyodrębniając je w postaci *dwu sąsiednich przekrojów płaskich równoległych, znikomo odległych o  $dz$ . Środki ich winny leżeć na wspólnej prostopadłej do obu przekrojów, a obwody nieznacznie tylko się różnić od siebie tak, aby obwód jednego pola prawie pokrywał w rzucie obwód drugiego, a różnica pól  $F' - F$  była nieznaczna, porządku  $dF$* . Te dwa przekroje sąsiednie stanowią *plytkę*, wyodrębnioną z ciała odkształconego, a zastępującą przekrój poprzednio rozpatrywany. Jej dolna ścianka, zastępująca powłokę dolną owego przekroju, pozostawać winna pod jarzmem siły osiowej  $S$ , prostopadłej do pola  $F$  ścianki, oraz momentu  $M_g$  gnącego, leżącego w tem polu, podczas gdy na górnej ściance płytki, zastępującej górną powłokę przekroju, panować winien moment gnący  $M'_g$ , leżący w jej polu  $F'$  oraz siła osiowa  $S'$ , prostopadła do pola. Aby otrzymać  $M_g$  i  $S$ , należy sprowadzić do środka  $O$  dolnego przekroju płytki układ sił odkształcających dolnej części bryły; tak samo również, aby otrzymać  $M'_g$  i  $S'$ , trzeba sprowadzić do środka  $O'$  górnego przekroju płytki układ sił odkształcających, należnych do górnej części bryły. W założeniu grubości płytki równej zeru oba te układy miałyby jeden i ten sam punkt sprowadzenia, jak dla pojedynczego przekroju. Tu jednak  $dz \neq 0$ , zatem bezwzględne wartości momentów i sił muszą być nieco różne, i, uwzględniając znak sił osiowych, możemy napisać, że  $S' = -(S + dS)$  oraz  $M'_g = M_g + dM_g$ . Pod jarzmem tych obciążeń płytka trwa w stanie równowagi odkształconej, nieznaczne bowiem różnice  $dM_g$  i  $dS$  obciążenia obu jej ścianek stanowią układ, równoważący siły zewnętrzne samej płytki, siedliskujące w jej cząsteczkach, lub działające na jej powierzchnię boczną. Te siły są zresztą nader nieznaczne wobec znikomej wartości  $dz$ , a nadto dążą do zera wraz z grubością płytki. Różnice przeto  $dM_g$



i  $dS$  stają się równe zeru w granicy — dla przekroju płaskiego wyżej rozpatrywanego. Możemy je zatem pominąć, pisząc warunki równowagi płytki w postaci  $M_g' \propto M_g$  oraz  $S' \propto S$ , przyczem podkreślić należy, że kierunki momentów  $M_g$  i  $M_g'$  winny się różnić o kąt rozwarty, jak tego wymaga równowaga płytki (Rys. 11).

Wyznamy główne osie  $OX, OY$  dolnego pola  $F$  płytki. Będą one zarazem rzutami głównych osi górnego pola  $F'$ , różnica bowiem znikoma obu pól powodować może jeno znikomą różnicę kierunków osi głównych obu przekrojów. Trzecią osią  $OZ$  przebijamy pole  $F'$  po środku. W tych warunkach poletko  $dF = dx \times dy$  gdziekolwiek w dolnym polu leżące, będzie rzutem górnego poletka  $dF'$  pola  $F'$ .



Rys. 11.

Ma to miejsce dla wszystkich poletek obu przekrojów, prócz poletek skrajnych, dotykających odwodów, gdzie  $dF'$  mogą się różnić od  $dF$  o małe wyższych rzędów na tle nieznacznych różnic obu obwodów. Możemy więc płytkę wyodrębnioną z bryły rozpatrywać, jako złożoną z kostek  $dx \times dy \times dz$ , podległych działaniu naprężeń

$\sigma_z = -\frac{M_g \sin \omega}{J_y} x + \frac{M_g \cos \omega}{J_x} y + \frac{S}{F}$ , przyłożonych do ścian dolnych  $dF$  kostek, oraz naprężeń tego samego rodzaju:

$$\sigma'_z = -\frac{[M_g + dM_g] \sin(\omega + \pi)}{J_y + dJ_y} x + \frac{[M_g + dM_g] \cos(\omega + \pi)}{J_x + dJ_x} y + \frac{-(S + dS)}{F + dF}$$

, przyłożonych do ścianek górnych  $dF'$ . Wobec nie-

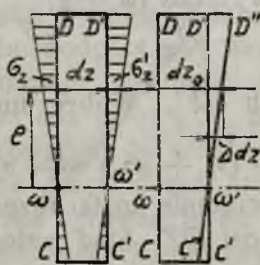
znacznych wartości wszystkich przyrostów:  $\sigma'_z = -(\sigma_z + d\sigma_z) \propto -\sigma_z$ . Zatem naprężenia gnące  $\sigma_z$  i  $-\sigma_z$  stanowią obciążenie kostki rozpatrywanej — rozciągające, lub ściskające w kierunku osi  $OZ$ . Stąd wnioskujemy, że pod jego jarzmem kostka musiała ulec wydłużeniu lub skróceniu o pewną część swej pierwotnej długości  $dz_0$ , o przyrost  $\Delta dz$ . Ponieważ długość kostek odkształconych jest jednakowa i równa  $dz$ , przeto  $\Delta dz = dz - dz_0$ . Stąd  $\Delta dz = \epsilon_g dz_0 = dz - dz_0$ , a przeto  $dz_0 = dz : (1 + \epsilon_g) = dz [1 - \epsilon_g + \epsilon_g^2 - \epsilon_g^3 + \dots]$ . Wobec nieznacznej wartości dopuszczalnych wydłużeń jednostkowych możemy napisać wprost  $dz_0 = dz (1 - \epsilon_g) = dz - \epsilon_g dz$  i ostatecznie  $\epsilon_g dz = dz - dz_0 = \Delta dz$ . Te wydłużenia jednostkowe, przynależne do poszczególnych kostek płytki zależą niewątpliwie od natężenia i znaku naprężeń  $\sigma_z$ . Rządzi nimi prawo, które tu wypisać należy w postaci  $\epsilon_g = \alpha_g \sigma_z$ , znane z teorii rozciągania i ściskania. Dla tworzyw, ulegających

prawu *Hooka*, współczynnik tego wzoru ma wartość stałą — dla innych tworzyw — zmienną. Wzór tylko co wypisany pozwoli zbadać odkształcenia gnące.

Wyznamy linie obojętne obu powłok płytki. Wobec znikomej wartości  $dz$ , linie te będą się pokrywały w rzucie na dolnej powłoce. Wynika to wprost ze wzorów tylko co wyżej wypisanych, o ile uczynimy w nich  $\sigma_z = \sigma'_z = 0$ . Poprowadźmy płaszczyznę środkową, prostopadłą do obu linii obojętnych. Przetnie ona oba roje prostych równego naprężenia. Wzdłuż każdej prostej roju panować będzie naprężenie normalne ściśle określonej wartości, rosnącej proporcjonalnie, jak wiemy, do odległości  $e$  od osi obojętnej. Ta wartość wyrazi się wzorem:

$$\sigma_z = eM_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}.$$

Stąd bezpośrednio będziemy mieli kolejno:  $\Delta dz = \epsilon_g dz = \alpha_g \sigma_z dz = \alpha_g eM_g dz \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}$ . W tym wzorze zmienia się tylko  $e$  — odległość punktu  $\mu$  od linii obojętnej, a przeto również i odkształcenia kostek przekroju muszą być proporcjonalne do odległości kostek od osi obojętnych obu powłok, o ile  $\alpha_g$  ma wartość stałą dla całego obszaru naprężeń, panujących w przekroju. (Rys. 12).



Rys. 12.

Zatem i przed odkształceniem obie powłoki płytki musiały być płaskie, a płaszczyzny ich — przechodzić przez odnośne osie obojętne, tworząc pewien kąt pomiędzy sobą. Łatwo to udowodnić. Wyznamy ślady  $\omega$  i  $\omega'$  linii obojętnych obu ścianek płytki na płaszczyźnie środkowej, prostopadłej do owych linii obojętnych. W tej płaszczyźnie ścianki odkształcone zaznaczą się śladami  $CD$  i  $C'D'$  odcinków równoległych prostych, przechodzących przez  $\omega$  i  $\omega'$ . Załóżmy, że i przed odkształceniem ślady obu powłok zaznaczały się na tej samej płaszczyźnie przekroju w postaci odcinków dwóch prostych, przechodzących przez  $\omega$  i  $\omega'$ . Zatem przy odkształceniu płytki obie te proste musiały się pochylić ku sobie, przechodząc w równoległe  $CD$  i  $C'D'$ . Jest to możliwe tylko wtedy, gdy wydłużenia wszystkich kostek płytki pierwotnie ukośnej będą proporcjonalne do odległości kostek od osi obojętnych. Wynika to wprost z rysunku, gdzie dla wszystkich wartości  $e$  musi się wypełniać zależność  $tg(d\varphi) = d\varphi = \Delta dz : e$ . Tylko w tym wypadku obie płaskie powłoki płytki, pierwotnie pochyłone ku sobie pod kątem  $d\varphi$ , staną się równoległymi pod jarzmem naprężeń

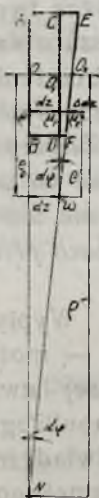


gnących, a płytka pierwotnie ukośna może się stać prostą. Stąd również wniosek bezpośredni, że płytka pierwotnie prosta  $CDC'D'$  stanie się ukośną, o ile zmienimy obciążenie na odwrotne, to jest o ile przestawimy siły i momenty. Wszystkie tylko co wypowiedziane wnioski dotyczą tworzyw o stałej wartości  $\alpha_g$  we wzorze  $\varepsilon_g = \alpha_g \tau_g$  dla całego obszaru naprężeń, panujących w przekroju. Nazwijmy tu rozpatrywane obciążenie płytki *gnącym*, a wtedy będziemy mieli zupełnie ogólny wniosek: *płytką o płaskich równoległych ściankach przechodzi pod działaniem obciążenia gnącego w płytkę ukośną o ściankach również płaskich, pochylonych ku sobie pod kątem  $d\varphi$ , lecz jednak tylko wtedy, gdy współczynnik  $\alpha_g$  ma wartość stałą dla całego obszaru naprężeń, panujących w obu ściankach płytki odkształconej.*

Ten wniosek stanowi tak zwane „założenie Bernoulli'ego“. Wypływa on bezpośrednio z badania naprężeń i odkształceń gnących — może być jednak wypowiedziany wprost a priori, jako zasada, na której łatwo zbudować całą teorię gięcia. W naszym wykładzie zasada Bernoulli'ego stanowi sprawdzian praktyczny, o ile bowiem zgadza się z doświadczeniem — posłużyć może jako dowód bezpośredni prawidłowości samej teorii. Wielokrotne doświadczenia poważnych badaczy stwierdziły, że założenie to sprawdza się dla wszelkich tworzyw w mniej lub więcej szerokich granicach obciążenia. Należy przeto powyżej wyłożoną teorię gięcia uznać, jako wystarczająco zgodną z istotą rzeczy i podać jej zastosowania praktyczne. W tym celu bierzemy przedewszystkiem pod uwagę tak zwane:

**§ 2. Gięcie mimośrodkowe.** Zachodzi ono wtedy, gdy obciążenie gnące płytki stanowią siły środkowe  $S$ , prostopadłe do obu jej ścianek oraz momenty gnące  $M_g$ . Wyznamy osie główne jednego przekroju płytki, nazwijmy je przez  $OX$ ,  $OY$ ; trzecią oś  $OZ$  poprowadźmy przez płytkę prostopadłe do  $OX$ ,  $OY$ , a więc i przez środek sąsiedniej ścianki płytki, wyciętej w ciele nieodkształconem. Oba przekroje płytki czynić winny zadość warunkom następującym: *środki ich winny leżeć na wspólnej prostopadłej — osi  $OZ$  w odległości znikomej  $dz = OO'$ , a obwody pokrywać się w rzucie nieomal, ujawniając znikomą różnicę pól  $F' - F$  obu ścian płytki.* Wyznamy jakikolwiek punkt  $\mu$  ( $x, y$ ), leżący w polu  $F$ . Odnośny punkt  $\mu_1$  pola  $F'$  będzie miał te same współrzędne  $x, y$ , a kostka  $dx \times dy \times dz$ , wyodrębniona z płytki, stanowić będzie włókienko  $\mu\mu_1$ , łączące oba punkty. Na zasadzie wniosku wyżej wypowiedzianego, odkształcenie gnące kostki ujawni pochylenie obu ścian płytki o kąt  $d\varphi$ , przyczem oba przekroje pozostaną płaskie i po odkształceniu. Inaczej mówiąc, przy odkształceniu jedna ze ścian, dajmy na to  $F'$ , pochyli się ku drugiej  $F$  o pewien kąt, pozostając niezmiennie płaską,

musi więc istnieć oś obrotu względnego owych ścianek płytki o kąt  $d\varphi$ . Poprowadźmy płaszczyznę środkową przez  $OZ$  prostopadłe do owej osi obrotowej. W tej płaszczyźnie (Rys. 13) ścianki płytki nieodkształconej



Rys. 13.

zaznacza się śladami  $AB$  i  $CD$ , a oś obrotowa da punkt  $\omega$ , leżący niewątpliwie na przedłużeniu prostej  $CD$ . Po odkształceniu  $CD$  pochyli się względem  $AB$ , znacząc nowy ślad w postaci odcinka  $EF$  prostej, która przejdzie również przez  $\omega$ , tworząc kąt  $d\varphi = E\omega C$ . To odkształcenie gnące dokona się pod jarzmem odpowiedniego obciążenia gnącego płytki. Przyłożmy do środka  $O$  ścianki  $AB$  płytki nieodkształconej siłę  $S$ , czynną wzdłuż osi  $OZ$ , oraz moment  $M_g$ , leżący w polu  $F$ , a pochylony ku osi  $OX$  pod kątem  $\omega$ . Sąsiednią ściankę  $CD$  płytki nieodkształconej obciążamy pośrodku w  $O$  siłą osiową  $S'$ , działającą wzdłuż osi  $OZ$ , oraz momentem  $M'_g$ , leżącym w polu  $F'$ . To obciążenie rozwinię naprężenia, które spowodują opisany wyżej obrót, przyczem poszczególne włókienka skrócą się lub wydłużą, rozwijając siły oporowe. Gdy owe siły oporowe zrównoważą naprężenia, płytka wejdzie w stan równowagi trwałej.

Przypuśćmy, że ten stan istotnie nastąpił przy pewnej wartości kąta  $d\varphi$ . Pierwotna długość  $OO_1$  otrzymała przy tem przyrost  $O_1O_2$ , leżący niewątpliwie na osi  $OZ$ , zachodziły tu bowiem jedynie i wyłącznie zjawiska rozciągania lub ściskania, wszelkie przeto skrzywienia tego włókienka trzeba z góry wykluczyć, jako zgoła niemożliwe. Zatem punkt przyłożenia siły  $S'$  przesunął się po osi  $OZ$  w tę lub ową stronę, siła ta przeto po odkształceniu będzie i nadal środkową, choć nie prostopadłą do ścianki  $EF$ , pochyli się bowiem ku niej pod kątem  $\pi/2 - d\varphi$ . Inaczej nieco będzie działał moment  $M'_g$  po odkształceniu — nie będzie bowiem leżał w polu  $F'$ , jeno się z niego wychyli pod kątem, zawartym w granicach od zera do  $d\varphi$ , a zależnym od położenia momentu względem osi obrotowej przekroju. Mimo to jednak możemy nadal rozpatrywać  $S'$  i  $M'_g$ , jako obciążenie gnące pola  $F'$  odkształconego, ponieważ kąt  $d\varphi$  jest znikomo drobny. Właściwiej jednak należałoby miasto  $S'$  brać  $S' \cos d\varphi$  oraz zastąpić  $M'_g$  — odpowiednim rzutem na ściankę  $M'_g \cos(Kd\varphi)$ , gdzie  $0 \leq K \leq 1$ , wiemy jednak, że  $\cos d\varphi = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} d\varphi^3 + \dots$  zatem popełnimy błąd nader nieznaczny biorąc wprost  $S'$  i  $M'_g$ .

Wobec istnienia równowagi trwałej musi być  $S' = -(S + dS)$  oraz  $M'_g = M_g + dM_g$  z warunkiem, aby moment  $M'_g$  pochylony był ku osi  $OX$  pod kątem  $\omega + \pi$ . I tu znów drobne różnice  $dS$  i  $dM_g$  winny równoważyć siły zewnętrzne, siedliskujące w cząsteczkach samej płytki, lub działające na jej powierzchnię boczną. Tylko co wyznaczone



obciążenie gnące płytki da układ naprężeń gnących, przyczem obustronne

naprężenia włókienek  $\mu\mu_1$  będą:  $\sigma_z = -\frac{M_g \sin \omega}{J_y} x + \frac{M_g \cos \omega}{J_x} y +$

$+\frac{S}{F}$ . Dla środkowego włókienka  $OO_1$ , gdzie  $x = y = 0$ , będziemy

mieli  $\sigma_{z0} = S : F$ , możemy przeto, korzystając z ogólnego wzoru, wyznaczyć odnośne wydłużenie jednostkowe pisząc  $\varepsilon_{g0} = \alpha_g \sigma_{z0}$ , a zatem

$$O_1 O_2 = \varepsilon_{g0} \times OO_1 = \varepsilon_{g0} dz = \alpha_g \sigma_{z0} dz = \alpha_g \frac{S}{F} dz.$$

Dla linii obojętnej  $\sigma_z = 0$ . Istnieje przeto szereg włókienek istotnie należących do przekroju lub tylko wyobrażalnych, łączących odpowiednie punkty pokrywających się w rzucie linii obojętnej obu przekrojów płytki. Włókna te nie ujawnią żadnego odkształcenia, bo dla nich  $\varepsilon_g = 0$ . Stąd prosty wniosek, że oś obrotowa musi leżeć na linii obojętnej, co zresztą wynika bezpośrednio z ogólnej teorii.

Oznaczmy przez  $e$  odległość jakiegokolwiek włókienka  $\mu\mu_1$  od osi obrotu, czyli od linii obojętnej, a wtedy dla tego włókienka będziemy

mieli:  $\sigma_z = e M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}$ . Wydłużenie jego będzie:  $\Delta dz =$

$$= \varepsilon_g dz = \alpha_g \sigma_z dz = \alpha_g e M_g dz \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}. \text{ Poprowadźmy}$$

skrajne stycznne obu odkształconych ścianek płytki, równoległe do osi obrotowej — linii obojętnej. Będą to linie skrajnych naprężeń normalnych, przynależnych do skrajnych włókienek płytki, łączących odnośne punkty styczności. Gdy oś obrotowa leży poza przekrojem, oba skrajne włókienka ulegną skróceniom, lub, jak na rysunku — wydłużeniom  $CE$  i  $DF$ , pod działaniem skrajnych naprężeń, które z łatwością wyznaczymy z ogólnego wzoru, czyniąc w nim kolejno  $e_1 = C\omega$  oraz  $e_2 = D\omega$ . Bezwzględnie większa z tych wartości da bezwzględną największość naprężenia. W danym wypadku będzie to oczywiście

$$\sigma_{z1} = e_1 M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}, \text{ ponieważ } e_1 > e_2, \text{ a obie są tego samego}$$

znaku. Skrajną naprężenia należy uczynić równą najwyższemu dopuszczalnemu naprężeniu gnącemu danego tworzywa, a więc  $\sigma_{z1} = k_g$ , uwzględniając przy tem rodzaj obciążenia, które i w tym wypadku może być stałe, powtarzane lub zmienne.

W ten sposób możemy sprawdzić wytrzymałość pręta, pozostałe bowiem naprężenia włókienek, jako bezwzględnie mniejsze od  $\sigma_{z1}$ , nie przekroczą owej skrajnej wartości dopuszczalnej. Chcąc z kolei wyznaczyć

odkształcenia gnące, przedłużamy proste  $AB$  i  $EF$  do przecięcia się w  $N$  i nazywamy odległość tego punktu od osi  $OZ$  przez  $\rho$ . Nadto niech będzie  $e_0$  odległość osi obrotu od osi  $OZ$ , a wtedy z podobieństwa trójkątów:  $t_g(d\varphi) = OO_2 : \rho = O_1O_2 : e_0 = \mu_1\mu_2 : e$ . Wyżej widzieliśmy, że  $O_1O_2 = \alpha_g \frac{S}{F} dz$ , zatem  $OO_2 = OO_1 + O_1O_2 = dz \left( 1 + \alpha_g \frac{S}{F} \right)$ . Nadto, wobec nieznaczących wymiarów kąta  $d\varphi$  możemy niewątpliwie pominąć znak  $t_g$ , pisząc wprost:

$$d\varphi = \frac{dz \left( 1 + \alpha_g \frac{S}{F} \right)}{\rho} = \frac{\alpha_g S dz}{e_0 F} = \frac{\alpha_g e M_g dz}{e} \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}},$$

skąd  $\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha_g M_g}{1 + \alpha_g \frac{S}{F}} \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}$ ,  $d\varphi = \alpha_g M_g dz \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}$ ,

$$e_0 = S : FM_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}. \text{ Te wzory rozwiązują całokształt za}$$

gadnienia. Godzi się jednak zaznaczyć, że stosują się jedynie i wyłącznie do tworzyw, ujawniających stałą wartość  $\alpha_g$  dla całego obszaru naprężeń, panujących na obu powłokach płytki odkształconej.

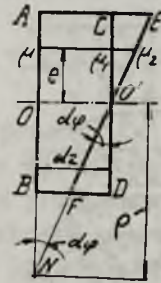
Gdy oś obrotowa leży poza płytką, wtedy obie odległości  $e_1 e_2$  są jednego znaku, mamy więc  $e_1 e_2 > 0$ , a na całej płytce panują naprężenia jednoimienne. Gdy znów oś obrotowa przecina płytkę, wtedy  $e_1 e_2 < 0$ , linje obojętne przecinają płytkę, pokrywając się w rzucie wzajemnie. Istnieje przeto szereg włókienek obojętnych, łączących odnośne punkty obu linii obojętnych. Te włókienka nie ulegają żadnym odkształceniom, a cała płytka dzieli się w danym wypadku na dwa obszary. W jednym panują naprężenia i wydłużenia dodatnie — w drugim — ujemne. Na granicy obu obszarów naprężenia i odkształcenia gnące są równe zeru. W szczególnym wypadku mogą obie linje obojętne przechodzić przez środki odnośnych przekrojów. Wtedy  $e_0 = 0$ , co jest możliwe tylko wtedy, gdy  $S = 0$ . Jest to wypadek gięcia właściwego.

**§ 3. Gięcie właściwe.** Wyodrębnijmy płytkę z ciała odkształconego, prowadząc dwa sąsiednie przekroje. Środki ich winny leżeć na wspólnej prostopadłej, a obwody pokrywać się w rzucie nieomal, ujawniając znikomą różnicę pól  $F' - F$  porządku  $dF$ . Wyznamy osie główne  $OX, OY$  jednego z przekrojów, oś  $OZ$  poprowadźmy przez środek  $O'$  drugiej ścianki płytki, odległej o  $dz = OO'$ . Tę płytkę obciążamy parą momentów gnących. Jeden z nich  $M_g$  leży w polu  $F$ , pod kątem  $\omega$  ku osi  $OX$  — drugi  $M'_g$  w  $F'$  pod kątem  $\omega + \pi$  ku tejże osi. Łączne działanie obu momentów da odkształcenie gnące. Weźmy pod uwagę dowolny zresztą punkt  $\mu(x, y)$  pola  $F$ . Odnośny punkt  $\mu_1$  pola  $F'$  bę-



dzie miał te same spólrzędne  $x, y$ , a kostka  $dx \times dy \times dz$ , wyodrębniona z płytki nieodkształconej stanowić będzie włókienko  $\mu\mu_1$ , łączące polotka  $dF$  i  $dF'$  przynależne do pól  $F$  i  $F'$ . W  $dF$  panować będzie naprężenie normalne gnące  $\sigma_z = -\frac{M_g \text{Sin } \omega}{J_y} x + \frac{M_g \text{Cos } \omega}{J_x} y$ , podczas gdy  $dF'$  ulegać będzie naprężeniu  $\sigma'_z = -(\sigma_z + d\sigma_z) \infty - \sigma_z$ , o czym z łatwością przekonamy się, rozumując zupełnie tak samo, jak w powyższej rozpatrywanym ogólnym wypadku. Dla środków płytki mamy  $x=y=0$ , dla nich przeto  $\sigma_z = 0$ , linje obojętne istotnie więc przechodzą przez środki  $O, O'$  obu ścianek płytki.

Poprowadźmy płaszczyznę środkową przez  $OZ$  prostopadłą do linii obojętnych. W tej płaszczyźnie (Rys. 14) ścianki płytki nieodkształconej zaznaczą się śladami  $AB, CD$ . Po odkształceniu  $CD$  pochyli się ku  $AB$ , znacząc nowy ślad w postaci odcinka prostej  $EF$ , przechodzącej przez środek  $O'$  przekroju  $CD$  — tam bowiem leży linja obojętna — oś względnego obrotu ścian płytki o kąt  $d\varphi$ . Przy obrocie jedynie tylko włókienka, zawarte pomiędzy linjami obojętnymi, nie ulegną odkształceniom. Ten szereg włókien obojętnych zaznaczy wyraźną granicę różnorodnych obszarów odkształceń. W jednym wszystkie włókienka ulegną wydłużeniom — w drugim skróceniom tem znaczniejszym, im dalej leżeć będą od osi obojętnych. Oznaczmy przez  $e$  odległość jakiegokolwiek włókienka  $\mu\mu_1$  od linii obojętnej. Pierwotna jego długość  $\mu\mu_1 = dz$  otrzyma przyrost  $\Delta dz = \mu_1 \mu_2 = \varepsilon_g dz$  na tle obustronnego działania naprężeń gnących:  $\sigma_z = e \alpha_g M_g \sqrt{\frac{\text{Cos}^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\text{Sin}^2 \omega}{J_y^2}}$



Rys. 14.

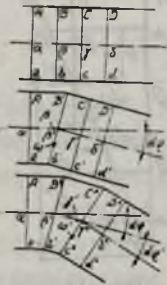
rozciągających, lub ściskających. Poprowadźmy skrajne styczne obu ścian płytki odkształconej, równoległe do osi obrotowej — linii obojętnej. Będą to linje skrajnych naprężeń normalnych *różnego znaku*. Jedno skrajne włókienko, łączące punkty styczności — będzie ściskane, — przeciwległe — rozciągane. Odnośne wartości naprężeń łatwo wyznaczymy z powyższego wzoru, czyniąc w nim  $e$  równem  $e_1 = CO'$  lub  $e_2 = DO'$ , przyczem tu niewątpliwie  $e_1 e_2 < 0$ , jako, że linje obojętne przechodzą przez środki przekrojów. Bezwzględnie większą z tych dwóch wartości naprężeń należy uczynić równą najwyższemu dopuszczalnemu naprężeniu gnącemu  $k_g$ , aby zapewnić trwałość tworzywa.

Chcąc z kolei poznać odkształcenia gnące, przedłużamy proste  $AB$  i  $EF$  do przecięcia się w  $N$  i nazywamy odległość tego punktu od osi  $OZ$  przez  $\rho$ . Z podobnych trójkątów będziemy mieli:  $\text{tg}(d\varphi) = OO' : \rho = \mu_1 \mu_2 : e$ . I tu znów wobec nieznaczących wartości kąta  $d\varphi$  możemy

napisać poprostu:  $d\varphi = \frac{dz}{\rho} = \frac{e\alpha_g M_g dz}{e} \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}$ , co da  $\frac{1}{\rho} =$   
 $= \alpha_g M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}$ ,  $d\varphi = \alpha_g M_g dz \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}$ . Ten

sam wynik otrzymamy, czyniąc  $S = 0$  we wzorach ogólnych, poprzednio wyprowadzonych. W ten sposób rozwiązaliśmy całokształt zagadnienia w zastosowaniu jednak wyłącznie tylko do tworzyw, ujawniających stałą wartość  $\alpha_g$  dla całego obszaru naprężeń, panujących na obu powłokach płytki po odkształceniu.

**§ 4. Odkształcenia gnące prętów prostych.** Weźmy pod uwagę pręt prosty dowolnego zresztą przekroju poprzecznego, stałego, lub



Rys 15.

zmiennego (Rys. 15) i wyznaczmy na tym pręcie szereg przekrojów poprzecznych  $Aa, Bb, Cc, Dd \dots$  znikomo odległych od siebie. Ich środki  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$  leżąc będą na osi prostej pręta w odległościach  $\alpha\beta = dz, \beta\gamma = dz', \gamma\delta = dz'' \dots$ . W ten sposób wyznaczamy myślowo w pręcie *nieodkształconym* szereg płytek prostych. Po odkształceniu gnącym płytki te przejdą w ukośne. Chcąc zdać sobie sprawę ze zjawisk tu zachodzących, rozpatrujemy zrazu pierwszą płytkę i zakładamy, że tylko ta uległa odkształceniu, a pozostałe — zachowały kształt pierwotny. Po zgięciu ścianka  $Bb$  obróciła się o pewien kąt — pochylała się ku  $Aa$  na tle obrotu około osi obojętnej, a jednak pozostała niezmiennie płaska. Obrót odbył się około linii obojętnej  $\omega$ , leżącej w płaszczyźnie  $Bb$ . Środkowe włókienka  $\alpha\beta$  uległo skróceniu lub wydłużeniu o przyrost  $\beta\beta'$ , zależny od siły osiowej  $S$  panującej w płytce, wiemy bowiem już, że  $\beta\beta' = \alpha_g \frac{S}{F} dz$ . W szczególnym wypadku, gdy  $S = 0$ , wtedy i  $\beta\beta' = 0$ . Tutaj więc środkowe włókienko pozostaje niezmiennione przy odkształceniu i równe swej pierwotnej długości  $dz$ , a linja obojętna przecina oś pręta w  $\beta'$ , przechodząc przez środek przekroju. W obu wypadkach tylko co wyszczególnionych, dalsza część pręta pochyla się o kąt obrotu  $d\varphi$ , a oś podłużna pręta ulega ostremu załamaniu w  $\beta'$ , pozostając jednak dalej prostą od tego punktu począwszy. To samo należy słowo w słowo powtórzyć w stosunku do następnej płytki, która również po odkształceniu przejdzie w płytkę ukośną. Jej środkowe włókienko  $\beta'\gamma'$  ulegnie przytem skróceniu lub wydłużeniu o przyrost  $\gamma'\gamma''$ , który w szczególnym wypadku może być równy zeru, gdy odnośna siła  $S' = 0$ . Na tle ponownego obrotu około nowej linii obojętnej  $\omega'$ , oś podłużna pręta ulegnie powtórnemu załamaniu, tym razem jednak już



w punkcie  $\gamma''$  — i — pochyleniu o kąt nowy  $d\varphi'$ . Gdy nowa oś obrotowa  $\omega'$  równoległa jest do  $\omega$ , wtedy niewątpliwie oba kąty  $d\varphi$  i  $d\varphi'$  leżą w jednej płaszczyźnie. W ogólnym wypadku linje obojętne nie są równoległe i kąty leżą w różnych płaszczyznach obrotu. Powtarzając to samo rozumowanie w stosunku do dalszych płytek, dochodzimy do wniosku, że pręt pierwotnie prosty ujawnia pod jarzmem obciążenia gnącego odkształcenia następujące:

1<sup>o</sup> Oś jego podłużna pierwotnie prosta, staje się w ogólnym wypadku krzywą przestrzenną, lub — krzywą płaską w szczególnym, gdy wszystkie linje obojętne, grające rolę osi obrotowych płytek, są równoległe. Oś podłużną pręta odkształconą zwiemy zwykle krótko *odkształconą*.

2<sup>o</sup> Wszystkie poprzeczne przekroje płaskie pręta, prostopadłe do jego osi podłużnej pierwotnie prostej, będą prostopadłe do odkształconej i pozostaną płaskie i po odkształceniu. Ten punkt jest wprost oczywisty, ponieważ kąty  $\alpha\beta'$ ,  $\beta'\gamma'$ ,  $\gamma'\delta''$  . . . są proste, a w granicy odległości  $\alpha\beta'$ ,  $\beta'\gamma''$ , . . . dążą do zera.

3<sup>o</sup> Długości łuków osi podłużnej pręta pierwotnie prostej, nie ulegną zmianie przy przejściu tej osi w odkształconą, o ile siły środkowe wszystkich płytek są równe zeru; w przeciwnym razie oś pręta przy odkształceniu wydłuży się lub skróci, w zależności od znaku sił osiowych poszczególnych płytek. Istotnie, gdy  $S = S' = \dots = 0$ , wtedy  $\beta\beta' = \gamma'\gamma'' = \dots = 0$ , a przeto i odcinki  $dz$ ,  $dz'$ ,  $dz''$ , . . . pozostaną niezmiennione po odkształceniu. Gdy jednak siły osiowe nie są równe zeru, wydłużenia zależą od znaku sił, mamy bowiem  $\beta\beta' = \alpha_g \frac{S}{F} dz$ ,  $\gamma'\gamma'' = \alpha_g \frac{S'}{F'} dz'$  i t. d. —

**§ 5. Wygięcie płaskie pręta prostego.** Wygięcie pręta prostego nazywamy płaskiem, gdy jego oś podłużna, pierwotnie prosta, staje się krzywą płaską po odkształceniu. Płaszczyznę, w której leży odkształcona, zwiemy *płaszczyzną gięcia*. Tego rodzaju odkształcenie gnące zachodzi wtedy jedynie, gdy osie obrotowe wszystkich przekrojów są równoległe, a zatem prostopadłe do płaszczyzny gięcia, w której leży odkształcona. Z łatwością dojdziemy do przekonania, że *pręt prosty ulega gięciu płaskiemu, gdy jednoimiennie osie główne wszystkich jego przekrojów poprzecznych leżą w tych samych płaszczyznach do siebie prostopadłych, a wszystkie momenty gnące zawiera jedna z nich. Druga staje się wtedy płaszczyzną gięcia*. Istotnie z ogólnej teorii naprężeń gnących wiemy, że oś sił momentu gnącego jest kierunkowo sprzężona z linią obojętną. Gdybyśmy przeto założyli, że osie główne poszczególnych przekrojów pręta nie leżą w tych samych płaszczyznach, to wtedy trzeba by

było w każdym poprzecznym przekroju inaczej pochyłać moment ku osiom głównym, aby otrzymać odnośne linje obojętne równoległe. Wymagałoby to niesłychanie złożonego obciążenia, które w ogólnym wypadku wprost pomyśleć się nie daje. Należy przeto zwęzić krąg rozpatrywania, biorąc pod uwagę pręty *jednorodnie zbudowane*. Przekroje poprzeczne prętów tego rodzaju zmieniają się w sposób ciągły a nieznaczny, a osie główne jednoimienne owych przekrojów — leżą w tych samych płaszczyznach prostopadłych do siebie.

Z ogólnej teorii gięcia wiemy, że linje obojętne są równoległe do osi głównej, gdy na tej osi leży moment gnący. Zatem warunek drugi gięcia płaskiego wymaga, aby wszystkie momenty gnące przekrojów poprzecznych pręta — leżały na jednoimiennych osiach głównych odnośnych przekrojów. To należało udowodnić.

Płaszczyzny, zawierające jednoimienne osie główne przekrojów poprzecznych pręta będziemy nazywali *płaszczyznami głównymi pręta*. Założmy, że osie główne  $OX$  leżą w takiej płaszczyźnie, a na nich — odnośne momenty gnące. Wtedy dla każdej płytki  $\omega = 0$ , a przeto dla

gięcia *mimośrodkowego płaskiego*:  $\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha_g}{1 + \alpha_g S/F} \frac{M_g}{J_x}$ ,  $d\varphi = \alpha_g M_g \frac{dz}{J_x}$ ,

$e_0 = \frac{S J_x}{F M_g}$ ,  $\tau_z = \frac{M_g}{J_x} y + \frac{S}{F} = e \frac{M_g}{J_x}$  a zaś dla gięcia *właściwego płas-*

*kiego*:  $\frac{1}{\rho} = \alpha_g \frac{M_g}{J_x}$ ,  $d\varphi = \alpha_g M_g \frac{dz}{J_x}$ ,  $e_0 = 0$ ,  $\tau_z = \frac{M_g}{J_x} y = e \frac{M_g}{J_x}$ ,

tu bowiem linje obojętne przecinają odkształconą pręta.

We wzorach ogólnych przez  $\rho$  nazwaliśmy odległość włókna środkowego płytki od prostej przecięcia się obu odkształconych ścian płytki. Szereg płytek stanowi pręt. Ich ścianki dają przekroje poprzeczne pręta. Odkształcona składa się z włókien środkowych płytek odkształconych, kolejno po sobie idących. Wynika stąd, że ścianki płytki odkształconej, leżą w sąsiednich płaszczyznach normalnych odkształconej pręta, a zatem  $\rho$  stanowi promień *krzywizny odkształconej*. Ten wniosek dotyczy wszystkich rodzajów gięcia, szczególną jednak uwagę posiada w wypadku gięcia płaskiego, jak to zobaczymy w następstwie.

**§ 6. Wskaźnik wytrzymałościowy.** W wypadku gięcia płaskiego mimośrodkowego lub właściwego z łatwością wyznaczmy skrajne

naprężenia gnące w postaci:  $\tau_{z1} = M_g \frac{e_1}{J_x} + \frac{S}{F}$ ,  $\tau_{z2} = M_g \frac{e_2}{J_x} + \frac{S}{F}$ .

W obu wypadkach odnośna linja obojętna jest równoległa do głównej płaszczyzny pręta, w której leżą momenty gnące i leży w odległości  $e_0$



od tej płaszczyzny. Gdy  $S = 0$ , wtedy i  $e_0 = 0$ , a przeto momenty gnące leżą na liniach obojętnych w wypadku gięcia płaskiego właściwego. Nadto w tym wypadku  $e_1$  i  $e_2$  zależą wyłącznie tylko od postaci samego przekroju. Nazwijmy wskaźnikiem przekroju — iloraz jego momentu głównego bezwładności, dzielonego przez odległość skrajnego włókna od osi tego momentu i oznaczmy przez  $W_{x1} = J_x : e_1$ ,  $W_{x2} = J_x : e_2$  a wtedy w wypadku gięcia płaskiego właściwego, — moment gnący, dzielony przez wskaźnik odnośnego przekroju, da wartość skrajną naprężenia gnącego, którą należy uczynić równą  $k_g$ .

Wyznamy wskaźnik przekrojów częściej spotykanych w praktyce:

1° *Przekrój prostokątny*. Dla osi głównej  $OX$ , równoległej do podstawy  $B$  przekroju:  $e_1 = -\frac{1}{2}H$ ,  $e_2 = +\frac{1}{2}H$ , a przeto  $W_x = -W_{x1} = W_{x2} = \frac{1}{6}BH^2$ . Dla drugiej osi głównej  $OY$ , równoległej do wysokości  $H$  prostokąta:  $e_1 = -\frac{1}{2}B$ ,  $e_2 = \frac{1}{2}B$ , a przeto  $W_y = -W_{y1} = W_{y2} = \frac{1}{6}HB^2$ .

2° *Przekrój kołowy*. Dla wszelkiej osi  $OX$  środkowej:  $e_1 = -R$ ,  $e_2 = R$ , będziemy mieli przeto:  $W_x = -W_{x1} = W_{x2} = \frac{\pi}{4}R^3 = \frac{\pi}{32}D^3$ . Zupełnie te same wartości  $e_1 = -R$ ,  $e_2 = R$  otrzymamy dla przekroju pierścieniowego o promieniu zewnętrznym  $R$  i wewnętrznym  $r$ , a więc dla pierścienia kołowego:  $W_x = -W_{x1} = W_{x2} = \frac{\pi}{4R}(R^4 - r^4) = \pi [D^4 - d^4] : 32 D$ .

3° *Przekrój eliptyczny*. Dla osi głównej  $OX$ , na której leży duża półoś elipsy,  $e_1 = -b$ ,  $e_2 = b$ , zatem  $W_x = -W_{x1} = W_{x2} = \frac{\pi}{4}ab^2$ ; dla drugiej głównej osi  $OY$  podobnie:  $e_1 = -a$ ,  $e_2 = a$ , co daje  $W_y = -W_{y1} = W_{y2} = \frac{\pi}{4}a^2b$ .

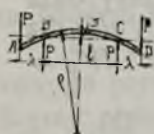
4° *Dwuteownik № 25*. Główną oś  $OX$  tego przekroju prowadzimy przez środek prostopadle do średnika, drugą  $OY$  — przez środek prostopadle do  $OX$ . Dla  $OX$  tablice podają wartość  $J_x = 4954 \text{ cm}^4$  nadto dla tej osi:  $e_1 = -\frac{1}{2}H = -12,5 \text{ cm}$ ,  $e_2 = 12,5 \text{ cm}$ , wysokość bowiem dwuteownika, w kierunku osi  $OY$  mierzona, wynosi  $H = 25 \text{ cm}$ . Stąd  $W_x = -W_{x1} = W_{x2} = 4954 : 12,5 = 396 \text{ cm}^3$ . Tę wartość dają również i tablice. Dla drugiej osi  $e_1 = -\frac{1}{2}B = -5,5 \text{ cm}$ ,  $e_2 = 5,5 \text{ cm}$ , szerokość bowiem pasów:  $B = 11 \text{ cm}$ . Nadto z tablic  $J_y = 255 \text{ cm}^4$ , a przeto  $W_y = -W_{y1} = W_{y2} = 255 : 5,5 = 46,4 \text{ cm}^3$ .

5° *Ceownik № 28*. Korzystając ze znakowania (I. Rys. 19) zauważymy, że dla osi głównej  $OX$ , osi symetrii przekroju:  $e_1 = -\frac{1}{2}H = -14 \text{ cm}$ ,  $e_2 = 14 \text{ cm}$ , cała bowiem wysokość ceownika, mierzona w kierunku osi  $OY$ , wynosi  $H = 28 \text{ cm}$ . Zatem  $W_x = -W_{x1} = W_{x2} = J_x : 14 = 6276 : 14 = 448 \text{ cm}^3$ , tablice bowiem podają  $J_x = 6276 \text{ cm}^4$ .

Inaczej rzecz się ma dla osi  $OY$ ; tutaj:  $e_1 = HO = -2,53$  cm, a przeto  $e_2 = AD - HO = B - 2,53 = 9,5 - 2,53 = 6,97$  cm, bo szerokość obu pasów  $B = 9,5$  cm. Nadto z tablic:  $J_y = 399$  cm<sup>4</sup>. W danym wypadku obie wartości wskaźników są różne:  $W_{y1} = 399 : (-2,53) = -157,7$  cm<sup>3</sup> oraz  $W_{y2} = 399 : 6,97 = 57,2$  cm<sup>3</sup>. —

Z powyższych przykładów widać, że obie wartości wskaźnika nie różnią się wartością bezwzględną dla osi symetrii przekroju, natomiast w wypadku przekroju niesymetrycznego względem osi głównej mogą ujawniać dość znaczne różnice. W tym wypadku oznaczamy zazwyczaj przez  $W_x$  bezwzględnie mniejszą wartość  $W_{x1}$  i  $W_{x2}$ , mając na widoku wyznaczenie skrajnego najwyższego naprężenia  $\sigma_z \max = M_g : W_x = k_g$ .

**§ 7. Wygięcie Lamarle'a.** Ten rodzaj wygięcia stanowi najprostszy przykład gięcia płaskiego a zarazem jedyny ściśle wypadek urzeczywistnienia powyżej poczynionych założeń. Weźmy pod uwagę pręt prosty poziomy. W punktach  $B$  i  $C$  jego pierwotnie prostej osi przyłożmy dwie jednakowe siły  $P$ , dajmy na to skierowane ku górze, oraz dwie takie same siły skierowane w dół w punktach  $A$  i  $D$ , odległych o  $\lambda$  od  $C$  i  $B$ . Wszystkie te cztery siły są równe, równoległe i prostopadłe do osi pierwotnej pręta, a przy odkształceniu nie schodzą ze swych linii działania. Jakikolwiek przekrój poprzeczny pręta o środku  $O$ , leżącym na osi, dzieli obciążenie gnące na dwie gromady, prawą i lewą, zawierające po jednej parze sił. Każda z nich po sprowadzeniu do ośrodka  $O$  da pojedynczy moment gnący  $M_g = P\lambda$ , prostopadły do płaszczyzny sił — stały dla wszystkich przekrojów poprzecznych, zawartych pomiędzy  $C$  i  $B$ . (Rys. 16).



Rys. 16.

Zbudujmy pręt jednorodnie, aby osie główne  $OY$  jego przekrojów poprzecznych leżały w płaszczyźnie sił — wtedy momenty gnące będą leżały na osiach głównych  $OX$ . Gięcie będzie płaskie; płaszczyzna sił stanie się płaszczyzną gięcia. Możemy przeto dla przekroju poprzecznego, przechodzącego przez środek  $O$ , wypisać wzory ogólne:

$$k_g = \frac{P\lambda}{W_x}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz} = \sigma_g \frac{P\lambda}{J_x}$$

tutaj bowiem  $S = 0$  a więc i  $e_0 = 0$  — momenty gnące leżą na liniach obojętnych  $OX$ .

Gdy przekrój poprzeczny pręta jest stały, wtedy dla wszystkich przekrojów  $J_x$ ,  $W_x$  mają wartości stałe, a wszystkie przekroje poprzeczne między  $C$  i  $B$  są jednakowo naprężone. Jest to więc pręt o stałej wytrzymałości na gięcie, bo wszystkie jego przekroje w środkowej części leżące, są jednakowo wytrzymałościowo wyzyskane. Godzi się jednak zauważyć, że w pozostałych częściach pręta warunki obciążenia będą zupełnie inne — wszystko to, cośmy tu mówili, dotyczy przeto wyłącznie środkowej części pręta. Dla niej promień krzywizny odkształconej jest stały — *odkształcona środkowej części pręta jest łukiem koła*, co stanowi cechę wygięcia Lamarle'a. Z łatwością wyznaczmy strzałkę tego łuku, czyli tak zwaną środkową strzałkę wygięcia.



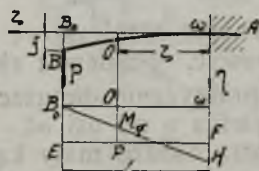
Będzie to  $f = \rho - \sqrt{\rho^2 - [1/2 l]^2} = [J_x : \alpha_g P \lambda] \{1 - \sqrt{1 - [\alpha_g P \lambda : 2 J_x]^2}\}$ .

Gdy przekrój poprzeczny pręta jest zmienny, poszczególne przekroje nie są jednakowo obciążone, a ich promienie krzywizny — zmienne. Wygięcie środkowej części przestaje być kołowym. Odształcona staje się krzywą, którą z łatwością wyznaczyć można z warunku  $J_x : \rho = \text{stałej}$ . Nie jest to już wygięcie *Lamarle'a*.

**§ 8. Obciążenia gnące.** Tylko co rozpatrywany układ sił stanowi jedyny rodzaj obciążenia gnącego, dającego po sprowadzeniu moment gnący, leżący w poprzecznym przekroju pręta odształconego. Inne obciążenia gnące tej własności nie posiadają, dają bowiem w przekrojach, prócz momentów gnących jeszcze i *siły tnące*. Jest to zupełnie zrozumiałe — chcemy otrzymać gięcie właściwe, bez domieszek rozciągania, ściskania i skręcania, gmatwających pierwotną czystość zjawisk gięcia właściwego, dlatego też z góry wyłączamy przedewszystkiem wszelkie siły, pochylone ku podłużnej osi pręta nieodkształconego pod kątem różnym od prostego. Siły tego rodzaju muszą dać składową  $S$ , a zatem spowodować gięcie mimośrodowe. Ponadto z sił pozostałych, a więc prostopadłych do osi podłużnej pręta nieodkształconego należy odrzucić siły leżące poza obręb płaszczyzny gięcia, jako dające dodatkowe momenty skręcające. Będziemy zatem rozpatrywali obciążenia gnące, złożone wyłącznie z sił prostopadłych do podłużnej osi pręta nieodkształconego, a leżących w płaszczyźnie gięcia. Każda z sił tego rodzaju, sprowadzona do środka danego przekroju poprzecznego, daje moment gnący równy sile mnożonej przez jej odległość od punktu sprowadzenia oraz — siłę tnącą, przyłożoną do tego środka, równą danej sile, równoległą jej i kierunkowo działającą jak ona. Jeżeli sprowadzimy kilka takich sił, to otrzymamy moment wypadkowy równy sumie poszczególnych momentów i siłę tnącą wypadkową równą sumie wszystkich sił tnących. W szczególnym wypadku, kiedy wypadkowa siła tnąca równa jest zeru — będziemy mieli obciążenie gnące właściwe.

Mimo to wzory gięcia stosujemy i do innych obciążeń gnących, pomijając działanie sił tnących. Czyniąc tak, popełniamy błąd, który jednak na ostateczny wynik obliczeń ma wpływ niewielki w warunkach zwykłych. Inaczej mówiąc w zjawisku wytrzymałościowo złożonem pomijamy część podrzędną *cięcie*, oddając wyłączne pierwszeństwo *gięciu*. W jednym z następnych działów kursu rozpatrzemy ową część pominiętą, ustalimy wzajemny stosunek odształceń, i przekonamy się, że prawie zawsze ścinanie może być całkowicie pominięte. Jako drugi typowy przykład rozpatrujemy:

**§ 9. Pręt osadzony jednym końcem, u drugiego obciążony siłą gnącą.** Pierwotnie prosty pręt, jednym końcem osadzony nieruchomo, obciążamy siłą  $P$  u drugiego końca, prostopadle do osi podłużnej pręta przyłożoną. Pod jarzmem tej siły pręt (Rys. 17) ugnie się w dół: jego oś podłużna, pierwotnie prosta, wykrzywi się, stanie się *krzywą*  $AB$  —  *płaską*. Część osadzoną pręta oznaczamy



Rys. 17.

przez  $A\omega$ . Od punktu  $\omega$  pręt ulega wygięciu, jest to skrajny punkt nieruchomy pręta. Poprowadźmy zeń stałą oś  $\omega\zeta$  wzdłuż osi podłużnej pręta nieodkształconego, oś  $\omega\eta$  ułożmy w płaszczyźnie siły  $P$  — trzecią oś  $\omega\xi$  kierujemy prostopadle do płaszczyzny gięcia ku patrzącemu. W odległości  $\zeta$  od początku współrzędnych na odkształconej obieramy dowolny zresztą punkt  $O$ , środek odnośnego poprzecznego przekroju pręta odkształconego. Współrzędne tego punktu będą odpowiednio  $\zeta$  i  $\eta$ . Główną oś tylko co wyznaczonego przekroju, leżącą w płaszczyźnie siły  $P$ , oznaczymy przez  $OY$ ; druga oś  $OX$  będzie szła ku patrzącemu, — trzecią kierujemy po stycznej, poprowadzonej w punkcie  $O$  do odkształconej, nadając jej kierunek zgodny z osią  $O\zeta$ . Kierunek osi  $OZ$  wyznacza zarazem kierunek osi  $OY$ , którą tu trzeba prowadzić w dół, zgodnie z ogólnym prawem, podanym na początku tej części kursu. W założeniu pręta jednorodnie zbudowanego jednoimienne osie główne  $OY$  wszystkich przekrojów poprzecznych ułożą się w płaszczyźnie gięcia — na osiach  $OX$  będą leżały momenty gnące  $M_g = P(l - \zeta)$  — nadto w środku  $O$  każdego przekroju poprzecznego panować będzie siła tnąca  $P$ . Łatwo to udowodnić, rozpatrując w środku  $O$  dwie siły równe  $P$  i równoległe lecz skierowane przeciwnie, a więc znoszące się wzajemnie. Jedna z nich łącznie z siłą  $P$  utworzy parę sił o ramieniu  $l - \zeta$ , gdzie  $l$  — oznacza odległość siły  $P$  od przekroju osadczego czyli pierwotną długość pręta. Druga — da siłę tnącą — stałą dla wszystkich środków  $O$  sprowadzenia. Ponieważ momenty  $M_g$  rosą wraz z  $l - \zeta$ , przeto z łatwością otrzymać możemy odnośny wykres momentów w postaci trójkąta  $\omega B_0H$ . Prostokąt  $\omega B_0EF$  stanowić będzie wykres sił tnących. Prowadząc w odległości  $\omega O = \zeta$  równoległą do  $\omega H$ , otrzymamy z tych wykresów w odnośnej skali moment gnący  $M_g = OM_g$  i siłę tnącą  $P = OP$  dla środka sprowadzenia  $O$ . Skrajna wartość momentu  $M_m = Pl = \omega H$  panować będzie w przekroju osadczym, gdzie  $\zeta = 0$ .

W założeniu stałego przekroju poprzecznego pręta, skrajne wartości naprężeń przekrojów wyrażą się wzorem  $\sigma_{zm} = M_g : W_x = P(l - \zeta) : W_x$ . W przekroju osadczym panować będzie najwyższa wartość naprężenia  $k_g = Pl : W_x$ . Ten przekrój jest niebezpieczny — dla niego należy wyznaczyć właściwe wymiary, dobierając odpowiednią wartość  $W_x = Pl : k_g$ . Tak, dajmy na to, dla przekroju prostokątnego będzie  $\frac{1}{6}BH^2 = Pl : k_g$ , skąd określimy  $H$  lub  $B$ , biorąc stosunek  $m = B : H$ .

Wyznaczwszy w ten sposób przekrój poprzeczny pręta, możemy

ze wzoru dla  $\frac{1}{\rho} = \alpha_g \frac{P(l - \zeta)}{J_x}$  otrzymać równanie  $\eta = f(\zeta)$  odkształco-

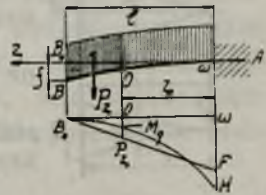
nej, ponieważ:  $\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\eta''}{(1 + \eta'^2)^{3/2}}$ , gdzie  $\eta' = \frac{d\eta}{d\zeta}$  oraz  $\eta'' = \frac{d^2\eta}{d\zeta^2}$ . To

równanie różniczkowe jest nader trudne do całkowania, daje się jednak uprościć. Ponieważ skrajne naprężenie  $k_g$  jest stosunkowo niskie, przeto praktycznie dopuszczalne wygięcie pręta jest nader nieznaczne, a odchylenia  $\eta$  od osi  $\omega\zeta$  — znikome. To znaczy, że styczne odkształconej tworzą bardzo mały kąt z osią  $\omega\zeta$ , możemy przeto utożsamiać długość pierwotną pręta  $l$  z długością odkształconą, oraz pominąć zupełnie  $\eta'$



w mianowniku, pisząc  $\pm J_x \eta'' = \alpha_g P(l - \zeta)$ , co znacznie ułatwia całkowanie. Wyniki, jakie tą drogą otrzymamy, nie będą zupełnie ścisłe, lecz wystarczająco przybliżone dla małych wygięć pręta. Wprowadźmy oznaczenie  $E_g = 1 : \alpha_g$ . — Współczynnik  $E_g$  będziemy nazywali *spółczynnikiem sprężystości na zginanie*, a iloczyn  $E_g J_x$  — *sztwywnością pręta w danym przekroju*. Zatem  $\pm E_g J_x \eta'' = P(l - \zeta) = M_g$ . Siła  $P$  stara się wygiąć pręt ku dołowi, dając odkształconą — wypukłą względem osi  $\omega\zeta$ . Ponieważ wszystkie rzędne  $\eta$  odkształconej są dodatnie, oznaką przeto wypukłości będzie tu  $\eta\eta'' > 0$  czyli  $\eta'' > 0$ , trzeba więc zachować znak dodatni we wzorze  $E_g J_x \eta'' = P(l - \zeta)$ . Całkując mamy:  $E_g J_x \eta' = C - \frac{P}{2}(l - \zeta)^2$  oraz  $E_g J_x \eta = D + C\zeta + \frac{P}{6}(l - \zeta)^3$ . Stałe całkowania  $D$  i  $C$  wyznaczymy z łatwością, zważywszy, że w punkcie  $\omega$  odkształcona musi być styczną do osi  $\omega\zeta$ , co niewątpliwie wpływa bezpośrednio ze sposobu zamocowania pręta, którego koniec  $\omega A$  tkwi w ścianie i nie ulega żadnym odkształceniom, jako osadzony trwale. Zatem w punkcie  $\omega$  dla  $\zeta = 0$  mamy  $\eta = 0$  oraz  $\eta' = 0$ , co da:  $C - \frac{P}{2} l^2 = 0$  oraz  $D + \frac{1}{6} Pl^3 = 0$  i ostatecznie  $E_g J_x \eta = \frac{1}{2} Pl^2 \zeta - \frac{1}{6} Pl^3 + \frac{1}{6} P(l - \zeta)^3 = \frac{1}{2} P\zeta^2 [l - \frac{1}{3} \zeta]$ . Widzimy stąd bezpośrednio, że najwyższej wartości  $\zeta = l$  odpowiada najwyższa wartość  $\eta = f$ , czyli tak zwana strzałka ugięcia pręta oraz najwyższy kąt pochylenia stycznej ku osi  $\omega\zeta$  — kąt  $\theta = \arctg \eta' \approx \eta'$ . Zatem  $f = \frac{1}{3} Pl^3 : E_g J_x$ . Ponieważ  $E_g J_x \eta' = \frac{1}{2} Pl^2 - \frac{1}{2} P(l - \zeta)^2 = P\zeta [l - \frac{1}{2} \zeta]$ , przeto  $\theta = \frac{1}{2} Pl^2 : E_g J_x$ .

**§10. Pręt osadzony jednym końcem, a obciążony jednostajnie.** Tego rodzaju obciążenie możemy sobie wyobrazić, jako warstwę piasku stałej grubości, ułożoną na pręcie. Jej ciężar całkowity  $P$ , dzielony przez długość pręta pierwotną, da obciążenie jednostkowe  $p$ , które zazwyczaj wyrażamy w KG na jednostkę długości pręta. Korzystając ze znakowania ustępu poprzedniego, z łatwością wyznaczymy moment gnący dla dowolnego przekroju poprzecznego, w odległości  $\zeta$  od nasady pręta poprowadzonego. W tym celu bierzemy pod uwagę siły, cisnące na część  $OB$  pręta odkształconego. Wypadkowa ich  $P_\zeta = p \times OB$ . Przy nieznacznym wygięciu (Rys. 18) możemy napisać, że  $OB = l - \zeta$ , a zatem  $P_\zeta = p(l - \zeta)$ . Punkt uczepienia tej siły leży pośrodku odcinka  $OB$ , to też po sprowadzeniu tej siły do środka  $O$  otrzymamy  $M_g = \frac{1}{2} p(l - \zeta)^2 = \frac{P}{2l}(l - \zeta)^2$ , oraz siłę tnącą  $P_\zeta$ , którą, jak zwykle, pomijamy. Tutaj więc siły tnące będą miały wykres trójkątny  $B_0\omega F$ , a momenty — paraboliczny  $B_0H\omega$ , jak to najlepiej uwypukla rysunek.



Rys. 18.

W założeniu stałego przekroju poprzecznego skrajne naprężenia będą równe  $\sigma_{zmi} = M_g : W_x = P(l - \zeta)^2 : 2 l W_x$ . Ich najwyższa wartość panować będzie w przekroju osadczym, gdzie  $\zeta = 0$ .

Czynimy ją równą  $k_g = Pl : 2W_x$ , skąd  $W_x = Pl : 2k_g$ . W ten sposób wyznaczmy właściwe wymiary przekroju.

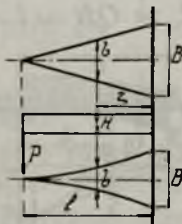
Chcąc z kolei znaleźć równanie odkształconej, piszemy  $E_g J_x \eta'' = \frac{P}{2l} (l - \zeta)^2$ , skąd:  $E_g J_x \eta' = C - \frac{P}{6l} (l - \zeta)^3$ ,  $E_g J_x \eta = D + C\zeta + \frac{P}{24l} (l - \zeta)^4$ . Z warunków panujących w przekroju osadczym mamy  $\eta = \eta' = 0$  dla  $\zeta = 0$ , co da:  $C = \frac{1}{6} Pl^2$ ,  $D = -\frac{1}{24} Pl^3$ . Stąd równanie odkształconej:  $E_g J_x \eta = -\frac{1}{24} Pl^3 + \frac{1}{6} Pl^2 \zeta + \frac{1}{24} \frac{P}{l} (l - \zeta)^4$ . Czyniąc w niem  $\zeta = l$  otrzymamy, jak w przykładzie poprzednim:  $f = Pl^3 : 8 E_g J_x$  oraz  $\theta = Pl^2 : 6 E_g J_x$ .

W obu tylko co rozpatrywanych wypadkach jeden tylko przekrój osadczy pręta jest należycie wytrzymałościowo wyzyskany — pozostałe są zbyt sówite. Aby tę zbytnią rozrzutność usunąć, należałoby wykonać:

**§ 11. Pręt stałej wytrzymałości jednostronnie osadzony.** Przekroje tego pręta należy tak dobrać, aby dla wszystkich przekrojów poprzecznych spełniało się równanie  $M_g = W_x k_g$ . Dla takiego pręta  $\frac{1}{\rho} = M_g :$

$E_g J_x = W_x k_g : E_g J_x$ . W założeniu przekroju prostokątnego  $J_x = \frac{1}{12} bh^3$ ,  $W_x = \frac{1}{6} bh^2$ . Uczyńmy wysokość wszystkich przekrojów stałą i równą  $H$ , wtedy dla  $b$  otrzymamy wzór  $b = 6 M_g : H^2 k_g$ . Nadto  $\frac{1}{\rho} = \eta'' = 2 k_g : H E_g =$  stałej. Wygięcie byłoby ściśle kołowe, gdyby nie było sił tnących. W istocie jest ono jednak nieco inne, zbliża się jednak do kołowego. Chcąc wyznaczyć  $b$  dla poszczególnych przekrojów, należy wyrazić  $M_g$ . W pierwszym wypadku, gdy działa siła  $P$  u końca

pręta:  $M_g = P(l - \zeta)$ , w drugim:  $M_g = \frac{P}{2l} (l - \zeta)^2$ , stąd odpowiednio:  $b = 6 P (l - \zeta) : H^2 k_g$  oraz  $b = 3 P (l - \zeta)^2 : H^2 k_g l$ . Pierwszy wzór wskazuje, że  $b$  zmienia się linjowo, rosnąc wraz z  $l - \zeta$  — drugi, że zmiana  $b$  jest paraboliczna; pierwszej zmienności odpowiada (rys. 19), drugiej (rys. 20). W obu wypadkach dla przekroju osadczego mamy  $B = 6 Pl : H^2 k_g$  oraz  $B = 3Pl : H^2 k_g$ . A zatem  $b = B (l - \zeta) : l$  oraz  $b = B (l - \zeta)^2 : l^2$ . Chcąc w obu wypadkach otrzymać strzałkę ugięcia, należy całkować równanie wyżej wypisane



$\eta'' = \frac{2k_g}{HE_g}$ ,  $\eta' = C + \frac{2k_g}{HE_g} \zeta$ ,  $\eta = D + C\zeta + \frac{k_g}{HE_g} \zeta^2$ , gdzie

stałe całkowania wyznaczyć można z warunków dla przekroju osadczego. Ponieważ  $\eta = \eta' = 0$  przy  $\zeta = 0$ , przeto  $C = D = 0$  i ostatecznie  $\eta = \frac{k_g}{HE_g} \zeta^2$ . Czyniąc tu  $\zeta = l$ , otrzymamy ostatecznie strzałkę  $f = k_g l^2 : HE_g$ . W pierwszym wypadku, gdy

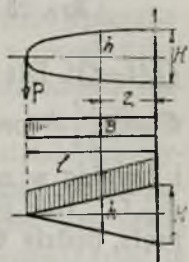


działa siła  $P$ , mamy:  $k_g = 6 Pl : BH^2$ , w drugim:  $k_g = 3 Pl : BH^2$ , zatem odpowiednio:  $f = 6 Pl^3 : E_g BH^3$  oraz  $f = 3 Pl^3 : E_g BH^3$ .

Założmy z kolei, że szerokość  $b$  wszystkich poprzecznych przekrojów pręta jest stała i równa  $B$ . Tutaj  $h^2 = 6M_g : Bk_g$ , nadto  $\frac{1}{\rho} = \eta'' = 2k_g : E_g h$ . Gdy działa siła  $P$ , wtedy  $h^2 = 6P(l-\zeta) : Bk_g$ , w wypadku zaś obciążenia jednostajnego:  $h^2 = 3P(l-\zeta)^2 : lBk_g$ . Pierwsza zależność jest paraboliczna i odpowiada budowie pręta, wskazanej na (rys. 21), druga jest oczywiście linjowa. Pręt czyniący jej zadość podaje (rys. 22).

W obu wypadkach dla przekroju osadczego mamy  $H^2 = 6Pl : Bk_g$  oraz  $H^2 = 3Pl : Bk_g$ , a zatem mamy po podzieleniu:  $h^2 = H^2(l-\zeta) : l$  oraz  $h^2 = H^2(l-\zeta)^2 : l^2$ . Chcąc w obu wypadkach otrzymać strzałkę ugięcia końcową, należy całkować równanie  $\eta'' = 2k_g : E_g h$ . W pierwszym wypadku przyjmuje ono postać:  $\eta'' = \frac{12 Pl^{3/2}}{E_g BH^3 \sqrt{l-\zeta}}$ . Stąd:

$$\eta' = C - \frac{24 Pl^{3/2}}{E_g BH^3} \sqrt{l-\zeta}, \quad \eta = D + C\zeta + \frac{16 Pl^{3/2}}{E_g BH^3} \sqrt{(l-\zeta)^3}.$$



Rys. 21 i 22.

I tutaj znów  $\eta' = 0$   $\eta = 0$ , gdy  $\zeta = 0$ , zatem będziemy mieli:

$$C = \frac{24 Pl^2}{E_g BH^3}, \quad D = -\frac{16 Pl^3}{E_g BH^3}.$$

Podstawiając te wartości w równanie odkształconej i czyniąc w nim  $\zeta = l$ , otrzymamy końcową strzałkę ugięcia

$$f = \frac{8 Pl^3}{E_g BH^3}.$$

W drugim wypadku:  $\eta'' = \frac{6 Pl^2}{E_g BH^3(l-\zeta)}$ , skąd:  $\eta' = C - \frac{6 Pl^2}{E_g BH^3} \lg(l-\zeta)$ ,

$$\eta = D + C\zeta + \frac{6 Pl^2}{E_g BH^3} [\lg(l-\zeta) - 1] (l-\zeta).$$

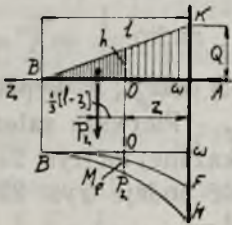
I znów przy  $\zeta = 0$  mamy  $\eta' = \eta = 0$ , stąd:  $C = \frac{6 Pl^2}{E_g BH^3} \lg l$ ,  $D = \frac{6 Pl^3}{E_g BH^3} (1 - \lg l)$ .

Podstawiając te wartości we wzór dla odkształconej i czyniąc w nim  $\zeta = l$ , otrzymamy strzałkę  $f = 6 Pl^3 : E_g BH^3$ . Wszystkie te strzałki pręta stałej wytrzymałości są znacznie większe, od strzałek pręta o stałym przekroju prostokątnym  $B \times H$ . Jest to zresztą prawo ogólne. Nie powinno dziwić—pręt stałej wytrzymałości, jako oszczędniej zbudowany, a więc słabszy—mocniej się ugina.

## § 12. Obciążenie trójkątne pręta jednostronnie osadzonego.

Pręt wyżej rozpatrywany obciążamy piaskiem, usypanym w kształcie warstwy trójkątnej (rys. 23). Ciężar całkowity piasku =  $P = \frac{1}{2} Ql$ , gdzie  $Q = \omega k$ ,

a  $l$ —oznacza pierwotną długość pręta. Weźmy pod uwagę jakikolwiek przekrój w odległości  $\zeta$  od przekroju osadczego. Obciążenie tego przekroju stanowić będzie trójkąt o wysokości  $h = Q(l - \zeta) : l$ . Pole trójkąta  $\frac{1}{2} Q(l - \zeta)^2 : l$  da wartość tego obciążenia,

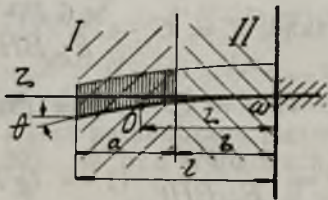


Rys. 23.

którą wprost oznaczymy przez  $P_{\zeta}$ . Punkt uczepienia tej siły będzie niewątpliwie leżał w odległości  $\frac{1}{3}(l - \zeta)$  od rozpatrywanego przekroju poprzecznego, a zatem moment gnący  $M_g = \frac{1}{6} Q(l - \zeta)^3 : l$ . W założeniu stałego przekroju będziemy mieli  $E_g J_x \eta'' = \frac{1}{6l} Q(l - \zeta)^3$ , skąd dwukrotnie całkując:  $E_g J_x \eta' = C - \frac{1}{24l} Q(l - \zeta)^4$  oraz  $E_g J_x \eta = D + C\zeta + \frac{1}{120l} Q(l - \zeta)^5$ . Dla przekroju osadczego, gdzie  $\zeta = 0$ , mamy  $\eta' = \eta = 0$ , a zatem:

$C = \frac{Q}{24} l^3$  oraz  $D = -\frac{Q}{120} l^4$ . Podstawiając te wartości we wzór dla  $\eta$  i czyniąc w nim  $\zeta = l$ , otrzymamy końcową strzałkę ugięcia  $f = Ql^4 : 30 E_g J_x$ . Kąt, jaki utworzy skrajna styczna odkształconej z pierwotną osią pręta, będzie  $\theta = Ql^3 : 24 E_g J_x$ . Skrajna wartość momentu gnącego w przekroju osadczym:  $M_{gm} = \frac{1}{6} Ql^2$ . Wykres momentów będzie tu paraboliczny. Podobny doń będzie również i wykres sił tnących  $P_{\zeta}$ , które, jak zwykle, pomijamy. Oba wykresy podaje rysunek.

**§ 15. Pręt zamocowany jednostronnie częściowo obciążony** w stosunku  $p$   $KG$  na jednostkę długości. Obciążenie ciągłe pręta urywa się w odległości  $b$  od przekroju osadczego. Poprowadźmy wyraźną graniczną linię, dzieląc pręt na dwa obszary zmienności momentów. W lewej części pręta, obciążonej (rys. 24), moment będzie równy  $M_{g1} = \frac{1}{2} p(l - \zeta)^2$ .



Rys. 24.

Gdyby obciążenie ciągłe pokrywało cały pręt, to wyrażenie tylko co wypisane byłoby prawdziwe dla całego pręta; ponieważ jednak poza wartością  $\zeta = b$  obciążenia brak, przeto dla tej części pręta będziemy mieli:  $M_{g2} = \frac{1}{2} p(l - \zeta)^2 - \frac{1}{2} p(b - \zeta)^2$ , należy bowiem potrącić obciążenie brakujące. Oba te wzory możemy połączyć

w jeden ogólny wzór, pisząc  $M_g = \frac{1}{2} p(l - \zeta)^2$

—  $\frac{1}{2} p(b - \zeta)^2$ , gdzie kreska ma rozgraniczać momenty obu dziedzin.

Dla lewej—wzór poza kreską należy odrzucić, poprzestając na pierwszym wyrazie — dla prawej dziedziny brać całość wzoru z pominięciem kreski.

Stąd, w założeniu stałego przekroju pręta  $E_g J_x \eta'' = \frac{1}{2} p(l - \zeta)^2$  —  $\frac{1}{2} p$

$(b - \zeta)^2$ . Całkując:  $E_g J_x \eta' = C - \frac{1}{6} p(l - \zeta)^3$  —  $\frac{1}{6} p(b - \zeta)^3$ ,  $E_g J_x \eta =$

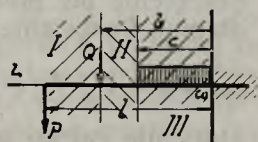


$= D + C\zeta + \frac{1}{24} p (l-\zeta)^4 - \frac{1}{24} p (b-\zeta)^4$ . Dla przekroju osadczego  $\zeta=0$  oraz  $r_1=r_1'=0$ , co da:  $C=\frac{1}{6} p l^3 - \frac{1}{6} p b^3$  oraz podobnie  $D=-\frac{1}{24} p l^4 + \frac{1}{24} p b^4$ . Piszemy oba te wzory bez kresek, ponieważ przekrój osadczy należy do prawej dziedziny. Podstawiając te wartości i czyniąc w odnośnych wzorach  $\zeta=l$ , otrzymamy skrajną strzałkę ugięcia  $f=\frac{1}{24} p [3l^4 - 4lb^3 + b^4] : E_g J_x$  i kąt nachylenia skrajnej stycznnej  $\theta = \frac{1}{6} p [l^3 - b^3] : E_g J_x$ . W założeniu  $b=0$ , odnajdziemy poprzednio wyprowadzone wzory dla pręta obciążonego jednostajnie na całej długości.

**§ 14. Zasada niezależności działania sił w wytrzymałości tworzyw.** Przy wyprowadzaniu powyższych wzorów milcząco opieraliśmy się na zasadzie niezależności działania sił, którą możemy wypowiedzieć w następującej postaci: *siła niezależna powoduje swoiste odkształcenia, niezależnie od innych sił na to samo ciało działających*. Każda więc siła zewnętrzna, odkształcająca, niezależnie od innych sił układu działająca, wywołuje w ciele odkształconem swoiste odkształcenia niezależnie od sił pozostałych. W ten sposób na tle swoistych odkształceń danej siły jawią się również swoiste naprężenia, możemy więc również wypowiedzieć tę samą zasadę w innej jeszcze postaci: *siła niezależna powoduje swoiste naprężenia, niezależnie od innych sił na to samo ciało działających*. Te naprężenia, jako siły cząsteczkowe, dodają się według prawa równoległoboku. Ich wypadkowym—odpowiadają odkształcenia wypadkowe, złożone z poszczególnych odkształceń składowych w myśl prawa, które znamy, jako

**§ 15. Drugie prawo Roberta Hooke'a.** Brzmi ono tak: *nieznaczne odkształcenia dodają się — jednokierunkowe algebraicznie, różnokierunkowe—geometrycznie*. To prawo łącznie z poprzedzającym umożliwia rozpatrywanie złożonych wypadków działania sił gnących. Jako wybitny przykład, bierzemy pod uwagę:

**§ 16. Pręt jednostronnie osadzony. Obciążenie złożone.** U wolnego końca pręta osadzonego jednostronnie, działa (rys. 25) siła  $P$ , dalej w odległości  $b$  od przekroju osadczego — siła  $Q$ . Nadto w odległości  $c$  od przekroju osadczego rozpoczyna się obciążenie ciągłe i trwa aż do nasady pręta w stosunku  $p$   $KG$  na jednostkę długości. Tu mamy aż trzy typy momentów: Na całym pręcie panuje moment gnący  $M_1 = P(l-\zeta)$ , pochodzący od siły  $P$ ; na długość  $b$ , prócz tego momentu panuje jeszcze i  $M_2 = Q(b-\zeta)$ , pochodzący od siły  $Q$ , wreszcie począwszy od  $\zeta=c$  dochodzi trzeci moment  $M_3 = \frac{1}{2} p (c-\zeta)^2$ . Wyraźnie więc zaznaczają się tu trzy obszary obciążenia. To samo otrzymamy, pisząc jak dawniej:  $M_g = P(l-\zeta) + Q(b-\zeta) + \frac{1}{2} p (c-\zeta)^2$ ,



Rys 25.

gdzie dla pierwszego obszaru brać jeno trzeba pierwszy wyraz, dla drugiego—dwa pierwsze, a dla trzeciego—cały wzór z pominięciem kresek. Dla przekroju osadczego skrajną wartość naprężenia otrzymamy ze wzoru  $k_g = M_g : W_x$ , gdzie moment  $M_g$  możemy wyznaczyć, czyniąc we wzorze powyżej wypisanym  $\zeta = 0$ . To samo otrzymamy w myśl zasady o niezależności działania sił, rozpatrując  $k_g$  jako sumę naprężeń, pochodzących od trzech składowych momentów  $Pl$ ,  $Qb$  i  $\frac{1}{2} pc^2$ .

Podobnie również, w założeniu stałego przekroju pręta, możemy od razu wypisać wzór odkształconej, korzystając ze wzorów uprzednio wy-

prowadzonych, w postaci:  $E_g J_x \eta' = C - \frac{1}{2} P(l - \zeta)^2 \left| \right. + C' - \frac{1}{2} Q$   
 $(b - \zeta)^2 \left| \right. + C'' - \frac{1}{6} p(c - \zeta)^3$ ,  $E_g J_x \eta = D + C\zeta + \frac{1}{6} P(l - \zeta)^3 \left| \right. + D' +$   
 $+ C'\zeta + \frac{1}{6} Q(b - \zeta)^3 \left| \right. + D'' + C''\zeta + \frac{1}{24} p(c - \zeta)^4$ . Dla osadczego prze-

kroju, jako leżącego w ostatnim obszarze, należy pominąć kreski. Tam  $\zeta = 0$ , a nadto:  $\eta' = \eta = 0$  czyli:  $C + C' + C'' = \frac{1}{2} Pl^2 + \frac{1}{2} Qb^2 + \frac{1}{6} pc^3$  oraz  $D + D' + D'' = -\frac{1}{6} Pl^3 - \frac{1}{6} Qb^3 - \frac{1}{24} pc^4$  i ostatecznie:  $E_g J_x \eta' =$

$$= \frac{1}{2} Pl^2 + \frac{1}{2} Qb^2 + \frac{1}{6} pc^3 - \frac{1}{2} P(l - \zeta)^2 \left| \right. - \frac{1}{2} Q(b - \zeta)^2 \left| \right. - \frac{1}{6} p(c - \zeta)^3,$$

$$E_g J_x \eta = -\frac{1}{6} Pl^3 - \frac{1}{6} Qb^3 - \frac{1}{24} pc^4 + \left[ \frac{1}{2} Pl^2 + \frac{1}{2} Qb^2 + \frac{1}{6} pc^3 \right] \zeta +$$

$$+ \frac{1}{6} P(l - \zeta)^3 \left| \right. + \frac{1}{6} Q(b - \zeta)^3 \left| \right. + \frac{1}{24} p(c - \zeta)^4.$$

To samo zupełnie mogliśmy otrzymać, całkując wzór ogólny  $E_g J_x \eta'' = M_g$ . W danym wypadku odkształcenia  $\eta$  są jednokierunkowe, to też je dodawaliśmy algebraicznie w myśl drugiego prawa Hooke'a. Czyniąc we wzorach  $\zeta = l$ , otrzymamy końcową strzałkę ugięcia pręta oraz kąt pochylenia skrajnej stycznej odkształconej. W szczególnym wypadku, gdy uczynimy nadto  $Q = p = 0$ , będziemy mieli odnośne wartości dotyczące pręta obciążonego pojedynczą siłą  $P$ .

O wiele ciekawszy wynik otrzymamy czyniąc w nich  $P = 0$ , wtedy bowiem możemy wyznaczyć końcową strzałkę i kąt dla pręta  $l$  długiego, obciążonego w sposób ciągły  $p$   $KG$  na jednostkę długości w odcinku  $c$  oraz siłą  $Q$  w odległości  $b$  od przekroju osadczego przyłożoną. Całe to obciążenie nie może oczywiście odkształcić lewej części pręta —  $(l - b)$  długiej. Pozostanie ona prostą, o czym możemy się przekonać, rozpatru-

$$\text{jąc wzór } E_g J_x \eta' = \frac{1}{2} Qb^2 + \frac{1}{6} pc^3 \left| \right. - \frac{1}{2} Q(b - \zeta)^2 \left| \right. - \frac{1}{6} p(c - \zeta)^3,$$

który dla całego pierwszego obszaru obciążeń daje jedną i tę samą wartość kąta pochylenia stycznej odkształconej osi pręta.

Podany przykład można uogólnić na wypadek działania dowolnej liczby sił gnących. Każda z nich, w myśl prawa o niezależności działania sił, wywołuje swoiste naprężenia i odkształcenia gnące, chcąc zatem, dajmy na to, wyznaczyć strzałkę ugięcia w pewnym punkcie pręta — określamy dla tego punktu poszczególne strzałki sił układu i dodajemy je algebraicznie,



tu bowiem odkształcenia są jednokierunkowe. Inaczej jednak rzecz się ma, gdy siły gnące nie leżą w jednej płaszczyźnie.

**§ 17. Pręt wyginany ukośnie.** Gdy moment gnący  $M_g$  pochyla się ku osi głównej  $OX$  odnośnego przekroju poprzecznego pod kątem  $\omega$ , wtedy zachodzi ogólny wypadek gięcia właściwego, o którym mówiliśmy wyżej. Dla prętów jednorodnie zbudowanych możemy jednak, opierając się na prawie o niezależnem działaniu sił, sprowadzić ten ogólny wypadek gięcia do dwóch prostszych. W tym celu rozkładamy wszystkie siły gnące na składowe leżące w płaszczyznach głównych pręta, otrzymując w ten sposób dwie gromady sił składowych, leżących w prostopadłych do siebie *płaszczyznach gięcia*. Obie te gromady dają niezależne naprężenia i odkształcenia. Chcąc je wyznaczyć, sprowadzamy obie gromady sił do środka dowolnego przekroju poprzecznego pręta. Ponieważ siły gnące są prostopadłe do pierwotnej osi pręta, przeto obie gromady dadzą momenty gnące, leżące w płaszczyznach głównych pręta jednorodnie zbudowanego, każda więc z obu gromad wygnie pręt *plasko*. W ten sposób otrzymamy *dwie* odkształcone pręta, w dwóch płaszczyznach głównych do siebie prostopadłych leżące. Ponieważ obie gromady sił działają jednocześnie i łącznie, zatem wyznaczmy *odkształconą istotną, dodając geometryczne rzędne obu odkształconych płaskich*, stanowiących niejako jej rzuty na obie płaszczyzny gięcia. Wypływa to bezpośrednio z drugiego prawa *Hooke'a*. W tak prosty sposób możemy sprowadzić *gięcie właściwe* do dwóch gięć płaskich — lecz tylko dla pręta jednorodnie zbudowanego. Jako przykład typowy tylko co ustalonego sposobu weźmiemy pod uwagę:

**§ 18. Pręt jednostronnie osadzony, a obciążony ukośnie.** Pręt o płaszczyznach głównych pionowej i poziomej, zamocowany jednostronnie poziomo, dźwiga na całej swej długości obciążenie ciągłe  $p$  KG na jednostkę długości, pionowe, a nadto u wolnego końca obciążony jest siłą poziomą  $Q$  KG, równoległą do stałej osi  $\omega\xi$  i skierowaną jak ona. — Weźmy pod uwagę jakikolwiek przekrój poprzeczny pręta w odległości  $\zeta$  od przekroju osadczego. Po sprowadzeniu obciążenie ciągłe da w tym przekroju moment gnący  $M_1 = \frac{1}{2} p (l - \zeta)^2$ , leżący na osi głównej poziomej, a siła  $Q$  da moment  $M_2 = Q (l - \zeta)$  na osi głównej pionowej tego przekroju leżący. Dla określenia właściwych wymiarów pręta miarodajnym będzie przekrój osadczy, gdzie panują skrajne wartości obu tych momentów  $M_1 = \frac{1}{2} pl^2$  i  $M_2 = Ql$ . Oba wywołują jednokierunkowe naprężenia normalne, które wyznaczymy z łatwością ze wzorów ogólnych dla gięcia płaskiego w postaci  $\sigma_{x1} = -\frac{M_1}{J_x} y$ ,  $\tau_{x2} = -\frac{M_2}{J_y} x$ , zważywszy, że dla pierwszego  $\omega = \pi$ , a dla drugiego  $\omega = \pi/2$ .

Wypadkową tych dwóch naprężeń na mocy prawa o niezależności

działania sił otrzymamy w postaci  $\sigma_z = -\frac{M_2}{J_y}x - \frac{M_1}{J_x}y$ , pozostaje więc

tylko wyznaczyć punkt przekroju osadczego o skrajnej wartości tego naprężenia, a więc parę wartości  $x, y$ , przynależnych do tego przekroju, dającą maximum  $\sigma_z$ . Ten sam wynik otrzymamy, stosując wzór ogólny, tutaj bowiem  $M_g = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$ , przyczem  $M_x = -M_1$ ,  $M_y = M_2$ .

Podobnie również w założeniu stałego przekroju pręta dla momentów  $M_1$  otrzymamy odkształconą  $E_g J_x \eta = -\frac{1}{24} p l^4 + \frac{1}{6} p l^3 \zeta + \frac{1}{24} p (l - \zeta)^4$ , a dla momentów  $M_2$  będziemy mieli  $E_g J_y \xi = \frac{1}{2} Q (l - \frac{1}{3} \zeta) \zeta^2$ . Będą to rzuty odkształconej istotnej — na obie płaszczyzny główne pręta. Chcąc, dajmy na to, wyznaczyć końcową strzałkę  $f$  ugięcia pręta, należy znaleźć obie jej składowe, czyniąc w tych wzorach  $\zeta = l$ , co da:  $f_1 = p l^4 : 8 E_g J_x$  oraz  $f_2 = Q l^3 : 3 E_g J_y$ . Stąd bezpośrednio  $f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ , a strzałka pochyla się ku osi głównej końcowego przekroju pręta pod kątem  $\varphi = \text{arctg} [f_1 : f_2]$ .

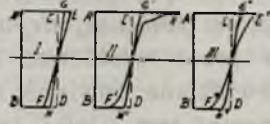
Pozналиśmy już wszystkie rodzaje odkształceń gnących. Zanim podamy zastosowania nie od rzeczy będzie jeszcze raz przypomnieć, że cała powyżej podana teoria wymaga zachowania *stałej wartości  $\sigma_g$  lub  $E_g = 1 : \sigma_g$  dla całego obszaru naprężeń, panujących w przekroju poprzecznym pręta wygiętego*. Trzeba więc jeszcze zbadać, kiedy warunek ten istotnie jest zachowany.

**§ 19. Współczynniki rozciągłości i ściśliwości przy wyginaniu.** Weźmy pod uwagę płytkę pręta pierwotnego, nieodkształconą. Krając ją środkową płaszczyzną prostopadłą do linii obojętnej, zakładamy, a założenie to w niczem ogólności naszych rozważań nie uszczupli, że linie obojętne przechodzą przez środki  $O, O_1$  obu powłók płytki. Po obciążeniu siłami gnącymi w powłokach powstaną naprężenia, proporcjonalne do odległości od osi obojętnej. Skrajne naprężenia przekrojów płytki niech będą  $\sigma_r$  i  $\sigma_c$  — rozciągające i ciskące. Gdyby poszczególne włókienka płytki ułożone były luźno obok siebie w kierunku podłużnej osi pręta i wzajemnie na siebie nie oddziaływały, to ich wydłużenia dodatnie i ujemne zachodziłyby według odnośnych wykresów próbek rozciąganych i ściskanych. Załóżmy, że tak jest istotnie. Gdy nadto tworzywo zachowuje się według pierwszego prawa *Hooke'a* aż do skrajnych naprężeń  $\sigma_r$  i  $\sigma_c$ , słowem, gdy cały obszar naprężeń płytki nie wykracza poza granicę proporcjonalności, to wtedy odnośne wydłużenia włókien płytki, jako proporcjonalne do naprężeń, będą również rosły proporcjonalnie do odległości od linii obojętnej. Płyta po odkształceniu pozostanie płaska obustronnie, choć jej powłoki pochylą się nieco ku sobie. Inaczej jednak rzecz się będzie miała gdy skrajne naprężenia płytki wykrócą poza granicę proporcjonalności. W tym wypadku włókna środkowe pozostaną pod jarzmem naprężeń nie przekraczających granic proporcjonalności —



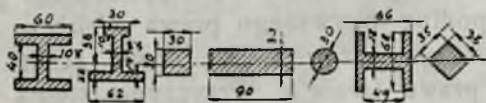
— wydłużą się więc lub skrócą proporcjonalnie do odległości od osi obrotowej; — skrajne natomiast włókna płytki, leżące poza tylko co omawianymi, ulegną wydłużeniom i skróceniom znacznym, jakie widzimy na wykresach wytrzymałościowych poza granicami proporcjonalności. Tutaj więc powłoka płytki winna by się odkształcić podług krzywej wykresu (Rys. 26) zjednoczonego danego tworzywa  $E'F'$ .

Z kolei gdy tworzywo zachowuje się sprzecznie z prawem *Hooke'a*, włókienka wydłużać się będą i skrócić nieproporcjonalnie do naprężeń i powłoka płytki otrzyma kształt  $E''F''$  linii wykresu zjednoczonego rozpatrywanego tworzywa. Z tych wywodzeń wypływa, że założenie *Bernoulli'ego* jedynie w wypadku pierwszym powinno mieć miejsce istotnie; tymczasem liczny materiał doświadczalny niezbitcie dowodzi, iż posiada ono zakres znacznie szerszej stosowności. Przekroje poprzeczne pręta zachowują swój kształt płaski nawet wtedy, gdy znacznie przekroczymy granice proporcjonalności dla skrajnych włókien w wypadku zginania tworzyw, zachowujących się podług pierwszego prawa *Hooke'a*. Nie dosyć na tem. Założenie *Bernoulli'ego* sprawdza się dosyć ściśle nawet i dla tworzyw, nie ulegających prawu *Hooke'a*. Przyczyna istotna tej sprzeczności leży w naszym założeniu, z gruntu oczywiście fałszywym. Włókienka płytki nie są luźno ułożone, a *powiązane ze sobą w sposób nader ścisły*, i, jako takie, wzajemnie działają na siebie przy niejednakowym odkształceniu. Dwa sąsiednie włókna, niejednakowo ściskane lub rozciągane, hamują wzajemnie swe odkształcenia, starają się je wyrównać, zmniejszyć ich różnicę na tle wewnętrznego tarcia o siebie. Należy przeto włókna znacznie wyżej obciążać przy wyginaniu pręta niż przy rozciąganiu lub ściskaniu, aby otrzymać to samo skrajne wydłużenie. W pierwszym przeto wypadku istotny kształt powłoki będzie  $GH$  a nie  $EF$ , przy czem niewątpliwie tylko co omówiona zdolność hamowania wystąpi wszędzie z jednakową siłą — powłoka pozostanie więc płaską. W drugim wypadku zamiast  $E'F'$  otrzymamy  $G'H'$  — kształt powłoki wyraźnie płaski w środkowej części, lekko tylko zakrzywiony na skrajach, gdzie zdolność hamownicza musiała wystąpić z wielką siłą na tle ostrych różnic pomiędzy naprężeniami sąsiadujących włókien. To samo widzimy w wypadku trzecim, gdzie miasto wyraźnie krzywej linii esowej  $E''F''$  otrzymamy znacznie mniej wygiętą linię  $G''H''$ . Tylko co opisane zjawisko hamowania, prostując linie wykresów wytrzymałościowych, opóźnia pojawianie się faz wykresowych, należy zatem przy wyginaniu pręta — oczekiwać znacznie wyższej granicy proporcjonalności i płynności, niżli przy ściskaniu lub rozciąganiu tego samego tworzywa, oraz znacznie wyższego naprężenia niszczącego. Wszystko to niezbitcie stwierdziły liczne do-



Rys. 26.

świadczenia badaczy. *Consideré* stwierdził, że granica proporcjonalności  $K_h$  przy zginaniu płaskim jest o 30 ÷ 40% wyższa niż przy ściskaniu lub rozciąganiu okrągłego pręta zlewnego, lecz tylko o 10% wyższa dla dwuteownika z tego samego tworzywa. Te wyniki stwierdzają nasze przewidywania, a zarazem wykazują pewną ich zależność od kształtu przekroju poprzecznego. Nie może być inaczej: *włókienka, dalej od linii obojętnej położone, ulegają odkształceniom większym* — hamowane są zatem przez włókienka bliżej linii obojętnej leżące. Zjawisko przez nas przewidziane powinno zależeć i od kształtu poprzecznego przekroju i występować tem silniej, im stosunkowo więcej cząsteczek skupia się koło linii obojętnej przekroju. Najsilniej przeto występować winno w przekroju kwadratowym, gdy linia obojętna przechodzi przez przekątnię, słabiej w przekroju kołowym, tu bowiem cięciwy, równoległe do osi obojętnej, lepiej są w cząsteczki uposażone, i najslabiej dla dwuteownika. Wyznamy stosunek naprężenia łamiącego  $K_g$  do naprężenia rozrywającego  $K_r$ , wtedy dla prętów podanych na (Rys. 27) będziemy mieli, kolejno idąc na



Rys. 27.

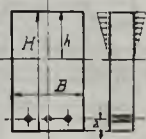
prawo:  $K_g : K_r = 1,45 - 1,52 - 1,73 - 1,75 - 2,12 - 2,14 - 2,35$ , jak to wynika z doświadczeń *Bacha* dla prętów żeliwnych. Powyższe wyniki stwierdzają teoretyczne przewidywania w całej

rozciągłości. Podobnie zachowują się przy próbach tworzywa, ujawniające wyższą wytrzymałość na ściskanie niż na rozciąganie. Dla takich tworzyw pęknięcie poczyna się od skrajnego włókna rozciąganego przy wyginaniu. To samo dały tworzywa wytrzymalsze na rozciąganie, jak drzewo, tu jednak przy wyginaniu pierwiej pęka włókno ściskane, to też dla drzewa należy brać miasto poprzedniego stosunku — stosunek  $K_g : K_c$ , wynoszący średnio 1,5 według *Tetmajera*.

Biorąc pod uwagę wszystko to, cośmy powiedzieli, dochodzimy do przekonania, że współczynnika  $\alpha_g$  nie należy utożsamiać ze współczynnikami rozciągłości lub ściśliwości, posiada on bowiem znacznie *mniejszą wartość*. To samo powiedzieć należy i o *skaźniku sprężystości*  $E_g = 1 : \alpha_g$ , którego wartość jest wogóle *większa* od wartości  $E_r$  i  $E_c$ . Dla określenia  $\alpha_g$  lub  $E_g$  poddajemy pręty próbom na zginanie, stosując obciążenie *Lamarlé'a*, aby uniknąć sił tnących. Pomiaru dotyczą strzałki ugięcia środkowej. Wzory odnośne dadzą  $E_g$  lub  $\alpha_g$ . Okazuje się przy tem, że to samo naprężenie silniej odkształca włókno przy rozciąganiu lub ściskaniu, niż przy gięciu. Stwierdza to nasze przewidywania. Zazwyczaj jednak, wobec braku dostatecznego materiału doświadczalnego, używamy jednej i tej samej wartości  $E$  we wszystkich rachunkach wytrzymałościowych.



**§ 20. Przekrój niejednolity.** Powyższe rozważania tracą swą moc w wypadku przekroju niejednolitego o włóknach różnorodnych ściśle powiązanych ze sobą. Trudno jest orzec, jak takie włókna działają wzajemnie na siebie i czy zasada *Bernoulli'ego* sprawdzać się może i w danym wypadku. Pytania tego rodzaju coraz to częściej stawiane są obecnie w teorii *żelbetu*, czekają dotąd jednak na odpowiedź, liczenie bowiem prętów betonowych na gięcie wiele pozostawia do życzenia i chyba nigdy dokładnem nie będzie. Weźmy pod uwagę (Rys. 28) płytkę betonową prostokątną, zawierającą w dolnej części rozciąganej — zbrojenia żelazne, złożone z okrągłych drutów. Oznaczmy przez  $f$  całkowity przekrój zbrojenia, przez  $a$  odległość jego środka od dolnego skraju płytki, przez  $H$  — wysokość, przez  $B$  jej podstawę wreszcie przez  $h$  odległość linii obojętnej od górnego skraju płytki.



Rys. 28.

Zazwyczaj naprężeń rozciągających betonu nie bierzemy pod uwagę, uwzględniając w rachunku wyłącznie tylko naprężenia rozciągające  $\sigma_z$  zbrojenia oraz — naprężenia cisnące górnej betonowej części płytki, linjowo rosnące od zera na linii obojętnej do skrajnej wartości  $\sigma_b$  dla górnych włókien płytki. Wypadkowa wszystkich tych górnych naprężeń  $\frac{1}{2} B h \sigma_b$  działa w odległości  $\frac{2}{3} h$  od linii obojętnej, a bezwzględna jej wartość jest niewątpliwie równa wypadkowej  $f \sigma_z$  naprężeń zbrojenia, ponieważ naprężenia przekroju, obciążonego tylko momentem gnącym  $M_g$ , nie mogą dać wypadkowej siły osiowej. Musi być przeto  $f \sigma_z = \frac{1}{2} B h \sigma_b$ . Obie wypadkowe naprężeń stanowią tedy parę o ramieniu  $m = H - a - \frac{1}{3} h$ , równoważącą moment  $M_g$ , a zatem

$$M_g = m f \sigma_z = \frac{1}{2} m B h \sigma_b, \text{ skąd mamy ostatecznie: } \sigma_b = \frac{2 M_g}{m B h}, \sigma_z = \frac{M_g}{m f}.$$

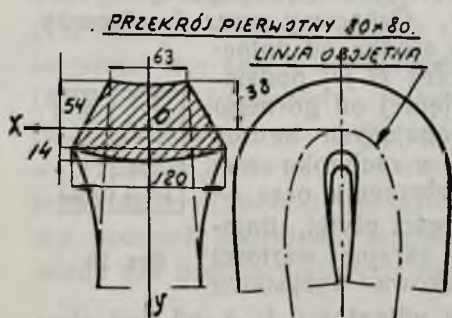
Należy więc jeszcze tylko wyznaczyć  $h$ . Wychodząc z założenia *Bernoulli'ego*, przyjmujemy, że wydłużenia poszczególnych włókien przekroju rosną proporcjonalnie do odległości od linii obojętnej, a przeto  $[\sigma_b : E_b] : h = [\sigma_z : E_z] : (H - h - a)$ . Stąd, oznaczając stosunek wskaźników sprężystości żelaza i betonu przez  $n = E_z : E_b$ , mamy  $n(H - h - a) : h = \sigma_z : \sigma_b = \frac{1}{2} B h : f$  i ostatecznie

$$h = \frac{nf}{B} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2 B (H - a)}{nf}} - 1 \right\}.$$

W ten sposób wyznaczyliśmy  $h$  — dalej wyznaczymy  $m$ ,  $\sigma_z$  i  $\sigma_b$ , całe to jednak obliczenie bynajmniej nie można nazwać ściśłem. —

**§ 21. Naprężenia, leżące w przekroju poprzecznym pręta zginanego.** Na samym początku części piątej kursu zaznaczyliśmy istnienie naprężeń składowych  $t_x$ ,  $t_y$ , leżących w przekroju. Nie umieliśmy ich wyznaczyć z równań statyki, należy je zatem zbadać doświadczalnie. Poznaliśmy działanie naprężeń normalnych, upodobniliśmy je do rozcią-

gania i ściskania, przy których zachodzą zjawiska zwężenia i rozszerzenia przekroju poprzecznego. Spróbujmy tę naszą wiedzę zastosować do danego wypadku, należy się spodziewać bowiem, że i tu włókna rozciągane przekroju będą się zwężać poprzecznie — a ściskane — rozszerzać. Aby to sprawdzić, bierzemy pod uwagę pręt o niezłożonym przekroju, najlepiej kwadratowym (Rys. 29) i wyginamy go zupełnie, tak, aby w miejscu wygięcia utworzyła się wypukłość, a oba końce pręta zeszyły się z sobą



Rys. 29.

poza nią. Przekrój poprzeczny, przez ową wypukłość poprowadzony prostopadle do wygiętej osi pręta, wykazuje znaczne rozszerzenie dolnej części, gdzie włókna są ściskane, oraz wyraźne zwężenie górnej, gdzie włókna są rozciągane. Słowem, przekrój przestał być kwadratowy, stał się wycinkiem pierścienia kołowego o prawie kołowych zarysach boków. Podzielmy pierwotny kwadratowy przekrój pręta na drobne kwadraciki.

Pierwotnie proste szeregi tych kwadracików utworzą łuki współśrodkowe, równoległe do skrajnych odkształconych boków przekroju. To zjawisko zrozumiemy z łatwością, gdy zważymy, że każdy kwadracik dolnej części przekroju — ściskany — pęcznieje, a w górnej rozciągany — chudnie poprzecznie. Kwadraciki osi obojętnej pozostają niezmiennione — szereg ich jednak wygina się końcami ku górze.

Wobec symetryczności przekroju odkształconego względem płaszczyzny gięcia  $OY$ , oś ta  $OY$  pozostanie główną osią przekroju i po odkształceniu, druga natomiast oś  $OX$  zmieni swe położenie w przekroju. Przez środek przekroju odkształconego poprowadźmy nową oś  $OX$  prostopadle do  $OY$  — będzie to niewątpliwie oś obojętnej przekroju odkształconego. Ta oś obojętnej przetnie boczne proste ścianki przekroju w punktach, zbliżonych do górnych krawędzi pręta. Stąd mamy prosty wniosek: *przy odkształceniach znacznych prostokątny przekrój pręta wygiętego przechodzi w wycinek pierścienia kołowego, zwypuklony po stronie włókien ściskanych, zakłęsnięty po stronie rozciąganych; ślad linii obojętnej na bocznych ściankach mniej więcej płaskich posuwa się ku skrajnym włóknom ściskanim.* Wszystko to zachodzi jeno w przybliżeniu i tylko przy wygięciach nader znacznie poza granice proporcjonalności posuniętych. Zazwyczaj przeto nie bierzemy wcale pod uwagę tych zjawisk dodatkowych, świadczących o działaniu naprężeń leżących w przekroju, dopuszczalne bowiem praktycznie wygięcia są nader nieznaczne, a owe zjawiska wtórne wprost niedostrzegalne. To też je zawsze pomijamy.



**§ 22. Przykłady i ćwiczenia.** 1<sup>o</sup> *Tyczka wbita w ziemię* pionowa o przekroju stałym kwadratowym, ulega parciu wiatru, cisnącego z siłą 150 kg na metr kwadratowy powierzchni płaskiej, prostopadłej do jego kierunku. Wysokość słupa wynosi *cztery* metry, zatem siłę wiatru otrzymamy, mnożąc boczną powierzchnię słupa przez parcie wiatru. Oznaczmy przez  $b$  bok kwadratu w cm, a wtedy siła wiatru  $P = 4 \times b \times 150 : 100 = 6b$  kg. Ta siła ciśnie pośrodku bocznej powierzchni słupa, daje więc moment u podstawy równy  $M_g = 6b \times 200 = 1200b$  (kg, cm) oraz siłę tnącą  $P$ , którą pomijamy. Moment  $M_g$  leży w przekroju dolnym słupa, tworząc kąt  $\omega = 0$  z odnośną osią główną, możemy przeto napisać, że  $M_g = 1200b = \frac{1}{6} b^3 k_g$ . Dla sośniny naprężenie  $K_g = 470$  kg/cm<sup>2</sup>. W założeniu sześciokrotnej pewności będzie przeto  $k_g = 470 : 6 = 78,3 \approx 80$  kg/cm<sup>2</sup>, a zatem  $b^3 = 7200 : 80 = 90$ , co da  $b = 9,5$  cm. Zwykły wymiar dyla wynosi  $10 \times 10$  cm — należy go użyć. Chcąc nadto wyliczyć końcową strzałkę ugięcia, stosujemy wzór dla pręta, obciążonego jednostajnie:  $f = Pl^3 : 8 E_g J_x$ . Tutaj:  $P = 6 \times 10$  kg,  $l = 400$  cm,  $E_g = E = 100000$  kg/cm<sup>2</sup>,  $J_x = \frac{1}{12} \times 10 \times 10^3$  cm<sup>4</sup>. Stąd  $f = 5,76$  cm.

2<sup>o</sup> *Dyl jednostronnie wmurowany* drugostronnie zaopatrzone w hak, na haku zawieszono drut, dzwigający ciężar  $P = 500$  kg — w odległości dwóch metrów od ściany. Aby wyznaczyć bezpieczny przekrój prostokątny dyla, wyliczamy moment gnący dla przekroju osadczego, w płaszczyźnie muru leżącego:  $M_g = 500 \times 200$  (kg, cm) i oznaczamy przez  $H$  wysokość, przez  $B$  — podstawę tego przekroju. Zatem  $M_g = W_x k_g$ , skąd:  $\frac{1}{6} BH^2 = M_g : k_g$ . Dla dębiny  $K_g = 600$  kg/cm<sup>2</sup> i, w założeniu pewności sześciokrotnej:  $k_g = 100$  kg/cm<sup>2</sup>, a przeto  $BH^2 = 6 M_g : k_g = 6000$  cm<sup>3</sup>. Dla dyla kwadratowego  $18 \times 18$  cm mamy  $BH^2 = 18^3 = 5832$  cm<sup>3</sup>, a więc zbyt mało, należy przeto wziąć dyl zwykłej wielkości:  $H = 20$  cm,  $B = 16$  cm, dla którego  $BH^2 = 6400$  cm<sup>3</sup>. Wzór  $f = Pl^3 : 3 E_g J_x$  da nam końcową strzałkę ugięcia. Tutaj  $P = 500$  kg,  $l = 200$  cm,  $E_g = E = 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>,  $J_x = \frac{1}{12} \times 16 \times 20^3 = 10667$  cm<sup>4</sup>, stąd  $f = 1,25$  cm.

3<sup>o</sup> *Pręt prosty, jednostronnie osadzony*, obciążamy jakkolwiek siłami gnącymi, leżącymi w pionowej płaszczyźnie gięcia i nadajemy wymiary przekrojom poprzecznym, jednorodnie zbudowanym tak, aby dla każdego przekroju stosunek  $M_g : E_g J_x$  był stały i równy  $\mu$ . Tutaj równanie  $E_g J_x \eta'' = M_g$  przeobrazi się w:  $\eta'' = \mu$ , skąd:  $\eta' = \mu \zeta + C$ ,  $\eta = \frac{1}{2} \mu \zeta^2 + C \zeta + D$ . Dla przekroju osadczego, gdzie  $\zeta = 0$ , mamy  $\eta' = \eta = 0$ , zatem  $\eta = \frac{1}{2} \mu \zeta^2$ . Odształcona jest parabolą. Dla  $\zeta = l$  otrzymamy końcową strzałkę ugięcia  $f = \frac{1}{2} \mu l^2$ .

4<sup>o</sup> *Dwuteownik jednostronnie osadzony* obciążamy u końca wolnego siłą 1000 kg ukośnie. Dwuteownik stawiamy pionowo, prowadząc wzdłuż osi środka — osie główne  $OY$  przekrojów poprzecznych i kierując je ku dołowi. Kąt, jaki tworzy siła  $P$  z osią  $OX$ , wynosi  $35^\circ 30'$ , a długość

pręta  $l = 100$  cm. Weźmy pod uwagę przekrój poprzeczny pręta w odległości  $\zeta$  od przekroju osadczego. Po sprowadzeniu do jego środka  $O$  siła  $P$  da moment gnący  $M_g = P(l - \zeta)$  i siłę tnącą, którą pomijamy. Kąt pochylenia tego momentu ku osi  $OX$ , poprowadzonej na prawo dla oka, patrzącego od strony wolnego końca pręta, wyniesie  $\omega = 90^\circ + 35^\circ 30'$ , będziemy mieli przeto dla tego przekroju naprężenie  $\sigma_z = -P(l - \zeta) \sin \omega x / J_y + P(l - \zeta) \cos \omega y / J_x$ . Rośnie ono wraz z momentem, to też, chcąc wyznaczyć bezpieczne wymiary pręta, bierzemy pod uwagę skrajny osadczy przekrój, gdzie panuje najwyższa wartość  $M_g = Pl$ . Wobec  $\sin 125^\circ 30' = 0,81412$ ,  $\cos 125^\circ 30' = -0,58070$  mamy:  $\sigma_z = -1000 \times 100 \times 0,81412 x / J_y - 1000 \times 100 \times 0,58070 y / J_x$ . Przekrój jest symetryczny względem osi  $OX, OY$ , a przeto skrajną wartością  $x / J_y$  będzie niewątpliwie  $1 : W_y$ , a skrajną wartością  $y / J_x = 1 : W_x$  i ostatecznie:  $\sigma_{zm} = -81412 : W_y - 58070 : W_x$ . W założeniu dwuteownika № 30 mamy  $W_x = 652$  cm<sup>3</sup>,  $W_y = 71,9$  cm<sup>3</sup> — skrajne naprężenie będzie więc tu  $\sigma_{zm} = -1221,4$  kg/cm<sup>2</sup>. Jest to nieco zbyt dużo, jak dla żelaza zlewnego, które w założeniu obciążenia trwałego wytrzymałe jest tylko  $k_g = 900 - 1200$  kg/cm<sup>2</sup>. Należałoby przeto wziąć № 32, lepiej jednak zmienić osie dwuteownika, stawiając go środkami poziomo. Wtedy № 30 da:  $W_x = 71,9$  cm<sup>3</sup>,  $W_y = 652$  cm<sup>3</sup>, skąd  $\sigma_{zm} = -81412 : 652 - 58070 : 71,9 = -932$  kg/cm<sup>2</sup>. Wystarczy przeto № 30, ułożony napłask środkami. Chcąc wyznaczyć strzałkę ugięcia, rozkładamy siłę  $P$  na składową pionową  $P_y = P \sin 35^\circ 30' = 580,7$  kg i poziomą  $P_x = P \cos 35^\circ 30' = 814,1$  kg. Pierwsza da strzałkę  $f_1 = P_y l^3 : 3 E_g J_x$ , druga zaś  $f_2 = P_x l^3 : 3 E_g J_y$ . Zważywszy, że dla żelaza zlewnego  $E_g = E = 2150000$  kg/cm<sup>2</sup>, a dla dwuteownika № 30 —  $J_x = 449$  cm<sup>4</sup>,  $J_y = 9785$  cm<sup>4</sup>, będziemy mieli  $f_1 = 0,20$  cm,  $f_2 = 0,01$  cm. Strzałka wypadkowa  $f = \sqrt{0,2^2 + 0,01^2} = 0,20$  cm — pochyla się ku  $OX$  pod kątem  $\chi = \arctg(0,2 : 0,01) \approx 87^\circ$ .

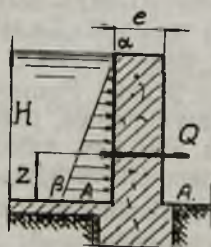
5° *Pręt pionowy* prostokątnego przekroju  $B \times H$ , dźwiga zawieszony u dołu ciężar  $P$  kg. Mniej więcej w połowie wysokości pręta wyciosano wręb, dochodzący aż do osi podłużnej pręta — słowem, wycięto zeń boczny kostkę o wymiarach  $B \times \frac{1}{2} H \times 20$  cm, zwięzając w ten sposób poprzeczny przekrój pręta o połowę wysokości  $H$  przekroju. Ponieważ siła rozciągająca jest skierowana wzdłuż osi pręta — w przekroju pełnym panować będą naprężenia rozciągające  $\sigma_r = P : BH$ , natomiast w przekroju zwężonym będziemy mieli prócz siły rozciągającej  $P$  jeszcze nadto i moment gnący  $P \times \frac{1}{4} H$ . Łatwo to spostrzec, przyłożywszy do środka przekroju zwężonego dwie równe, a znoszące się wzajemnie siły  $P$ . Jedna z nich da owo rozciąganie, druga, łącznie z siłą istotnie działającą, da moment  $M_g = \frac{1}{4} PH$ . Przekrój zwężony pracować będzie przeto na gięcie mimośrodkowe. Skrajne naprężenia będą w nim:  $\sigma_{z1} = P : F + M_g : W_x = P : \frac{1}{2} BH + \frac{1}{4} PH : \frac{1}{6} B [\frac{1}{2} H]^2 = 8 P : BH = 8 \sigma_r$  oraz  $\sigma_{z2} = P : F - M_g : W_x = -4 P : BH = -4 \sigma_r$ . W sto-



sunku do przekroju pełnego będziemy tu mieli ośm razy większe naprężenie rozciągające i cztery razy większe ściskające; zatem wycięcie to może mieć groźne następstwa. Bywa czasami, że wskutek przeoczenia podobny pręt nadcięty liczą wprost na rozciąganie, dzieląc siłę przez przekrój osłabiony. W ten sposób otrzymujemy naprężenie  $\sigma'_r = P : \frac{1}{2} BH = 2 \sigma_r$  dwa razy większe niż w przekroju pełnym. Istotne jednak naprężenia tego przekroju nadciętego są:  $\sigma_{s1} = 8 \sigma_r = 4 \sigma'_r$  oraz  $\sigma_{s2} = -4 \sigma_r = -2 \sigma'_r$  a więc znacznie większe od policzonego.

6° *Krótki słup* pierścieniowy o promieniu zewnętrznym  $R$  i wewnętrznym  $r$  przekroju obciążono mimośrodkowo siłą  $P = 20000$  kg, cisnącą w odległości  $e$  cm od środka przekroju. Naprężenia skrajne będą tu — cisnące  $\sigma_{s1} = -P : F - M_g : W$  i rozciągające  $\sigma_{s2} = -P : F + M_g : W$ , przyczem siłę  $P$  bierzemy ze znakiem minus, jako cisnącą. Wiadomo, że odlew żeliwny, wytrzymały na ciśnienie, łatwo ulega rozerwaniu, o ile więc możemy śmiało dopuścić w wypadku działania siły trwałej  $k_c = 900$  kg/cm<sup>2</sup>, o tyle  $k_r$  nie powinno przekraczać 300 kg/cm<sup>2</sup>. Dla wszelkiej pewności, a tej dość nigdy przy tak kapryśnym tworzywie jak żeliwo, zakładamy  $k_c = 450$  kg/cm<sup>2</sup> oraz  $k_r = 150$  kg/cm<sup>2</sup>. Zważywszy, że  $k_c : k_r = 3$  oraz, że  $M_g = Pe$ , mamy, pomijając znak minus u  $\sigma_{s1}$  — równanie  $[P : F + Pe : W] = 3 [-P : F + Pe : W]$ . Stąd  $2W = eF$ . Ponieważ  $F = \pi R^2 - \pi r^2$  oraz  $W = \frac{1}{4} \pi (R^4 - r^4) : R$ , przeto  $\frac{1}{4} \times 2 \pi (R^4 - r^4) = e \pi R (R^2 - r^2)$ , co da  $R^2 + r^2 = 2eR$ . Nadto mamy  $k_r = P [-1 + eF : W] : F = P [-1 + 2W : W] : F = P : F$ , a zatem:  $R^2 - r^2 = P : \pi k_r$ . Dodając tylko co otrzymane równania:  $2R^2 = 2eR + P : \pi k_r$ , otrzymamy ostatecznie  $R = \frac{1}{2} e + \sqrt{\frac{1}{4} e^2 + P : 2 \pi k_r}$ . Załóżmy, dajmy na to  $e = 8$  cm, wtedy  $R = 4 + \sqrt{16 + 20000 : 2 \pi 150} = 10,1 \approx 10$  cm a więc  $100 + r^2 = 2 \times 8 \times 10$  co daje  $r = 7,7$  cm. Ostatecznie zewnętrzną średnicę słupa uczynimy  $D = 20$  cm, a wewnętrzną  $d = 15$  cm. Ponieważ  $r^2 = 2eR - R^2 = R[2e - R]$ , przeto zadanie jest tylko wtedy możliwe, gdy  $e \geq \frac{1}{2} R$ , w przeciwnym bowiem razie nie otrzymamy przekroju pierścieniowego i trzeba będzie obrać pełny.

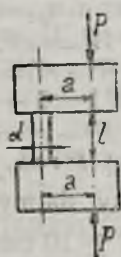
7° *Mur oporowy* wodny, stanowiący tamę, ulega ciśnieniu słupa wody, dochodzącej do brzegu górnego muru. (Rys. 30). To ciśnienie rośnie wraz z odległością od górnego poziomu — będziemy przeto mieli wykres ciśnień trójkątny. Wysokość jego  $H$  równa jest wysokości muru, a podstawa wykresu —  $qH$ , gdzie przez  $q$  oznaczyliśmy ciężar właściwy wody w kg/cm<sup>3</sup>. Pole wykresu  $Q = \frac{1}{2} qH^2$  daje nam obciążenie całego muru, cisnące nań w odległości  $\frac{1}{3} H$  od przekroju dolnego tamy. Moment siły  $Q$  względem tego przekroju wynosi  $M_g = \frac{1}{3} QH = \frac{1}{6} qH^3$ . Ponad to przekrój dolny ulega ciśnieniu górnych warstw muru. Oznaczmy przez  $q'$  ciężar właściwy muru i wyodrębnijmy myślowo dowolną jego długość  $d$  cm. Dla tej dłu-



Rys. 30.

gości obciążenie przekroju dolnego będzie stanowił moment  $M_g = \frac{1}{6} q_0 H^3$  oraz siła ciężaru warstw górnych muru  $q'edH$ , przyczem przez  $e$  oznaczyliśmy grubość muru. Mamy tu przeto wypadek gięcia mimośrodkowego. Wskaźnik wytrzymałościowy podstawy będzie  $\frac{1}{6} de^2$ , pole —  $de$ , zatem skrajne naprężenia  $\sigma_{s1} = -q'edH : de - \frac{1}{6} q_0 H^3 : \frac{1}{6} de^2 = -q'H - qH^3 : e^2$  oraz  $\sigma_{s2} = -q'H + qH^3 : e^2$ . Skrajne naprężenie cisnące  $\sigma_{s1}$  nie powinno przekroczyć wartości  $k_c$  a nadto należy baczyć, aby środek naprężeń tego obciążenia mimośrodkowego nie wyszedł poza rdzeń przekroju, mur bowiem nie znosi naprężeń rozciągających, jeno cisnące. Musi być przeto  $M_g : P = \frac{1}{6} q_0 H^3 : q'deH \leq \frac{1}{6} e$ , czyli  $e \geq H \sqrt[3]{q : q'}$ . Metr sześcienny muru betonowego waży 2000 kg, a więc dwa razy więcej, niż metr sześcienny wody, stąd  $e \geq H : \sqrt{2}$  czyli  $e \geq 0.7 H$ . Wnioskujemy na mocy tego wzoru, że mur prosty postaci wskazanej na rysunku nie jest oszczędny, to też zazwyczaj nadają mu nieco inny kształt trapezu obróconego skarpą nazewnątrz.

8<sup>o</sup> *Próbka* wytoczona z pełnej kostki tworzy jakby dwie cegielki (Rys. 31) stalowe, połączone środkową częścią cylindryczną o średnicy  $d$ .



Obie szczytki obciążono siłami  $P$ , równoległymi do osi części środkowej próbki, a przyłożonemi w odległości  $a$  cm od niej. Każdy więc przekrój części środkowej będzie obciążony siłą  $P$ , ściskającą, oraz momentem gnącym  $Pa$ . Skrajne naprężenia na obwodzie będzie tu  $\sigma_{s1} = -P : F - Pa : W$  oraz  $\sigma_{s2} = -P : F + Pa : W$ . Gdy siła  $P$  rośnie nieograniczenie — środkowa część próbki pęka przy naprężeniu niszczącem  $K_g = -P : F + Pa : W = P [a : \frac{1}{32} \pi d^3 - 1 : \frac{1}{4} \pi d^2]$ , — niewątpliwie rozciągającym.

Rys. 31.

9<sup>o</sup> *Walek żelazny* średnicy  $D = 2R$  obciążono siłami rozrywającymi  $S = 20000$  kg, działającymi wzdłuż osi jego podłużnej. W obawie wszelkiej niespodzianki możliwej założono tylko  $k_r = 100$  kg/cm<sup>2</sup>. Ustalony w ten sposób przekrój średnicy  $D = 16$  cm wykazuje naprężenie  $\sigma_r = S : \pi R^2 = 99,4$  kg/cm<sup>2</sup>  $\infty k_r$ . Przy odlewie jednak w jednym ze środkowych przekrojów pręta wytworzył się pęcherz okrągły o promieniu  $r$  cm mimośrodkowo w odległości  $e$  cm od osi podłużnej pręta. Osłabiony przekrój jest przeto pierścieniowy mimośrodkowy (I, Rys. 30). Obciążenie jego stanowi siła  $P$ , działająca wzdłuż osi walca  $\Omega$ . Ta siła po sprowadzeniu do środka  $O$  przekroju osłabionego da moment gnący  $M_g = P \times O\Omega$  i siłę  $P$  — środkową. Załóżmy  $r = 5$  cm,  $e = 2$  cm. Ponieważ w największem miejscu pozostanie jeszcze ścianka centymetrowa, przeto nic zewnętrznie nie zdradzi istnienia owego pęcherza. W tem założeniu będziemy mieli  $\omega O = R^2 e : [R^2 - r^2] = 3,28$  cm, zatem  $O\Omega = 3,28 - 2 = 1,28$  cm, a więc  $M_g = 25600$  (kg, cm). Odnośny wskaźnik wytrzymałościowy przekroju otrzymamy wyznaczając:  $J_y = \frac{1}{4} \pi (R^4 - r^4) - \pi R^2 r^2 e^2 : (R^2 - r^2) = 2211$  cm<sup>4</sup> oraz  $e_1 = R + O\Omega$  i  $e_2 = R - O\Omega$ . Przeto:  $W_{y1} = 238$  cm<sup>3</sup>,  $W_{y2} = 329$  cm<sup>3</sup>, skąd  $\sigma_{s1} = S : F + M_g : W_{y1} = 20000 : 122 + 25600 : 238 = 270$  kg/cm<sup>2</sup> oraz  $\sigma_{s2} = S : F -$



—  $M_g : W_{y^2} = 85 \text{ kg/cm}^2$ . Żeliwo nie powinno pracować powyżej  $k_y = 150 \text{ kg/cm}^2$ , a przeto pęczarz powyżej opisany może się okazać niebezpiecznym dla całości pręta w wypadku obciążenia powtarzanego lub wahliwego.

10° *Narożnik stołu* dębowego z deski  $e$  cm grubej odłamał się pod jarzmem siły  $P$ , przyłożonej w samym rogu stołu. Oderwany kawałek miał postać trójkąta prostokątnego; powierzchnia pęknięcia szła po przeciwprostokątnej, tworząc z przyprostokątną  $AB$  kąt  $\varphi$ . Chcąc wyznaczyć najprawdopodobniejszą wartość tego kąta oznaczamy długość  $AB$  przez  $b$ . Długość przeciwprostokątnej wyniesie  $b : \text{Cos} \varphi$ . Będzie to podstawa przekroju prostokątnego niebezpiecznego. Jego wysokość jest oczywiście  $e$  a wskaźnik wytrzymałościowy  $\frac{1}{6} e^2 b : \text{Cos} \varphi$ . Po sprowadzeniu do środka tego przekroju siła  $P$  da moment gnący  $M_g = Pb \text{Sin} \varphi$ , siłę tnącą  $P$  którą, jak zwykle, pominiemy, oraz moment skręcający  $M_c$ , który, jak się to wkrótce okaże, będzie równy zeru. Zatem  $M_g = Pb \text{Sin} \varphi = \frac{1}{6} e^2 b \sigma_g : \text{Cos} \varphi$  czyli  $\sigma_g = 3 P/e^2 \text{Sin} 2 \varphi$ . Jak widzimy, skrajne naprężenie przekroju niebezpiecznego zależy od kąta  $\varphi$ . Biorąc pochodną po  $d\varphi$  naprężenia znajdziemy wartość kąta  $\varphi_0$  odpowiadającą skrajnej wartości  $\sigma_g$ . Będzie to:  $6 P/e^2 \text{Cos} 2 \varphi_0 = 0$ , skąd  $\varphi_0 = 45^\circ$ . Rożek odłamany utworzy trójkąt prostokątny równoramienny, a dla takiego trójkąta w istocie będzie  $M_o = 0$ , jak to z łatwością daje się spostrzec. Siła powodująca owo pęknięcie będzie  $P = \frac{1}{3} e^2 K_g$ . Dla dębiny  $K_g = 600 \text{ kg/cm}^2$ , a przeto dla deski całowej  $P = \frac{1}{3} \times 600 \times 2,54^2 = 1290 \text{ kg}$ .

## ROZDZIAŁ TRZECI:

### BELKI PROSTE ZGINANE.

**§ 1. Podpory i odpory.** *Pręt prosty, unieruchomiony na podporach zowiemy belką.* Nieważki pręt, pozbawiony obciążenia, nie wywiera żadnego działania na podpory; obciążony — poczyna cisnąć na nie, wywołując przeciwdziałanie podpór. *Wszelki sprzeciw podpory będziemy nazywali odporem.* Odpory są to poniekąd również siły zewnętrzne belki, zależą jednak od układu sił odkształcających, nie mogą bowiem, jak widać z powyżej powiedzianego, istnieć samodzielnie, słowem — są to siły zewnętrzne odkształcające, zależne od pozostałych. Różnią się jednak od nich znacznie. Siły zewnętrzne — to istotne *dane* obciążenia; odpory — to *niewiadome*, nie znamy bowiem ich natężenia ani kierunku działania, choć wiemy, że, łącznie z siłami odkształcającymi, stanowią

winny układ sił zewnętrznych zrównoważony. Tkwią przeto w równaniach statyki, jako niewiadome i niekiedy wprost z warunków równowagi układu sił odkształcających wyznaczyć się dają, a wtedy belkę zowie-my *statycznie wyznaczalną zewnątrznie*. Ponieważ rozpatrujemy jeno belki wyginane płasko, przeto wyłącznie mieć będziemy do czynienia z siłami, działającymi w płaszczyźnie gięcia. Warunków równowagi będzie więc tylko trzy. Łatwo z nich wyznaczymy trzy odpory. Stąd prosty wniosek, że *belka jest statycznie wyznaczalna zewnątrznie, gdy obciążenie jej wywołuje tylko trzy odpory*. Chcąc sobie zdać sprawę, kiedy to zachodzi istotnie, ustalamy:

**§ 2. Rodzaje podpór.** Przedewszystkiem belka spoczywać może na podporze *rolkowej*. Wyobraźmy sobie czop przegubu wahliwego przecinający prostopadłe swą osią podłużną oś belki. Szczęki przegubu łączą się u dołu w płytę spoczywającą na kilku rolkach, ułożonych na nieruchomej płaszczyźnie oporowej. Osie rolek winny być równoległe do osi czopa przegubowego, a więc prostopadłe do osi podłużnej belki nieodkształconej. Płaszczyzna oporowa winna być nadto równoległa do tej osi nieodkształconej. Podpora tego rodzaju, o ile pominiemy tarcie rolek, umożliwi posuw w kierunku osi belki nieodkształconej, — dać może przeto jedynie odpór, prostopadły do płaszczyzny oporowej.

Gdy szczęki tego rodzaju podpory trwale przygwoździmy do płaszczyzny oporowej, to otrzymamy podporę *przegubową*, skazującą na bezruch podparty punkt belki, przegubowo ze szczękami związany. Bezruch ten nie jest zupełny, bo oś belki może się pochylać swobodnie. Czop przegubu umożliwia jej ruch obrotowy.

Wreszcie, gdy przegub z wahliwego staje się stałym, otrzymujemy podporę *stałą*, uniemożliwiającą wszelki ruch owego punktu belki — podpartego, a nadto i ruch obrotowy jej osi. Zatem punkt osi wsparty na podporę rolkową posiada dwa stopnie swobody: posuw w kierunku osi belki i możliwość obrotu. Podpora przegubowa pozostawia już tylko jeden stopień swobody — obrót — rozwijać przeto winna dwa odpory: siłę prostopadłą i równoległą do pierwotnej osi belki nieodkształconej; wreszcie podpora stała uniemożliwia wszelki ruch, dając trzy odpory: siłę prostopadłą, siłę równoległą do osi belki nieodkształconej oraz moment oporowy, czyli parę sił, uniemożliwiającą obrót w przegubie.

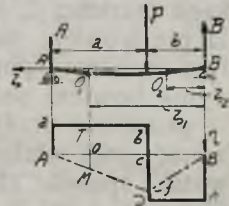
Stąd wniosek, że pręt jednostronnie zamocowany, a obciążony jakkolwiek, jest statycznie wyznaczalny zewnątrznie. Środek jego przekroju osadczego gra rolę punktu podpartego i nieruchomego. Łatwo moglibyśmy wyznaczyć jego trzy odpory — dwie siły i moment. Mało stąd jednak korzyści, bo wzory gięcia można ustalić wprost, nie biorąc owych czynników pod uwagę. Jest to zresztą jedyny wypadek belki o jednej



podporze — unieruchomionej a statycznie wyznaczalnej zewnętrznie. Gdybyśmy zastosowali tu podporę przegubową, to pręt mógłby się w koło niej obracać i należałoby go unieruchomić za pomocą nowej podpory. To samo da się powiedzieć i o podporze rolkowej.

**§ 3. Belka na dwóch podporach** może być również statycznie wyznaczalną zewnętrznie, gdy mamy jej podporę rolkową, powiedzmy lewą i prawą — przegubową. Pierwotna, nieodkształcona oś belki niech będzie, dajmy na to pozioma. Początek osi nieruchomych  $\omega$  obieramy w punkcie prawym podpartym przegubowo. Oś  $\omega\xi$  kierujemy ku podporze lewej po osi podłużnej belki nieodkształconej. Oś  $\omega\eta$  — kierujemy prostopadle wdół a oś  $\omega\zeta$  — ku patrzącemu. Odpory pionowe oznaczamy: lewy przez  $A$ , prawy przez  $B$ , nadto odpór prawy poziomy niech będzie  $H$ . Zawsze równa się on zeru, ilekroć obciążenie belki składa się z sił pionowych, leżących w płaszczyźnie gięcia  $\zeta\omega\eta$ . Wynika to wprost z warunków równowagi sił poziomych. Z pozostałych dwóch równań statyki wyznaczymy odpory  $A$  i  $B$  — niewiadome obciążenia. Należy nadto zbadać odkształcenia. W tym celu wystarczy wziąć pod uwagę cztery zasadnicze wypadki obciążenia — wszystkie inne bowiem możemy rozpatrywać, jako złożone z tych czterech prostych zasadniczych. Tu mamy:

**§ 4. Obciążenie siłą skupioną, działającą pomiędzy podporami.** Odległość siły pionowej  $P$  od lewej podpory (Rys. 32) oznaczamy przez  $a$  — od prawej przez  $b$ . Cała długość pręta niech będzie  $l$ . Oś siły  $P$  dzieli płaszczyznę gięcia na dwa obszary — lewy i prawy. Dla określenia odporów piszemy równania statyki w postaci  $A + B + P = 0$  oraz  $Al + Pb = 0$ , przyczem momenty wyznaczamy względem punktu  $B$ . Stąd mamy  $A = -Pb : l$ ,  $B = -Pa : l$ . Odpory, jako różniące się znakiem od siły  $P$  kierujemy ku górze, bo  $P$  skierowaliśmy tak, jak oś  $B\eta$ , to jest w dół. Wartość momentu gnącego w obszarze lewym będzie dla punktu  $O_1$ , odległego o  $\zeta_1$  od początku spórzędnych:  $M_1 = A(l - \zeta_1) = -Pb(l - \zeta_1) : l$ . Dla drugiej połaci  $M_2 = A(l - \zeta_2) + P(b - \zeta_2) = -Pb(l - \zeta_2) : l + P(b - \zeta_2)$ . Pomijając znaczki u  $\zeta$  i  $M$ , możemy oba te wzory połączyć w jeden, pisząc  $M = -Pb(l - \zeta) : l + P(b - \zeta)$  z kreską  $\parallel$ , dzielącą. Wykres momentów będzie tu niewątpliwie trójkątny, jak widać z tego wzoru, zależność bowiem momentu od  $\zeta$  jest liniowa. Nadto skrajna wartość momentu panować będzie w przekroju siły  $P$ , tam bowiem obie proste wykresu się przecinają. Chcąc wyznaczyć wykres sił tnących, należy zauważyć, że dla pierwszej połaci siła tnąca będzie równa  $A$ , podczas, gdy dla połaci drugiej wartość jej będzie  $P + A = -B$ . To samo wskazuje wykres.



Rys. 32.

W założeniu stałego przekroju pręta będziemy mieli dla skrajnej

wartości momentu  $M_m = -Pb(l-b) : l = -Pab : l$  oraz  $M_m = W_x k_g$ . Wyznamy stąd  $W_x$  i ustalimy przekrój pręta, a wtedy, całkując zasadnicze równanie  $E_g J_x \eta'' = Pb(l-\zeta) : l \parallel + P(b-\zeta)$ , otrzymamy  $E_g J_x \eta' = C + \frac{1}{2} Pb(l-\zeta)^2 : l \parallel - \frac{1}{2} P(b-\zeta)^2$  oraz  $E_g J_x \eta = D + C\zeta - \frac{1}{6} Pb(l-\zeta)^3 : l \parallel + \frac{1}{6} P(b-\zeta)^3$ . Stałe całkowania wyznaczymy z łatwością, zważywszy, że dla punktów podpartych  $\eta = 0$ . Mamy więc  $\eta = 0$  dla  $\zeta = 0$  lub  $\zeta = l$ , a przeto z trzeciego równania otrzymamy  $D - \frac{1}{6} Pb l^2 + \frac{1}{6} Pb^3 = 0$  oraz  $D + Cl = 0$ . Stąd  $D = \frac{1}{6} Pb(l^2 - b^2)$ ,  $C = -\frac{1}{6} Pb(l^2 - b^2) : l$  i ostatecznie mamy  $E_g J_x \eta = \frac{1}{6} Pb(l^2 - b^2) - \frac{1}{6} Pb(l^2 - b^2)\zeta : l - \frac{1}{6} Pb(l-\zeta)^3 : l \parallel + \frac{1}{6} P(b-\zeta)^3$ . Z tego równania możemy wyznaczyć *strzałkę siły*  $P$ , czyniąc  $\zeta = b$ . Będzie to ugięcie pręta pod siłą  $P$ , równe  $p = Pa^2 b^2 : 3 l E_g J_x$ . W szczególnym wypadku, gdy siła działa pośrodku, to jest, gdy  $a = b$ , będziemy mieli  $p = Pl^3 : 48 E_g J_x$ .

W ogólnym wypadku tylko co znaleziona strzałka nie daje najwyższej wartości spórzędnej  $\eta$ , nie jest więc strzałką ugięcia pręta. Tę by znaleźć, należy uczynić  $\eta' = 0$ , co da odpowiednią wartość dla  $\zeta$ . Dla pierwszej polaci będzie  $\zeta_0 = l - \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - b^2)}$  z warunkiem  $l \geq \zeta_0 \geq b$ . Tej wartości odpowiada strzałka  $f = \frac{1}{3} Pb \sqrt{[\frac{1}{3}(l^2 - b^2)]^3} : 3 l E_g J_x$ , dająca istotne maximum rzędnych  $\eta$ , lecz tylko wtedy, gdy  $b \leq \frac{1}{2} l$ . Wynika to bezpośrednio z warunku dla  $\zeta_0$ , mamy bowiem  $l - \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - b^2)} \geq b$ , skąd z łatwością otrzymamy nierówność tylko co wypisaną. Gdy zaś  $b \geq \frac{1}{2} l$ , wtedy należy wyznaczyć  $\zeta_0$  z równania  $\eta' = 0$  dla drugiego obszaru, albo wprost obrócić pręt o  $180^\circ$  i skorzystać z poprzedniego wzoru. W ten sposób z łatwością otrzymamy  $\zeta_0 = \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - a^2)}$ , oraz odpowiednią strzałkę  $f = \frac{1}{3} Pa \sqrt{[\frac{1}{3}(l^2 - a^2)]^3} : 3 l E_g J_x$ . W obu wypadkach wartości  $\zeta_0$  odpowiada styczna odkształconej, równoległa do osi pręta pierwotnej. Godzi się tu zaznaczyć, że tylko co badany pręt o stałym przekroju poprzecznym nie jest wytrzymałościowo wykorzystany — jedynie bowiem przekrój obciążony siłą  $P$  pracuje z natężeniem właściwym — pozostałe przekroje są zbyt sówite. Aby tę wadę usunąć, należy wykonać pręt stałej wytrzymałości o przekroju poprzecznym zmiennym w taki sposób, aby wszystkie skrajne naprężenia  $t_{gm} = M_g : W_x$  były równe  $k_g$ . Stąd  $W_x = M_g : k_g$  — wzór, wyznaczający wymiary przekroju. Nadto  $1 : \rho = M_g : E_g J_x = W_x k_g : E_g J_x$ . Te dwa wzory rozwiązują zagadnienie. Dla pręta o kołowym przekroju:  $k_g W_x = \frac{1}{32} \pi d^3 k_g =$

$= -Pb(l-\zeta) : l \parallel + P(b-\zeta)$ . Jest to równanie paraboli sześcienniej, wiążące  $d$  z  $\zeta$ . Wyznacza ono profil pręta w postaci dwóch krzywych tego typu, przecinających się na osi siły  $P$ .

Zachowując te same znakowania rozpatrzmy kolejno wszystkie obciążenia zasadnicze. Znaczniki u  $M_g, E_g, J_x$  będziemy pomijali, pisząc wprost:  $M, E, J$ .

## § 5. Obciążenie jednostajne częściowe, cisnące na lewą polać



pręta w stosunku  $p$  kg na jednostkę długości odcinka  $b$  (Rys. 33). Połączać  $a = l - b$  pozostaje wolna. Oznaczmy przez  $P$  całkowity ciężar  $pb$  kg, a wtedy warunki równowagi będą:  $A + B + P = 0$ ,  $Al + \frac{1}{2} Pb = 0$ , skąd:  $A = -\frac{1}{2} Pb : l$ ,  $B = -P (l - \frac{1}{2} b) : l$ . W odcinku  $a$  będzie przeto panował moment  $M = -\frac{1}{2} Pb (l - \zeta) : l$ , w odcinku  $b$  natomiast  $M = -\frac{1}{2} Pb (l - \zeta) : l + \frac{1}{2} p (b - \zeta)^2$ . Zatem:



Rys. 33.

$EJ\eta'' = -\frac{1}{2} Pb (l - \zeta) : l + \frac{1}{2} P (b - \zeta)^2 : b$ . Dla pręta o stałym przekroju poprzecznym:  $EJ\eta' = C + \frac{1}{4} Pb (l - \zeta)^2 : l - \frac{1}{6} P (b - \zeta)^3 : b$  oraz  $EJ\eta = D + C\zeta - \frac{1}{12} Pb (l - \zeta)^3 : l + \frac{1}{24} P (b - \zeta)^4 : b$ . Tu niewątpliwie  $\eta = 0$ , gdy

$\zeta = 0$  i  $\zeta = l$ , a przeto  $D - \frac{1}{12} Pbl^2 + \frac{1}{24} Pb^3 = 0$ ,  $D + Cl = 0$  i ostatecznie  $D = \frac{1}{12} Pbl^2 - \frac{1}{24} Pb^3$ ,  $C = -\frac{1}{12} Pbl + \frac{1}{24} Pb^3 : l$ , skąd otrzymamy równanie odkształconej w postaci:  $EJ\eta = \frac{1}{12} Pbl^2 - \frac{1}{24} Pb^3 - \frac{1}{12} Pbl\zeta + \frac{1}{24} Pb^3\zeta : l - \frac{1}{12} Pb (l - \zeta)^3 : l + \frac{1}{24} P (b - \zeta)^4 : b$ .

Chcąc znaleźć strzałkę, piszemy dla połączenia pierwszej  $EJ\eta' = -\frac{1}{12} Pbl + \frac{1}{24} Pb^3 : l + \frac{1}{4} Pb (l - \zeta_0)^2 : l = 0$ , co daje  $\zeta_0 = l - \sqrt{\frac{1}{3} l^2 - \frac{1}{6} b^2}$  z warunkiem  $l \geq \zeta_0 \geq b$ . Lewa nierówność wypełnia się sama przez się, prawa wymaga, aby  $b \leq 2l : (3 + \sqrt{2})$ . Zatem dla połączenia pierwszej  $f_1 = \frac{1}{6} Pb \sqrt{[\frac{1}{3} l^2 - \frac{1}{6} b^2]^3} : EJl$ . W razie, gdy  $l \geq b \geq 2l : (3 + \sqrt{2})$ , strzałka przechodzi do połączenia drugiej, gdzie  $b \geq \zeta_0 \geq 0$ . W tym wypadku należy brać całkowity wzór  $EJ\eta' = -\frac{1}{12} Pbl + \frac{1}{24} Pb^3 : l + \frac{1}{4} Pb (l - \zeta_0)^2 : l - \frac{1}{6} P (b - \zeta_0)^3 : b = 0$ , czyli  $4l\zeta_0^3 - 6b(2l - b)\zeta_0^2 + b^2(2l - b)^2 = 0$ .

W szczególnym wypadku, gdy obciążenie pokrywa cały pręt:  $b = l$ , a przeto równanie staje się:  $4\zeta_0^3 - 6l\zeta_0^2 + l^3 = 0$ . Daje ono  $\zeta_0 = \frac{1}{2} l$ . Pręt najmocniej ugina się pośrodku, dając strzałkę  $f = \frac{5}{384} P l^3 : EJ$ . W wypadku ogólnym podstawiamy  $\zeta_0 = x + b(2l - b) : 2l$  w równanie, skąd mamy:  $x^3 + qx + r = 0$ , gdzie  $q = 3b^2(2l - b)^2 : 4l^2$ ,  $r = -b^2(2l - b)^2(l - b)^2 : 4l^2$ . Ponieważ niewątpliwie  $(\frac{1}{3} q)^3 \geq (\frac{1}{2} r)^2$ , przeto wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste równania można wypisać jednym wzorem w postaci

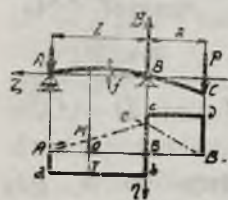
$$x_i = -b(2 - b : l) \text{Cos} \left[ 120^\circ i + \frac{1}{3} \text{arc Cos} \frac{(l - b)^2}{b(2l - b)} \right]$$

$$\zeta_0 = \frac{b(2l - b)}{2l} \left\{ 1 - 2 \text{Cos} \left[ 120^\circ i + \frac{1}{3} \text{arc Cos} \frac{(l - b)^2}{b(2l - b)} \right] \right\}, i = 1, 2, 3.$$

Jedna z tych trzech wartości czynić będzie zadość warunkom  $b \geq \zeta_0 \geq 0$ . Jak widać z rysunku, wykres momentów dla pierwszej połączenia jest prostoliniowy, dla drugiej — paraboliczny. Wykres sił tnących

stanowi łamaną. Z wykresu momentów widać, że skrajna wartość momentu  $cf = M_m = -Pb(l+a)^2 : 8l^2$  panuje w połaci drugiej. Równanie  $dM : d\zeta = 0$  da odnośne  $\zeta = b(1 - \frac{1}{2} b : l)$ . Ta wartość jest miarodajna przy wyznaczaniu wymiarów bezpiecznych pręta.

**§ 6. Obciążenie siłą zewnętrzną, przyłożoną (Rys. 34) w punkcie o współrzędnych  $(-a, O)$ .** Równania statyki dają:  $A + B + P = 0$ ,



Rys. 34.

oraz w założeniu ośrodka momentów u prawego końca pręta:  $A(l+a) + Ba = 0$ . Stąd  $A = Pa : l$ ,  $B = -PL : l$ , gdzie  $L = a + l$ . W połaci pierwszej, pomiędzy podporami panuje moment  $M = A(l - \zeta)$ , w drugiej, prawej, mamy  $M = A(l - \zeta) - B\zeta$ , przy czym znak minus jest tu konieczny, bo współrzędne  $\zeta$  są ujemne, należy brać je zatem ze znakiem odwrotnym, jako ramiona momentów.

Stąd  $EJ\eta'' = Pa(l - \zeta) : l \frac{1}{l} + PL\zeta : l$ . Dla pręta

o stałym przekroju poprzecznym:  $EJ\eta' = C - \frac{1}{2} Pa(l - \zeta)^2 : l \frac{1}{l} + \frac{1}{2} Pl\zeta^2 :$

$: l$  oraz  $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{6} Pa(l - \zeta)^3 : l \frac{1}{l} + \frac{1}{6} Pl\zeta^3 : l$ . Ponieważ

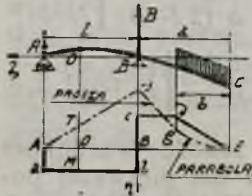
niewątpliwie  $\eta = 0$ , gdy  $\zeta = 0$  i  $\zeta = l$ , przeto:  $D + \frac{1}{6} Pal^2 = 0$ ,  $D + Cl = 0$ , skąd:  $D = -\frac{1}{6} Pal^2$ ,  $C = \frac{1}{6} Pal$  i ostatecznie równanie od-

kształconej:  $EJ\eta = -\frac{1}{6} Pal^2 + \frac{1}{6} Pal\zeta + \frac{1}{6} Pa(l - \zeta)^3 : l \frac{1}{l} + \frac{1}{6} Pl\zeta^3 : l$ .

Szukamy strzałki w połaci pierwszej, pisząc:  $EJ\eta' = \frac{1}{6} Pal - \frac{1}{2} Pa(l - \zeta_0)^2 : l = 0$ , skąd otrzymamy  $\zeta_0 = l - l : \sqrt{3}$ , z warunkiem  $l \geq \zeta \geq 0$ . Warunek ten wypełnia się istotnie, a przeto strzałka  $f_1 = -Pal^2 : 9\sqrt{3} EJ$ . W tej części pręt wygina się ku górze; wskazuje na to znak strzałki ujemny. W drugiej połaci, gdzie pręt swobodnie zwisa, strzałka ugięcia będzie najwyższa dla  $\zeta = -a$ , co daje ze wzoru dla odkształconej  $f_2 = PLa^2 : 3 EJ$ .

Rysunek podaje odnośne wykresy sił tnących i momentów. Skrajna wartość momentu panuje w przekroju podpartym B. Ona jest miarodajna przy wyznaczaniu bezpiecznych wymiarów pręta.

**§ 7. Obciążenie jednostajne zewnętrzne na odcinku  $b$  w stosunku  $p$  kg na jednostkę długości (Rys. 35).** Równania statyki dadzą tutaj:  $A + B + P = 0$ ,  $AL + Ba + \frac{1}{2} Pb = 0$ , gdzie



Rys. 8.

$P = pb$ ,  $L = a + l$ . Stąd  $A = P(a - \frac{1}{2} b) : l$ ,  $B = -P(l + a - \frac{1}{2} b) : l$ . Dzielnąc pręt na trzy połacie zmienności momentów, na odcinku:  $l$ ,  $a - b$ ,  $b$ ,

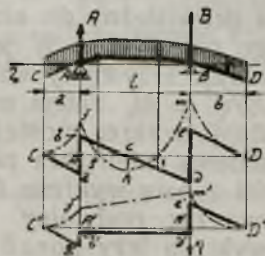
możemy napisać  $EJ\eta'' = A(l - \zeta) \frac{1}{l} - B\zeta \frac{1}{l} + \frac{1}{2} P(\zeta + a - b)^2 : b$ . Znak minus u B jest i tu konieczny



ze względu na to, że spólrzędne  $\zeta$  są ujemne dla połąci drugiej. Zatem  $EJ\eta'' = P(a - \frac{1}{2}b)(l - \zeta) : l \frac{1}{1} + P(l + a - \frac{1}{2}b)\zeta : l \frac{1}{1} + \frac{1}{2}P(\zeta + a - b)^2 : b$ . Dla pręta o stałym przekroju:  $EJ\eta' = C - \frac{1}{2}P(a - \frac{1}{2}b)(l - \zeta)^2 : l \frac{1}{1} + \frac{1}{2}P(l + a - \frac{1}{2}b)\zeta^2 : l \frac{1}{1} + \frac{1}{6}P(\zeta + a - b)^3 : b$ , oraz  $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{6}P(a - \frac{1}{2}b)(l - \zeta)^3 : l \frac{1}{1} + \frac{1}{6}P(l + a - \frac{1}{2}b)\zeta^3 : l \frac{1}{1} + \frac{1}{24}P(\zeta + a - b)^4 : b$ . W danym wypadku  $\eta = 0$ , gdy  $\zeta = l$  lub  $\zeta = 0$ , a przeto:  $D + Cl = 0$ ,  $D + \frac{1}{6}P(a - \frac{1}{2}b)l^2 = 0$ , skąd  $D = -\frac{1}{6}P(a - \frac{1}{2}b)l^2$ ,  $C = \frac{1}{6}P(a - \frac{1}{2}b)l$ . Te wartości pozwolą wypisać równanie odkształconej. Chcąc znaleźć strzałkę połąci pierwszej, czynimy  $EJ\eta' = \frac{1}{6}P(a - \frac{1}{2}b)l - \frac{1}{2}P(a - \frac{1}{2}b)(l - \zeta_0)^2 : l = 0$ , co daje:  $\zeta_0 = l - l : \sqrt{3}$  z warunkiem  $l \geq \zeta_0 \geq 0$ , wypełniającym się istotnie. Dla tej wartości otrzymujemy szukaną strzałkę  $f_1 = -Pl^2(a - \frac{1}{2}b) : 9 \sqrt{3} EJ$ . I tu również wygięcie pręta między podporami ujawnia strzałkę ujemną: pręt wygina się ku górze. W drugiej połąci strzałka będzie najwyższa przy  $\zeta = -a$ . Ta strzałka będzie  $f_2 = P[4aL(2a - b) + b(b^2 - 2a^2)] : 24 EJ$ . Rysunek podaje odnośne wykresy sił tnących i momentów. Cechę wyróżniającą obu powyższych wypadków stanowi umiejscowienie strzałki  $f_1$  — niezależnie od zewnętrznego obciążenia. Cztery wyżej rozpatrywane obciążenia zasadnicze są najprostsze. Ich skojarzenie daje wypadki złożone, które na mocy prawa o niezależności działania sił oraz drugiego prawa *Hooke'a* z łatwością sprowadzimy do tych czterech najprostszych. Obciążenia trójkątne pomijamy, jako rzadziej spotykane, natomiast bierzemy pod uwagę następujący przykład:

### § 8. Obciążenie jednostajne pręta obustronnie zwisającego.

Lewy koniec zwisający pręta (Rys. 36) ma długość  $a$ , prawy —  $b$ ; odległość pomiędzy podporami oznaczamy przez  $l$ , a całą długość pręta przez  $2L = a + b + l$ . Obciążenie  $p$  kg na jednostkę długości pokrywa cały pręt, cisnąc nań z siłą  $P = 2Lp$ . Równania statyki dadzą:  $A + B + P = 0$  oraz względem prawego końca pręta, jako ośrodka sprowadzenia momentów  $A(l + b) + Bb + PL = 0$ . Stąd  $A = -P(L - b) : l$ ,  $B = -P(L - a) : l$ . Osie podpór dzielą płaszczyznę gięcia na trzy połącie:  $a$ ,  $l$ ,  $b$ ; możemy prze-



Rys. 36.

to napisać  $EJ\eta'' = \frac{1}{4}P(a + l - \zeta)^2 : L \frac{1}{1} + A(l - \zeta) \frac{1}{1} - B\zeta$ . Dla pręta o stałym przekroju poprzecznym

mamy:  $EJ\eta' = C - \frac{1}{12}P(a + l - \zeta)^3 : L \frac{1}{1} - \frac{1}{2}A(l - \zeta)^2 \frac{1}{1} - \frac{1}{2}B\zeta^2$  oraz

$EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{48}(a+l-\zeta)^4 : L + \frac{1}{6}A(l-\zeta)^3 + \frac{1}{6}B\zeta^3$ . Ponieważ  $\eta = 0$ , gdy  $\zeta = 0$  lub  $\zeta = l$ , przeto:  $D + Cl + Pa^4 : 48L = 0$ ,  $D + \frac{1}{48}P(a+l)^4 : L + \frac{1}{6}Al^3 = 0$ , skąd  $C = -Pa^4 : 48Ll + P(a+l)^4 : 48Ll + \frac{1}{6}Al^3$ ,  $D = -\frac{1}{6}Al^3 - \frac{1}{48}P(a+l)^4 : L$ . Te wartości pozwolą wypisać równanie odkształconej, które zresztą możnaby również otrzymać, rozpatrując obciążenie, jako złożone z zasadniczych obciążeń najprostszych, wyżej rozpatrywanych.

Czyniąc w równaniu odkształconej  $\zeta = a+l$ , otrzymamy strzałkę lewego zwisającego końca, u skraju pręta końcową z równania  $EJf_1 = D + C(a+l)$ . Po podstawieniu da ono  $f_1 = Pa[3a^3 + 4a^2l - l^3 + 2lb^2] : 48EJL$ . Tak samo zupełnie, zakładając  $\zeta = -b$ , moglibyśmy otrzymać skrajną strzałkę prawą, prościej jednak otrzymamy ją wprost, na mocy prawa symetrii, przestawiając litery  $a$  i  $b$ , co da  $f_3 = Pb[3b^3 + 4b^2l - l^3 + 2la^2] : 48EJL$ . Chcąc z kolei wyznaczyć strzałkę połaci środkowej piszemy  $EJ\eta' = C - \frac{1}{12}P(a+l-\zeta_1)^3 : L - \frac{1}{2}A(l-\zeta_1)^2 = 0$ . Równanie to ma wogóle trzy pierwiastki, wyznaczające trzy skrajne wartości rzędnych  $\eta$  odkształconej dla tego obszaru. Świadczą one o istnieniu dwóch punktów przegięcia odkształconej. Spółrzędne tych punktów czynić będą zadość równaniu  $\eta'' = 0$  czyli  $M = 0$ . Z łatwością spostrzec się daje, że obie strzałki skrajne tej środkowej połaci dają maxima rzędnych  $\eta$ , środkowa, oddzielona punktami przegięcia, — daje minimum. Spółrzędne punktów przegięcia wyznaczymy czyniąc:  $M = \frac{1}{4}P(a+l - \zeta_0)^2 : L + A(l - \zeta_0) = 0$ . Stąd  $(a+l - \zeta_0)^2 - [(a+l)^2 - b^2](l - \zeta_0) : l = 0$ , czyli  $\zeta_0^2 - (b^2 + l^2 - a^2)\zeta_0 : l + b^2 = 0$  i ostatecznie

$$\zeta_0 = \frac{b^2 + l^2 - a^2}{2l} \pm \sqrt{\frac{(b^2 + l^2 - a^2)^2 - 4b^2l^2}{4l^2}}$$

Równanie daje dwa

pierwiastki w ogólnym wypadku. O ile oba czynią zadość warunkom  $l > \zeta_0 \geq 0$ , to w środkowej połaci odkształcona ma dwa punkty przegięcia. Jest to zarazem wyżej omówiony wypadek trzech strzałek połaci środkowej. Zachodzi on wtedy, gdy  $(b^2 + l^2 - a^2)^2 > 4b^2l^2$  oraz  $b^2 + l^2 - a^2 > 0$ . Gdy znów  $(b^2 + l^2 - a^2)^2 < 4b^2l^2$ , oba pierwiastki są urojone: niema punktów przegięcia w połaci środkowej. Wreszcie, gdy  $(b^2 + l^2 - a^2)^2 = 4b^2l^2$  oraz  $b^2 + l^2 - a^2 > 0$ , oba pierwiastki są równe, a przynależny do nich punkt odkształconej staje się punktem podwójnego przegięcia. W jego sąsiedztwie odkształcona prostuje się, nie zmieniając krzywizny względem osi pierwotnej, nieodkształconej. Ponieważ  $EJ\eta'' = M$ , zatem możemy znaleźć punkty przegięcia odkształconej, budując wykres momentów. O ile będzie jego przecięnie oś w  $g$  lub  $i$  będziemy mieli dwa punkty przegięcia odkształconej. W wypadku styczności z osią wykresu dwa punkty  $g$ ,  $i$  zlewają się w jeden punkt podwójny, znacząc podwójny punkt przegięcia odkształconej; wreszcie, gdy linja wykresu leży ponad osią — odkształcona punktów przegięcia w połaci środkowej nie ujawnia. Wykres momentów składa się z trzech gałęzi parabolicznych  $Cf$ ,  $fhm$ ,  $mD$ . Z wykresu łatwo znaleźć skrajne wartości momentów  $Af = Pa^2 : 4L$ ,  $Bm = Pb^2 : 4L$  dodatnie, oraz  $ch$  — ujemną w ogólnym wypadku. Bezwzględna wartość tych trzech momentów największa wyrokuje o przekroju pręta. Zazwyczaj bywa to jeden z bocz-



nych skrajnych momentów, czasami, przy dostatecznie wielkiem  $l$  w stosunku do  $a$  i  $b$  — należy brać wartość środkową. Chcąc ją wyznaczyć piszemy, jako dla minimum  $\frac{dM}{d\zeta} = -\frac{1}{2} P(a+l-\zeta) : L-A=0$ , co daje  $\zeta_1 = (b^2+l^2-a^2) : 2l$ . Po podstawieniu tej wartości w równanie momentu otrzymamy  $ch = P(a+b-l)(a+l-b)(b+l-a) : 8l^2$ .

**§ 9. Obustronne obciążenie jednostajne** pręta, wystającego poza obie podpory, możemy rozpatrywać, jako wypadek szczególny poprzedniego obciążenia, tylko co opisanego. Należy jeno pozbawić obciążenia część środkową pręta. W tem założeniu równania statyki będą:  $A+B+p(a+b)=0$  oraz dla prawego końca pręta:  $ap(\frac{1}{2}a+l+b) + A(l+b) + Bb + \frac{1}{2}pb^2 = 0$ . Stąd  $A = -ap - p(a^2-b^2) : 2l$ ,  $B = -bp - p(b^2-a^2) : 2l$ . I tu osie podpór dzielą płaszczyznę gięcia na trzy połacie:  $a, l, b$ , jak w wypadku poprzedzającym, przyczem

$$EJ\eta'' = \frac{1}{2} p (a+l-\zeta)^2 \frac{1}{i} + A(l-\zeta) - \frac{1}{2} p (l-\zeta)^2 \frac{1}{i} - B\zeta + \frac{1}{2} p \zeta^2.$$

Zatem dla pierwszej połaci  $a$  otrzymaliśmy zupełnie ten sam wzór co i pierwiej, natomiast w drugiej połaci  $M = \frac{1}{2} p (a+l-\zeta)^2 + A(l-\zeta) - \frac{1}{2} p (l-\zeta)^2 = \frac{1}{2} p a^2 - \frac{1}{2} p (a^2-b^2) (l-\zeta) : l$  — moment zasadniczo się różni w danym wypadku. W obec symetrii obu bocznych połaci pręta możemy niewątpliwie orzec zgóry, że w wykresie momentów obie krzywe boczne zachowują kształt paraboliczny, natomiast środkowa będzie prostą  $f'm'$ , łączącą skrajne wartości momentów  $A'f'$  oraz  $B'm'$ . Podobny również będzie wykres sił tnących. Obustronnie (Rys. 36) pochyłe proste  $C'a', e'D'$ , pośrodku — prosta  $b'd'$  równoległa do podstawy, nadto prostopadłe do niej odcinki  $a'b' = A, d'e' = B$ . Ponieważ niewątpliwie  $a'A' = pa, a'b' = A$ , przeto  $b'A' = a'A' - a'b' = p(a^2-b^2) : 2l$ . Zatem gdy  $a=b=\lambda$  to jest gdy pręt obustronnie jednakowo wystaje poza podpory — w środkowej części siła tnąca równa jest zeru. Nadto dla połaci środkowej wtedy  $M = \frac{1}{2} p \lambda^2$ , jest to więc pewien rodzaj wygięcia *Lamarle'a*. W założeniu stałego przekroju poprzecznego odkształcona środkowej części będzie łukiem koła o promieniu  $\rho$ , czyniącym zadość równaniu  $1 : \rho = p \lambda^2 : 2 EJ$ . Skrajna wartość rzędnej  $\eta$  — pośrodku da strzałkę  $f_0 = \rho - \sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4} l^2} = \rho (1 - \sqrt{1 - l^2 : 4 \rho^2})$ , podobnie, jak dla wygięcia *Lamarle'a*. Zazwyczaj jednak  $b \neq a$ , należy przeto korzystać ze wzoru ogólnego. Dla pręta o stałym przekroju da on  $EJ\eta' =$

$$= C - \frac{1}{6} p (a+l-\zeta)^3 \frac{1}{i} - \frac{1}{2} A (l-\zeta)^2 + \frac{1}{6} p (l-\zeta)^3 \frac{1}{i} - \frac{1}{2} B \zeta^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} p \zeta^3 \text{ oraz } EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{24} p (a+l-\zeta)^4 \frac{1}{i} + \frac{1}{6} A (l-\zeta)^3 -$$

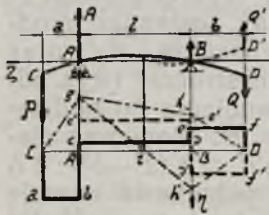
$$- \frac{1}{24} p (l-\zeta)^4 \frac{1}{i} - \frac{1}{6} B \zeta^3 + \frac{1}{24} p \zeta^4. \text{ Tutaj } \eta_i = 0 \text{ dla } \zeta = 0 \text{ i } \zeta = l,$$

a przeto:  $D + Cl + \frac{1}{24} p a^4 = 0, D + \frac{1}{24} p (a+l)^4 + \frac{1}{6} A l^3 - \frac{1}{24} p l^4 = 0$ . Stąd  $D = -\frac{1}{24} p [a^2(a+2l)^2 + 2b^2 l^2]$  oraz  $C = \frac{1}{12} p [2a^2(a+l) + b^2 l]$ . Po podstawieniu tych wartości otrzymamy równanie odkształconej. Czy-

niąc w niem  $\zeta = a + l$  będziemy mieli dla skrajnej lewej strzałki pręta  $EJf_1 = D + C(l + a)$ , skąd  $f_1 = \frac{1}{24} \rho a (3a^3 + 4a^2l + 2b^2l)$ . Wobec symetrii odcinków  $a$  i  $b$  w stosunku do  $l$ , możemy wprost napisać dla prawej skrajnej strzałki połąci trzeciej  $f_3 = \frac{1}{24} \rho b (3b^3 + 4b^2l + 2a^2l)$ . Chcąc znaleźć strzałkę połąci środkowej w założeniu  $b \neq a$  piszemy  $EJ\eta' = 0$ . Po podstawieniu i skróceniu da to  $3(a^2 - b^2)\zeta_0^2 + 6b^2l\zeta_0 - l^2(a^2 + 2b^2) = 0$ , skąd  $\zeta_0 = [b^2 \pm \sqrt{\frac{1}{3}(a^4 + b^4 + a^2b^2)}] l : (b^2 - a^2)$  z warunkiem  $l \geq \zeta_0 \geq 0$ . Możemy zawsze założyć, że  $b > a$ , gdyby było inaczej, to należałoby obrócić pręt o  $180^\circ$ . W tym założeniu pierwszy warunek da nam  $b^2 - a^2 \geq b^2 \pm \sqrt{\frac{1}{3}(a^4 + b^4 + a^2b^2)}$ , należy przeto brać znak minus we wzorze powyżej wypisanym. Wtedy  $-a^2 \geq -\sqrt{\frac{1}{3}(a^4 + b^4 + a^2b^2)}$  czyli  $3a^4 \leq a^4 + b^4 + a^2b^2$ , co sprawdza się istotnie przy  $b \geq a$ . Drugi warunek daje  $b^2 - \sqrt{\frac{1}{3}(a^4 + b^4 + a^2b^2)} \geq 0$  czyli  $3b^4 \geq a^4 + b^4 + a^2b^2$ , co również się sprawdza przy  $b > a$ . Zatem w środkowej połąci istnieje zawsze strzałka ugięcia  $f_0$ , którą łatwo wyznaczymy ze wzoru dla odkształconej, czyniąc w nim  $\zeta = \zeta_0$ .

### § 10. Obustronne obciążenie siłami skupionymi zewnętrznymi.

Pierwotnie prosty pręt układamy na podporach poziomo i obciążamy u obu końców siłami pionowymi  $P$  i  $Q$ . Dla prawego końca pręta otrzymamy



Rys. 37.

równania statyki:  $A + B + P + Q = 0$ ,  $P(a + l + b) + A(l + b) + Bb = 0$ , skąd:  $A = -[P(a + l) - Qb] : l$ ,  $B = -[Q(b + l) - Pa] : l$ . Osie podpór dzielą płaszczyznę gięcia na trzy połacie, będziemy mieli przeto:  $EJ\eta'' = P(l + a -$

$-\zeta) \frac{1}{i} + A(l - \zeta) \frac{1}{i} - B\zeta$ . Dla pręta o przekro-

ju poprzecznym stałym:  $EJ\eta' = C - \frac{1}{2} P(l + a -$

$-\zeta)^2 \frac{1}{i} - \frac{1}{2} A(l - \zeta)^2 \frac{1}{i} - \frac{1}{2} B\zeta^2$  oraz  $EJ\eta =$

$= D + C\zeta + \frac{1}{6} P(l + a - \zeta)^3 \frac{1}{i} + \frac{1}{6} A(l - \zeta)^3 \frac{1}{i} - \frac{1}{6} B\zeta^3$ . Tutaj  $\eta = 0$

dla  $\zeta = 0$  i  $\zeta = l$ , a zatem  $D + Cl + \frac{1}{6} Pa^3 = 0$ ,  $D + \frac{1}{6} P(l + a)^3 + \frac{1}{6} Al^3 = 0$ , skąd  $D = -\frac{1}{6} Pa(2l^2 + 3la + a^2) - \frac{1}{6} Qbl^3$ ,  $C = \frac{1}{6} Pa(2l + 3a) + \frac{1}{6} Qbl$ . Czyniąc  $\zeta = a + l$  w równaniu odkształconej, otrzymamy lewą skrajną strzałkę z równania  $EJf_1 = D + C(a + l)$ , co daje:  $f_1 = a[2Pa(a + l) + Qbl] : 6EJ$ . Na mocy symetrii  $P$  i  $Q$ ,  $a$  i  $b$  możemy napisać wprost wzór dla strzałki końcowej trzeciej połąci:  $f_3 = b[2Qb(b + l) + Pal] : 6EJ$ .

Czy i w połąci środkowej istnieją strzałki? Chcąc rozwiązać to pytanie, należy znaleźć skrajne wartości rzędnych  $\eta$ , czyli znaleźć pierwiastki równania  $EJ\eta' = 0$ , wypisanego dla połąci środkowej i podstawić w równanie odkształconej. Tylko co wypisane równanie sprowadza się do  $3(Pa - Qb)\zeta_0^2 + 6Qbl\zeta_0 - l^2(2Qb + Pa) = 0$ , skąd, przy  $Pa \neq Qb$ , otrzymamy  $\zeta_0 = l[1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}(1 + n + n^2)}] : (1 - n)$ , gdzie oznaczyliśmy

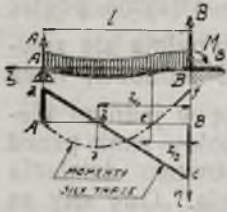


$n = Pa : Qb$ . Nadto być musi, jako dla połąci środkowej,  $l \geq \zeta_0 \geq o$ . Zważmy, że wartość bezwzględna  $n$  można uczynić zawsze mniejszą od jednostki, w razie bowiem przeciwnym wystarczy obrócić pręt o  $180^\circ$ . Wobec tego  $1 - n > o$  i ostatecznie warunek  $l \geq \zeta_0 \geq o$  otrzyma postać  $1 - n \geq 1 \pm \sqrt[1/3]{1 + n + n^2} > o$ . Prawa nierówność wypełnia się zawsze, ponieważ pierwiastek jest niewątpliwie mniejszy od jedności; lewa daje  $-n \geq \pm \sqrt[1/3]{1 + n + n^2}$ . Gdy siły  $P$  i  $Q$  działają w jednym kierunku, wtedy  $1 > n \geq o$ , a zatem należy utrzymać jeno dolny znak przed pierwiastkiem. To znaczy, że w wypadku jednokierunkowego działania sił w połąci środkowej istnieje tylko jedna strzałka ugięcia. Gdy siły są różnokierunkowe,  $o > n > -1$ . I tu znak dolny przed pierwiastkiem należy również zachować, a nadto przy  $n < -1/2$  zachodzi jeszcze nierówność  $-n \geq \sqrt[1/3]{1 + n + n^2}$ . Zatem w wypadku różnokierunkowego działania sił w połąci środkowej istnieje jedna tylko strzałka, gdy  $o \geq n > -1/2$ . Gdy zaś  $-1/2 \geq n \geq -1$ , odkształcona w środkowej części wygina się podwójnie, ujawniając dwie strzałki, dające maximum i minimum rzędnych  $\eta$  dla tej połąci. Pomiedzy temi strzałkami istnieje zawsze punkt przegięcia. Nadto istnieje on zawsze w wypadku różnokierunkowego działania sił  $P$  i  $Q$ . Łatwo to udowodnić, zważywszy, że w punkcie przegięcia  $EJ\eta'' = \bar{M} = P(l + a - \zeta_1) + A(l - \zeta_1) = o$ , skąd mamy  $\zeta_1 = l : (1 - n)$  z warunkiem  $l \geq \zeta_1 \geq o$ . Warunek ten wymaga, aby  $n \leq o$ .

Chcąc wyznaczyć bezpieczne wymiary pręta, należy znaleźć skrajne wartości momentów. W połąciach bocznych momenty rosną linjowo od zera do  $M_a = Pa$  i  $M_b = Qb$ . W połąci środkowej moment się zmienia linjowo pomiedzy temi dwiema wartościami. Odnośny wykres podaje (Rys. 37). Pełna odkształcona — odpowiada jednokierunkowemu działaniu sił, — przerywana — różnokierunkowemu. Wrysowano również łamaną wykresu sił tnących. W szczególnym wypadku, gdy  $Pa = Qb$ , mamy  $M_a = M_b = M$ . Środkowa linja wykresu jest wtedy równoległa do podstawy, a przeto środkowa część odkształconej stanowić będzie łuk koła o promieniu  $\rho = EJ : M$  i strzałce pośrodku  $f = \rho(1 - \sqrt{1 - l^2 : 4\rho})$ . Nadto w tym wypadku:  $A = -P$ ,  $B = -Q$ , a zatem w środkowej części pręta siła tnąca jest równa zeru.

**§ 11. Belka na dwóch podporach, statycznie niewyznaczalna** zewnątrznie, odpowiada wszelkiemu układowi podpór, różnemu od tylko co rozpatrywanego. Jeżeli mamy prawą podporę stałą, a lewą pozostawimy rolkową, to otrzymamy belkę jednostronnie zamocowaną a drugostronnie podpartą. Jest to jedyny układ o pojedynczej odporze poziomej  $H$ , która w wypadku działania sił prostopadłych do pierwotnej osi poziomej belki równa jest oczywiście zeru. I tu początek osi nieruchomych obieramy w podpartym punkcie prawym — pierwotnej osi  $B$ . Oś  $B\eta$  kierujemy w dół, oś  $B\xi$  — ku patrzącemu. Odpory będą tu: pionowe  $A, B$ , poziomy  $H$  i moment osadczy prawy  $M_B$ . Rozpatrzmy dwa zasadnicze rodzaje obciążeń gnących:

§ 12. **Obciążenie ciągłe**, pokrywające całą belkę w stosunku  $p$  kg na jednostkę długości (Rys. 38). Równania statyki wypisane dla punktu  $B$  dadzą:  $A + B + pl = 0$ ,  $H = 0$ ,  $Al + \frac{1}{2} pl^2 + M_B = 0$ , skąd  $M_B = -Al - \frac{1}{2} Pl$ ,  $B = -A - P$ ,

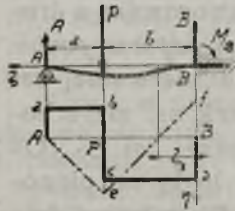


Rys. 38.

gdzie przez  $P = pl$  oznaczyliśmy cały ciężar obciążenia. Zatem  $EJ\eta'' = A(l - \zeta) + \frac{1}{2} p(l - \zeta)^2$ , tu bowiem mamy tylko jedną połączki zmienności momentów. W tym wzorze  $A$  jest statycznie odporem niewyznaczalnym, łatwo go jednak wyznaczymy z równań gięcia, gdy przekrój poprzeczny pręta jest stały. W tym założeniu mamy  $EJ\eta' = C - \frac{1}{2} A(l - \zeta)^2 - \frac{1}{6} p(l - \zeta)^3$  oraz  $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{6} A(l - \zeta)^3 + \frac{1}{24} p(l - \zeta)^4$ . Tutaj dla  $\zeta = l$  mamy  $\eta = 0$ , a nadto dla  $\zeta = 0$  będzie  $\eta = 0$  i  $\eta' = 0$ , co bezpośrednio wynika ze sposobu umocowania pręta w  $B$ . Zatem  $D + Cl = 0$ ,  $D + \frac{1}{6} Al^3 + \frac{1}{24} pl^4 = 0$ ,  $C - \frac{1}{2} Al^2 - \frac{1}{6} pl^3 = 0$ . Mnożąc trzecie równanie przez  $l$  dodajemy do drugiego. Stąd na zasadzie pierwszego mamy  $A = -\frac{3}{8} pl$ . Nadto  $C = -\frac{1}{48} pl^3$ ,  $D = \frac{1}{48} pl^4$ . Te wartości wyznaczają równanie odkształconej. Chcąc znaleźć strzałkę, czynimy  $EJ\eta' = 0$ , co daje:  $8(l - \zeta_0)^3 - 9l(l - \zeta_0)^2 - l^3 = \zeta_0(8\zeta_0^2 - 15l\zeta_0 + 6l^2) = 0$ . Stąd  $\zeta_0 = l(15 - \sqrt{33}) : 16$ . Ta wartość po podstawieniu w równanie odkształconej da strzałkę  $f = (78 + 110\sqrt{33}) Pl^3 : (2 \times 16^4 \times EJ) \approx Pl^3 : 185 EJ$ . Chcąc z kolei znaleźć punkt przegięcia, czynimy  $EJ\eta'' = 0$ , co daje  $(l - \zeta_1)(l - 4\zeta_1) = 0$ , skąd  $\zeta_1 = \frac{1}{4} l$ . Tutaj panuje nadto moment równy zeru.

Skrajną wartość momentu wyznaczymy z równania  $\frac{dM}{d\zeta} = -A - p(l - \zeta)$ , które daje  $\zeta_2 = \frac{5}{8} l$ . W tym punkcie wartość momentu wynosi  $M_m = -\frac{9}{128} pl^2$ . Po przejściu przez zero w punkcie przegięcia momenty z ujemnych stają się dodatnie i osiągają skrajną wartość w przekroju osadczym, gdzie  $M_o = Al + \frac{1}{2} pl^2 = \frac{1}{8} pl^2 = -M_B$ . Ta ostatnia wartość stanowi zarazem bezwzględne maximum, wyrokujące o dostatecznych wymiarach pręta. Wykresy momentów i sił tnących podaje rysunek.

§ 13. **Obciążenie siłą skupioną**, przyłożoną w odległości  $a$  od lewej rolkowej podpory. Niech (Rys. 39) nadto będzie  $l = a + b$ , a wtedy równania statyki dla punktu  $B$  dadzą  $A + B + P = 0$ ,  $Al + Pb + M_B = 0$ . Stąd  $M_B = -Al - Pb$ ,  $B = -P - A$ , zatem odpór  $A$  jest statycznie niewyznaczalny. Określimy go z łatwością dla belki o stałym przekroju poprzecznym, pisząc  $EJ\eta'' =$



Rys. 39.

$= A(l - \zeta) + P(b - \zeta)$ . Tutaj oś siły dzieli płaszczyznę gięcia na dwie połacie. Stąd  $EJ\eta' = C - \frac{1}{2} A(l - \zeta)^2 - \frac{1}{2} P(b - \zeta)^2$ ,  $EJ\eta = D + C\zeta +$



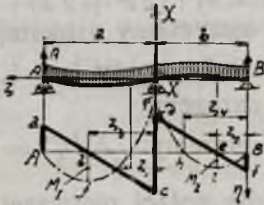
$+ \frac{1}{6} A (l - \zeta)^3 + \frac{1}{6} P (b - \zeta)^3$ . I tu znów  $\eta = 0$  gdy  $\zeta = l$  a nadto  $\eta = 0$  i  $\eta' = 0$ , gdy  $\zeta = 0$ . Skąd  $D + Cl = 0$ ,  $D + \frac{1}{6} Al^3 + \frac{1}{6} Pb^3 = 0$ ,  $C - \frac{1}{2} Al^2 - \frac{1}{2} Pb^2 = 0$ . Z tych równań mamy  $A = -\frac{Pb^2}{3l - b} : 2l^3$ ,  $C = -Pb^2(l - b) : 4l$ ,  $D = \frac{1}{4} Pb^2(l - b)$ . Korzystając z tych wartości snadnie wyznaczmy odkształconą. Czyniąc  $\zeta = b$  w jej równaniu otrzymamy strzałkę siły  $f_p = Pb^3(l - b) [(2l - b)^2 - lb] : 12EJl^3$ . Chcąc wyznaczyć strzałkę ugięcia określamy z równania  $EJ\eta' = 0$  odnośną wartość  $\zeta_0$ . Dla pierwszej połaci równanie to:  $-Pb^2(l - b) : 4l + Pb^2(3l - b)(l - \zeta_0)^2 : 4l^3 = 0$  da:  $\zeta_0 = l [1 \pm \sqrt{(l - b) : (3l - b)}]$  z warunkiem  $l \geq \zeta_0 \geq b$ . Pierwszej nierówności uczynimy zadość, zachowując jeno znak minus we wzorze; druga nierówność wymaga, aby  $l - l\sqrt{(l - b) : (3l - b)} \geq b$ . Ma to miejsce dla wszelkich wartości  $b < l(2 - \sqrt{2})$ , a wtedy mamy istotnie strzałkę w połaci pierwszej  $f_0 = Pb^2(l - b)\sqrt{(l - b) : (3l - b)} : 6EJ$ . Gdy  $b > l(2 - \sqrt{2})$ , strzałka przechodzi do połaci drugiej. Ze wzoru  $EJ\eta' = C - \frac{1}{2} A (l - \zeta_1)^2 - \frac{1}{2} P (b - \zeta_1)^2 = 0$  wyznaczmy odcięte  $\zeta_1 = 0$  i  $\zeta_2 = \frac{2lb}{2l^2 - 3lb + b^2} : [2l^3 - 3lb^2 + b^3] = \frac{2lb(2l - b) : (2l^2 + 2lb + b^2)}$ . Czyniąc we wzorze dla odkształconej  $\zeta = \zeta_2$ , otrzymamy szukaną strzałkę dla drugiej połaci. Wreszcie, gdy  $b = l(2 - \sqrt{2})$ , wtedy  $\zeta_0 = b$ , czyli  $f = f_p$  — strzałka ugięcia stanowi strzałkę siły zarazem.

Chcąc znaleźć punkty przegięcia odkształconej, piszemy:  $EJ\eta'' = A(l - \zeta_3) + P(b - \zeta_3) = 0$ . To równanie daje dla połaci pierwszej  $\zeta_3 = l$ , zatem jedynie w połaci drugiej możemy oczekiwać istotnego punktu przegięcia, przy  $\zeta_3 = bl(2l - b) : (2l^2 + 2lb + b^2) = \frac{1}{2}\zeta_2$ . W tem miejscu panuje nadto wartość zerowa momentu gnącego. W pierwszej połaci moment maleje linjowo aż do skrajnej wartości  $M_p = A(l - b)$ ; w połaci drugiej moment rośnie od tej wartości ujemnej, aż do wartości dodatniej  $M_0 = Al + Pb = -M_B$  ponad podporą prawą. Odnośny wykres momentów i sił tnących podaje rysunek. Różnica  $M_0 + M_p = Pb(l - b)(2l^2 - 4bl + b^2) : 2l^3$  staje się zerem dla  $b = l(2 - \sqrt{2})$ . Skoro więc  $b < l(2 - \sqrt{2})$ , wtedy  $M_0$  stanowi maximum momentów bezwzględne, gdy zaś  $b > l(2 - \sqrt{2})$  — maximum daje  $M_p$ .

**§ 14. Belki wieloprzesłowe.** Belka tylko co rozpatrywana stanowi niewątpliwie jedyny ustrój dwupodporowy, nie ujawniający odporów poziomych przy obciążeniu gnącym pionowym, dalsze więc rozważanie ustrojów statycznie niewyznaczalnych z konieczności wkracza w dziedzinę belek wielopodporowych czyli *wieloprzesłowych*, bo *przesłem* nazywamy część belki, przerzuconą ponad dwiema sąsiednimi podporami. Zatem belkę, leżącą na  $n + 1$  podporach zowiemy  $n$  — przesłową. Przy obciąże-

niu gnącym pionowym  $n$  — przęsłowa belka pozioma nie daje odporów poziomych jedynie w tym wypadku, gdy  $n$  jej podpór należy do typu rolkowych, a pozostała, dajmy na to, prawa skrajna podpora  $B$  jest przegubowa, lub stała. W niej umieszczamy początek stałych osi spółrzędnych, kierując oś  $B\zeta$  po osi pierwotnej nieodkształconej belki. Oś  $B\eta$  kierujemy w dół a oś  $B\zeta$  ku patrzącemu. Skrajną lewą podporę oznaczamy przez  $A$ , środkowe przez  $X, Y, Z$  i t. d. idąc od lewej ku prawej. Te same litery mianują zarazem odpory pionowe. Przy obciążeniu siłami pionowymi równania statyki pozwolą wyznaczyć dwa odpory pionowe, powiedzmy  $A$  i  $B$ , oraz odpór poziomy  $H$  prawej podpory, oczywiście równy zeru. Pozostałe odpory pionowe  $X, Y, Z...$  oraz domniemany moment osadczy podpory prawej będą statycznie niewyznaczalnymi, które zresztą łatwo wyznaczymy z równań gięcia dla belki o stałym przekroju poprzecznym. Najlepiej to uwypuklą przykłady.

**§ 15. Belka dwuprzęsłowa**, dajmy na to, obciążona jednostajnie w stosunku  $p$  kg na jednostkę długości (Rys. 40). Długość lewego przęsła niech będzie  $a$ , prawego —  $b$ , nadto  $l = a + b$ . Podpory  $A, X$  są rolkowe, prawa  $B$  — przegubowa. Równania statyki w stosunku do punktu  $B$  dadzą:  $A + X + B + pl = 0$ ,  $Al + Xb + \frac{1}{2}pl^2 = 0$ , można z nich wyznaczyć  $A$  i  $B$  w zależności od jedynej w danym wypadku statycznie niewyznaczalnej  $X$ . Mimo to możemy, nie określając  $A$  i  $B$ , wypisać równanie gięcia  $EJ\eta' =$



Rys. 40.

$= A(l - \zeta) + \frac{1}{2}p(l - \zeta)^2 + X(b - \zeta)$ . W założeniu stałego przekroju belki będziemy mieli:  $EJ\eta' = C - \frac{1}{2}A(l - \zeta)^2 - \frac{1}{6}p(l - \zeta)^3 - \frac{1}{2}X(b - \zeta)^2$ ,  $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{6}A(l - \zeta)^3 + \frac{1}{24}p(l - \zeta)^4 + \frac{1}{6}X(b - \zeta)^3$ . Aby wyznaczyć  $C, D, X$  uwzględniamy warunki podparcia belki. Przy  $\zeta = 0$  mamy  $\eta = 0$  a nadto jeszcze  $\eta = 0$  dla  $\zeta = b$  i  $\zeta = l$ . Stąd:  $D + Cl = 0$ ,  $D + Cb + \frac{1}{6}Aa^3 + \frac{1}{24}pa^4 = 0$ ,  $D + \frac{1}{6}Al^3 + \frac{1}{24}pl^4 + \frac{1}{6}Xb^3 = 0$ . Mnożymy pierwsze równanie przez  $b$  i odejmujemy od drugiego, pomnożonego przez  $l$ . Różnicę  $Da + \frac{1}{6}Ala^3 + \frac{1}{24}pla^4 = 0$  odejmujemy od ostatniego równania, skąd:  $Xb^2 + Al(2a + b) + \frac{1}{4}pl(3a^2 + 3ab + b^2) = 0$ . Wreszcie mnożymy równanie momentów przez  $b$  i odejmujemy. W wyniku otrzymamy wprost  $A = -\frac{1}{8}p(3a^2 + ab - b^2) : a$ ;  $a = -\frac{1}{2}pa + \frac{1}{8}p(a^3 + b^3) : al$ . Na mocy symetrii możemy wypisać od razu  $B = -\frac{1}{2}pb + \frac{1}{8}p(a^3 + b^3) : bl$ , wreszcie z równania sił mamy:  $X = -pl - A - B = -\frac{1}{2}pl - \frac{1}{8}p(a^3 + b^3) : ab$ . Dalej z trzeciego równania:  $D = \frac{1}{24}pa^3l - \frac{1}{48}pa(a^3 + b^3)$ ,  $C = -\frac{1}{24}pa^3 + \frac{1}{48}pa(a^3 + b^3) : l$ . W ten sposób wyznaczyliśmy wszystkie niewiadome, możemy przeto zbadać kształt i bieg



odkształconej. Rozwiązując równanie  $EJr_1' = 0$ , otrzymamy sirzałki ugięcia pręta. Nadto łatwo możemy znaleźć punkty przegięcia odkształconej, panuje w nich bowiem zerowa wartość momentu gnącego. Zatem w tych punktach  $EJr_1'' = 0$ . Dla pierwszej połaci:  $A(l - \zeta_0) + \frac{1}{2} p(l - \zeta_0)^2 = 0$ , skąd:  $\zeta_0 = l + 2A : p = b + (a^3 + b^3) : 4al$ . Dla drugiej połaci:  $A(l - \zeta_1) + \frac{1}{2} p(l - \zeta_1)^2 + X(b - \zeta_1) = 0$ , co daje  $\zeta_1 = -2B : p = b - (a^3 + b^3) : 4bl$ . Należy przytem koniecznie sprawdzić, czy znalezione wartości odciętych czynią zadość warunkom:  $l \geq \zeta_0 \geq b \geq \zeta_1 \geq 0$ . Warunki  $\zeta_0 \geq b \geq \zeta_1$  są oczywiste, należy przeto jeno zbadać, kiedy  $l \geq \zeta_0$  i  $\zeta_1 \geq 0$ . Zawsze możemy założyć, że  $b : a = n < 1$ , w przeciwnym bowiem razie wystarczy obrócić pręt o  $180^\circ$ , aby otrzymać powyższą zależność. Zatem  $b = an$ ,  $l = a(1 + n)$ , co podstawivszy w pierwszą nierówność wyżej zaznaczoną, otrzymamy  $a(1 + n) \geq an + (1 + n^3)a : 4(1 + n)$ , inaczej:  $4 \geq 1 - n + n^2$ . Otrzymana nierówność wypełnia się zawsze przy wszelkiem  $n$  ułamkowem dodatniem. Stąd wniosek, że w większej połaci istnieje zawsze punkt przegięcia odkształconej. Drugi, powyżej wypisany warunek da nam  $an - (1 + n^3)a : 4n(1 + n) \geq 0$ , czyli  $3n^2 + n - 1 \geq 0$ . Ten warunek wypełnia się, gdy  $1 > n \geq \frac{1}{6}(-1 + \sqrt{13})$ . Ostatecznie więc punkty przegięcia istnieją dla obu pręseł wtedy jedynie, gdy  $a \geq b \geq \frac{1}{6}(-1 + \sqrt{13})a$ ; natomiast, gdy  $\frac{1}{6}(-1 + \sqrt{13})a \geq b \geq 0$ , punkt przegięcia odkształconej istnieje tylko dla większego pręśla. Chcąc dalej znaleźć skrajne wartości momentów, piszemy  $\frac{dM}{d\zeta} = -A - p(l - \zeta_3) = 0$  dla pierwszego pręśla, skąd  $\zeta_3 = l + A : p$ .

Po podstawieniu tej wartości we wzór otrzymamy skrajną wartość momentu pierwszej połaci  $M_1 = -A^2 : 2p$ . Dla połaci drugiej  $\frac{dM}{d\zeta} = -A - p(l - \zeta_4) - X = B + p\zeta_4 = 0$ , czyli  $\zeta_4 = -B : p$ . Odnośna skrajna wartość momentu wyniesie  $M_2 = -B^2 : 2p$ . Moment odporowy środkowy otrzymamy, czyniąc  $\zeta = b$  we wzorze dla momentów:  $M_x = A(l - b) + \frac{1}{2} p(l - b)^2 = a(A + \frac{1}{2} pa) = \frac{1}{8} p(a^3 + b^3) : l$ . Odnośny wykres momentów i sił tnących podaje rysunek. Godzi się tu zaznaczyć, że wartość skrajna momentu ujemna  $M_1$  istnieje zawsze dla połaci większej, druga zaś  $M_2$  tylko o tyle, o ile  $a \geq b \geq \frac{1}{6}(-1 + \sqrt{13})a$ , w przeciwnym razie w połaci drugiej moment spływa parabolicznie od  $M_x$  do zera, nie przecinając podstawy wykresu. W szczególnym wypadku, gdy  $a = b = \frac{1}{2}l$ , będziemy mieli  $A = B = -\frac{3}{16}pl$ ,  $X = -\frac{5}{8}pl$ ,  $M_1 = -M_2 = -\frac{9}{512}pl^2$ ,  $M_x = \frac{1}{32}pl^2$ , przyczem obie skrajne wartości momentów ujemne leżą symetrycznie w odległości  $\frac{5}{16}l$  od środkowej podpory, tutaj bowiem:  $\zeta_3 = \frac{13}{16}l$ ,  $\zeta_4 = \frac{3}{16}l$ , a nadto:  $\zeta_0 = \frac{5}{8}l$ ,  $\zeta_1 = \frac{3}{8}l$ .

Te rachunki nie należą do łatwych. Trudności rosną wraz z liczbą podpór, to też od dawna starano się rachunek bezpośredni ominąć sposobami, rychlej prowadzącymi do celu. Jeden z nich bierze za punkt wyjścia:

## § 17. Zastosowanie zasady niezależności działania sił do

**obliczania belek wieloprzęsłowych.** Weźmy pod uwagę jakąkolwiek belkę  $n$  przęsłową, obciążoną układem sił pionowych. Skrajna prawa jej podpora niech będzie przegubowa, pozostałe — rolkowe. Odrzućmy wszystkie pośrednie podpory  $X, Y, Z, \dots$ , a uczynimy pręt statycznie wyznaczalnym, będziemy mogli przeto łatwo wyznaczyć równanie jego odkształconej w założeniu stałego poprzecznego przekroju belki.

Z tego równania otrzymamy strzałki ugięcia belki w miejscach odrzuconych podpór. Nazwijmy je  $f_x, f_y, f_z, \dots$ . Te strzałki odpowiadają wygięciu pręta pod jarzmem istotnie działającego obciążenia sił pionowych, cisnących na belkę, spoczywającą jeno na skrajnych dwóch podporach. Odciażmy belkę, i, po wyprostowaniu się jej osi podłużnej, przyłożmy w miejscu, gdzie była dawniej podpora  $X$  — siłę  $X$  pionową. Ta siła ugnie pręt ponownie, dając w miejscach, skąd odrzuciliśmy podpory — odpowiednio strzałki ugięcia  $f_{xx}, f_{yx}, f_{zx}, \dots$ , które z łatwością wyznaczymy z odnośnego równania odkształconej. Z kolei odrzucamy siłę  $X$  i przykładamy nową siłę  $Y$  tam, gdzie uprzednio była podpora  $Y$ . I znów z odnośnego równania odkształconej wyznaczymy strzałki  $f_{xy}, f_{yy}, f_{zy}, \dots$  w miejscach odrzuconych podpór. Tę czynność powtarzamy aż do wyczerpania wszystkich pośrednich punktów dawnego podparcia belki. Wreszcie po ostatniem odciażeniu belki, przywracamy pierwotne, rzeczywiste jej obciążenie łącznie z siłami  $X, Y, Z, \dots$ , które mają zastąpić działanie odrzuconych podpór. To łączne obciążenie da wypadkowe strzałki, które na mocy drugiego prawa Hooke'a oraz prawa o niezależnem działaniu sił stanowić będą sumy  $f_x + f_{xx} + f_{xy} + f_{xz} + \dots = f_1, f_y + f_{yx} + f_{yy} + f_{yz} + \dots = f_2, f_z + f_{zx} + f_{zy} + f_{zz} + \dots = f_3$  i t. d. Zatem, aby działanie sił  $X, Y, Z, \dots$  zastępujących podpory odrzucone, było istotne i zgodne z rzeczywistością, należy otrzymać  $f_1 = f_2 = f_3 = \dots = 0$ , belka bowiem ponad podporami nie zmienia poziomu, jako podparta. Słowem, z układu równań  $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0, \dots$  trzeba wyznaczyć układ właściwych wartości  $X, Y, Z, \dots$ . Na tej prostej myśli polega cały sposób powyższy, niestety jednak nader niewygodny przy większej liczbie przęseł.

W zastosowaniu do belki dwuprzęsłowej, wyżej rozpatrywanej, sposób ten opiera się na odrzuceniu pośredniej podpory. Obciążenie belki jednostajne da w miejscu podpory odrzuconej strzałkę  $f_x$ , którą łatwo wyznaczymy, czyniąc  $\zeta = b$  we wzorze odkształconej. W ustępie piątym tego rozdziału mieliśmy wzór  $EJf_1 = \frac{1}{12} Pbl^2 - \frac{1}{24} Pb^3 - \frac{1}{12} Pbl\zeta + \frac{1}{24} Pb^3\zeta : l - \frac{1}{12} Pb(l - \zeta)^3 : l + \frac{1}{24} P(b - \zeta)^4 : b$ . Ponieważ w danym wypadku obciążenie pokrywa całą belkę, przeto należy we wzorze napisać wszędzie  $l$  zamiast  $b$ , co da  $EJf_1 = \frac{1}{24} P\zeta(\zeta^3 - 2l\zeta^2 + l^3)$ . A zatem  $EJf_x = \frac{1}{24} Pb(b^3 - 2lb^2 + l^3) = \frac{1}{24} Pab(a^2 + 3ab + b^2)$ . Z kolei



obciążamy belkę siłą skupioną  $X$ , przyłożoną w odległości  $\zeta = b$ , a więc w miejscu odrzuconej podpory i wyznaczamy jej strzałkę siły  $f_{xx}$  ze wzoru  $EJf_{xx} = Xa^2b^2 : 3l$ , podanego w ustępie czwartym rozdziału niniejszego. Dobierzmy  $X$  tak, aby  $f_x + f_{xx} = 0$ , a otrzymamy istotną wartość odpory  $X$ , wszystkie trzy bowiem podpory pręta winny być na jednym poziomie, a podczas wygięcia pośrednia podpora obniżeniu nie ulegnie. Stąd mamy:  $X = -\frac{1}{8} p (a^2 + 3ab + b^2) l : ab = -\frac{1}{2} p - \frac{1}{8} p (a^2 + b^2) : ab$ . Tę samą wartość otrzymaliśmy uprzednio drogą bezpośrednią.

**§ 18. Belka trójprzęsłowa.** Weźmy pod uwagę pręt o stałym przekroju poprzecznym, wsparty na cztery podpory  $A, X, Y, B$ , uszeregowane poziomo. Długości przęseł oznaczamy odpowiednio przez  $a, \lambda, b$ , przyczem cała długość pręta  $l = a + \lambda + b$  dźwiga obciążenie, dajmy na to, jednostajne  $p$  KG na jednostkę długości. Równania statyki dla skrajnej podpory prawej będą:  $A + X + Y + B + pl = 0$ ,  $Al + X(\lambda + b) + Yb + \frac{1}{2} pl^2 = 0$ . Z nich wyznaczmy  $A$  i  $B$  w zależności od statycznie niewyznaczalnych  $X, Y$ . Trzeciego równania nie wypisujemy, zakładamy bowiem że prawa podpora  $B$  jest przegubowa a pozostałe — rołkowe. Jedyną zatem siłą poziomą będzie tu odpór  $H$  skrajnej podpory prawej. W założeniu sił wyłącznie pionowych  $H = 0$ . Chcąc wyznaczyć  $X, Y$ , odrzucamy obie podpory pośrednie i zakładamy, że pręt, jak dawniej, ulega obciążeniu jednostajnemu, które daje strzałki  $f_x$  i  $f_y$  w miejscach, gdzie były podpory  $X$  i  $Y$ . Czyniąc  $\zeta = b + \lambda$  oraz  $\zeta = b$  w odnośnym wzorze odkształconej, otrzymamy:  $EJf_x = \frac{1}{24} pa (b + \lambda) [a^2 + 3a(b + \lambda) + (b + \lambda)^2]$  oraz  $EJf_y = \frac{1}{24} pb (a + \lambda) [(a + \lambda)^2 + 3b(a + \lambda) + b^2]$ . Z kolei zakładamy, że belka obciążona jest siłą  $X$ , przyłożoną w miejscu odrzuconej podpory  $X$  i wyznaczamy strzałkę tej siły  $EJf_{xx} = Xa^2(b + \lambda)^2 : 3l$ , oraz strzałkę  $f_{yx}$  ugięcia pręta w miejscu odrzuconej podpory  $Y$ . W ustępie czwartym rozdziału niniejszego mieliśmy wzór  $EJf_\eta = \frac{1}{6} Pb (l^2 - b^2) - \frac{1}{6} Pb (l^2 - b^2) \zeta : l - \frac{1}{6} Pb (l - \zeta)^3 : l + \frac{1}{6} P (b - \zeta)^3$ . Aby go dostosować do wypadku obecnego, należy uczynić  $P = X$ ,  $b = \lambda + b$  oraz  $\zeta = b$ , a wtedy  $6lEJf_{yx} = Xab [\lambda^2 + 2b\lambda + 2a\lambda + 2ab]$ . Z kolei po raz ostatni zakładamy, że belka obciążona jest siłą skupioną  $Y$ , przyłożoną w miejscu odrzuconej podpory  $Y$ , i określamy strzałkę tej siły  $EJf_{yy} = Y(a + \lambda)^2 b^2 : 3l$  oraz strzałkę ugięcia  $f_{xy}$  belki ponad odrzuconą podporą  $X$ . W tym celu w równaniu odkształconej, powyżej wypisanem, czynimy  $P = Y$  oraz  $\zeta = b + \lambda$ . Odrzuciwszy wyraz poza kreską, otrzymamy:  $6lEJf_{xy} = Yab (\lambda^2 + 2ab + 2a\lambda + 2b\lambda)$ . W istocie wszystkie te trzy obciążenia działają równocześnie, siły bowiem  $X, Y$  mają zastąpić działanie podpór. W obec zupełnej nieruchomości podpór pośrednich, należy niewątpliwie uczynić  $f_x + f_{xx} + f_{xy} = 0$ ,  $f_y + f_{yx} + f_{yy} = 0$ . Te dwa równania linjowe względem  $X, Y$  pozwolą wyznaczyć brakujące odpory.

W szczególnym wypadku, gdy  $a = \lambda = b = \frac{1}{3} l$ , będziemy mieli  $f_x = f_y = \frac{11}{972} pl^4 : EJ$ ,  $f_{xx} = \frac{4}{243} Xl^3 : EJ$ ,  $f_{yx} = \frac{7}{486} Xl^3 : EJ$ ,  $f_{yy} = \frac{4}{243} Yl^3 : EJ$  oraz  $f_{xy} = \frac{7}{486} Yl^3 : EJ$ . Dodając odnośne strzałki,

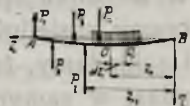
otrzymamy po skróceniu przez  $l^3$ :  $972 EJ$  równania  $11 l\beta + 16 X + 14 Y = 11 l\beta + 16 Y + 14 X = 0$ . Stąd bezpośrednio  $X = Y = -\frac{11}{30} l\beta$ . Nadto z równań statyki mamy:  $A = B = -\frac{2}{15} l\beta$ . W ten sposób zagadnienie sprowadza się do dziedziny znanej. Tylko co rozpatrywany wypadek jest już daleko bardziej złożony: trudności rosną wraz z liczbą podpór pośrednich. Należy przeto poznać sposoby, nie posiadające tej wady. W tym celu ustalimy przedewszystkiem:

§ 19. **Prawo znakowania wzoru dla gięcia właściwego płaskiego.** Wybór znaku we wzorze przybliżonym:  $\pm EJ\eta'' = M$  zależy niewątpliwie od położenia stałych osi, które zazwyczaj prowadzimy ze skrajnej prawej podpory  $B$ , kierując oś  $B\zeta$  na lewo po osi pierwotnej pręta, oś  $B\eta$  w dół, a  $B\xi$  — ku patrzącemu. Nadto znak wzoru zależy niewątpliwie od kierunku sprowadzania sił gnących do środków przekrojów poprzecznych. Zazwyczaj rozpoczynamy od skrajnego lewego przekroju pręta, idąc poprzez wszystkie przekroje dalsze — ku skrajnemu prawemu. Kolejno przytem uwzględniamy siły gnące, spotykane po drodze, sprowadzamy bowiem do środka każdego przekroju poprzecznego każdorazowo tylko lewy układ sił gnących. Siły gnące i odpory dodatnie, a więc jednokierunkowe z osią  $B\eta$ , bo skierowane w dół, przy sprowadzeniu do środka przekroju na prawo od nich leżącego — dają momenty lewoskrętne, przeciwko strzałce zegara dla patrzącego; natomiast siły i odpory ujemne, a więc skierowane odwrotnie, dają momenty prawoskrętne, zgodne ze strzałką zegara pod względem kierunku odnośnej pary obrotowej. Każdy moment prawoskrętny wygina ku górze lewą część pręta, poza przekrojem sprowadzenia leżącą, — lewoskrętny stara się nachylić ją ku dołowi. Zatem — moment prawoskrętny wygina pręt wypukłością do dołu a wklęsłością ku górze, o ile powstał ze sprowadzenia układu sił gnących lewego w stosunku do przekroju rozpatrywanego. Gdy środek tego przekroju leży pod osią  $B\zeta$ , wtedy w sąsiedztwie środka spólrzędne odkształconej są dodatnie, a odkształcona — obrócona wklęsłością ku osi  $B\zeta$ . Musi być przeto  $\eta\eta'' < 0$ , czyli  $\eta'' < 0$ , ponieważ tutaj  $\eta > 0$ . Gdy znowu środek przekroju sprowadzenia leży ponad osią  $B\zeta$  — odkształcona względem tej osi jest wypukła, musi być przeto  $\eta\eta'' > 0$ . Tu jednak rzędne  $\eta$  są ujemne, zatem i w tym wypadku mamy również  $\eta'' < 0$ . Ujemna wartość  $\eta''$  odpowiada momentom prawoskrętnym. Rozumując zupełnie tak samo z łatwością przekonamy się, że dodatnia wartość  $\eta''$  odpowiada momentom lewoskrętnym. Istotnie, gdy środek sprowadzenia leży pod osią  $B\zeta$ , odkształcona jest wypukłością zwrócona ku osi, musi być przeto  $\eta\eta'' > 0$ , skąd, wobec  $\eta > 0$  mamy  $\eta'' > 0$ . Gdy znowu środek leży nad osią  $B\zeta$ , odkształcona zwraca się ku niej wklęsłością, a zatem musi być  $\eta\eta'' < 0$ , czyli znów  $\eta'' > 0$  wobec  $\eta < 0$ . Stąd wniosek ostateczny, że wzór  $EJ\eta'' = M$  dotyczy momentu



lewoskrętnego, wzór zaś:  $-EJr'' = M$  — prawoskrętnego, wszelki bowiem moment znakujemy dodatnio według umowy.

Weźmy (Rys. 41) jednorodnie zbudowany pręt pierwotnie prosty, odkształcony pod jarzmem układu sił gnących, prostopadłych do osi pierwotnej pręta  $B\zeta$ . Na odkształconej obierzmy dowolny zresztą punkt  $o(\zeta, r)$  — środek odnośnego przekroju poprzecznego. Płaszczyzna tego przekroju podzieli obciążenie zewnętrzne na dwa układy — lewy i prawy. Siły i odpory układu lewego oznaczymy przez  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).



Rys 41.

Po sprowadzeniu tego układu do środka  $o$  otrzymamy wypadkową siłę tnącą  $T = \sum P_i$ , równą algebraicznej sumie poszczególnych sił  $P_i$ . Znak sumy da kierunek siły tnącej. Dodatnia będzie skierowana w dół, ujemna — do góry. Nadto każda z sił układu, po sprowadzeniu da moment  $M_i = P_i (\zeta_i - \zeta)$ , gdzie  $\zeta_i$  oznacza odcięta punktu przyłożenia siły  $P_i$ . Dla sił lewego układu  $\zeta_i > \zeta$ , przeto znak  $M_i$  zależy od znaku siły  $P_i$ . Ujemną wartość da siła ujemna, zatem wartość ujemna iloczynu  $P_i (\zeta_i - \zeta)$  daje moment prawoskrętny, jako pochodzący od siły, skierowanej ku górze. Dodatnia wartość tego iloczynu da moment lewoskrętny — siły  $P_i$ , dodatniej, bo skierowanej w dół. Moment wypadkowy  $M = \sum M_i = \sum P_i (\zeta_i - \zeta)$ , rozpatrywany, jako algebraiczna suma momentów wszystkich sił  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), będzie miał wartość dodatnią, lub ujemną. Dodatniej odpowie moment lewoskrętny, ujemnej — prawoskrętny. Możemy zatem napisać wprost  $EJr'' = M$ , pomijając znak podwójny w lewej części wzoru, jako zbyteczny, bo utajony w jego części prawej.

Przy wyznaczaniu momentu sił gnących lewej części pręta należy zachować właściwy znak siły gnącej i mnożyć ją przez odległość od środka sprowadzenia. Dodając algebraicznie otrzymane iloczyny, otrzymamy moment wypadkowy, równy  $EJr''$ .

To prawo obejmuje również wypadek szczególny, kiedy wśród obciążeń układu lewego znajdują się momenty, możemy bowiem zawsze każdy moment obciążenia zewnętrznego rozłożyć na odpowiednią parę sił pionowych. Pozwala ono nadto ustalić:

**§ 20. Zależność między siłą tnącą a momentem gnącym przekroju.** Weźmy pod uwagę belkę wygiętą płasko pod jarzmem obciążenia, leżącego w płaszczyźnie gięcia pionowej. Kierunek sprowadzania sił gnących niech będzie taki, jak poprzednio: od skrajnego lewego przekroju poprzecznego pręta do skrajnego prawego. Kolejno zatem rozpatrujemy przekroje pręta poprzeczne. Ich płaszczyzny każdorazowo dzielą obciążenie zewnętrzne na dwa układy — sił gnących prawych i lewych. Do środka każdego przekroju sprowadzamy zawsze tylko siły

gnące lewego układu. Te siły dają wypadkową siłę tnącą, leżącą w płaszczyźnie gięcia, oraz — moment gnący, prostopadły do tej płaszczyzny. Oznaczmy przez  $O$  środek któregośkolwiek przekroju, przez  $T$  i  $M$  — jego siłę tnącą i moment — wypadkowe lewego układu sił odkształcających. W kierunku sprowadzenia sił, a więc nieco dalej na prawo od  $O$  wyznaczamy sąsiedni punkt  $O_1$  na odkształconej, znikomo o  $d\zeta$  odległy od  $O$  i zakładamy, że na przestrzeni  $OO_1$  nie działa żadna siła skupiona, natomiast w samym punkcie  $O_1$  może panować siła  $P_{n+1}$ , pierwsza zwiastunka układu odkształcającego prawego. Łatwo uczynić zadość temu warunkowi, biorąc  $OO_1$  dostatecznie małe. Słowem wolno nam zbliżyć się do punktu przyłożenia siły  $P_{n+1}$ , lecz nie przekroczyć go nigdy! Ponieważ z założenia w odcinku  $OO_1$  nie działa żadna siła gnąca, przeto po sprowadzeniu układu lewego sił gnących do środka  $O_1$ , otrzymamy moment wypadkowy  $M_1 = M + Td\zeta$ . Łatwo się o tem przekonać, zważywszy, że układ lewy po sprowadzeniu do środka  $O$  zastąpiony został wypadkowymi  $M$  i  $T$ . Zatem przy sprowadzeniu do środka  $O_1$  możemy brać pod uwagę jeno te wypadkowe. Moment  $M$ , jako wektor swobodny, może być wprost przeniesiony w  $O_1$ ; siła tnąca  $T$  po przeniesieniu do  $O_1$  da taką samą siłę tnącą oraz dodatkowy moment  $Td\zeta$ , który, wraz z  $M$  da wypadkowy moment  $M_1$ . Będzie on nieco różny od  $M$ , jak to wynika ze wzoru tylko co wypisanego, możemy przeto oznaczyć  $M_1 = M + dM$ , a wtedy  $dM = Td\zeta$ . Ten sam wynik otrzymamy również i w tym wypadku, gdy nadto ponad odcinkiem  $OO_1$  odkształconej panuje obciążenie jednostkowe  $p$  kg na jednostkę długości. Tutaj przy przejściu od  $O$  do  $O_1$  moment  $M$  jeszcze dodatkowo wzrośnie o  $pd\zeta \times \frac{1}{2}d\zeta$ , będziemy mieli przeto  $dM = Td\zeta + \frac{1}{2}pd\zeta^2$ . Pomijając wyższego rzędu małe, mamy stąd, jak dawniej  $dM = Td\zeta$ . *Elementarny przyrost momentu gnącego przy przejściu od danego przekroju poprzecznego do sąsiedniego w kierunku sprowadzania momentów równy jest sile tnącej owego przekroju, pomnożonej przez odległość obu przekrojów, mierzoną w tym samym kierunku.* Inaczej jeszcze  $T = dM : d\zeta$ , co zresztą istoty rzeczy nie zmienia.

W powyżej rozpatrywanym wypadku (Rys. 41) belki wygiętej płasko pod jarzmem sił pionowych mieliśmy dla środka  $O$  ( $\zeta$ ,  $\tau_i$ ) siłę tnącą  $T = \Sigma P_i$  i moment gnący  $M = \Sigma P_i (\zeta_i - \zeta)$ , wypadkowe sprowadzenia lewego układu sił  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Weźmy w kierunku sprowadzenia sił, a więc nieco dalej na prawo środek  $O_1$  ( $\zeta_1$ ,  $\tau_{1i}$ ) sąsiedniego przekroju na odkształconej. Ponieważ  $\zeta_1 - \zeta = -d\zeta$ , jak to zresztą najlepiej widać z rysunku, przeto powinniśmy mieć dla danego wypadku  $dM = -Td\zeta$  na mocy twierdzenia powyższego. Sprawdza się to istotnie, mamy bowiem  $dM = d\Sigma P_i (\zeta_i - \zeta) = -\Sigma P_i d\zeta = -Td\zeta$ .

W ogólnym wypadku mamy, całkując:  $M = \int Td\zeta + C$ , możemy



przeto wyznaczyć wartości momentów gnących, gdy znamy siły tnące przekrojów poprzecznych. Najlepiej to uskutecznić wykreślnie.

Gdy  $T = 0$ , wtedy i  $dM = 0$  zatem: *Skrajne wartości momentów gnących panują w przekrojach pręta płasko wyginanego, gdzie siła tnąca ma wartość równą zeru.* Tem się tłumaczy, dlaczego skrajne wartości wykresu momentów zachodzą w miejscach przecięcia się krzywej wykresu sił tnących z podstawą. Dość jest przejrzeć powyżej podane rysunki, aby się o tem przekonać naocznie.

**§ 21. Zależność między obciążeniem jednostkowym a siłą tnącą przekroju.** Zachowując znakowania ustępu poprzedniego, zakładamy, że siły skupione prawego układu działają poza środkiem  $O_1$ , natomiast odcinek odkształconej  $OO_1$  dźwiga obciążenie jednostkowe  $p$  kg na jednostkę długości pierwotnej pręta. Oznaczmy, jak dawniej przez  $T$  — siłę tnącą, panującą w  $O$ , przez  $T_1$ , siłę tnącą w  $O_1$ . Ponieważ z założenia w odcinku  $OO_1$  niema sił skupionych, przeto po sprowadzeniu lewego układu sił do środka  $O_1$ , otrzymamy wypadkową siłę tnącą  $T_1 = T + pd$ . Z tego równania wynika, że siła tnąca nieco się zmienia przy przejściu od  $O$  do  $O_1$ , możemy przeto oznaczyć  $T_1 = T + dT$ , a wtedy  $dT = pd$ . *Elementarny przyrost siły tnącej przy przejściu od danego przekroju poprzecznego do sąsiedniego w kierunku sprowadzania sił, równy jest obciążeniu jednostkowemu, panującemu ponad owym przekrojem, mnożonemu przez odległość obu przekrojów, mierzoną w tym samym kierunku.* I tu również można napisać  $p = dT : d$ . Całkując, mamy  $T = \int pd + D$ , możemy przeto wyznaczyć wartości sił tnących, gdy znamy obciążenia jednostkowe, panujące w poszczególnych przekrojach pręta. I tu najlepiej uskutecznić rachunek wykreślnie, całkując wykres obciążenia  $p$ . Gdy  $p = 0$ , wtedy i  $dT = 0$ , a zatem: *Skrajne wartości sił tnących panują w przekrojach poprzecznych pręta płasko zginanego, pozbawionych obciążenia jednostkowego.* Tem się objaśnia, dlaczego obciążeniom skupionym odpowiada łamana krzywa wykresu sił tnących. Łatwo się o tem przekonać rozpatrując podane wyżej rysunki.

**§ 22. Równania różniczkowe odkształconej.** Korzystając z powyżej udowodnionych zależności możemy ustalić kilka postaci równania różniczkowego odkształconej w założeniu pręta o stałym przekroju poprzecznym. Wyznamy równanie odkształconej pręta płasko zginanego. Będzie to  $r_1 = f$ , gdzie  $f$  oznacza strzałkę ugięcia, a zarazem może służyć, jako znak funkcji zmiennej  $\zeta$ . Ta funkcja stanowi równanie odkształconej. Umiemy ją wyznaczać dla wszelkich obciążeń gnących. Zatem: *rzędna odkształconej daje strzałkę ugięcia pręta płasko zginanego w odnośnym przekroju poprzecznym.* Różniczkując, otrzymamy bezpośred-

nio  $\eta' = df : d\zeta = \operatorname{tg} \theta \approx \theta$ , gdzie przez  $\theta$  oznaczyliśmy kąt, jaki tworzy z pierwotną osią pręta styczna odkształconej, poprowadzona przez środek danego przekroju poprzecznego. Zatem: *pierwsza pochodna rzędnej odkształconej daje kąt pochylenia osi pierwotnej pręta ku stycznej odkształconej, poprowadzonej przez środek odnośnego przekroju poprzecznego*. Godzi się tu zaznaczyć, że ma to miejsce jedynie dla wygięć nieznacznych, wtedy bowiem możemy bezkarnie pominąć znak tangens'a, pisząc wprost  $\eta' \approx \theta$ . Następnie mamy wzór zasadniczy gięcia płaskiego  $\eta'' = M : EJ$ , który głosi, że: *druga pochodna rzędnej odkształconej daje moment odnośnego przekroju poprzecznego, dzielony przez sztywność pręta w tym przekroju*. Dla pręta o przekroju stałym będziemy mieli dalej różniczkując:  $\eta''' = dM : (EJd\zeta) = T : EJ$ . Zatem: *trzecia pochodna rzędnej odkształconej daje siłę tnącą odnośnego przekroju poprzecznego, dzieloną przez sztywność pręta w tym przekroju*. Podobnie otrzymamy  $\eta'''' = dT : (EJd\zeta) = p : EJ$ , skąd wnioskujemy, że: *czwarta pochodna rzędnej odkształconej daje obciążenie jednostkowe, panujące w odnośnym przekroju poprzecznym, dzielone przez sztywność pręta w tym przekroju*. W ten sposób otrzymaliśmy cały szereg równań dla rzędnych odkształconej oraz ich pierwszych czterech pochodnych. Ostatnie dwa równania dotyczą pręta o stałym przekroju. Są to również równania różniczkowe odkształconej. Rzadko je stosujemy, ponieważ nie są wygodne, jako równania wyższego rzędu. Zazwyczaj korzystamy jeno z trzeciego równania  $\eta'' = M : EJ$ . Daje ono najmniejszą liczbę stałych całkowania.

Przepiszmy jeszcze raz równania powyższe w postaci:  $EJ\eta' = EJf$ ,  $EJ\eta'' = EJ\theta$ ,  $EJ\eta''' = M$ ,  $EJ\eta'''' = T$ ,  $EJ\eta'''' = p$ . Ostatnie — daje się zawsze otrzymać bezpośrednio, zawiera bowiem obciążenie jednostkowe  $p$  — zasadniczą daną wszelkiego wytrzymałościowego zagadnienia. Zazwyczaj wyznaczamy  $p$  w postaci wykresu o podstawie równoległej do pierwotnej osi pręta. Pionowe rzędne, poprowadzone ponad odnośnymi przekrojami poprzecznymi dadzą wartości obciążeń miejscowych. Dodając te rzędne wykresu w kierunku sprowadzania sił, otrzymamy siły tnące dla poszczególnych przekrojów pręta. Uszeregowane pionowo we właściwym porządku utworzą one wykres sił tnących  $T$ . Dodając z kolei rzędne tego wykresu w tym samym kierunku, otrzymamy momenty dla poszczególnych przekrojów, a zarazem będziemy mogli zbudować wykres momentów gnących  $M$  dla całego pręta. Umiemy zatem z wykresu  $p$  otrzymać  $T$ , a z wykresu  $T$  — wyznaczyć  $M$  dla tego samego przekroju poprzecznego. *Powtórzmy te same działania, biorąc wykres  $M$  miasto wykresu  $p$ , a otrzymamy  $EJ\theta$  zamiast  $T$ , oraz  $EJf$  miasto  $M$ . Łatwo się o tem przekonać, biorąc pod uwagę poprzednio wypisane równania. Dla pręta o przekroju stałym tak samo różniczkując otrzymamy  $EJ\theta \approx EJf$ , jak  $T \approx M$ , tak samo dostaniemy  $M \approx EJ\theta$ , jak  $p \approx T$ . Na odwrót z  $p$*



otrzymamy  $T$  i  $M$  zupełnie tak samo, jak  $\varepsilon M = EJ\theta$  i  $EJf$ . Na tych prostych wywodach opiera się:

**§ 23. Sposób rachunkowo wykreślny wyznaczania strzałek i kątów pochylenia stycznych odkształconej.** Weźmy pod uwagę belkę, wygiętą płasko pod jarzmem obciążenia zewnętrznego. Zbudujmy odnośny wykres momentów gnących  $M$  i wyobraźmy sobie nową belkę tej samej długości, dźwigającą obciążenie jednostkowe  $p_w$  kg na jednostkę długości, zmieniające się ściśle podług wykresu momentów  $M$ . Słowem, zamiast pręta istotnego bierzemy pod uwagę tej samej długości pręt wyobraźalny, dźwigający obciążenie jednostkowe  $p_w = M$ . Wyznaczmy dla tego obciążenia wykresy sił tnących  $T_w$  i momentów gnących  $M_w$ . W myśl wniosków powyżej udowodnionych rzędne wykresu pierwszego dadzą odnośne wartości  $EJ\theta$ , a rzędne wykresu drugiego — wartości  $EJf$ . Tą drogą otrzymamy strzałki ugięcia pręta rzeczywistego oraz kąty pochylenia ku jego osi pierwotnej — stycznych odkształconej, słowem — wyznaczmy wygięcie pręta rzeczywistego.

Pewne trudności nastęrcza tutaj należyte określenie typu podpór pręta wyobraźalnego, nie jest to bowiem zwykła belka, a raczej twór pomocniczy, ciało stałe, podległe swoistej statyce. Jego podporom przypisujemy własność wzbudzania odporów pionowych i momentów odporowych. Odpory poziome pomijamy wobec zupełnego braku obciążeń poziomych. Pręt wyobraźalny opieramy zawsze tylko końcami obustronnie, lub jednostronnie, zatem odpory pionowe mogą nań działać jedynie w skrajnych przekrojach poprzecznych. Przyłożone gdzieindziej powodowałyby przerwę ciągłości wykresu  $T_w$ . Odkształcona miałaby przeto punkt osobliwy o dwóch różnych stycznych, co jest zgoła wykluczone dla pręta rzeczywistego, jako że wtedy powłoki odnośnej płytki musiałyby się przeciąć — wniknąć w siebie wzajemnie.

Odpory pionowe równoważą siły obciążenia pionowego. Warunek ten stanowi istotę równania sił pionowych, pierwszego równania statyki dla pręta wyobraźalnego. Drugie równanie—sił poziomych odpada, pozostaje zatem równanie momentów. To równanie w zastosowaniu do pręta wyobraźalnego może być wypisane tylko dla pewnych punktów. Wiemy, że  $M_w$  daje wartość  $EJf$ . Ponad podporami pręta rzeczywistego  $f = 0$ , przeto w odnośnych punktach pręta wyobraźalnego panować winna zero-wa wartość momentu  $M_w$ . Ile więc podpór dźwiga pręt rzeczywisty, tyle możemy równań momentów wypisać dla pręta wyobraźalnego. Z nich wyznaczmy niewiadome odpory i momenty odporowe. Poza tem wiemy, że  $T_w$  daje wartość  $EJ\theta$ . Dla przekrojów pręta rzeczywistego zamocowanych:  $\theta = 0$ , zatem w odnośnych punktach pręta wyobraźalnego pano-

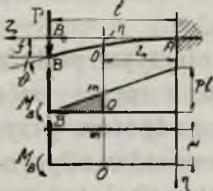
wać winna zerowa wartość siły tnącej  $T_w$ . Na mocy rozważań powyższych możemy ustalić następujące prawa ogólne:

*W podpartym skrajnym przekroju pręta wyobraźmalnego panuje odpór pionowy i moment odporowy, gdy odpowiedni koniec pręta rzeczywistego nie jest podparty.*

*W podpartym skrajnym przekroju pręta wyobraźmalnego panuje jeno odpór pionowy, gdy odpowiedni koniec pręta rzeczywistego spoczywa na podporze rolkowej, lub przegubowej.*

*Skrajny przekrój pręta wyobraźmalnego nie jest podparty, gdy odpowiedni koniec pręta rzeczywistego jest zamocowany. Przykłady najlepiej wyjaśnią istotę rzeczy.*

**§ 24. Pręt osadzony jednostronnie.** W założeniu siły skupionej  $P$ , działającej w skrajnym przekroju swobodnym pręta otrzymamy wykres momentów gnących  $M$  w postaci (Rys. 42) trójkąta prostokątnego, w którym podstawa równa  $l$  a wysokość—druga przyprostokątna równa jest  $Pl$ . W danym wypadku wobec zamocowania prawego końca pręta rzeczywistego, pręt wyobraźalny może mieć tylko jedną podporę lewą. Siedliskuje w niej odpór pionowy  $B$  i moment odporowy  $M_B$ . Równanie sił pionowych będzie:



Rys. 42.

$B + \frac{1}{2} Pl^2 = 0$ . Stąd:  $B = -\frac{1}{2} Pl^2$ . Równanie momentów, wypisane dla skrajnego prawego przekroju da nam:  $M_B + Bl + \frac{1}{6} Pl^3 = 0$ . Stąd  $M_B = \frac{1}{3} Pl^3$ .

Oznaczmy przez  $f$  końcową strzałkę pręta rzeczywistego, przez  $\theta$  — kąt nachylenia ku osi  $B$  skrajnej stycznej odkształconej. Na mocy powyżej wyłożonej teorii  $\theta = -B : EJ = \frac{1}{2} Pl^2 : EJ$ ,  $f = M_B : EJ = \frac{1}{3} Pl^3 : EJ$ . Te same wzory otrzymaliśmy w § 4. Zmieniliśmy wyżej znak u  $B$  na odwrotny. Konieczność tej zamiany narzuca się w danym wypadku, ponieważ kierunki sprowadzania sił i wzrostu odciętych  $\zeta$  są sprzeczne, należy przeto wzory podstawowe wypisać w postaci  $EJ\eta'' = M$ ,  $EJ\eta''' = dM : (-d\zeta) = -T$ ,  $EJ\eta'''' = (-dT) : (-d\zeta) = p$ , ponieważ  $dM$  i  $d\zeta$ ,  $dT$  i  $d\zeta$  są znaków odwrotnych. Ta uwaga dotyczy również i następnych przykładów. Wyznamy w dalszym ciągu siłę tnącą  $T_w$ , panującą w przekroju  $O$ , gdziekolwiek na pręcie wyobraźalnym. Odnośny środek przekroju pręta rzeczywistego będzie miał spórzędne  $\zeta$  i  $\eta$ . Zatem  $T_w = B + \frac{1}{2} (l - \zeta) \times Om = -\frac{1}{2} Pl^2 + \frac{1}{2} P (l - \zeta)^2$ , ponieważ  $Om = Pl (l - \zeta) : l$ . Inaczej jeszcze  $T_w = -P \zeta (l - \frac{1}{2} \zeta) = -EJ\eta'$ . Z kolei wyznaczamy dla tego samego przekroju  $M_w = M_B + B (l - \zeta) + \frac{1}{2} P (l - \zeta)^2 \times \frac{1}{3} (l - \zeta) = \frac{1}{3} Pl^3 - \frac{1}{2} Pl^2 (l - \zeta) + \frac{1}{6} P (l - \zeta)^3 = \frac{1}{2} P \zeta^2 (l - \frac{1}{3} \zeta) = EJ\eta$ . To samo mieliśmy w § 4. Założmy teraz, iż miasto siły  $P$  w końcowym przekroju pręta rzeczywistego działa moment gnący  $\mu$ , a otrzymamy wykres momentów w postaci prostokąta o podstawie równej  $l$  i wysokości  $\mu$ . Prostokąt leży na pręcie wyobraźalnym, który i w danym wypadku będzie miał tylko lewą podporę  $B$ . Równanie sił daje:  $B + \mu l = 0$ , skąd  $B = -\mu l$ .

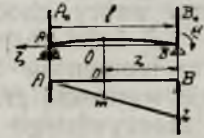


Nadto z równania momentów:  $M_B + Bl + \frac{1}{2} \mu l^2 = 0$  otrzymamy  $M_B = -\frac{1}{2} \mu l^2$ . Zachowując poprzednie znakowania możemy napisać  $\theta = -T_{wB} : EJ = \mu l : EJ$ ,  $f = M_B : EJ = \frac{1}{2} \mu l^2 : EJ$ , a nadto  $T_w = -\mu l + \mu (l - \zeta) = -\mu \zeta = -EJ\eta'$  oraz  $M_w = M_B + B(l - \zeta) + \frac{1}{2} \mu (l - \zeta)^2 = \frac{1}{2} \mu \zeta^2 = EJ\eta$ .

Sprawdźmy to bezpośrednio, całkując równanie gięcia  $EJ\eta'' = \mu$ . Daje ono  $EJ\eta' = C + \mu \zeta$ ,  $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{2} \mu \zeta^2$ . W obec osadzenia pręta  $\eta = \eta' = 0$  dla  $\zeta = 0$ , a zatem  $C = D = 0$ , skąd  $EJ\eta' = \mu \zeta$ ,  $EJ\eta = \frac{1}{2} \mu \zeta^2$ , jak wyżej.

**§ 25. Belka jednoprzęsłowa, obciążona momentem gnącym ponad podporą.**

Belkę poziomą opartą na prawej przegubowej i lewej rolkowej podporze (Rys. 43) obciążono momentem gnącym  $\mu$  w skrajnym podpartym przekroju prawym. Obciążenie to da odpory pionowe  $A_0$  i  $B_0$ , czyniące zadość równaniom statyki  $A_0 + B_0 = 0$ ,  $A_0 l + \mu = 0$ . Stąd  $A_0 = -\mu : l$ ,  $B_0 = \mu : l$ . W odległości  $\zeta$  od początku współrzędnych obieramy przekrój poprzeczny i sprowadzamy do jego środka odporę  $A_0$ . Da ona moment gnący  $M = -\mu (l - \zeta) : l$ . Wykres momentów  $M$  będzie miał postać trójkąta  $ABb$ , przyczem  $AB=l$ ,  $Bb = -\mu$ . Trójkąt spoczywa na pręcie wyobraźnym, podpartym w  $A$  i  $B$ . Łatwo wyznaczmy odpory pionowe pręta wyobraźnego, pisząc równanie sił:  $A + B - \frac{1}{2} \mu l = 0$  i momentów dla punktu  $A$  lub  $B$ . Dla  $B$  będziemy mieli  $Al - \frac{1}{2} \mu l \times \frac{1}{3} l = 0$ , skąd:  $A = \frac{1}{6} \mu l$ ,  $B = \frac{1}{3} \mu l$ . Zatem  $T_w = A + \frac{1}{2} (l - \zeta) \times Om = \frac{1}{6} \mu l - \frac{1}{2} \mu (l - \zeta)^2 : l$ , ponieważ  $Om = -\mu (l - \zeta) : l$ . Inaczej jeszcze  $T_w = \frac{1}{6} \mu l - \frac{1}{2} \mu (l - \zeta)^2 : l = -EJ\eta'$ .

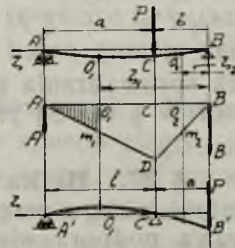


Rys. 43.

Czyniąc w tym wzorze kolejno  $\zeta = l$  i  $\zeta = 0$ , znajdziemy pochylenie skrajnych stycznych odkształconej  $\theta_A = -\frac{1}{6} \mu l : EJ$ ,  $\theta_B = \frac{2}{3} \mu l : EJ$ . Dalej mamy:  $M_w = A(l - \zeta) - \frac{1}{2} \mu (l - \zeta)^2 : l \times \frac{1}{3} (l - \zeta) = \frac{1}{6} \mu l (l - \zeta) - \frac{1}{6} \mu (l - \zeta)^3 : l = \frac{1}{6} \mu l^2 - \frac{1}{6} \mu l \zeta - \frac{1}{6} \mu (l - \zeta)^3 : l = EJ\eta$ . Te same wzory możemy otrzymać bezpośrednio, całkując równanie  $EJ\eta'' = A_0 (l - \zeta) = -\mu (l - \zeta) : l$ . Dla pręta o stałym przekroju będziemy mieli  $EJ\eta' = C + \frac{1}{2} \mu (l - \zeta)^2 : l$ ,  $EJ\eta = D + C\zeta - \frac{1}{6} \mu (l - \zeta)^3 : l$ . W danym wypadku  $\eta = 0$ , gdy  $\zeta = l$ , lub  $\zeta = 0$ . Stąd  $D + Cl = 0$ ,  $D - \frac{1}{6} \mu l^2 = 0$ , co daje  $D = \frac{1}{6} \mu l^2$ ,  $C = -\frac{1}{6} \mu l$ . Podstawiając te wartości, odnajdziemy poprzednio otrzymane wzory.

**§ 26. Belka jednoprzęsłowa, obciążona siłą skupioną.**

W wypadku obciążenia siłą skupioną wewnętrzną  $P$ , otrzymamy (Rys. 44) dla tej samej belki wykres w postaci trójkąta  $ABD$ , leżącego na pręcie wyobraźnym. Łatwo wyznaczmy oba jego odpory, nazywając przez  $a$  odległość osi siły  $P$  od lewej podpory, przez  $b$  — od prawej. W tym założeniu wysokość trójkąta  $H = CD = -Pab : l$ , gdzie  $l = a + b$ . Równania statyki, wypisane dla prawego końca pręta wyobraźnego dadzą:



Rys. 44.

$A + B + \frac{1}{2} Hl = A + B - \frac{1}{2} Pab = 0$ ,  $Al + \frac{1}{2} Ha (b + \frac{1}{3} a) + \frac{1}{2} Hb \times \times \frac{2}{3} b = Al - \frac{1}{2} Pab (ab + \frac{1}{3} a^2 + \frac{2}{3} b^2) : l = 0$ . Stąd bezpośrednio  $A = \frac{1}{6} Pab (a + 2b) : l = \frac{1}{6} Pb (l^2 - b^2) (l + b) : l = \frac{1}{6} Pb (l^2 - b^2) : l$ . Na mocy symetrii liter  $B = \frac{1}{6} Pa (l^2 - a^2) : l$ , a przeto dla lewej pości wykresu, w odcinku  $a$ , będziemy mieli  $T_w = A + \frac{1}{2} (l - \zeta) \times O_1 m_1 = = \frac{1}{6} Pb (l^2 - b^2) : l - \frac{1}{2} Pb (l - \zeta)^2 : l = -EJ\eta'$ ,  $M_w = A (l - \zeta) + + \frac{1}{2} (l - \zeta) \times O_1 m_1 \times \frac{1}{3} (l - \zeta) = \frac{1}{6} Pb (l^2 - b^2) (l - \zeta) : l - \frac{1}{6} Pb (l - - \zeta)^3 : l = EJ\eta$ , tutaj bowiem  $O_1 m_1 = H (l - \zeta) : a = -Pb (l - \zeta) : l$ . To samo mieliśmy w § 4 niniejszego rozdziału. Dla drugiej pości, w odcinku  $b$ , mamy:  $-T_w = B + \frac{1}{2} \zeta \times O_2 m_2 = \frac{1}{6} Pa (l^2 - a^2) : l - - \frac{1}{2} Pa \zeta^2 : l = EJ\eta'$ ,  $-M_w = B \zeta + \frac{1}{2} \zeta \times O_2 m_2 \times \frac{1}{3} \zeta = \frac{1}{6} Pa (l^2 - - a^2) \zeta : l - \frac{1}{6} Pa \zeta^3 : l = \frac{1}{6} Pa \zeta (l^2 - a^2 - \zeta^2) : l = EJ\eta$ , tutaj bowiem  $O_2 m_2 = H \zeta : b = -Pa \zeta : l$ . Znak ujemny przed  $T_w$  i  $M_w$  jest tu konieczny, zmieniamy bowiem kierunek sprowadzania sił na odwrotny. Te same wzory, choć w innej nieco postaci mieliśmy już w § 4.

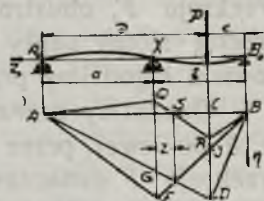
Z kolei rozpatrujemy obciążenie skupioną siłą  $P$ , zewnętrzną. Wykres momentów będzie miał kształt zupełnie podobny, różnić się jeno będzie wartością  $H$ . Oznaczmy przez  $l$  odległość pomiędzy podporami pręta rzeczywistego  $A'$  i  $C'$ , przez  $a$  odległość punktu przyłożenia siły  $P$  od osi prawej podpory. Równania statyki, wypisane dla prawego skrajnego przekroju pręta rzeczywistego, dadzą  $A' + C' + P = 0$ ,  $A' (l + + a) + C'a = 0$ . Stąd:  $A' = Pa : l$ ,  $C' = -P (l + a) : l$ , a przeto  $H = A'l = Pa$ . Z kolei wyznaczmy odpory  $A$ ,  $B$  oraz moment odporowy  $M_B$  pręta wyobraźnego. Równanie sił pionowych da nam  $A + + B + \frac{1}{2} Pa (a + l) = 0$ , nadto, ponieważ  $M_{wc} = 0$ , przeto dla tego punktu możemy wypisać równanie momentów w postaci  $Al + \frac{1}{2} Hl \times \times \frac{1}{3} l = 0$ , skąd  $A = -\frac{1}{6} Pal$ . Nadto z równania sił pionowych  $B = = -\frac{1}{3} Pal - \frac{1}{2} Pa^2$ . Równanie momentów dla punktu  $B$  da:  $A (l + + a) + \frac{1}{2} Hl (a + \frac{1}{3} l) + \frac{1}{2} Ha \times \frac{2}{3} a = M_B$ , skąd  $M_B = \frac{1}{3} Pa^2 (l + a)$ . Dla lewej pości wykresu, w odcinku  $l$ , będziemy mieli, umieszczając początek stałej osi  $B'\zeta$  w prawym końcu pręta wyobraźnego:  $T_w = A + + \frac{1}{2} (l + a - \zeta) \times O_1 m_1 = -\frac{1}{6} Pal + \frac{1}{2} Pa (l + a - \zeta)^2 : l = -EJ\eta'$ .  $M_w = A (l + a - \zeta) + \frac{1}{2} (l + a - \zeta) \times O_1 m_1 \times \frac{1}{3} (l + a - \zeta) = - - \frac{1}{6} Pal (l + a - \zeta) + \frac{1}{6} Pa (l + a - \zeta)^3 : l = EJ\eta$ , tutaj bowiem  $O_1 m_1 = = Pa (l + a - \zeta) : l$ . Te same wzory, choć w innej nieco postaci, mieliśmy już w § 6 niniejszego rozdziału. Dla drugiej pości, w odcinku  $a$ , mamy:  $-T_w = B + \frac{1}{2} \zeta \times O_2 m_2 = -\frac{1}{3} Pal - \frac{1}{2} Pa^2 + \frac{1}{2} P \zeta^2 = EJ\eta'$ ,  $-M_w = M_B + B \zeta + \frac{1}{2} \zeta \times O_2 m_2 \times \frac{1}{3} \zeta = \frac{1}{3} Pa^2 (l + a) - \frac{1}{3} Pal \zeta - - \frac{1}{2} Pa^2 \zeta + \frac{1}{6} P \zeta^3 = EJ\eta$ , tu bowiem  $O_2 m_2 = Pa \zeta : a = P \zeta$ . I tu znak ujemny przed  $T_w$  i  $M_w$  jest konieczny, zmieniliśmy bowiem kierunek sprowadzania sił. Wzory powyższe różnią się tylko kształtem od wzorów § 6. Są przytem znacznie prostsze.

**§ 27. Belka dwuprzęsłowa, obciążona siłą skupioną.** Rozpiętość lewego przęsła (Rys. 45) oznaczamy przez  $a$ , prawego przez  $b$ . Prawa podpora niech będzie przegubowa, lewa i środkowa — rolkowe. W odległości  $c$  od prawej podpory i  $d$  od lewej działa na belkę siła sku-



piona  $P$ . Odrzućmy podporę środkową i na jej miejsce wprowadźmy pionowy odpór  $X$ . Łączne działanie sił  $X, P$  wytworzy oczywiście te same warunki, możemy przeto rozpatrywać jednocześnie dwa wykresy momentów gnących  $ABD$  siły  $P$  i  $ABF$  odpory  $X$ .

Oba wykresy dają obciążenie pręta wyobraźnego, przyczem niewątpliwie wysokość pierwszego trójkąta  $H = -Pcd : l$ , drugiego  $K = -Xab : l$ , gdzie  $l = a + b = c + d$ . Wyznaczmy odpory pręta wyobraźnego. Ponieważ pod podporami  $M_{wA} = M_{wX} = M_{wB} = 0$ , przeto możemy napisać  $M_{wB} = A(a + b) + \frac{1}{2} aK(b + \frac{1}{3} a) + \frac{1}{2} bK \times \frac{2}{3} b + \frac{1}{2} dH(c + \frac{1}{3} d) + \frac{1}{2} cH \times \frac{2}{3} c = A(a + b) - \frac{1}{6} Xab(a + 2b) - \frac{1}{6} Pcd(d + 2c) = 0$ ,  $M_{wX} = Aa + \frac{1}{2} aK \times$



Rys. 45.

$\times \frac{1}{3} a + \frac{1}{2} a \times XG \times \frac{1}{3} a = Aa - \frac{1}{6} Xa^3b : (a + b) - \frac{1}{6} Pa^3c : (a + b) = 0$ , ponieważ odnośna rzędna wykresu momentów  $XG = Ha : d = -Pac : (a + b)$ . Ostatnie równanie da nam  $A(a + b) - \frac{1}{6} Xa^2b - \frac{1}{6} Pa^2c = 0$ , zatem, odejmując od pierwszego otrzymamy:  $X = Pc(a^2 - d^2 - 2cd) : 2ab^2 = -Pc(b^2 + 2ab - c^2) : 2ab^2$ . Po podstawieniu tej wartości w jedno z równań powyższych otrzymamy  $A = -Pac(b^2 - c^2) : 12b(a + b)$ . Równanie sił pionowych  $A + B + \frac{1}{2} l(H + K) = A + B - \frac{1}{2} Xab - \frac{1}{2} Pcd = 0$  da nam:  $B = Pc(b - c)^2 : 4b - A = Pc(b - c)^2 : 4b + Pac(b^2 - c^2) : 12b(a + b)$ . Z kolei mamy  $K = -Xab : l = Pc(b^2 + 2ab - c^2) : 2b(a + b) > 0$ , ponieważ zaś  $XG = -Pac : (a + b) < 0$  przeto  $GF = K + XG = Pc(b^2 - c^2) : 2b(a + b) > 0$ , możemy bowiem zawsze założyć, że  $P > 0$ . Podobnie również  $CJ = KC : b = -Xac : l = -Pc^2(a^2 - d^2 - 2cd) : 2b^2(a + b) > 0$ . Wobec tego, że  $CD = -Pcd : (a + b) < 0$ , będziemy mieli  $JD = CD + CJ = -Pc[2d(b^2 - c^2) - c(d^2 - a^2)] : 2b^2(a + b) = -Pc(b - c)[2d(b + c) - c(d + a)] : 2b^2(a + b) = -Pc(b - c)[2bd + c(d - a)] : 2b^2(a + b) < 0$ . Odłożymy odcinek  $XQ = GF$  na osi podpory środkowej, oraz  $CR = JD$  na osi siły  $P$ , a otrzymamy wykres momentów gnących w postaci łamanej  $AQRB$ , przecinającej podstawę w drugiej połaci wykresu  $XB$ . Zawsze więc pomiędzy osią siły, a podporą środkową odkształcona ma punkt przegięcia w  $S$ . Z podobieństwa trójkątów wypływa:  $z : (b - c - z) = XQ : CR = b(b + c) : [2db + c(d - a)]$ . Stąd  $z = b(b^2 - c^2) : [2db + c(b - c) + b(b + c)]$ . Wyznaczenie  $T_w, M_w$  z wykresu z łatwością każdorazowo może być wykonane. Powyższy przykład wskazuje, jak cennym narzędziem staje się sposób rachunkowo wykreślny przy wyznaczaniu warunków pracy belek wieloprzęsłowych. Dzięki jemu również nie stręczy żadnych trudności poważnych badanie wygięcia —

**§ 28. Belki o zmiennym przekroju poprzecznym.** Przekrój poprzeczny belek tego rodzaju może się zmieniać w sposób ciągły, jak w prętach stałej wytrzymałości, o których była mowa wyżej, lub też nagłymi skokami, jak na (Rys. 46), gdzie mamy połowę wału o trzech uskokach średnicy. Właściwie mówiąc przekrój  $F$  wybiega poza dziedzinę naszych założeń zasadniczych, ponieważ powłoki tego przekroju różnią

się o wartość skończoną. Mimo to stosujemy i w danym wypadku wzory zwykle w braku właściwszych. Błąd popełniany w ten sposób zapewne nie jest znaczny, bo zwykle wzory gięcia zawodzą tylko dla samego przekroju  $F$ , obustronnie natomiast mogą być stosowane bez zastrzeżeń. Zresztą istotny nagły uskok przekroju spotyka się dość rzadko, zazwyczaj bowiem łagodzimy przejście zaokrągleniami.

Oznaczmy przez  $EJ_b$  sztywność pręta w odnośnej powłoce przekroju  $F$  po lewej, przez  $EJ_c$  po prawej stronie przekroju. Moment gnący przekroju  $F$  oznaczamy przez  $M$  i zakładamy, że zmienia się on w ten miejscu w sposób ciągły. Przekrój  $F$  dzieli płaszczyznę gięcia na dwa obszary zmienności, możemy przeto napisać dla lewego obszaru  $EJ_b\eta'' = M$ , dla prawego  $EJ_c\eta'' = M$ . Oznaczmy przez  $\varphi(\zeta)$  funkcję całkową  $M$ , a przez  $\Psi(\zeta)$  takąż funkcję  $\varphi(\zeta)$ . W tem założeniu, całkując, mamy dla lewej połaci  $EJ_b\eta' = C_b + \varphi(\zeta)$ ,  $EJ_b\eta = D_b + C_b\zeta + \Psi(\zeta)$ , dla prawej  $EJ_c\eta' = C_c + \varphi(\zeta)$ ,  $EJ_c\eta = D_c + C_c\zeta + \Psi(\zeta)$ . Czyniąc w tych wzorach  $\zeta = \zeta_0$ , otrzymamy  $\eta_0$  i  $\eta'_0$  dla środka przekroju  $F$ , a więc dla punktu odkształconej, leżącego na granicy obu obszarów. Obie grupy wzorów muszą dać niewątpliwie te same wartości w danym wypadku. Łatwo to udowodnić, zważywszy, że odkształcona podwójnego punktu mieć nie może w tym samym przekroju, wartości  $\zeta = \zeta_0$  musi więc odpowiadać jedna tylko wartość  $\eta_0$ . Nadto wartości  $\zeta = \zeta_0$  winna odpowiadać również tylko jedna wartość  $\eta'_0$ , w przeciwnym bowiem razie nastąpiłoby przecięcie się obu powłok przekroju  $F$ , co niewątpliwie należy uważać, jako niemożliwe dla pręta istotnego. A przeto:  $[C_b + \varphi(\zeta_0)] : J_b = [C_c + \varphi(\zeta_0)] : J_c$ ,  $[D_b + C_b\zeta_0 + \Psi(\zeta_0)] : J_b = [D_c + C_c\zeta_0 + \Psi(\zeta_0)] : J_c$ . Tym równaniom możemy uczynić zadość tożsamościowo przy wszelkiej różnicy  $J_b$  i  $J_c$  i dla wszelkich obciążeń tylko w tym wypadku, gdy  $\varphi(\zeta_0) : J_b$ ,  $\Psi(\zeta_0) : J_b$ ,  $C_b : J_b$ ,  $D_b : J_b$  dla lewej połaci będą odpowiednio równe  $\varphi(\zeta_0) : J_c$ ,  $\Psi(\zeta_0) : J_c$ ,  $C_c : J_c$ ,  $D_c : J_c$  dla prawej. Inaczej mówiąc należy jedną połać sprowadzić do drugiej w stosunku odnośnych sztywności pręta, to jest miasto istotnego pręta brać pręt sprowadzony o przekroju stałym. W ten sposób zbudowany pręt wyobraźalny będzie niewątpliwie tożsamościowy z rzeczywistym eo do wymiarów i obciążenia po jednej stronie granicznego przekroju, po drugiej zaś otrzyma przekrój szerszy w stosunku sztywności, lecz wzamian za to powinien ulegać obciążeniu zwielokrotnionemu w tym samym stosunku. Słowem, jak w danym wypadku, miasto pręta rzeczywistego, obciążonego momentem  $M$ , pręta o sztywnościach  $EJ_b$  i  $EJ_c$  po obu stronach przekroju  $F$ , należy wziąć pod uwagę pręt wyobraźalny stałego przekroju, dajmy na to o sztywności  $EJ_c$ . W ten sposób sztywność prawej połaci pozostanie ta sama, lewej zwiększy się w stosunku  $J_c : J_b$ . W tym samym stosunku należy zwielokrotnić obciążenie lewej połaci, aby warunki pracy po-

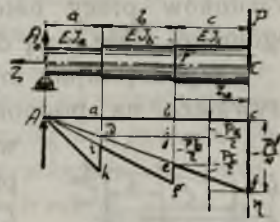


zostały bez zmiany. Zatem po lewej stronie przekroju granicznego wienien panować moment gnący  $MJ_c : J_b$ , po prawej dawny moment  $M$ . Odształcona pręta wyobraźnalnego będzie oczywiście odształconą pręta rzeczywistego. Istotę powyższego sposobu najlepiej ocenimy, rozpatrując przykład. Przy sposobności zaznaczamy, że dla pręta o stałym przekroju  $J_b = J_c$  zatem i  $C_b = C_c$ ,  $D_b = D_c$ , o ile moment  $M$  zmienia się w sposób ciągły ponad przekrojem rozpatrywanym. Wynika to bezpośrednio ze wzorów powyżej wypisanych. Na tej zasadzie opieraliśmy się milcząco, pisząc wzory momentów z kreskami dla różnorodnych pości zmienności momentów. Dzięki temu przy całkowaniu mieliśmy zawsze tylko dwie stałe całkowania, co znacznie ułatwia rachunek.

Łatwo to zrozumiemy przejrawszy ponownie poszczególne przykłady gięcia. Gdybyśmy w nich dla każdej pości zmienności momentów wypisywali oddzielnie równania gięcia, to liczba stałych całkowania byłaby równa podwojonej liczbie pości, a wyznaczanie stałych stałoby się ciężką pracą. Ominięcie tej trudności zawdzięczamy *Clebsch'owi*.

### § 29. Belka jednoprzęsłowa o zmiennym przekroju poprzecznym.

Przykład najprostszy najlepiej uwypukli istotę rzeczy, zwłaszcza, że często spotyka się w praktyce. Zakłady elektrotechniczne wymagają pewnej skrajnej strzałki ugięcia wałów obustronnie podpartych, a obciążonych po środku wirnikiem prądnicy. Bierzemy tedy pod uwagę połowę symetrycznego wału (Rys. 46), obustronnie końcami podpartego, a obciążonego siłą  $P$  po środku. W odcinkach skrajnych  $a$  panuje stała sztywność  $EJ_a$ , w odcinkach  $b$  — sztywność  $EJ_b$ , wreszcie w odcinku środkowym  $2c$  mamy sztywność  $EJ_c$ . Istotny wykres momentów, a raczej jego połowę daje trójkąt  $Acf$ , gdzie  $cf = -\frac{1}{4}Pl = -\frac{1}{2}P(a + b + c)$ . Obierzmy najsutszy przekrój jako przekrój pręta wyobraźnalnego. Odnośną część  $bcfe$  wykresu momentów należy przeto pozostawić bez zmiany, natomiast w odcinku  $b$  — zwiększyć rzędne wykresu w stosunku  $m = J_c : J_b$ , oraz w odcinku  $a$  — w stosunku



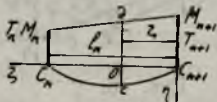
Rys. 46.

$n = J_c : J_a$ . W ten sposób otrzymamy wykres wyobraźalny momentów  $Ahigefc$ . Łatwo zrozumieć, że promienie  $Ah$ ,  $ig$ ,  $ef$  przecinają się w  $A$ . Wyznaczamy środkową strzałkę ugięcia pręta, stosując sposób rachunkowo wykreślny. W tym celu wyznaczamy odpór  $A$ , równy polu połowy wykresu. Pole wykresu dzielimy na trzy trójkąty i dwa prostokąty. Będą to: trójkąt  $Aad$ , zwielokrotniony w stosunku  $n$ , prostokąt  $abjd$  i trójkąt  $dje$  —  $m$  razy większe, wreszcie prostokąt  $bcke$  oraz trójkąt  $ckf$ . Ponieważ  $da = -\frac{1}{2}Pa$ ,  $ej = -\frac{1}{2}Pb$ ,  $kf = -\frac{1}{2}Pc$ , przeto  $A = \frac{1}{4}P [na^2 + m(2ab + b^2) + 2c(a + b) + c^2]$  oraz  $M_{wc} = A(a + b + c) - \frac{1}{4}nPa^2(\frac{1}{2}l + \frac{2}{3}a) - \frac{1}{2}mPab(c + \frac{1}{2}b) - \frac{1}{4}mPb^2(c + \frac{1}{3}b) - \frac{1}{2}Pc(a + b) \times \frac{1}{2}c - \frac{1}{4}Pc^2 \times \frac{1}{3}c = \frac{1}{6}nPa^3 + \frac{1}{6}mP(3a^2b + 3ab^2 + b^3) + \frac{1}{6}P[3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3] = \frac{1}{6}P(a + b +$

+ c)<sup>3</sup> +  $\frac{1}{6} P (n - 1) a^3$  +  $\frac{1}{6} P (m - 1) (3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3) = E J_c f$ .  
 Stąd:  $f = \frac{1}{48} P l^3 : E J_c + \frac{1}{6} P a^3 (1 : E J_a - 1 : E J_c) + \frac{1}{6} P (3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3) (1 : E J_b - 1 : E J_c)$ . Wzór ten wyprowadziliśmy dla pręta o trzech uskokach przekroju najczęściej spotykanego. Dla pręta o dwóch uskokach należy uczynić  $c = 0$  i  $m = 1$ , co da  $M_{wc} = \frac{1}{6} P (a + b)^3 + \frac{1}{6} P (n - 1) a^3 = E J_b f$ , skąd  $f = \frac{1}{48} P l^3 : E J_b + \frac{1}{6} P a^3 (1 : E J_a - 1 : E J_b)$ . Widzimy tu pewien algorytm, to też bez żadnych trudności możemy dla pręta o czterech uskokach przekroju wypisać wprost:  
 $E J_d f = \frac{1}{48} P l^3 + \frac{1}{6} (n - 1) P a^3 + \frac{1}{6} (m - 1) P (3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3) + \frac{1}{6} (k - 1) P [3 (a + b)^2 c + 3 (a + b) c^2 + c^3]$ , gdzie  $n = J_c : J_d$ ,  $m = J_b : J_d$ ,  $k = J_c : J_d$ . Istota algorytmu polega na tem: podnosimy do sześciianu,  $\frac{1}{2} l = a + b + c + d + \dots$ , wyłączając ostatni składnik. W poprzednio rozpatrywanym wypadku będzie to oczywiście  $d$ . Będziemy mieli przeto  $[(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3 (a + b)^2 c + 3 (a + b) c^2 + c^3$ . Odrzuciwszy pierwszy składnik, otrzymamy spódczynnik wymiarowy ostatniego wyrazu dla  $E J_f$ . Z kolei w odrzuconym wyrazie  $(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$  pomijamy składnik pierwszy, reszta da znów spódczynnik wymiarowy przedostatniego wyrazu wzoru dla  $E J_f$ , a odrzucony składnik da spódczynnik pierwszego wyrazu. Łatwo to uogólnić. Przy  $n = m = k = \dots = 1$  wszystkie te wzory dają  $f = \frac{1}{48} P l^3 : E J$ . To samo otrzymaliśmy w § 4 rozdziału niniejszego.

**§ 30. Twierdzenie o trzech momentach.** Podany powyżej sposób rachunkowo wykreślony stanowi duże ułatwienie przy wyznaczaniu warunków pracy belek wieloprzęstowych, nie daje jednak rozwiązania ogólnego, jakie inną drogą otrzymamy.

Wyodrębnijmy myślowo jakiegokolwiek przęsto belki (Rys. 47), spoczywające na podporach  $C_n, C_{n+1}$ . Początek stałych osi obierzemy w podporze prawej  $C_{n+1}$ , prowadząc oś  $C_{n+1} \zeta$  wzdłuż pierwotnej osi belki. Oś  $C_{n+1} \eta$  kierujemy w dół,  $C_{n+1} \xi$  — ku patrzacemu. Wyznamy w układzie tych osi odkształconą, a na niej dowolny środek przekroju poprzecznego  $O(\zeta, \eta)$ . Panuje w nim moment gnący  $M$  na tle obciążenia belki, złożonego z sił prostopadłych do  $C_{n+1} \zeta$ , leżących w płaszczyźnie gięcia  $\zeta C_{n+1} \eta$ .



Rys. 47.

Chcemy go wyznaczyć. Płaszczyzna przekroju poprzecznego dzieli obciążenie gnące na dwa układy — lewy i prawy, będziemy nadal każdorazowo zawsze sprowadzali lewe układy sił do środka odnośnego przekroju. W danym wypadku przedewszystkiem należy uwzględnić pominiętą część układu lewego, obejmującą siły gnące, czynne na lewo od  $C_n$ . Uskuteczmy to z łatwością, sprowadzwszy całe obciążenie lewej części pręta do środka  $C_n$  przekroju podpartego, gdzie w ogólnym wypadku otrzymamy siłę tnącą  $T_n$  i moment gnący  $M_n$ . Te wypadkowe zastąpią działanie pominiętej części lewego układu. Oznaczmy nadto siły gnące



połaci  $C_n O$  przez  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), przez  $P_j$  ( $j = n + 1, n + 2, \dots, s$ ) siły połaci  $OC_{n+1}$ ; po sprowadzeniu do środka  $O$  lewego układu odkształcającego otrzymamy wypadkowy moment gnący  $M = M_n + T_n (l_n - \zeta) + \sum P_i (\zeta_i - \zeta)$ , gdzie dodawanie winno objąć wszystkie siły gnące połaci  $C_n O$ , odległe o  $\zeta_i$  od osi prawej podpory. Czyniąc w tym wzorze  $\zeta = 0$ , otrzymamy moment  $M_{n+1} = M_n + T_n l_n + \sum P_j \zeta_j$ , panujący ponad podporą  $C_{n+1}$ . Jest to moment wypadkowy sprowadzenia obciążenia lewej części belki. W tym wzorze dodawanie obejmuje wszystkie siły gnące całego przęsła. Zatem  $T_n = [M_{n+1} - M_n - \sum P_j \zeta_j] : l_n$  i ostatecznie  $M = M_n + (M_{n+1} - M_n) (l_n - \zeta) : l_n + \sum P_i (\zeta_i - \zeta) - \sum P_j \zeta_j (l_n - \zeta) : l_n$ .

Rozetnijmy belkę ponad podporami  $C_n$  i  $C_{n+1}$ , i, nie zmieniając układu sił gnących tego przęsła, ustawmy wyciętą część na podporze przegubowej — prawej i lewej — rolkowej. Powstaną w nich natychmiast odpory, które z łatwością wyznaczymy z równań statyki, wypisanych dla podpory prawej. Równanie sił będzie tu  $C_n + C_{n+1} + \sum P_j = 0$ , momentów:  $C_n l_n + \sum P_j \zeta_j = 0$ . Stąd  $C_n = -\sum P_j \zeta_j : l_n$ , a moment przekroju  $O$  będzie niewątpliwie dla belki rozciętej równy  $\mu = -\sum P_j \zeta_j (l_n - \zeta) : l_n + \sum P_i (\zeta_i - \zeta)$ . Zatem będziemy mieli  $M = M_n + (M_{n+1} - M_n) (l_n - \zeta) : l_n + \mu$ .

Wzór otrzymany stanowi tak zwane *twierdzenie o trzech momentach*: Wyznaczymy, idąc w kierunku sprowadzania sił, dwa przekroje pręta płasko zginanego — pierwszy i drugi, oraz ich momenty gnące pierwszy i drugi, a otrzymamy moment gnący jakiegokolwiek przekroju pośredniego w postaci sumy trzech momentów: momentu pierwszego więcej różnica momentu drugiego mniej pierwszy, mnożona przez odległość pośredniego przekroju od pierwszego i dzielona przez odległość przekrojów skrajnych, wreszcie więcej moment, jakoby powstał w przekroju pośrednim, gdyby pręt rozpiłowano wzdłuż obu przekrojów skrajnych, i, zachowując w całości obciążenie gnące, czynne pomiędzy nimi, oparto na podporach przegubowej i rolkowej. To twierdzenie najlepiej się uwydatnia w oświetleniu wykreslnem. Niech krzywa  $C_n C C_{n+1}$  stanowi wykres momentów  $\mu$  przęsła, a nadto niech  $C_n M_n = M_n$ ,  $C_{n+1} M_{n+1} = M_{n+1}$ . Łączymy końce tych odcinków prostą. Prowadząc  $cOd$  prostopadle do podstawy wykresu przez środek  $O$  danego przekroju, będziemy mieli  $Od = M_n + (M_{n+1} - M_n) (l_n - \zeta) : l_n$ ,  $Oc = \mu$ , zatem  $dc = M$ .

Momenty  $M_n$ ,  $M_{n+1}$  nazywamy zazwyczaj *momentami odporowymi*. Są one wygodniejsze w użyciu, niż siły — odpory, zwłaszcza w wypadkach belek statycznie niewyznaczalnych, gdzie nadto zazwyczaj stosujemy:

**§ 31. Całkowe równanie odkształconej.** Weźmy pod uwagę pręt płasko zgięty pod jarzmem sił gnących, leżących w płaszczyźnie

gięcia a prostopadłych do osi pierwotnej pręta. Ułożmy na niej oś  $\omega\zeta$ , obierając gdziekolwiek początek osi współrzędnych stałych. Oś  $\omega\zeta$  kierujemy na lewo, oś  $\omega\eta$  w dół, oś  $\omega\xi$  — ku patrzącemu. Na odkształconej obieramy dwa jakiegokolwiek punkty: jeden bieżący  $O(\zeta, \eta)$  i drugi  $O_0(\zeta_0, \eta_0)$ , stały „punkt wyjścia”. Przekrój poprzeczny pręta zakładamy zmienny. W danym wypadku z równania zasadniczego mamy  $\eta'' = M : EJ$ , skąd:

$$\eta' = \int \frac{M}{EJ} d\zeta + C, \quad \eta = \int \left[ \int \frac{M}{EJ} d\zeta \right] d\zeta + C\zeta + D = \zeta \int \frac{M}{EJ} d\zeta - \int \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta + C\zeta + D.$$

Tym trzem równaniom czynią zadość współrzędne punktu  $O$ . Ponieważ punkt wyjścia leży również na odkształconej,

$$\text{przeto: } \eta'_0 = \left[ \int \frac{M}{EJ} d\zeta \right]_0 + C, \quad \eta_0 = \zeta_0 \left[ \int \frac{M}{EJ} d\zeta \right]_0 - \left[ \int \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta \right]_0 + C\zeta_0 + D.$$

Odejmując te równania od poprzednio otrzymanych:

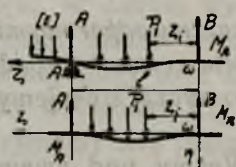
$$\eta' - \eta'_0 = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M}{EJ} d\zeta, \quad \eta - \eta_0 = \zeta \int \frac{M}{EJ} d\zeta - \zeta_0 \left[ \int \frac{M}{EJ} d\zeta \right]_0 - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta + C(\zeta - \zeta_0) = \zeta \int \frac{M}{EJ} d\zeta - \zeta_0 \left[ \int \frac{M}{EJ} d\zeta \right]_0 - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta + (\zeta - \zeta_0) \left\{ \eta'_0 - \left[ \int \frac{M}{EJ} d\zeta \right] \right\} = \zeta \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M}{EJ} d\zeta - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta + \eta'_0 (\zeta - \zeta_0).$$

Inaczej jeszcze możemy napisać  $\eta' = \eta'_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M}{EJ} d\zeta$ ,  $\eta = \eta_0 + (\zeta - \zeta_0) \eta'_0 + \zeta \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M}{EJ} d\zeta - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta$ . Są to całkowite równania odkształconej.

Można otrzymać z nich trzeci wzór, jako wynik bezpośredni. Pomnóżmy pierwsze równanie przez  $(\zeta - \zeta_0)$  i odejmijmy od drugiego,

a otrzymamy  $\eta - \eta_0 = \eta' (\zeta - \zeta_0) + \zeta_0 \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M}{EJ} d\zeta - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta$ . Ostatecznie będziemy mieli

$$\eta' = \frac{\eta - \eta_0}{\zeta - \zeta_0} + \frac{1}{\zeta - \zeta_0} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M(\zeta - \zeta_0)}{EJ} d\zeta.$$



Rys. 48.

Te trzy wzory całkowite są nader wygodne w użyciu. Zwłaszcza dla belek zamocowanych prowadzą bardzo szybko do celu, możemy bowiem zawsze przekrój osadzony rozpatrywać, jako początek współrzędnych, a wtedy  $\zeta_0 = \eta_0 = \eta'_0 = 0$ . Dwa proste przykłady najlepiej to uwypuklą. Bierzemy (Rys. 48) pod uwagę belkę jednostronnie osadzoną, drugostronnie wystającą poza podporę  $A$  rolkową, oraz belkę



obustronnie osadzoną. Obciążenie gnące obu belek stanowią siły  $P_i$ , działające w odległości  $\zeta_i$  od prawego przekroju osadzonego — skrajnego przekroju belki. Zgodnie z powyżej uczynioną uwagą — w tym przekroju umieścimy początek osi stałych, kierując oś  $B\zeta$  na lewo po osi pręta pierwotnej. Oś  $B\eta$  — w dół, a oś  $B\zeta$  — ku patrzącemu. W odległości  $l$  od początku spólrzędnych leży druga podpora  $A$  dla pierwszej belki rolkowa, dla drugiej stała. Odległość środka  $O$  dowolnego przekroju poprzecznego od przekroju osadczego oznaczamy przez  $\zeta$ , przez  $M$  — moment gnący tego przekroju. Wreszcie przez  $\mu$  — oznaczamy moment gnący, jakiby panował w tym samym przekroju, gdyby pręt rozpięto w  $A$  i  $B$  i, nie zmieniając obciążenia czynnego pomiędzy temi przekrojami, wsparto końcami na podporach rolkowej i przegubowej. Dla obu belek środek przekroju osadczego prawego gra rolę punktu wyjścia, zatem tu  $\zeta_0 = \tau_0 = \eta'_0 = 0$  i nasze wzory otrzymają postać

$$\eta' = \int_0^{\zeta} \frac{M}{EJ} d\zeta, \quad \eta = \zeta \int_0^{\zeta} \frac{M}{EJ} d\zeta - \int_0^{\zeta} \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta. \quad \text{W tych wzorach należy wyznaczyć wartość momentu gnącego.}$$

**§ 32. Belka osadzona jednostronnie.** Z równań statyki, wypisanych dla początku spólrzędnych w postaci  $A + B + \Sigma P_i = 0$ ,  $Al + \Sigma P_i \zeta_i + M_B = 0$ , wyznaczmy odpory pionowe  $A$ ,  $B$  w zależności od statycznie niewyznaczalnego momentu osadczego  $M_B$ , który równoważy moment gnący skrajnego swobodnego przekroju pręta. Dla lewej podpory mamy  $\eta = 0$  przy  $\zeta = l$ , a przeto z drugiego wzoru mamy

$$l \int_0^l \frac{M}{EJ} d\zeta = \int_0^l \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta. \quad \text{Pierwszy jest nieużyteczny w danym wy-$$

padku. Oznaczmy przez  $M_1$  moment gnący, jaki panuje w przekroju podpartym lewym. Możemy go zawsze wyznaczyć bezpośrednio, sprowadzając do środka przekroju  $A$  cały lewy układ  $[E]$  sił gnących, czynny na zwisającej części belki. Gdybyśmy znali wartość odporu  $A$ , moglibyśmy wyznaczyć moment  $M_0$  prawego skrajnego przekroju, idąc w tym samym kierunku przy sprowadzaniu sił. Nie znamy jednak tej wartości, natomiast wiemy, że  $M_0 + M_B = 0$ . Zatem  $M = M_1 + (M_0 - M_1)(l - \zeta) : l + \mu = M_1 - (M_B + M_1)(l - \zeta) : l + \mu$  dla podpartej części pręta. Po podstawieniu tej wartości we wzór poprzednio otrzy-

$$\text{many będziemy mieli: } \int_0^l \frac{M(l - \zeta)}{EJ} d\zeta = M_1 \int_0^l \frac{l - \zeta}{EJ} d\zeta -$$

$$- \frac{M_B + M_1}{l} \int_0^l \frac{(l - \zeta)^2}{EJ} d\zeta + \int_0^l \frac{\mu(l - \zeta)}{EJ} d\zeta = 0. \quad \text{Z tego równania}$$

wyznamy  $M_B$ . W szczególnym wypadku, gdy pręt urywa się ponad podporą  $A$ , układ sił  $[E]$  nie istnieje i  $M_1 = 0$ . Zatem:

$$M_B = l \int_0^l \frac{\mu(l - \zeta)}{EJ} d\zeta : \int_0^l \frac{(l - \zeta)^2}{EJ} d\zeta. \quad \text{Nadto dla pręta o przekroju}$$

stałym będziemy mieli wprost:  $M_B = l \int_0^l \mu (l - \zeta) d\zeta : \int_0^l (l - \zeta)^2 d\zeta =$   
 $= \frac{3}{l^2} \int_0^l \mu (l - \zeta) d\zeta$ . Gdy pręt jest jednostajnie obciążony w stosunku  
 $p$  kg na jednostkę długości, mamy  $\mu = -\frac{1}{2} pl (l - \zeta) + \frac{1}{2} p (l - \zeta)^2$ ,  
 a przeto  $M_B = -\frac{3}{2} \frac{p}{l} \int_0^l (l - \zeta)^2 d\zeta + \frac{3}{2} \frac{p}{l^2} \int_0^l (l - \zeta)^3 d\zeta = -$   
 $-\frac{1}{2} pl^2 + \frac{3}{8} pl^2 = -\frac{1}{8} pl^2$ . Gdy na pręt działa siła skupiona  $P$   
 w odległości  $b$  od przekroju osadczego, mamy  $\mu = -Pb (l - \zeta) : l +$   
 $+ P (b - \zeta)$ , przyczem płaszczyzna gięcia winna być podzielona osią si-  
 ły  $P$  na dwa obszary zmienności momentów. Odpowiednio również nale-  
 ży dobrać granice całkowania. Moment odpory  $A$  równy  $-Pb (l - \zeta) : l$   
 panuje na całej długości  $l$ , drugi moment składowy  $P (b - \zeta)$  — jeno  
 w odcinku  $b$ , dla tego też  $M_B = -3 \frac{Pb}{l^3} \int_0^l (l - \zeta)^2 d\zeta + 3 \frac{P}{l^2} \int_0^b (l -$   
 $- \zeta) (b - \zeta) d\zeta = -Pb + \frac{3P}{l^2} \int_0^b [lb - (l + b)\zeta + \zeta^2] d\zeta = -Pb (2l^2 -$   
 $- 3lb + b^2) : 2l^2$ . Te same wyniki mieliśmy w § 12 i § 13 rozdziału  
 niniejszego.

**§ 33. Belka osadzona obustronnie.** Z równań statyki, wypisa-  
 nych dla początku spółrzędnych w postaci  $A + B + \Sigma P_i = 0$ ,  $H_A +$   
 $+ H_B = 0$ ,  $M_A + Al + \Sigma P_i \zeta_i + M_B = 0$ , wyznaczmy oba odpory pio-  
 nowe  $A, B$  w zależności od statycznie niewyznaczalnych momentów  
 osadczych  $M_A, M_B$ . Nadto drugie równanie wiąże odpory poziome, któ-  
 re tu jawią się na tle działania obciążenia gnącego przy bezwzględnej  
 nieruchomości podpór. Istotnie, pierwotna oś pręta jest krótsza, niż od-  
 kształcona, zatem przy gięciu podpory muszą się zbliżyć ku sobie, lub  
 też w wypadku podpór stałych pręt musi się wydłużyć odpowiednio. To  
 wydłużenie nie istniało zupełnie w powyżej rozpatrywanych wypadkach,  
 ponieważ zawsze mieliśmy jedną tylko podporę nieruchomą przy pozost-  
 ałych — rolkowych. Pręt mógł wyginać się zupełnie swobodnie. Tu-  
 tutaj przy dwóch podporach stałych zachodzi gięcie mimośrodowe płaskie,  
 na tle rozciągających sił  $H_A$  i  $H_B$ . Zazwyczaj jednak bierzemy pod uwa-  
 gę tylko gięcie, czyniąc  $H_A = H_B = 0$ , a to dla tego, że podpór bez-  
 względnie stałych nie umiemy budować, a nadto głównie jeszcze i dla  
 tego, że przy nieznacznych, praktycznie jeno dopuszczalnych, wygięciach  
 pręta — rozciąganie jest niewątpliwie nader nieznaczne. Możemy przeto  
 pominąć odpory poziome. W ten sposób mamy już tylko dwie statycz-  
 nie niewyznaczalne. Łatwo je wyznaczymy, stosując wzory wyżej otrzy-  
 mane. Dla prawej podpory  $\eta_1 = \eta'_1 = 0$  przy  $\zeta_1 = l$ , a przeto

$$\int_0^l \frac{M}{EJ} d\zeta = 0 \text{ oraz } l \int_0^l \frac{M}{EJ} d\zeta = \int_0^l \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta. \text{ Inaczej jeszcze } \int_0^l \frac{M}{EJ} d\zeta =$$



$= \int_0^l \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta = 0$ . I tu znów, jak wyżej  $M = M_1 + (M_0 - M_1)(l - \zeta)$  :  
 $: l + \mu = M_A - (M_B + M_A)(l - \zeta) : l + \mu = (M_A + M_B)\zeta : l +$   
 $+ \mu - M_B$ , a przeto możemy napisać:  $\frac{M_A + M_B}{l} \int_0^l \frac{\zeta d\zeta}{EJ} - M_B \int_0^l \frac{d\zeta}{EJ} +$   
 $+ \int_0^l \frac{\mu d\zeta}{EJ} = \frac{M_A + M_B}{l} \int_0^l \frac{\zeta^2 d\zeta}{EJ} - M_B \int_0^l \frac{\zeta d\zeta}{EJ} + \int_0^l \frac{\mu \zeta d\zeta}{EJ} = 0$ . Z tych  
 równań wyznaczmy oba momenty statycznie niewyznaczalne. Dla pręta  
 o stałym przekroju otrzymamy po skróceniu przez  $1 : EJ$  i całkowaniu:

$$M_A - M_B + \frac{2}{l} \int_0^l \mu d\zeta = 2 M_A - M_B + \frac{6}{l^2} \int_0^l \mu \zeta d\zeta = 0. \text{ Stąd: } M_A =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l \mu d\zeta - \frac{6}{l^2} \int_0^l \mu \zeta d\zeta, \quad M_B = \frac{4}{l} \int_0^l \mu d\zeta - \frac{6}{l^2} \int_0^l \mu \zeta d\zeta.$$

W wypadku obciążenia jednostajnego  $p$  kg na jednostkę długości mamy, jak wyżej  
 $\mu = -\frac{1}{2} p l (l - \zeta) + \frac{1}{2} p (l - \zeta)^2 = -\frac{1}{2} p l \zeta + \frac{1}{2} p \zeta^2$ . Zatem

$$\int_0^l \mu d\zeta = -\frac{1}{12} p l^3, \quad \int_0^l \mu \zeta d\zeta = -\frac{1}{24} p l^4, \text{ a przeto } M_A = \frac{1}{12} p l^2 = -$$

$$- M_B = M_0. \text{ Wobec tego równania statyki wypiszemy w postaci: } A + B + \sum P_i = A + B + \int_0^l p d\zeta = A + B + p l = 0, \quad A l + \sum P_i \zeta_i =$$

$$= A l + \int_0^l p \zeta d\zeta = A l + \frac{1}{2} p l^2 = 0. \text{ Stąd } A = B = -\frac{1}{2} p l. \text{ Nadto}$$

$M = -M_B + \mu = \frac{1}{12} p l^2 - \frac{1}{2} p l \zeta + \frac{1}{2} p \zeta^2$ . Z równania  $M = 0$  wyzna-  
 czymy odcięte  $\zeta = \frac{1}{2} l (1 \pm \sqrt{3})$  punktów przegięcia odkształconych.  
 Czyniąc  $dM = 0$  określimy przekrój o skrajnej wartości momentu gnącego.  
 Równanie to daje  $\zeta_0 = \frac{1}{2} l$ , a przeto  $M_{min} = -\frac{1}{24} p l^2$ . Moment  
 gnący staje się minimum pośrodku pręta, na obu skrajach posiada nato-  
 miast wartość najwyższą  $M_A = M_0 = \frac{1}{12} p l^2$ . Zmienia się parabolicznie.  
 Łatwo wyznaczyć wykres momentów i sił tnących. Równanie odkształco-

$$nej będzie tu  $EJ \eta = \zeta \int_0^{\zeta} M d\zeta - \int_0^{\zeta} M \zeta d\zeta = [\frac{1}{12} p l^2 \zeta - \frac{1}{4} p l \zeta^2 + \frac{1}{6} p \zeta^3] \zeta -$ 

$$- \frac{1}{24} p l^2 \zeta^2 + \frac{1}{6} p l \zeta^3 - \frac{1}{8} p \zeta^4 = \frac{1}{24} p \zeta^2 (l - \zeta)^2$$
. Chcąc wyznaczyć strzałkę  
 ugięcia pręta, czynimy  $\eta' = \frac{1}{12} p \zeta (l - \zeta)^2 - \frac{1}{12} p \zeta^2 (l - \zeta) = 0$ , co  
 daje  $\zeta = \frac{1}{2} l$ . Pośrodku zatem mamy strzałkę  $f = \frac{1}{384} p l^4 : EJ$ .$$

W wypadku obciążenia siłą skupioną  $P$ , czynną w odległości  $a$   
 od lewej i  $b$  od prawej podpory, mamy  $\mu = -P b (l - \zeta) : l || + P (b -$   
 $- \zeta) = -P b + P b \zeta : l || + P b - P \zeta$ . Zatem  $\int_0^l \mu d\zeta = \int_0^l (-P b +$   
 $+ P b \zeta : l) d\zeta + \int_0^b (P b - P \zeta) d\zeta = -\frac{1}{2} P b l + \frac{1}{2} P b^2, \int_0^l \mu \zeta d\zeta = \int_0^l (-$

$- Pb\zeta + Pb\zeta^2 : l) d\zeta + \int_0^b (Pb\zeta - P\zeta^2) d\zeta = -1/6 Pb^2 + 1/6 Pb^3$ , a prze-  
 to  $M_A = Pb^2 (l - b) : l^3 = Pab^2 : l^2$ ,  $M_B = -Pb + 1/2 Pb^2 : l - Pb^3 :$   
 $: l^2 = -Pb (l - b)^2 : l^2 = -Pba^2 : l^2 = -M_0$ . Równania statyki bę-  
 dą tu  $A + B + P = 0$ ,  $Pab^2 : l^2 + Al + Pb - Pba^2 : l^2 = 0$ . Stąd:  
 $A = -Pb (l^2 + ab - a^2) : l^3 = -Pb^2 (3a + b) : l^3$ ,  $B = -Pa^2 (a +$   
 $+ 3b) : l^3$ . Nadto  $M = (M_A + M_B) \zeta : l - M_B + \mu = Pab (b - a) \zeta :$   
 $: l^3 + Pa^2 b : l^2 - Pb + Pb\zeta : l \parallel + Pb - P\zeta = -Pb^2 (a + l) : l^3 +$   
 $+ Pb^2 (3a + b) \zeta : l^3 \parallel + Pb - P\zeta$ . Z równania  $M = 0$  wyznaczmy odcię-  
 te punktów przegięcia odkształconej. Dla pierwszej połaci otrzymamy  
 $\zeta_1 = (2a + b)l : (3a + b)$ , dla drugiej  $\zeta_2 = bl : (a + 3b)$ . Obie te  
 wartości istotnie dają zawsze punkty przegięcia, odrazu bowiem widać,  
 że  $l > \zeta_1 > b$  oraz  $b > \zeta_2 > 0$ . Ponieważ momenty zmieniają się lin-  
 njowo, przeto najwyższe ich wartości dodatnie panować będą w przekro-  
 jach osadczych. Są to  $M_A$  i  $M_0 = -M_B$ . Ku środkowi belki momenty  
 maleją, przechodzą przez zero, dążąc obustronnie do najmniejszości ujem-  
 nej w przekroju siły  $P$ , gdzie mamy moment gnący  $M_m = -Pb^2 (a +$   
 $+ l) : l^2 + Pb^3 (3a + b) : l^3 = -2Pa^2 b^2 : l^3$ . Krzywa wykresu momen-  
 tów jest więc łamaną. Wyznacza ona trzy skrajne wartości momentów.  
 Chcąc orzec, która z nich stanowi maximum bezwzględne, miarodajne  
 przy wyznaczaniu właściwych wymiarów pręta, założmy, że  $a \geq b$ . To  
 założenie w niczem ogólności naszych rozważań nie uszczupli, zawsze  
 bowiem można obrócić pręt o  $180^\circ$ , aby wypełnić powyższą nierówność.  
 W tem założeniu  $M_0$  jest większe od  $M_A$ , należy przeto jeszcze zbadać  
 znak różnicy  $M_0 + M_m = Pa^2 b (a - b) : l^3$ . Jest ona dodatnia gdy  
 $a > b$ . Zatem, gdy  $a > b$ ,  $M_0$  stanowi skrajną wartość momentów gną-  
 cych. Gdy  $a < b$ , wtedy  $M_A > M_0$  i znowu  $M_A + M_m = Pab^2 (b -$   
 $- a) : l^3 > 0$ . Bezwzględnie największa wartość momentu gnącego pa-  
 nuje zawsze w jednym z przekrojów osadczych. Równanie odkształconej  
 będzie tu  $EJ\eta = \zeta \int_0^\zeta M d\zeta - \int_0^\zeta M \zeta d\zeta = [-Pb^2 (2a + b)/l^2 \int_0^\zeta d\zeta +$   
 $+ Pb^2 (3a + b)/l^3 \int_0^\zeta \zeta d\zeta + Pb \int_0^b d\zeta - P \int_0^b \zeta d\zeta] \zeta + Pb^2 (2a +$   
 $+ b)/l^2 \int_0^\zeta \zeta d\zeta - Pb^2 (3a + b)/l^3 \int_0^\zeta \zeta^2 d\zeta - Pb \int_0^b \zeta d\zeta + P \int_0^b \zeta^2 d\zeta \parallel +$   
 $+ [Pb \int_b^\zeta d\zeta - P \int_b^\zeta \zeta d\zeta] \zeta - Pb \int_b^\zeta \zeta d\zeta + P \int_b^\zeta \zeta^2 d\zeta = Pb^2 (3a +$   
 $+ b) \zeta^3 : 6 l^3 - Pb^2 (2a + b) \zeta^2 : 2 l^2 + 1/2 Pb^2 \zeta - 1/6 Pb^3 \parallel + 1/6 P (b -$   
 $- \zeta)^3 = Pb^2 a (l - \zeta)^2 : 2 l^2 - Pb^2 (3a + b) (l - \zeta)^3 : 6 l^3 \parallel + 1/6 P (b -$   
 $- \zeta)^3$ . Czyniąc tu  $\zeta = b$  otrzymamy strzałkę siły  $f_p = Pa^3 b^3 : 3 EJ l^3$ . Aby  
 z kolei wyznaczyć strzałkę ugięcia, czynimy  $\eta' = 0$ . Dla pierwszej po-  
 łaci, w odcinku  $a$ , otrzymamy z łatwością z tego równania  $\zeta_4 = l - 2al :$   
 $: (3a + b)$  z warunkiem:  $l \geq \zeta_4 \geq b$ . Pierwsza nierówność wypełnia się  
 sama przez się, druga zachodzi przy  $a \geq b$ . Zatem strzałka ugięcia istot-  
 nie należy do połaci pierwszej, gdy  $a \geq b$ . Będzie to  $f_4 = 2 Pb^2 a^3 :$   
 $: 3 EJ (3a + b)^2$ . Dla drugiej połaci mamy z równania  $\eta' = 0$  wartość



$\zeta_3 = 2bl : (a + 3b)$  z warunkiem  $b \geq \zeta_3 \geq a$ . Prawa nierówność jest oczywista, lewa daje warunek pochodny  $b \geq a$ . Zatem strzałka wygięcia należy do połaci drugiej, gdy  $b \geq a$ . Jest to  $f_3 = 2Pa^2b^3 : 3EJ(a + 3b)^2$ .

W szczególnym wypadku, gdy  $a = b = 1/2 l$ , mamy  $M_A = 1/8 Pl = M_0 = -M_B$ ,  $\zeta_1 = 3/4 l$ ,  $\zeta_2 = 1/4 l$  — punkty przegięcia są symetryczne względem środka. Pośrodku moment  $M_m = -1/8 Pl$ , tutaj więc skrajne momenty są tożsamościowe. Nadto  $A = B = -1/2 P$ . Równanie odkształconej będzie tu  $EJ\eta = 1/16 Pl(l - \zeta)^2 - 1/12 P(l - \zeta)^3 + 1/6 P(b - \zeta)^3$ . Strzałka siły  $f_p = Pl^3 : 192 EJ$  stanowi zarazem środkową strzałkę pręta.

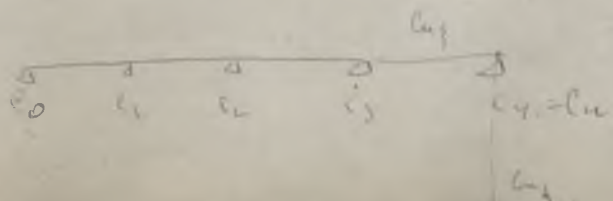
**§ 34. Belka jednoprzęsłowa.** Równania całkowe odkształconej również nader szybko prowadzą do celu w wypadku belki wspartej na podporach rolkowej lub przegubowej. Przykład najlepiej wyjaśni istotę rzeczy. Weźmy pod uwagę belkę jednoprzęsłową, statycznie wyznaczalną, a obciążoną dowolnym układem sił gnących prostopadłych do pierwotnej osi belki. Początek osi stałych umieszczamy w prawej podporze przegubowej  $B$ . Oś  $B\zeta$  prowadzimy wzdłuż osi pierwotnej belki ku lewej podporze  $A$  rolkowej, — oś  $B\eta$  w dół,  $B\zeta$  — ku patrzącemu. Podparty punkt  $B$  — jest punktem wyjścia dla nas — zatem  $\zeta_0 = \eta_0 = 0$ , skąd

$\eta = \zeta\eta'_0 + \zeta \int_0^\zeta \frac{M}{EJ} d\zeta - \int_0^\zeta \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta$ . Spółrzędne drugiej podpory rolkowej  $\zeta_1 = l$ ,  $\eta_1 = 0$  czynią również zadość temu równaniu, możemy prze-

to napisać  $0 = l\eta'_0 + l \int_0^l \frac{M}{EJ} d\zeta - \int_0^l \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta$ . Rugując  $\eta'_0$  otrzyma-

my równanie odkształconej:  $\eta = -\zeta \int_0^l \frac{M}{EJ} d\zeta + \zeta \int_0^\zeta \frac{M}{EJ} d\zeta + \zeta/l \int_0^l \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta - \int_0^\zeta \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta = -\zeta \int_0^l \frac{M}{EJ} d\zeta + \zeta/l \int_0^l \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta - \int_0^\zeta \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta$ .

**§ 35. Belki wieloprzęsłowe.** Idąc w kierunku sprowadzania sił, oznaczamy przez  $C_0$  skrajną lewą podporę belki  $n$  przęsłowej, przez  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) podpory pośrednie, przez  $C_n$  skrajną podporę prawą, w której umieszczamy początek stałych osi współrzędnych. Oś  $C_n\zeta$  układamy na osi pierwotnej belki ku  $C_0$ , oś  $C_n\eta$  kierujemy w dół,  $C_n\zeta$  — ku patrzącemu. Pierwotnie wszystkie podpory leżały na osi  $C_n\zeta$ , a więc na jednym poziomie w odległościach  $\zeta_i$  od początku współrzędnych. Po obciążeniu podpory mogły ulec obniżeniu lub podwyższeniu ponad







$$- \frac{1}{l_{k+1}^2} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{(\zeta - \zeta_{k+1})^2}{EJ} d\zeta \left] - \frac{1}{l_k} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \frac{\mu (\zeta_{k-1} - \zeta)}{EJ} d\zeta - \right. \\ \left. - \frac{1}{l_{k+1}} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{\mu (\zeta - \zeta_{k+1})}{EJ} d\zeta = 0.$$

Jest to *Wzór Clerc'a*. Wiąże on linjowo trzy sąsiednie momenty odporowe. Ponieważ z założenia mamy  $n$  przęseł, możemy go zatem wypisać kolejno dla 1 i 2, 2 i 3 . . . przęseł, słowem otrzymać  $n-1$  linjowych równań dla momentów odporowych. Z tych równań wyznaczymy  $n-1$  momentów prócz, dajmy na to, skrajnych  $M_0$  i  $M_n$ . Te dwa ostatnie określimy z warunków końcowego obciążenia belki. Gdy belka kończy się ponad skrajnymi podporami typu rolkowego lub przegubowego, wtedy  $M_0 = M_n = 0$ , gdy belka zwisa poza podpory skrajne, a wystające jej końce ulegają jarzmu układów zewnętrznych  $[E]_0$  i  $[E]_n$  sił gnących, możemy owe układy sprowadzić do środka skrajnych podpartych przekrojów i bezpośrednio otrzymać w ten sposób  $M_0$  i  $M_n$ . Wreszcie, gdy belka jest końcami zamocowana, możemy dwukrotnie zastosować trzeci wzór całkowy do skrajnych przęseł, a otrzymamy:

$$\eta'_0 = \frac{\eta_0 - \eta_1}{\zeta_0 - \zeta_1} + \frac{1}{\zeta_0 - \zeta_1} \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} \frac{M(\zeta - \zeta_1)}{EJ} d\zeta = 0, \\ \eta'_n = - \frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{l_n} - \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{M(l_n - \zeta)}{EJ} d\zeta = 0$$

dla pierwszego i ostatniego, tutaj bowiem  $\zeta_n = \eta'_0 = \eta'_n = 0$  oraz  $\zeta_{n-1} = l_n$ . Na mocy twierdzenia o trzech momentach mamy dla przęseła pierwszego:  $M = M_1 + (M_0 - M_1)(\zeta - \zeta_1) : l_1 + \mu$ , dla ostatniego:  $M = M_{n-1} + (M_n - M_{n-1})(l_n - \zeta) : l_n + \mu$ . W ten sposób otrzymamy dwa wzory dodatkowe:

$$\eta_0 - \eta_1 + M_1 \left[ \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} \frac{\zeta - \zeta_1}{EJ} d\zeta - \frac{1}{l_1} \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} \frac{(\zeta - \zeta_1)^2}{EJ} d\zeta \right] + \\ + \frac{M_0}{l_1} \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} \frac{(\zeta - \zeta_1)^2}{EJ} d\zeta + \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} \frac{\mu (\zeta - \zeta_1)}{EJ} d\zeta = 0, \\ \eta_n - \eta_{n-1} + M_{n-1} \left[ \int_0^{l_n} \frac{l_n - \zeta}{EJ} d\zeta - \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{(l_n - \zeta)^2}{EJ} d\zeta \right] + \\ + \frac{M_n}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{(l_n - \zeta)^2}{EJ} d\zeta + \int_0^{l_n} \frac{\mu (l_n - \zeta)}{EJ} d\zeta = 0,$$

z których wyznaczymy brakujące momenty  $M_0$  i  $M_n$ .

Pozostają nam jeszcze odpory. Chcąc wyznaczyć  $C_i$  nazywamy przez  $T_i$  siłę tnącą ponad podporą  $C_i$ . Ponad  $C_{k-1}$ ,  $C_k$ ,  $C_{k+1}$  będą

więc panowały siły tnące  $T_{k-1}, T_k, T_{k+1}$ . Oznaczmy nadto przez  $P_j$  siłę gnącą, czynną w odległości  $\zeta_j$  od osi podpory prawej  $C_{k+1}$ , a otrzymamy  $M_{k+1} = M_k + T_k l_{k+1} + \sum P_j \zeta_j$ , gdzie dodawaniem należy objąć wszystkie siły tnące przęśła  $k+1$ . Stąd  $T_k = (M_{k+1} - \sum P_j \zeta_j - M_k) : l_{k+1}$ . W ten sposób, idąc w kierunku sprowadzania sił, a więc od  $C_0$  ku  $C_n$ , wyznaczmy wykres sił tnących belki. To samo możemy również zrobić, zmieniawszy kierunek sprowadzania sił na odwrotny. Idąc od  $C_n$  ku  $C_0$  otrzymamy nowe wartości sił tnących  $T'_k$ , panujących ponad podporami. Stąd niewątpliwie  $T_k + T'_k = C_k$ . W ten sposób rozwiążaliśmy całokształt zagadnienia. Jedyną trudność stanowi tu wyznaczenie całek; to też zazwyczaj czynimy to wykreślnie.

Dla pręta o przekroju stałym mamy ze wzoru ogólnego:

$$6 EJ \left[ \frac{\eta_{k-1} - \eta_k}{l_k} + \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{l_{k+1}} \right] = l_k M_{k-1} + 2(l_k + l_{k+1}) M_k + l_{k+1} M_{k+1} +$$

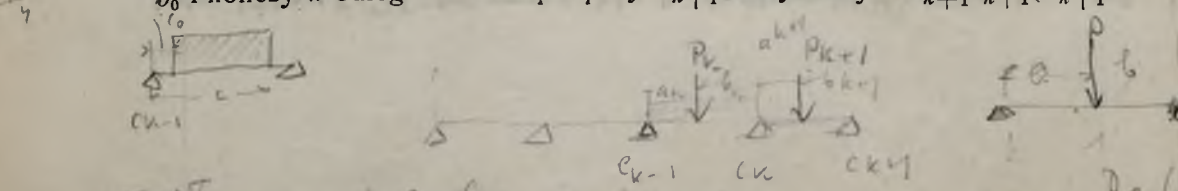
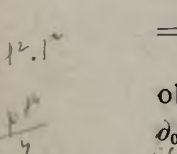
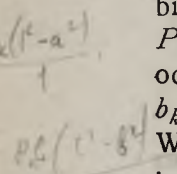
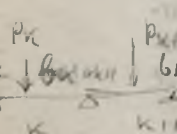
$$+ \frac{6}{l_k} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \mu (\zeta_{k-1} - \zeta) d\zeta + \frac{6}{l_{k+1}} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \mu (\zeta - \zeta_{k+1}) d\zeta.$$

**§ 36. Wzór Clapeyron'a.** Chcąc wyznaczyć całki tego wzoru

bierzemy pod uwagę zrazu tylko jedną siłę  $P_k$  w przęśle  $k$  oraz siłę  $P_{k+1}$  w przęśle  $k+1$ . Odległość tych sił od podpór lewych  $C_{k-1}$  i  $C_k$  odpowiednio oznaczamy przez  $a_k$  i  $a_{k+1}$ , od prawych  $C_k$  i  $C_{k+1}$  — przez  $b_k$  i  $b_{k+1}$ . Wykresy momentów  $\mu$  tych sił będą oczywiście trójkątne. Wysokość trójkątów  $H_k = -P_k a_k b_k : l_k$ ,  $H_{k+1} = -P_{k+1} a_{k+1} b_{k+1} : l_{k+1}$ . Łatwo spostrzec, że pierwsza całka stanowi moment statyczny trójkąta  $C_{k-1} C_k D_k$  względem punktu  $C_{k-1}$  jest zatem równa:  $\frac{2}{3} a_k \times \times \frac{1}{2} a_k \times P_k a_k b_k : l_k - (a_k + \frac{1}{3} b_k) \times \frac{1}{2} b_k \times P_k a_k b_k : l_k = -\frac{1}{6} P_k a_k b_k (a_k + b_k) (b_k + 2 a_k) : l_k = -\frac{1}{6} P_k a_k b_k (l_k + a_k) = = -\frac{1}{6} P_k a_k (l_k^2 - a_k^2)$ . Druga całka stanowi moment statyczny trójkąta  $C_k C_{k+1} D_{k+1}$  względem punktu  $C_{k+1}$  i równa się  $-\frac{1}{6} P_{k+1} b_{k+1} (l_{k+1}^2 - b_{k+1}^2)$ . Po podstawieniu tych wartości we wzór ustępu poprzedniego otrzymamy:  $6 EJ [(\eta_{k-1} - \eta_k) : l_k + (\eta_{k+1} - \eta_k) : l_{k+1}] = l_k M_{k-1} + 2(l_k + l_{k+1}) M_k + l_{k+1} M_{k+1} - \sum P_k a_k (l_k^2 - a_k^2) : l_k - \sum P_{k+1} b_{k+1} (l_{k+1}^2 - b_{k+1}^2) : l_{k+1}$ . W szczególnym wypadku, gdy nadto jeszcze działa obciążenie jednostajne w stosunku  $p_k$  kg na jednostkę długości przęśła  $k$ , poczynające się w odległości  $c_0$  i kończące w odległości  $c$  od podpory  $C_{k-1}$ , będziemy mieli  $\sum P_k a_k (l_k^2 - a_k^2) =$

$$= \int_{c_0}^c p_k \zeta (l_k^2 - \zeta^2) d\zeta = \frac{1}{4} p_k (c^2 - c_0^2) (2 l_k^2 - c^2 - c_0^2).$$

Nadto gdy obciążenie jednostajne  $p_{k+1}$  prawego przęśła poczyną się w odległości  $d_0$  i kończy w odległości  $d$  od podpory  $C_{k+1}$  otrzymamy  $\sum P_{k+1} b_{k+1} (l_{k+1}^2 -$



$$6 EJ [\eta_{k-1} - \eta_k] \cdot l + (\eta_{k+1} - \eta_k) \cdot l = l_k M_{k-1} + 2 l_k M_k + l_{k+1} M_{k+1} - \sum p_k (l_k^2 - a_k^2) - \sum p_{k+1} (l_{k+1}^2 - b_{k+1}^2)$$



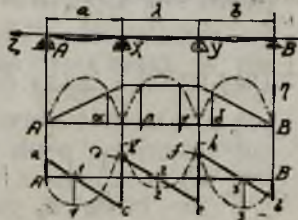
$$-b^2_{k+1}) = \int_{\partial_0}^{\partial} p_{k+1} \zeta (l^2_{k+1} - \zeta) d\zeta = 1/4 p_{k+1} (\partial^2 - \partial^2_0) (2 l^2_{k+1} - \partial^2 +$$

$+ \partial^2_0)$ . A przeto wzór wydłuży się w prawej części o te dwa wyrazy, dzielone odpowiednio przez  $-l_k$  i  $-l_{k+1}$ . Gdy sił skupionych brak, a obciążenia jednostajne pokrywają całe przęsła, to jest gdy:  $P_k = P_{k+1} = 0$ ,  $c_0 = \partial_0 = 0$ ,  $c = l_k$ ,  $\partial = l_{k+1}$ , otrzymamy wzór *Clapeyron'a*:  $6 EJ [(\gamma_{lk-1} - \gamma_{lk}) : l_k + (\gamma_{lk+1} - \gamma_{lk}) : l_{k+1}] = l_k M_{k+1} + 2(l_k + l_{k+1}) M_k + l_{k+1} M_{k+1} - 1/4 p_k l^3_k - 1/4 p_{k+1} l^3_{k+1}$ . Kilka przykładów najlepiej uwypukli istotę stosowania powyższych wzorów.

**§ 37. Belka dwuprzęsłowa.** Weźmy ponownie pod uwagę belkę dwuprzęsłową (Rys. 40). W założeniu jednostajnego obciążenia  $p$  kg na jednostkę długości, pokrywającego całkowitą długość belki, będziemy mieli przedewszystkiem  $M_A = M_B = 0$ . Chcąc wyznaczyć  $M_x$  wypisujemy równanie *Clapeyron'a*. Wobec tego, że wszystkie trzy podpory belki o przekroju stałym leżą na jednym poziomie po odkształceniu:  $2(a + b) M_x = 1/4 p (a^3 + b^3)$ . Stąd  $M_x = 1/8 p (a^3 + b^3) : l$ . Opierając się na tej wartości łatwo wyznaczmy obie podpory skrajne. Idąc od  $A$  ku  $X$  możemy napisać  $Aa + 1/2 pa^2 = M_x$ , skąd  $A = -1/2 pa + 1/8 p (a^3 + b^3) : al$ . Zmieniając znów kierunek sprowadzania sił, a więc idąc od  $B$  ku  $X$  będziemy mieli  $-Bb - 1/2 pb^2 = -M_x$ , skąd  $B = -1/2 pb + 1/8 p (a^3 + b^3) : bl$ . Te same wartości otrzymaliśmy w § 15 niniejszego rozdziału.

W założeniu siły skupionej (Rys. 45), cisnącej na przekrój pośredni przęsła prawego będziemy mieli znowu  $M_{AO} = M_{BO} = 0$ , a dla  $M_x$  możemy napisać  $2(a + b) M_x = Pc (b^2 - c^2) : b$  skąd  $M_x = Pc (b^2 - c^2) : 2 bl$ . I tu również  $A_0 a = M_x$  skąd  $A_0 = Pc (b^2 - c^2) : 2 abl$ . Podobnie zupełnie:  $-B_0 b - P(b - c) = -M_x$ , skąd  $B_0 = -P + Pc (b^2 + 2 bl - c^2) : 2 b^2 l$ . Wyznamy siłę tnącą przed podporą środkową. Idąc od  $A$  ku  $X$ , a więc w kierunku sprowadzania momentów, otrzymamy  $T_x = A_0 = Pc (b^2 - c^2) : 2 abl$ . Idąc zaś w kierunku odwrotnym:  $T'_x = B_0 + P = Pc [b^2 + 2 bl - c^2] : 2 b^2 l$  stąd  $-X = T_x + T'_x = -Pc [b^3 - c^2 b + ab^2 + 2 abl - ac^2] : 2 ab^2 l = -Pc (b^2 + 2 ab - c^2) : 2 ab^2$ . To samo otrzymaliśmy w § 26 rozdziału niniejszego.

**§ 38. Belka trójpzędłowa** o przekroju stałym, obciążona jednostajnie w stosunku  $p$  kg na jednostkę długości. Obciążenie pokrywa całą belkę. Podpory  $A, X, Y, B$  zakładamy nieruchome i prowadzimy przez nie oś pierwotną belki  $B\xi$ , oś  $B\eta$  kierujemy w dół,  $B\xi$  — ku patrzącemu. Prócz przegubowej podpory  $B$  — pozostałe są rolkowe, zatem  $M_A = M_B = 0$ . Chcąc wyznaczyć (Rys. 50) pozostałe dwa momenty  $M_x, M_y$ , wypisujemy dwukrotnie równanie *Clapeyron'a* w postaci:  $2(a + \lambda) M_x + \lambda M_y =$



Rys. 50.

$= \frac{1}{4} p (a^3 + \lambda^3), \lambda M_x + 2 (\lambda + b) M_y = \frac{1}{4} p (\lambda^3 + b^3)$ . Stąd mamy  $M_x = p [2 (\lambda + b) (a^3 + \lambda^3) - \lambda (\lambda^3 + b^3)] : 4 [4 (a + \lambda) (\lambda + b) - \lambda^2]$ .  $M_y = p [2 (a + \lambda) (\lambda^3 + b^3) - \lambda (a^3 + \lambda^3)] : 4 [4 (a + \lambda) (\lambda + b) - \lambda^2]$ . Następnie mamy  $Aa + \frac{1}{2} a^2 p = M_x$ ,  $Bb + \frac{1}{2} p b^2 = M_y$ ,  $A (a + \lambda) + X \lambda + \frac{1}{2} p (a + \lambda)^2 = M_y$  oraz  $A + B + X + Y + p (a + b + \lambda) = 0$ . Z tych równań wyznaczmy odpory.

Rozpatrzmy bliżej wypadek szczególny, kiedy  $a = b = \lambda = \frac{1}{3} l$ . W tem założeniu otrzymamy  $M_x = M_y = \frac{1}{90} p l^2$ ,  $A = B = -\frac{2}{15} p l$ ,  $X = Y = -\frac{11}{30} p l$ . Te wartości pozwolą nam wypisać ogólny wzór dla momentu gnącego  $M = A (l - \zeta) + \frac{1}{2} p (l - \zeta)^2 \parallel + X (\frac{2}{3} l - \zeta) \parallel + Y (\frac{1}{3} l - \zeta) = -\frac{2}{15} p l (l - \zeta) + \frac{1}{2} p (l - \zeta)^2 \parallel - \frac{11}{30} p l (\frac{2}{3} l - \zeta) - \zeta \parallel - \frac{11}{30} p l (\frac{1}{3} l - \zeta)$ . Czyniąc tu  $M = 0$ , znajdziemy odcięte punktów przecięcia odkształconej. Dla połąci pierwszej będziemy mieli  $\zeta_1 = \frac{11}{15} l$ , dla drugiej — dwie wartości  $\zeta_2 = \frac{1}{2} l (1 \pm 1 : 3 \sqrt{5})$ , dla trzeciej:  $\zeta_3 = \frac{4}{15} l$ . Będą to punkty  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Z kolei czyniąc  $dM = 0$  wyznaczmy odcięte, odpowiadające skrajnym wartościom momentów. Dla połąci pierwszej będziemy mieli  $\zeta_4 = \frac{13}{15} l$ , dla drugiej  $\zeta_5 = \frac{1}{2} l$ , dla trzeciej  $\zeta_6 = \frac{2}{15} l$ . Będą to punkty 1, 2, 3. Panują w nich odpowiednio momenty  $M_1 = M_3 = -\frac{2}{225} p l^2$ ,  $M_2 = -\frac{1}{360} p l^2$ . Bezwzględnie skrajnemi wartościami najwyższemi będą tu  $M_x = M_y = \frac{1}{90} p l^2$ . Wobec tego, że  $EJ\eta' = M$ , otrzymamy całkując  $EJ\eta' = C + \frac{1}{15} p l (l - \zeta)^2 - \frac{1}{6} p (l - \zeta)^3 \parallel + \frac{11}{60} p l (\frac{2}{3} l - \zeta)^2 \parallel + \frac{11}{60} p l (\frac{1}{3} l - \zeta)^2$ ,  $EJ\eta = D + C\zeta - \frac{1}{45} p l (l - \zeta)^3 + \frac{1}{24} p (l - \zeta)^4 \parallel - \frac{11}{180} p l (\frac{2}{3} l - \zeta)^3 \parallel - \frac{11}{180} p l (\frac{1}{3} l - \zeta)^3$ . Dla skrajnych przekrojów mamy  $\eta = 0$  dla  $\zeta = 0$  i  $\zeta = l$ , zatem  $D - \frac{1}{45} p l^4 + \frac{1}{24} p l^4 - \frac{11}{180} p l \times \frac{8}{27} l^3 - \frac{11}{180} p l \times \frac{1}{27} l^3 = 0$ ,  $D + C l = 0$ . Skąd:  $D = \frac{1}{1080} p l^4$ ,  $C = -\frac{1}{1080} p l^4$ . Czyniąc  $\eta' = 0$ , wyznaczmy odcięte, przynależne do skrajnych strzałek pręta. Łatwo znajdziemy, że w połąci pierwszej będzie  $\zeta_7 = [13 - 4 \cos (240^\circ + \frac{1}{3} \text{arcCos } \frac{11}{64})] l : 15 \approx 0,882 l$ , w drugiej  $\zeta_8 = \frac{1}{2} l$  i w trzeciej  $\zeta_9 = l - \zeta_7 \approx 0,118 l$ . Podstawivszy te wartości we wzór odkształconej, otrzymamy odnośne strzałki ugięcia.

**§ 39. Twierdzenie o dwóch momentach.** Powyższe przykłady należą do najłatwiejszych. Przy większej liczbie przęseł rozwiązywanie równań nawet za pomocą wyznaczników nastrocza poważne trudności, które łatwo możemy ominąć, stosując miasto wzorów *Clerc'a* lub *Clapeyron'a* — *twierdzenie o dwóch momentach*. Oznaczmy spótczynniki momentów odporowych we wzorze *Clerc'a* przez:  $N = [\eta_{k-1} - \eta_k] : l_k +$

$$+ [\eta_{k+1} - \eta_k] : l_{k+1}, R_{k-1} = \frac{1}{l_k} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \frac{\zeta_{k-1} - \zeta}{EJ} d\zeta - \frac{1}{l_k^2} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \frac{(\zeta_{k-1} - \zeta)^2}{EJ} d\zeta,$$

$$R_k = \frac{1}{l_k^2} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \frac{(\zeta_{k-1} - \zeta)^2}{EJ} d\zeta + \frac{1}{l_{k+1}^2} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{(\zeta - \zeta_{k+1})^2}{EJ} d\zeta,$$



$$R_{k+1} = \frac{1}{l_{k+1}} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{\zeta - \zeta_{k+1}}{EJ} d\zeta - \frac{1}{l_{k+1}^2} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{(\zeta - \zeta_{k+1})^2}{EJ} d\zeta,$$

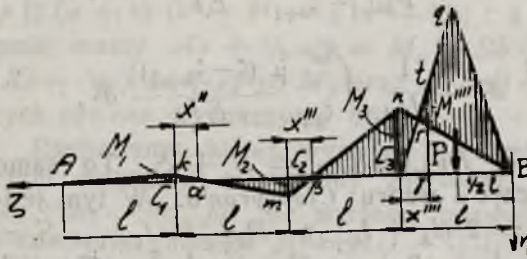
$$S = \frac{1}{l_k} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \frac{\mu (\zeta_{k-1} - \zeta)}{EJ} d\zeta + \frac{1}{l_{k+1}} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{\mu (\zeta - \zeta_{k+1})}{EJ} d\zeta,$$

a wtedy  $R_{k-1} M_{k-1} + R_k M_k + R_{k+1} M_{k+1} = N + S$ . To samo wyrażenie może oczywiście dotyczyć i wzoru *Clapeyron'a*. W tym jednak wypadku  $R_{k-1} = l_k$ ,  $R_k = 2(l_k + l_{k+1})$ ,  $R_{k+1} = l_{k+1}$ ,  $S = \Sigma P_k a_k (l_k^2 - a_k^2) : l_k + \Sigma P_{k+1} b_{k+1} (l_{k+1}^2 - b_{k+1}^2) : l_{k+1}$ . Tutaj  $N$  będzie oznaczało:  $6 EJ [(\eta_{k-1} - \eta_k) : l_k + (\eta_k - \eta_{k+1}) : l_{k+1}]$ . Według znanego wzoru:  $M' = M_{k-1} + (M_k - M_{k-1})(\zeta_{k-1} - \zeta) : l_k + \mu'$  dla momentu w przęśle  $k$ , oraz  $M'' = M_{k+1} + (M_k - M_{k+1})(\zeta - \zeta_{k+1}) : l_{k+1} + \mu''$  dla przęsła  $k + 1$ . Z tych wzorów, oznaczając  $\zeta_{k-1} - \zeta = x'$ ,  $\zeta_k - \zeta = x''$  będziemy mieli  $M_{k-1} = [(M' - \mu') l_k - M_k x'] : (l_k - x')$ ,  $M_{k+1} = [(M'' - \mu'') l_{k+1} - M_k (\zeta - \zeta_{k+1})] : (l_{k+1} - \zeta + \zeta_{k+1}) = [(M'' - \mu'') l_{k+1} - M_k (\zeta - \zeta_k + \zeta_k - \zeta_{k+1})] : (\zeta_k - \zeta_{k+1} - \zeta + \zeta_{k+1}) = [(M'' - \mu'') l_{k+1} - M_k (l_{k+1} - x'')] : x''$ . Po podstawieniu tych wartości otrzymamy:  $R_{k-1} (M' - \mu') l_k : (l_k - x') + R_{k+1} (M'' - \mu'') l_{k+1} : x'' - M_k [R_{k-1} x' : (l_k - x') + R_{k+1} (l_{k+1} - x'') : x'' - R_k] = N + S$ . Weźmy pod uwagę parę wartości  $x'$ ,  $x''$ , czyniących zadość równaniu:  $R_{k-1} x' : (l_k - x') + R_{k+1} (l_{k+1} - x'') : x'' - R_k = 0$ , a odnośne momenty gnące  $M'$  i  $M''$  czyniąc będą zadość równaniu  $R_{k-1} (M' - \mu') l_k : (l_k - x') + R_{k+1} (M'' - \mu'') l_{k+1} : x'' = N + S$ . Ten prosty wniosek stanowi *twierdzenie o dwóch momentach*.

W szczególnym wypadku belki o stałym przekroju równania powyższe przechodzą w:  $x' l_k : (l_k - x') + (l_{k+1} - x'') l_{k+1} : x'' - 2(l_k + l_{k+1}) = 0$ ,  $(M' - \mu') l_k^2 : (l_k - x') + (M'' - \mu'') l_{k+1}^2 : x'' = N + S$ . Jest to tak zwane *twierdzenie Lévy*. Stanowi ono wypadek szczególny twierdzenia o dwóch momentach. Oba są bardzo wygodne w zastosowaniu do belek wieloprzęsłowych. Najlepiej to uwypukli przykład:

**§ 40. Belka czteroprzęsłowa.** Oznaczmy przęsła kolejne przez  $l_1, l_2, l_3, l_4$ . Skrajną prawą podporę  $B$  zakładamy przegubową — pozostałe niech będą rolkowe. Oś  $B\zeta$  prowadzimy po osi pręta pierwotnej na lewo,  $B\eta$  — w dół,  $B\xi$  — ku patrzącemu (Rys. 51). Niezależnie od typu obciążenia  $M_0 = M_4 = 0$ , ponad podporami skrajnymi belki. W ten sposób odrazu otrzymaliśmy jedną wartość momentu gnącego  $M_0 = 0$ , przynależną do  $x' = 0$ . Odnośną wartość  $x''$  znajdziemy z równania powyżej wyprowadzonego. W przekroju, przynależnym do  $x''$ , panować będzie moment gnący  $M''$ , który również wyznaczmy z łatwością. W ten sposób, idąc od przęsła do przęsła otrzymamy szereg wartości  $x'', x''', x''''$ , . . . wraz o odnośnymi momentami  $M'', M''', M''''$ , . . . W ostat-

niem prześle będą więc dwa znane momenty — ostatni szeregu tylko co wypisanego i  $M_B = 0$ . Te dwie wartości określają cały wykres zmienności momentów w ostatnim prześle.



Rys. 51.

Z tego wykresu otrzymamy moment odporowy przedostatni, będziemy znowu przeto mieli dwie wartości momentów gnących, wyznaczone dla prześła przedostatniego. Znowu zbudujemy wykres momentów gnących, otrzymamy moment odporowy dalszej podpory i t. d. aż do

skrajnego prześła lewego. Załóżmy, a założenie to w niczem ogólności rozważań naszych nie uszczupli, że  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$ . Ułatwi to nam jeno rozwiązywanie równań, a przykład uczyni przejrzystszy. Dla belki o stałym przekroju wobec  $x' = 0$  otrzymamy  $(l - x'') l = 2 x'' (2 l)$ , skąd  $x'' = 1/5 l$ . Dalsze równanie  $1/5 l^2 : (l - 1/5 l) + (l - x''') l : x''' = 2 (l + l)$  da  $x''' = 4/19 l$ . W ten sposób otrzymamy szereg wartości  $x' = 0$ ,  $x'' = 1/5 l$ ,  $x''' = 4/19 l$ ,  $x'''' = 15/71 l$ . Łatwo tu zauważyć pewien algorytm. Licznik następnego ułamka równy jest mianownikowi poprzedniego mniej licznik poprzedniego. Mianownik następnego ułamka równy jest pięciokrotnemu swemu licznikowi mniej licznik ułamka poprzedniego. Te wartości wyznaczają momenty. W założeniu siły skupionej  $P$ , czynnej po środku prawego prześła skrajnego, będziemy mieli dla dwóch pierwszych prześłał  $(M' - \mu') : (l - x') + (M'' - \mu'') : x'' = (N + S) : l^2$ . Ponad temi prześłałmi brak obciążenia zewnętrznego — zatem  $S = 0$ . Nadto gdy wszystkie podpory leżą na jednym poziomie,  $N = 0$ . Ponieważ przy tem  $M' = \mu' = x' = \mu'' = 0$ , przeto i  $M'' = 0$ . W podobny sposób znajdziemy, że i  $M''' = 0$ . Dla trzeciego prześła i ostatniego  $(M'''' - \mu''') : (l - x''') + (M'''' - \mu''''') : x'''' = S : l^2 = P \times 1/2 l \times (l^2 - 1/4 l^2) : l^3 = 3/8 P$ . Tutaj  $M''' = \mu''' = 0$ , bo ponad prześłem trzecim niema obciążenia. Zatem  $M'''' - \mu'''' = 45/568 Pl$  i wobec  $\mu'''' = -1/2 P \times 15/71 l = -15/142 Pl$  mamy  $M'''' = -15/568 Pl$ . Otrzymaliśmy w ten sposób dla prześła ostatniego dwie wartości momentu gnącego: tylko co wyznaczoną, panującą w odległości  $15/71 l$  od  $C_3$  oraz  $M_B = M_4 = 0$ . Chcąc znaleźć odnośny wykres momentów gnących dla tego prześła, oznaczamy przez  $x$  odległość jakiegokolwiek przekroju poprzecznego belki od  $C_3$ , przez  $M_x$  moment w tym przekroju. Na mocy twierdzenia o trzech momentach  $M_x = M_3 + (M_4 - M_3) x : l + \mu_x$ , czyli  $M_x - \mu_x = M_3 + (M_4 - M_3) x : l$ . Łatwo zbudować wzór tylko co otrzymany. Wyznaczamy wykres momentów  $\mu$  ostatniego prześła. W danym wypadku będzie to trójkąt  $C_3 q B$  o podstawie  $C_3 B = l$  i wysokości  $-1/4 Pl$ . W odległości  $C_3 \gamma = 15/71 l$  wyznaczamy rzędną  $\gamma t$ , która jest oczywiście równa  $\mu''''$  i od punktu  $t$  w dół odkładamy  $tr = M''''$ . Wtedy  $r \gamma = M'''' - \mu''''$ , możemy przeto uczynić zadość powyższej linjowej zależności, prowadząc prostą  $Brn$ . Skrajna jej rzędna  $C_3 n = M_3$ . Wykres momentów gnących otrzymamy, biorąc pod uwagę pola zakreskowane



wykresu. Łatwo zauważymy, że  $M_3 = \gamma r \times l : (l - x''') = [^{15/142} - -^{15/568}] Pl^2 : (l - ^{15/71} l) = ^{45/448} Pl$ . W ten sposób dla przedostatniego trzeciego przęsła mamy już dwie wartości momentów  $M_3$  i  $M''' = 0$ , panującą w odległości  $C_2\beta = x'''$ . Na mocy twierdzenia o trzech momentach łatwo udowodnimy, że przy braku obciążenia zewnętrznego moment gnący zmieniać się będzie linjowo. To samo zauważymy odrazu, rzuciwszy okiem na (Rys. 47). Możemy zatem otrzymać wykres momentów gnących, łącząc  $n$  z  $\beta$  prostą  $mn$ . Odetnie ona  $C_2m = M_2 < 0$ , przy czym  $M_2 = -C_3n \times C_2\beta : \beta C_3 = -^{3/112} Pl$ . Z kolei, rozumując zupełnie tak samo, dochodzimy do przekonania, że należy połączyć  $m$  z  $\alpha$  prostą  $mk$ , która odetnie  $C_1k = M_1 = ^{3/448} Pl > 0$ . Łącząc  $k$  z  $A$  zakończymy wykres momentów.

Te same wartości otrzymamy ze wzoru *Clapeyron'a*. Stosując go kolejno otrzymamy  $4 lM_1 + lM_2 = 0$ ,  $lM_1 + 4 lM_2 + lM_3 = 0$ ,  $lM_2 + 4 lM_3 = ^{3/8} Pl^2$ . Stąd  $M_2 = -4 M_1$ ,  $M_3 = 15 M_1$ ,  $M_1 = ^{3/448} Pl$ , a przeto  $M_2 = -^{3/112} Pl$ ,  $M_3 = ^{45/448} Pl$ . Zwróćmy uwagę na bieg łamanej wykresu. Rozciąłowana w ostatnich dwóch przęsłach ledwo oddala się od podstawy w pierwszym. Obciążenie przęsła daje się odczuwać jeno w najbliższych przęsłach sąsiednich. Im dalej, tem jego wpływ staje się bardziej nieznacznym. Przypisać to należy usztywniającemu działaniu podpór. Im więcej podpór, tem belka sztywniejsza.

**§ 41. Belka na podłożu sprężystem.** Ustawmy podpory obok siebie w szereg nieprzerwany, a otrzymamy tak zwane *podłoże*. Belka na podłożu stałym jest niewątpliwie całkowicie sztywna. Nie wygnie jej żadne obciążenie gnące, chyba, że samo podłoże podda się pod jarzmem obciążenia belki, a wtedy będziemy mieli do czynienia z *podłożem sprężystem*. Ułóżmy na niem belkę pierwotnie prostą. Po obciążeniu siłami gnącemi belka poczyna cisnąć na podłoże wzdłuż całej dolnej powierzchni dotyku. Podłoże, jako sprężyste, podda się nieco, belka się weń zagłębi tem silniej, im mocniej ciśnie na podłoże w tem miejscu. *Gdy osiadanie belki jest proporcjonalne do nacisku, wywieranego w tem miejscu na podłoże — podłoże jest wzorowo sprężyste.*

Ułóżmy na pierwotnej osi belki stałą oś  $\omega\zeta$ , biorąc początek spółrzędnych w środku  $\omega$  dowolnego przekroju poprzecznego; oś  $\omega\zeta$  kierujemy na lewo,  $\omega\eta$  — w dół, a  $\omega\xi$  — ku patrzącemu. Po odkształceniu belka wygnie się, otrzymamy rzędne  $\eta$  — odkształconej — jako miarę osiadania belki. Sprzeciw podłoża wzorowo sprężystego będzie przeto  $q = -m\eta$ , ujemny, bo skierowany oczywiście ku górze. Stanowi on niejako obciążenie belki zewnętrzne jednostkowe, cisnące od spodu w stosunku  $q$  kg na jednostkę długości. Spółczynnik proporcjonalności oznaczamy tu przez  $m$ . Sprzeciw podłoża należy włączyć do obciążenia odkształcającego, aby z równań ogólnych otrzymać dane, dotyczące pracy belki na wzorowo sprężystem podłożu. Przykłady najlepiej to wyjaśnia.

**§ 42. Belka podwalinowa.** Belka pozioma na ziemnym podłożu dźwiga w swej części środkowej w odcinku  $2a$ , symetryczne obciążenie jednostkowe  $p$  kg na jednostkę długości. Tak ciśnie również mur  $2a$  gruby na belkę podwalinową. Opieramy go nie na podłożu bezpośrednio, a na belce, chcąc rozłożyć ciśnienie na większą powierzchnię podłoża. Dlatego belka, a raczej płyta podwalinowa, zawsze wystaje poza krawędzie muru, które w płaszczyźnie gięcia wyodrębniają trzy połacie obciążenia. W obu skrajnych (Rys. 52) belka ulega jeno parciu podłoża. Według doświadczeń *Föppl'a* zwykły grunt stanowi podłoże prawie zupełnie wzorowo sprężyste, możemy przeto napisać dla obu bocznych połaci:  $EJ\eta'''' = q = -m\eta$ . W połaci środkowej  $EJ\eta'''' = -m\eta + p$ . Dla belki o stałym przekroju otrzymamy całą równania pierwszego  $\eta = Ae^{n\zeta} \sin n\zeta + Be^{n\zeta} \cos n\zeta + Ce^{-n\zeta} \sin n\zeta + De^{-n\zeta} \cos n\zeta$ , gdzie  $4n^4 = m : EJ$ . Całka drugiego równania ma postać zupełnie podobną, należy jeno w prawej części dorzucić wyraz  $+ p : m$ . Różniczkowanie da w obu wypadkach wzory różniące się tylko wartościami stałych całkowania:  $\eta' = n(Ae^{n\zeta} - De^{-n\zeta})(\sin n\zeta + \cos n\zeta) - n(Be^{n\zeta} + Ce^{-n\zeta})(\sin n\zeta - \cos n\zeta)$ ,  $\eta'' = 2n^2(Ae^{n\zeta} - Ce^{-n\zeta})\cos n\zeta + 2n^2(De^{-n\zeta} - Be^{n\zeta})\sin n\zeta$ ,  $\eta''' = -2n^3(Ae^{n\zeta} + De^{-n\zeta})(\sin n\zeta - \cos n\zeta) - 2n^3(Be^{n\zeta} - Ce^{-n\zeta})(\sin n\zeta + \cos n\zeta)$ . Należy wyznaczyć stałe całkowania. W tym celu ze względu na zupełną symetrię obciążenia, konieczną dla wszelkiej belki podwalinowej, możemy umieścić początek stałych osi spólrzędnych w przekroju belki środkowym i rozpatrywać jeno jej lewą połowę. Prawa będzie symetryczna pod względem naprężeń i odkształceń. Oznaczmy całą długość belki przez  $2b$ . W przekroju, leżącym pod muru krawędzią, w odległości  $a$  od początku spólrzędnych, będziemy mieli jednakową wartość  $\eta$  i  $\eta'$  dla obu połaci, ponieważ odkształcona nie może mieć punktów podwójnych w tym samym przekroju, ani osobliwych. Nadto w tym przekroju siła tnąca i moment nie doznają przerwy ciągłości. Dla belki o stałym przekroju  $M = EJ\eta''$ ,  $T = -EJ\eta''''$ , zatem przy  $\zeta = a$  będziemy mieli te same wartości  $\eta''$  i  $\eta''''$  dla obu połaci. Oznaczmy przez  $A_0, B_0, C_0, D_0, \eta_0, \eta_0', \eta_0'', \eta_0''', \eta_0''''$  odnośne wartości dla pierwszej skrajnej lewej połaci, dla drugiej środkowej przez  $A_1, B_1, C_1, D_1, \eta_1, \eta_1', \eta_1'', \eta_1''', \eta_1''''$ , zatem przy  $\zeta = a$  będzie  $\eta_{0a} = \eta_{1a}$ ,  $\eta'_{0a} = \eta'_{1a}$ ,  $\eta_{0a}'' = \eta_{1a}''$ ,  $\eta_{0a}''' = \eta_{1a}'''$ , niech nadto  $\alpha = (A_0 - A_1)e^{na}$ ,  $\beta = (B_0 - B_1)e^{na}$ ,  $\gamma = (C_0 - C_1)e^{-na}$ ,  $\delta = (D_0 - D_1)e^{-na}$ , a wtedy z warunków tylko co wypisanych otrzymamy cztery równania:  $\alpha \sin na + \beta \cos na + \gamma \sin na + \delta \cos na = p : m$ ,  $\alpha (\sin na + \cos na) - \beta (\sin na - \cos na) - \gamma (\sin na - \cos na) - \delta (\sin na + \cos na) = 0$ ,  $\alpha \cos na - \beta \sin na - \gamma \cos na + \delta \sin na = 0$ ,  $\alpha (\sin na - \cos na) + \beta (\sin na + \cos na) - \gamma (\sin na + \cos na) + \delta (\sin na - \cos na) = 0$ . Łatwo spostrzec, że tym czterem równaniom czynią zadość wartości:  $\alpha = \gamma = \Delta \sin na$ ,  $\beta = \delta = \Delta \cos na$ , gdzie  $\Delta = p : 2m$ . Zatem  $A_0 = A_1 + (p : 2m)e^{-na} \sin na$ ,  $B_0 = B_1 + (p : 2m)e^{-na} \cos na$ ,  $C_0 = C_1 + (p : 2m)e^{na} \sin na$ ,  $D_0 = D_1 + (p : 2m)e^{na} \cos na$ .

Z kolei zauważymy, że w skrajnym lewym przekroju belki siła tnąca moment gnący muszą być równe zeru, jako w końcowym nieobciążonym, a przeto przy  $\zeta = b$  musi być  $\eta_{0b}''' = 0$ ,  $\eta_{0b}'' = 0$ . Stąd



$$A_0 e^{nb} \cos nb - B_0 e^{nb} \sin nb - C_0 e^{-nb} \cos nb + D_0 e^{-nb} \sin nb = 0$$

oraz  $A_0 e^{nb} (\sin nb - \cos nb) + B_0 e^{nb} (\sin nb + \cos nb) - C_0 e^{-nb} (\sin nb + \cos nb) + D_0 e^{-nb} (\sin nb - \cos nb) = 0$ .

Na mocy powyższych otrzymanych wartości możemy jeszcze inaczej napisać to samo:  $A_1 e^{nb} \cos nb - B_1 e^{nb} \sin nb - C_1 e^{-nb} \cos nb + D_1 e^{-nb} \sin nb = K = (\rho : m) \sin n(b-a) \sinh n(b-a)$  oraz  $A_1 e^{nb} (\sin nb - \cos nb) + B_1 e^{nb} (\sin nb + \cos nb) - C_1 e^{-nb} (\sin nb + \cos nb) + D_1 e^{-nb} (\sin nb - \cos nb) = L = -(\rho : m) [\sin n(b-a) \cosh n(b-a) + \cos n(b-a) \sinh n(b-a)]$ . W ten sposób otrzymaliśmy piąte i szóste równanie dla określenia stałych całkowania. Chcąc wyznaczyć brakujące dwa, bierzemy pod uwagę, iż w przekroju środkowym siła tnąca winna być równa zeru. Ten wniosek narzuca się prosto, gdyby bowiem przy  $\zeta = 0$  było  $T \neq 0$ , to po rozcięciu belki wzdłuż przekroju środkowego mielibyśmy w jednej jego powłoce  $T_0 > 0$  — w drugiej  $T_0 < 0$ . Symetria obciążenia uległa by zakłóceniu. Zatem przy  $\zeta = 0$  musi być  $\eta_{10}''' = A_1 + D_1 - B_1 + C_1 = 0$ . Nadto pośrodku belki styczna odkształconej winna być równoległa do  $\omega\zeta$ : wymaga tego znowu symetria obciążenia. Zatem dla  $\zeta = 0$  mamy:  $\eta_{10}' = A_1 - D_1 + B_1 + C_1 = 0$ . Dodając i odejmując mamy  $A_1 + C_1 = B_1 - D_1 = 0$ , a przeto z równań piątego i szóstego:  $A_1 \cos nb \cosh nb - B_1 \sin nb \sinh nb = \frac{1}{2} K$ ,  $A_1 (\sin nb \cosh nb - \cos nb \sinh nb) + B_1 (\sin nb \cosh nb + \cos nb \sinh nb) = \frac{1}{2} L$ . Z tych równań z łatwością wyznaczymy wszystkie stałe całkowania, będziemy przeto mogli zbadać odkształconą. Pośrodku panować będzie skrajna wartość momentu gnącego  $M_0 = EJ\eta_{10}'' = 2n^2 EJ(A_1 - C_1) = 4n^2 EJA_1$ .

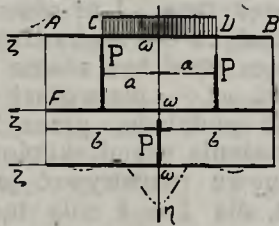
Cały ten rachunek nie należy do łatwych. Dla tego też zazwyczaj zakładamy wprost, że sprzeciw podłoża jest jednostajny na całej długości belki. W tym założeniu, oczywiście zupełnie fałszywym, otrzymamy  $M_0 = -\frac{1}{2} qb^2 + \frac{1}{2} pa^2$ . Z równania sił pionowych będziemy mieli nadto:  $2pa - 2bq = 0$  i ostatecznie  $M_0 = -\frac{1}{2} pa(b-a)$ . Nie wchodzi tu  $m$ : wzór pomija własności sprężyste podłoża. Nie powinno to dziwić ze względu na zupełną dowolność założenia.

**§ 43. Podkład kolejowy** stanowi również belkę stałego przekroju — na podłożu ziemnym, a więc wzorowo sprężystem. I tu również wobec zupełnej symetrii obciążenia początek stałych osi współrzędnych umieścimy w przekroju środkowym, gdzie siła tnąca musi być równa zeru, a styczna odkształconej — równoległa do osi  $\omega\zeta$  — pierwotnej osi podkładu. Oznaczmy przez  $2b$  całkowitą długość podkładu, przez  $2a$  rozstawienie szyn (Rys. 53). Wobec symetrii obciążenia siłami skupionymi  $P$  pionowymi, cisnącymi na szyny, możemy znowu rozpatrywać jeno lewą część belki. W skrajnym przekroju lewym, dla  $\zeta = b$  siła tnąca i moment gnący są niewątpliwie równe zeru. Zatem ostatnie cztery równania ustępu poprzedniego zachowują swą moc obowiązującą i w danym wypadku. Należy jeno wyznaczyć  $K$  i  $L$  na mocy czterech pierwszych, które tu mają nieco inną postać. W przekroju pod szyną, w odległości  $\zeta = a$ , siła tnąca zmienia się nagłym skokiem o wartość skończoną  $P$ . Oś siły  $P$  stanowi przeto granicę dwóch połaci obciążenia. Dla obu po-

łaci równanie odkształconej różniczkowe będzie miało tę samą postać  $EJ\eta'''' = -m\eta = q$ , całkowite natomiast różnic się będzie stałymi całkowania. Chcąc je wyznaczyć wypisujemy dla przekroju pod szyną równania warunkowe. Odciętej  $\zeta = a$  odpowiada ta sama wartość rzędnej  $\eta_{0a} = \eta_{1a}$ , ten sam kąt nachylenia stycznej odkształconej  $\eta'_{0a} = \eta'_{1a}$  oraz ta sama wartość momentu gnącego, czyli  $EJ\eta''_{0a} = EJ\eta''_{1a}$ . Nadto, przy  $\zeta = a$  siła tnąca zmienia się nagłym skokiem, mamy bowiem dla połaci lewej  $EJ\eta'''_{0a} = -T_a$  dla prawej  $EJ\eta'''_{1a} = -T_a - P$  ostatecznie więc  $\eta'''_{0a} - \eta'''_{1a} = P : EJ$ . W ten sposób otrzymamy cztery pierwsze równania, różniące się jeno prawymi stronami od równań poprzedniego ustępu. Czynną im zadość wartości  $\alpha = -\Delta (\text{Sin } na - \text{Cos } na)$ ,  $\beta = -\Delta (\text{Sin } na + \text{Cos } na)$ ,  $\gamma = \Delta (\text{Sin } na + \text{Cos } na)$ ,  $\delta = -\Delta (\text{Sin } na - \text{Cos } na)$ , gdzie  $\Delta = P : 4 EJ$ .

Po podstawieniu w równania piąte i szóste, otrzymamy  $K = -P [\text{Sin } n(b-a) \text{Cosh } n(b-a) + \text{Cos } n(b-a) \text{Sinh } n(b-a)] : 2 EJ$ ,  $L = (P : EJ) \text{Cos } n(b-a) \text{Cosh } n(b-a)$ , będziemy przeto mogli wyznaczyć wszystkie stałe całkowania i w danym wypadku.

**§ 44. Obciążenie skupione.** Odrzućmy prawą połowę podkładu (Rys. 53), a otrzymamy belkę  $F\omega$  na wzorowo sprężystym podłożu, obciążoną siłą  $P$  w odległości  $a$  od początku osi współrzędnych. W danym wypadku cztery pierwsze równania będą oczywiście te same, co i w ustępie poprzedzającym; te same będą również piąte i szóste równania, natomiast siódme i ósme należy zbudować nieco inaczej. W skrajnym prawym przekroju belki, przy  $\zeta = 0$  panować będzie moment gnący i siła tnąca równe zero, zatem tu:  $\eta''_{10} = A_1 - C_1 = 0$  oraz  $\eta'''_{10} = A_1 + D_1 - B_1 + C_1 = 0$ . Te dwa równania łącznie z piątym i szóstym pozwolą wyznaczyć  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Nadto z czterech pierwszych równań wyznaczmy  $A_0, B_0, C_0$  i  $D_0$  — otrzymamy przeto odkształconą, będziemy mogli wyznaczyć momenty i sprzeciw podłoża. Rachunki te są niesłychanie zawite, to też zazwyczaj staramy się o ile można uprościć sprawę, czyniąc mniej lub więcej prawdopodobne założenia. Możemy naprzykład dla belki bardzo długiej, obciążonej siłą  $P$  skupioną po środku rozpatrywać obie połowy belki, jako nieskończenie długie. Środek współrzędnych umieszczamy po środku belki, gdzie ze względu na symetrię obciążenia panuje wartość zero siły tnącej, a styczna odkształconej winna być równoległa do osi pierwotnej belki. Zatem przy  $\zeta = 0$  mamy  $\eta'_0 = 0$ , oraz  $EJ\eta''_0 = -T_0$ .  $T_0 + P/2 = 0$ , skąd  $EJ\eta''_0 = 1/2 P$ . W danym wypadku możemy również rozpatrywać wyłącznie tylko lewą połowę belki ze względu na zupełną symetrię obciążenia. Dla niej cała równania  $EJ\eta'''' = q = -m\eta$  będzie  $\eta = Ae^{n\zeta} \text{Sin } n\zeta + Be^{n\zeta} \text{Cos } n\zeta + Ce^{-n\zeta} \text{Sin } n\zeta + De^{-n\zeta} \text{Cos } n\zeta$ .



Rys. 52, 53, 54.

Na końcu belki, a więc dla skrajnego lewego jej przekroju  $\eta = 0$ , tam bowiem działanie siły  $P$  sięgać nie może, jako do nieskończenie dalekiego punktu, odległego o  $\zeta = \infty$  od początku współrzędnych. Po podstawieniu tych wartości w tylko co wypisany wzór, otrzymamy  $A = B = 0$ .



czyli będzie wprost  $\eta = (C \operatorname{Sin} n\zeta + D \operatorname{Cos} n\zeta) e^{-n\zeta}$ , oraz  $\eta' = -n [(C \operatorname{Sin} n\zeta - D \operatorname{Cos} n\zeta) C + (C \operatorname{Sin} n\zeta + D \operatorname{Cos} n\zeta) D] e^{-n\zeta}$ . Dla środkowego przekroju  $\eta'_0 = C - D = 0$ , zatem ostatecznie  $\eta = C (\operatorname{Sin} n\zeta + \operatorname{Cos} n\zeta) e^{-n\zeta}$ . Stąd  $\eta' = -2 C e^{-n\zeta} n \operatorname{Sin} n\zeta$ ,  $\eta'' = 2 C e^{-n\zeta} n^2 (\operatorname{Sin} n\zeta - \operatorname{Cos} n\zeta)$ ,  $\eta''' = -4 C e^{-n\zeta} n^3 \operatorname{Cos} n\zeta$ . Zatem dla środkowego przekroju  $4 C n^3 = \frac{1}{2} P : EJ$ , skąd  $C = \frac{1}{8} P : EJ n^3$ , gdzie, jak zwykle  $4 n^4 = m : EJ$ . Ostatecznie  $\eta = \frac{1}{8} (P : EJ n^3) e^{-n\zeta} (\operatorname{Sin} n\zeta + \operatorname{Cos} n\zeta)$ . Strzałka ugięcia belki najwyższa pod siłą  $P$  będzie  $f = \frac{1}{8} P : EJ n^3 = P n : 2 m$ . Od tej skrajnej wartości począwszy odkształcona szybko zcichającymi falami przecina okresowo osi  $\omega\zeta$  ujawniając kolejno rzędne  $\eta > 0$  i  $\eta < 0$ . Strzałki  $\eta = 0$  otrzymujemy dla rzędnych  $\zeta$ , czyniących zadość równaniu  $\operatorname{Sin} n\zeta + \operatorname{Cos} n\zeta = 0$ , a więc kolejno w odległościach  $\lambda = \frac{3}{4} \pi : n$  po obu stronach osi  $\omega\eta$ . Skrajne wychylenia odkształconej odpowiadają rzędnym, czyniącym zadość równaniu  $\eta' = 0$  czyli  $\operatorname{Sin} n\zeta = 0$ . Wierzchołki fali leżą przeto w odległościach  $\Delta = \pi : n$ . Odnośną postać odkształconej zaznaczyliśmy na (Rys. 54). W podobny sposób zmienia się również i moment gnący. Skrajna jego wartość, pośrodku belki wynosi  $M_m = EJ \eta_0'' = -2 C n^3 EJ = -P : 4 n$ .

Okresowość tego samego rodzaju wykazują również odkształcone i momenty wszystkich powyżej rozpatrywanych belek. Dla tego też nie badaliśmy ich praw zmienności w poszczególnych wypadkach. Wyznaczanie warunków pracy belek na sprężystym podłożu jest, jak widzieliśmy, nader uciążliwe.

**§ 45. Podpory sprężyste i sztywne.** Pojęcie sprężystości podłoża rodzi pokrewne pojęcie sprężystości podpór nie powiązanych w podłoże. Weźmy pod uwagę podporę sprężystą, a więc usuwającą się pod naciskiem belki. *Gdy obniżenie podpory wzrasta proporcjonalnie do nacisku, podporę zowiemy wzorowo sprężystą.* Oznaczmy jej odpór przez  $R$ , przez  $f$  — poddawanie się podpory w kierunku działania nacisku, który wywołuje ów odpór. Będzie to więc strzałka osiadania podpory mierzona na osi siły odporowej, lub kąt pochylenia przekroju podpartego w kierunku obrotowym pary sił momentu odporowego, wywołującego moment osadczy — sprzeciw podpory. Ponieważ nacisk na podporę równoważy jej sprzeciw, równy jest przeto —  $R$ . Dla podpory wzorowo sprężystej będziemy mieli wobec tego  $f = -nR$ , gdzie przez  $n$  oznaczyliśmy odnośny współczynnik proporcjonalności. Gdy  $n = 0$  wtedy i  $f = 0$  — podpora jest niesprężysta, sztywna, oczywiście w stosunku do rozpatrywanego odporu. Gdy  $n = \infty$ ,  $R = 0$  podpora odporu  $R$  nie może rozwinąć. W ogólnym wypadku podpora daje trzy odpory: pionowy  $V$ , poziomy  $H$  i moment osadczy  $\mu$ . Podpora sprężysta da te same odpory, a nadto ujawni osiadanie sprężyste  $f = -nV$ , zboczenie sprężyste  $h = -tH$  i obrót sprężysty  $\delta = -s\mu$ . Gdy wszystkie trzy powyższe współczynniki proporcjonalności mają wartości skończone różne od zera, podpora należy do *wzorowo sprężystych stałych*, gdy jeno  $s = \infty$ , a pozostałe  $n$  i  $t$

są skończone i różne od zera podpora jest *wzorowo sprężysta przegubowa*, gdy wreszcie  $s = \infty$ ,  $t = \infty$ , a  $n$  jest skończone i nie równe zero — *wzorowo sprężysta rolkowa*. Rzeczywiste podpory są zawsze sprężyste wobec istotnej sprężystości wszelkiego budulca. Niekiedy jednak strzałki podpór są tak znikome, że bez znacznego błędu możemy owe podpory uważać jako niesprężyste, czyniąc  $n = t = s = 0$ . W innych wypadkach należy jednak strzałki podpór brać pod uwagę, — rozpatrywać pręt na podporach sprężystych. Wyobraźmy sobie belkę, leżącą na jednakowych poprzecznych belkach, uszeregowanych równolegle w pewnych odstępach. O ile belka leży pośrodku poprzecznic, będziemy mieli strzałkę ugięcia pionową  $f = - Rl^3 : 48 E_0J_0$ , gdzie  $l$  oznacza długość poprzecznic,  $R$  jej odpór pionowy, a  $E_0J_0$  odnośną sztywność w założeniu niezmiennego przekroju poprzecznego. Tutaj więc  $n = l^3 : 48 E_0J_0$ . Tylko co opisany ustrój przeważnie się nie spotyka, natomiast jezdnia mostu kolejowego, złożona z poprzecznie uszeregowanych równolegle i obustronnie podpartych stanowi najczęściej spotykane podłoże toru. Obie szyny toru leżą przeto na poprzecznicach — wzorowo sprężystych podporach. Z łatwością wyznaczymy odnośną wartość współczynnika  $n$ . Zwyczajny szereg podkładów stanowi również układ podpór wzorowo sprężystych dla szyn kolejowych. Te przykłady wystarczą narazie.

**§ 46. Belki na podporach wzorowo sprężystych statycznie wyznaczalne.** Weźmy pod uwagę belkę poziomą, spoczywającą na podporach wzorowo sprężystych. Po obciążeniu siłami gnącymi, prostopadłymi do osi pierwotnie prostej belki nastąpi wygięcie płaskie, rozpatrujemy bowiem pręt jednorodnie zbudowany. Wygięciu belki towarzyszyć będą odkształcenia podpór, proporcjonalne do wywołanych odporów: sprężyste strzałki i kąty obrotu. Po odkształceniu, gdy zapanuje stan równowagi trwałej, będziemy mogli wypisać równania statyki, wiążące siły zewnętrzne z niewiadomymi — odporami. Dla belki płasko wygiętej trzy równania statyki pozwolą wyznaczyć jeno trzy odpory — pozostałe będą statycznie niewyznaczalnemi. Zatem: *belka, płasko wygięta, wsparta na podporach wzorowo sprężystych, jest statycznie wyznaczalna, o ile obciążenie zewnętrzne wywołuje jeno trzy odpory*. W tym szczególnym wypadku odpory są niezależne od sprężystych własności podpór. Zależą jedynie od obciążenia zewnętrznego, od wymiarów belki i rozkładu jej punktów oparcia, tylko te bowiem wielkości wchodzi do równań statyki. Zatem pręt ugnie się zupełnie tak samo, jak na tych samych podporach, lecz niesprężystych. *Krzywizna jego wszędzie pozostanie ta sama*. Wynika to wprost z równania zasadniczego momentów  $EJ_1'' = M$ . Prawa jego część stanowi sumę wyrazów zawierających odpory lub siły zewnętrzne mnożone przez odnośne ramiona momentów. Tylko co wyżej mówiliśmy, że w wy-

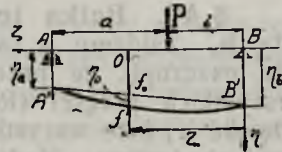


padku statycznej niewyznaczalności odpory są niezależne od własności sprężystych podpór. Zatem prawa część równania nie zależy od własności sprężystych podpór — pręt wygnie się zupełnie tak samo, jak na podporach niesprężystych, ulegnie jednak, jako całość odkształcona, osunięciu i skrzywieniu z poziomu. Stąd prosty wniosek, że i po odkształceniu gnącem belki statycznie wyznaczalnej podpory wzorowo sprężyste leżą na prostej. To proste prawo umożliwia wyznaczanie wygięcia belki statycznie wyznaczalnej spoczywającej na podporach wzorowo sprężystych. Należy wyznaczyć odkształconą  $\eta_0 = f$  w założeniu tych samych podpór — niesprężystych. Istotna odkształcona pręta będzie się różniła o funkcję liniową strzałek podpór wzorowo sprężystych. Prosty przykład najpełniej to uwypukli.

**§ 47. Belka statycznie wyznaczalna na dwóch podporach wzorowo sprężystych.**

Ułożmy poziomo belkę stałego przekroju poprzecznego na dwóch poprzecznicach. Obie poprzecznice ustawiamy prostopadłe do osi belki, poprzecznicę obustronnie podpieramy. Prawy skrajny przekrój belki  $B$  oparty jest na poprzecznicę obustronnie wspartej na podporach przegubowych—lewy  $A$ —opiera się na poprzecznicę obustronnie spoczywającej na podporach rolkowych.

Zatem belka ma prawą podporę wzorowo sprężystą, przegubową — lewą — rolkową. Po obciążeniu siłą  $P$  w odległości (Rys. 55)  $a$  od lewej podpory i  $b$  od prawej — podpory obniżą się pionowo pod jarzmem nacisku. Otrzymamy strzałkę lewej podpory  $\eta_a$  — prawej  $\eta_b$ , zatem  $\eta_a = -n_a A$ ,  $\eta_b = -n_b B$ , poprzecznicę mogą bowiem być wogóle niejednakowe, co pociąga za sobą konieczność rozróżniania współczynników proporcjonalności  $n_a$  i  $n_b$ .



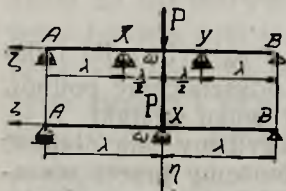
Rys. 55.

Strzałki tylko co wypisane stanowią w danym wypadku jedyne odkształcenie podpór. Wynika to wprost ze sposobu podparcia pręta. Z równań statyki:  $A + B + P = 0$ ,  $Al + Pb = 0$ , gdzie przez  $l$  oznaczyliśmy całą długość pręta, otrzymamy:  $A = -Pb : l$ ,  $B = -Pa : l$ , możemy przeto niezależnie od sprężystych własności podpór wypisać zasadnicze równanie gięcia:  $EJ\eta'' = -Pb(l - \zeta) : l + P(b - \zeta)$ , stąd:  $EJ\eta' = C + \frac{1}{2} Pb(l - \zeta)^2 : l + \frac{1}{2} P(b - \zeta)^2$ ,  $EJ\eta = D + C\zeta - \frac{1}{6} Pb(l - \zeta)^3 : l + \frac{1}{6} P(b - \zeta)^3$ . Dla określenia stałych całkowania bierzemy pod uwagę, iż przy  $\zeta = 0$ ,  $\eta = \eta_b$ , a przy  $\zeta = l$ ,  $\eta = \eta_a$ , a przeto:  $EJ\eta_a = -EJn_a A = D + Cl$ ,  $EJ\eta_b = -EJn_b B = D - \frac{1}{6} Pbl^2 + \frac{1}{6} Pb^3$ , skąd bezpośrednio  $C = EJP(n_a b - n_b a) : l^2 - \frac{1}{6} Pbl + \frac{1}{6} Pb^3$  :  $l = EJP(n_a b - n_b a) : l^2 + C_0$ ,  $D = EJn_b Pa : l + \frac{1}{6} Pbl^2 - \frac{1}{6} Pb^3 = EJn_b Pa : l + D_0$ . Przez  $C_0$ ,  $D_0$  oznaczyliśmy tutaj wartości stałych całkowania, jakie otrzymaliśmy już w § 4 w założeniu podpór niesprężystych, a więc przy  $n_a = n_b = 0$ . Zatem po podstawieniu otrzymamy równanie odkształconej:  $\eta = \eta_0 + Pan_b : l + P(n_a b - n_b a) \zeta : l^2 = \eta_0 + \eta_b + (\eta_b - \eta_a) \zeta$ . Ten wzór stwierdza nasze przewidywania

teoretyczne. Odłóżmy  $AA' = \eta_a$ ,  $BB' = \eta_b$  i poprowadźmy prostą  $A'B'$ . Strzałka ugięcia pręta na sprężystych podporach  $Of = Of_0 + f_0f$  gdzie  $f_0f = \eta_0$ . Należy zatem odłożyć rzędne  $\eta_0$  w kierunku pionowym poniżej prostej  $A'B'$  aby otrzymać wykres strzałek ugięcia istotnych.

**§ 48. Belki statycznie niewyznaczalne.** Inaczej zupełnie zachowują się belki statycznie niewyznaczalne na podporach sprężystych, ponieważ odpory ich zależą od własności sprężystych odnośnych podpór. I tu również całkowanie zasadniczego równania gięcia stanowi rozwiązanie ogólne zagadnienia, wobec jednak trudności rachunkowych niezawsze łatwo prowadzi do celu. Wypisujemy równanie gięcia zasadnicze, znacząc odpowiednio odpory niewiadome i całkujemy wprost w wypadku stałego przekroju poprzecznego. W wypadku belki o przekroju zmiennym korzystamy z równania odkształconej całkowego. W ten sposób prócz dwóch stałych całkowania będziemy mieli wszystkie odpory — niewiadome, które wyznaczymy z odnośnych równań warunkowych i równań statyki. Istotą tego sposobu poznamy najłatwiej biorąc pod uwagę następujący prosty przykład:

**§ 49. Belka trójprzęsłowa na podporach wzorowo sprężystych.** Załóżmy, a założenie to w niczem ogólności naszych rozważań nie uszczupli, że przekrój poprzeczny belki jest stały i jednakowy dla wszystkich przęseł (Rys. 56), że wszystkie przęsła mają jednakową rozpiętość  $\lambda$ , i że wszystkie podpory mają ten sam współczynnik  $n$  różny od zera skończony. Nadto bierzemy pod uwagę obciążenie siłą pionową  $P$



Rys. 56 i 57.

czynną pośrodku belki. Wobec zupełnej symetrii obciążenia umieszczamy początek stałych osi współrzędnych po środku belki, kierując oś  $\omega\zeta$  na lewo po osi pierwotnej pręta, oś  $\omega\eta$  w dół, a  $\omega\xi$  — ku patrzącemu. Odpór skrajnej prawej podpory przegubowej oznaczamy przez  $B$ , pozostałych rolkowych przez  $A, X, Y$ , idąc od lewej ku prawej. Równania statyki, wypisane dla skrajnego prawego punktu  $B$  pręta nieodkształconego, będą  $A + X + Y + B + P = 0$ ,  $3A\lambda + 2X\lambda +$

$+ \frac{3}{2}\lambda P + Y\lambda = 0$ . Nadto równanie momentów dla punktu  $A$  da  $3B\lambda + 2Y\lambda + \frac{3}{2}P + X\lambda = 0$ . Stąd prosty wniosek, zresztą zupełnie oczywisty ze względu na symetrię obciążenia, że  $A = B$ ,  $X = Y$ . Ostatecznie otrzymamy jedno tylko wypadkowe równanie  $A + X + \frac{1}{2}P = 0$ . Mimo to możemy wypisać równanie gięcia w postaci  $EJ\eta'' = A(\frac{3}{2}\lambda - \zeta) \parallel + X(\frac{1}{2}\lambda - \zeta)$ . Całkując otrzymamy:  $EJ\eta' = C - \frac{1}{2}A(\frac{3}{2}\lambda - \zeta)^2 \parallel - \frac{1}{2}X(\frac{1}{2}\lambda - \zeta)^2$ ,  $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{6}A(\frac{3}{2}\lambda - \zeta)^3 \parallel + \frac{1}{6}X(\frac{1}{2}\lambda - \zeta)^3$ . Te trzy równania dotyczą jeno lewej połowy belki — prawa ze względu na zupełną symetrię obciążenia będzie niewątpliwie tożsamościowa pod względem naprężeń i odkształceń, możemy jej zatem nie brać pod uwagę. Dla określenia stałych całkowania mamy cztery równania warunkowe. Na lewym skraju belki przy  $\zeta = \frac{3}{2}\lambda$ ,  $\eta = \eta_a = -nA$ ,



ponad podporą  $X$ , przy  $\zeta = \frac{1}{2} \lambda$  będzie  $\gamma_1 = \gamma_{1x} = -nX$ , wreszcie ze względu na symetrię obciążenia kąt nachylenia stycznej odkształconej ku osi  $\omega\zeta$  równy jest zeru pośrodku belki, czyli więc  $\gamma'_0 = 0$  dla  $\zeta = 0$ . Inaczej jeszcze  $-EJnA = D + \frac{3}{2} C\lambda$ ,  $-EJnX = D + \frac{1}{2} C\lambda + \frac{1}{6} A\lambda^3$ ,  $C - \frac{1}{2} A \times \frac{9}{4} \lambda^2 - \frac{1}{2} X \times \frac{1}{4} \lambda^2 = 0$ . Różnica pierwszych dwóch równań da:  $EJn(X-A) = C\lambda - \frac{1}{6} A\lambda^3$ . Na mocy trzeciego  $EJn(X-A) = \frac{23}{24} A\lambda^3 + \frac{1}{8} X\lambda^3$ . Ponieważ na mocy równania statyki  $X = -A - \frac{1}{2} P$  przeto ostatecznie  $A = (3\lambda^3 - 24EJn)P : (40\lambda^3 + 96EJn) = B$ ,  $X = -(23\lambda^3 + 24EJn)P : (40\lambda^3 + 96EJn) = Y$ . Z łatwością również wyznaczmy  $C$  i  $D$ , będziemy mogli przeto wyznaczyć odkształconą. Z powyższych wzorów wynika, że  $X$ ,  $Y$  nie mogą mieć wartości zerowych, natomiast przy  $3\lambda^3 = 24EJn$  obie skrajne odpory  $A=B=0$ . W tym szczególnym wypadku są one zbyteczne. Gdy znów  $3\lambda^3 < 24EJn$ , odpory skrajne są ujemne, pręt na nie wywiera nacisk, lecz gdy  $3\lambda^3 > 24EJn$ , wtedy  $A > 0$  i  $B > 0$  — odpory skrajne należy dać ponad pręt, inaczej bowiem pręt uniesie się końcami ponad podpory, będziemy przeto mieli wypadek powyżej rozpatrywany — belki opartej na dwie podpory a obciążonej siłą  $P$  pośrodku.

Rozwiązywanie równań warunkowych stanowi poważną wadę powyżej podanego sposobu. Trudności rachunkowe rosną wraz z ilością przęseł, to też zazwyczaj stosujemy do belek wieloprzęsłowych:

**§ 50. Twierdzenie o pięciu momentach.** Weźmy pod uwagę belkę wieloprzęsłową na wzorowo sprężystych podporach, uszeregowanych pierwotnie na jednej prostej. Ułóżmy na tej prostej — pierwotnej osi belki nieodkształconej stałą oś  $\omega\zeta$ , obierając początek spólrzędnych dajmy na to w skrajnym prawym przekroju belki, lub w którymkolwiek przekroju podpartym. Oś  $\omega\zeta$  kierujemy na lewo,  $\omega\eta$  w dół, a  $\omega\xi$  — ku patrzącemu. Po obciążeniu belki siłami gnącymi prostopadłymi do osi pierwotnej — nastąpi wygięcie płaskie — wyłącznie bowiem rozpatrujemy belki jednorodnie zbudowane. Po odkształceniu podpory sprężyste zejną z poziomu — ujawnią strzałki pionowe. Ich strzałki poziome możemy pominąć, jako znikome przy nieznacznych, praktycznie jedynie dopuszczalnych wygięciach belki. Korzystamy ze znakowania § 35 i obieramy na belce odkształconej dwa sąsiednie przęsła  $k$  i  $k+1$ . Ich podpory  $C_{k-1}$ ,  $C_k$ ,  $C_{k+1}$  dały strzałki  $\gamma_{ik-1}$ ,  $\gamma_{ik}$ ,  $\gamma_{ik+1}$ . W założeniu wzorowej sprężystości podpór:  $\gamma_{ik-1} = -n_{k-1} C_{k-1}$ ,  $\gamma_{ik} = -n_k C_k$ ,  $\gamma_{ik+1} = -n_{k+1} C_{k+1}$ , rozpatrujemy bowiem podpory różnych rodzajów o niejednakowych współczynnikach sprężystości w ogólnym wypadku. Owe strzałki, a właściwie mówiąc odpory, stanowią niewiadome zagadnienia, nie możemy przeto korzystać z równań *Clerc'a* i *Clapeyron'a* bo wyraz  $N$  obu tych wzorów zawiera właśnie owe strzałki  $\gamma_{ik-1}$ ,  $\gamma_{ik}$ ,  $\gamma_{ik+1}$ . Usuńmy je ze wzorów. W tym celu możemy wypisać dla przęsła  $k$  równanie momentów w postaci  $M_{k-1} + T_{k-1} l_k + \Sigma P_k b_k = M_k$ , dla przęsła  $k+1$  otrzymamy  $M_k + T_k l_{k+1} + \Sigma P_{k+1} b_{k+1} = M_{k+1}$ , korzystając ze zna-

kowania (Rys. 49). Dodawanie obejmuje wszystkie siły gnące pierwszego przęsła  $P_k$  w pierwszym równaniu, w drugim — siły  $P_{k+1}$  drugiego przęsła. Ponieważ niewątpliwie  $T_k = T_{k-1} + \Sigma P_k + C_k$ , przeto  $M_k + T_{k-1} l_{k+1} + l_{k+1} \Sigma P_k + C_k l_{k+1} + \Sigma P_{k+1} b_{k+1} = M_{k+1}$ . Rugując z tych wzorów  $T_{k-1}$  otrzymamy  $C_k = M_{k-1} : l_k - (1 : l_k + 1 : l_{k+1}) M_k + M_{k+1} : l_{k+1} - \Sigma P_k a_k : l_k - \Sigma P_{k+1} b_{k+1} : l_{k+1}$ , mamy bowiem  $a_k = l_k - b_k$ . W ten sposób możemy wyrazić  $C_{k-1}$ ,  $C_k$  i  $C_{k+1}$  w zależności od  $M_{k-2}$ ,  $M_{k-1}$ ,  $M_k$ ,  $M_{k+1}$ ,  $M_{k+2}$  i mnożąc przez  $-n_{k-1}$ ,  $-n_k$ ,  $-n_{k+1}$  podstawić we wzory *Clerc'a* lub *Clapeyron'a*. W wyniku otrzymamy wzory wiążące owe pięć momentów odporowych, a stanowiące istotę *twierdzenia o pięciu momentach*, które zostało wyprowadzone przez *H. Czopowskiego*, w założeniu stałych, choć niejednakowych sztywności poszczególnych przęseł i tak nazwane.

Można również korzystać ze wzorów *Clerc'a* i *Clapeyron'a* łącznie z powyżej wypisanymi wzorami dla  $C_k$ . Istotnie, w założeniu  $n-1$  przęsłowej belki, będziemy mieli  $n$  odporów  $C_0, C_1 \dots C_n$  i  $n$  momentów odporowych  $M_0, M_1 \dots M_n$ . Wzory *Clerc'a* lub *Clapeyron'a* dadzą jak wiemy  $n-2$  równań warunkowych, linjowych względem momentów i odporów powyżej wyszczególnionych. Nadto możemy niewątpliwie wypisać  $n-2$  równań dla  $C_1, C_2 \dots C_{n-1}$  — linjowych względem momentów odporowych. Z tych  $2n-4$  równań wyznaczymy  $2n-4$  odporów i momentów odporowych. Brakujące nam jeszcze równania otrzymamy częściowo z warunków równowagi belki odkształconej, częściowo zaś z warunków końcowego obciążenia belki. Gdy belka kończy się ponad skrajnymi podporami typu rolkowego lub przegubowego,  $M_0 = M_n = 0$ , gdy belka obustronnie zwisa — momenty  $M_0$  i  $M_n$  można wyznaczyć bezpośrednio sprowadzeniem układów sił gnących czynnych na owych końcach. Dla belek o końcach osadzonych możemy wypisać nowe dwa równania *Clerc'a*, wiążące dodatkowo  $M_0$  i  $M_n$ . Nadto we wszystkich wypadkach mamy dwa równania statyki. W ten sposób wyznaczymy wszystkie odpory i momenty odporowe. Następujący prosty przykład najlepiej wyjaśni istotę rzeczy.

**§ 51. Belka dwuprzęsłowa na podporach wzorowo sprężystych.** Weźmy pod uwagę belkę o stałym poprzecznym przekroju, wspartą na trzech wzorowo sprężystych podporach  $A, X, B$ , leżących na linii prostej — pierwotnej osi belki nieodkształconej w równych odległościach  $\lambda$  od siebie (Rys. 57). Po obciążeniu siłą skupioną  $P$  czynną na osi pośredniej podpory pręt ugnie się a podpory obniżą, ujawniając strzałki  $\eta_a = -n_a A$ ,  $\eta_x = -n_x X$ ,  $\eta_b = -n_b B$ . W danym wypadku mamy jeno dwa przęsła, przyczem  $M_0 = M_A = 0$  oraz  $M_B = M_3 = 0$ , zakładamy bowiem prawą skrajną podporę przegubową — a pozostałe rolkowe. W środkowej umieściliśmy początek stałych osi spólrzędnych,



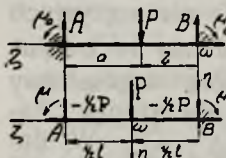
kierując oś  $\omega_z$  na lewo po osi pierwotnej belki, oś  $\omega_\eta$  w dół, a  $\omega_\xi$  — ku patrzącemu. Równanie *Clapeyron'a* da nam:  $4\lambda M_2 = 4\lambda M_x = 6 EJ(\tau_{ia} - 2\tau_{ix} + \tau_{ib}) : \lambda = -6 EJ(n_a A - 2n_x X + n_b B) : \lambda$ . Równanie dla środkowego odporu będzie tu  $X = -2M_x : \lambda = P$ , przyczem siłę  $P$  możemy zaliczyć do jednego, lub do drugiego przęsła. Oznaczmy przez  $2m = \lambda^3 : 3 EJ$ , a wtedy z tych dwóch równań otrzymamy  $n_a A - 2(n_x + m)X + n_b B = 2mP$ . Nadto równania statyki, wypisane dla skrajnej podpory prawej dadzą  $A + X + B + P = 0$ ,  $2A\lambda + (P + X)\lambda = 0$ . Z nich bezpośrednio wypływa, że  $A = B$  oraz  $X = -P - 2A$ , co podstawivszy w równanie poprzednio otrzymane, będziemy mieli:  $A = -2n_x P : [n_a + 4(n_x + m) + n_b] = B$ ,  $X = -P + 4n_x P : [n_a + 4(n_x + m) + n_b]$ . W założeniu obu skrajnych podpór niesprężystych będziemy mieli  $A = B = -Pn_x : 2(n_x + m)$ . Sprawdzimy to bezpośrednio, całkując równanie gięcia  $EJ\eta'' = A(\lambda - \zeta)$ , które wypisaliśmy dla lewej części belki ze względu na zupełną symetrię obciążenia. Zatem  $EJ\eta' = C - \frac{1}{2}A(\lambda - \zeta)^2$ ,  $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{6}A(\lambda - \zeta)^3$ . W danym wypadku przy  $\zeta = \lambda$  mamy  $\eta = 0$ . Nadto styczna odkształconej pośrodku musi być równoległa do osi  $\omega_z$ . Wymaga tego symetria obciążenia. Zatem  $C = \frac{1}{2}A\lambda^2$  oraz  $D + C\lambda = 0$ . Poza tem przy  $\zeta = 0$  mamy  $\eta = \tau_{ix} = f = -n_x X$  a przeto  $-EJn_x X = D + \frac{1}{6}A\lambda^3$ . Dołączmy jeszcze równania statyki  $B = A$  i  $X = -P - 2A$  a otrzymamy kolejno:  $A = B = -Pn_x : 2(n_x + m)$ ,  $C = -Pn_x\lambda^2 : 4(n_x + m)$ ,  $D = -Pn_x\lambda^3 : 4(n_x + m)$ ,  $X = -Pm : (n_x + m)$ . Równanie odkształconej będzie tu  $EJ\eta = [\lambda^3 - \lambda^2\zeta - \frac{1}{3}(\lambda - \zeta)^3] Pn_x : 4(n_x + m) = [3\lambda^2(\lambda - \zeta) - (\lambda - \zeta)^3] P : 12(1 + m : n_x)$ . Czyniąc w powyższych wzorach  $n_x = \infty$  odnajdziemy równania, dotyczące belki obciążonej siłą skupioną pośrodku jednoprzęsłowej statycznie wyznaczalnej.

**§ 52. Belki na wielu podporach wzorowo sprężystych równoodległych.** W wypadku belki spoczywającej na wielu podporach wzorowo sprężystych, ustawionych w odległości  $\lambda$  jedna od drugiej, trudności rachunkowe uniemożliwiają rozwikłanie zagadnienia. Zazwyczaj też korzystamy ze wzorów dla belek na sprężystym podłożu, jako bardziej rachunkowo dostępnych. W tym celu skupiony nacisk pionowy podpory  $R$  zastępujemy ciśnieniem rzekomego podłoża  $q = R : \lambda$ . Jest to niewątpliwe niezgodne z istotą rzeczy — błąd jednak w ten sposób popełniany maleje wraz z liczbą podpór szeregu.

Dotychczas wyłącznie tylko rozpatrywaliśmy podpory wzorowo sprężyste, rolkowe lub przegubowe, pomijając milcząco stałe, które prócz strzałek dają kąt  $\Theta$  proporcjonalny do pary obrotowej momentu odporowego lub osadczego, Zatem  $\Theta = -m\mu$ . Szczególna wartość  $m = 0$  cechuje podporę stałą niesprężystą, czyli przekrój osadzony, gdy znowu  $m = \infty$  — odnośny przekrój połączony jest przegubowo bez tarcia z podporą. Może się zdarzyć, że pewna liczba podpór belki wieloprzęsłowej

należą do typu stałych. Odnośne sprzeciwy należy dołączyć do sił zewnętrznych. W danym wypadku najlepsze wyniki daje sposób całkowania zasadniczego równania gięcia. Proste przykłady najlepiej to uwypuklą.

**§ 53. Belka jednoprzęsłowa na dwóch wzorowo sprężystych podporach stałych.** Weźmy pod uwagę belkę poziomą obustronnie zamocowaną w podporach wzorowo sprężystych stałych. Początek stałych osi (Rys. 58) spólrzędnych umieścimy w środku prawego zamocowanego przekroju, oś  $\omega\zeta$  poprowadzimy na lewo ku lewej podporze po osi pierwotnej pręta, oś  $\omega\eta$  w dół, a  $\omega\xi$  ku patrzącemu. Po obciążeniu siłą  $P$  pionową, przyłożoną w odległości  $a$  od lewej i  $b$  od prawej podpory, pręt ugnie się, jego skrajne przekroje poparte obniżą się i odkształcą, ujawniając strzałki pionowe  $\eta_a = -n_a A$ ,



Rys. 58 i 59.

$\eta_b = -n_b B$ , proporcjonalne do odporów pionowych  $A$  i  $B$ , a nadto kąty obrotu  $\Theta_a = -m_a \nu_a$ ,  $\Theta_b = -m_b \nu_b$  proporcjonalne do momentów odporowych  $\nu_a$  i  $\nu_b$ . Przesunięcia boczne pomijamy, jak zwykle, jako zgoła nieznaczne dla małych praktycznie jeno dopuszczalnych ugięć pręta. Równanie gięcia da nam:  $EJ\eta'' = \nu_a + A(l - \zeta) + P(b - \zeta)$ , skąd:  $EJ\eta' = C + \nu_a \zeta - 1/2 A(l - \zeta)^2 + 1/2 P(b - \zeta)^2$ ,  $EJ\eta = D + C\zeta + 1/2 \nu_a \zeta^2 + 1/6 A(l - \zeta)^3 + 1/6 P(b - \zeta)^3$ .

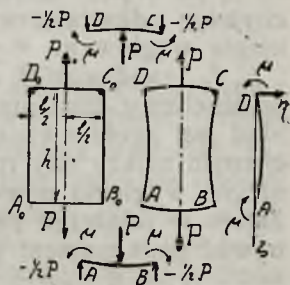
Dla określenia niewiadomych  $C, D, A, B, \nu_a$  i  $\nu_b$  mamy dwa równania statyki, które możemy wypisać dla początku spólrzędnych w postaci  $A + P + B = 0$ ,  $\nu_a + Al + Pb + \nu_b = 0$ , oraz cztery równania warunkowe. Dla  $\zeta = 0$  mamy  $EJ\Theta_b = -EJm_b \nu_b = C - 1/2 Al^2 - 1/2 Pb^2$ ,  $EJ\eta_b = -EJn_b B = D + 1/6 Al^3 + 1/6 Pb^3$ . Nadto dla  $\zeta = l$  będziemy mieli  $EJ\Theta_a = -EJm_a \nu_a = C + \nu_a l$ ,  $EJ\eta_a = -EJn_a A = D + Cl + 1/2 \nu_a l^2$ . Z tych równań wyznaczmy wszystkie niewiadome i otrzymamy równanie odkształconej.

W szczególnym wypadku, gdy siła  $P$  działa pośrodku belki  $l$  długiej, a obie podpory są jednakowo sprężyste, najlepiej umieścić początek spólrzędnych w środkowym przekroju (Rys. 59) i rozpatrywać jeno lewą połowę belki, jako zupełnie symetryczną. Równania statyki dadzą tu  $A = B = -1/2 P$ ,  $\nu_a = -\nu_b = \nu$ . Całkując zasadnicze równanie  $EJ\eta'' = \nu - 1/2 P(1/2 l - \zeta)$ , otrzymamy  $EJ\eta' = C + \nu\zeta + 1/4 P(1/2 l - \zeta)^2$ ,  $EJ\eta = D + C\zeta + 1/2 \nu\zeta^2 - 1/12 P(1/2 l - \zeta)^3$ . Pośrodku styczna odkształconej musi być równoległa do osi  $\omega\zeta$  ze względu na symetrię obciążenia i sprężystości obu podpór. Zatem  $0 = C + 1/4 P \times 1/4 l^2$ , skąd  $C = -1/16 Pl^2$ . Nadto dla  $\zeta = 1/2 l$  mamy w założeniu  $n_a = n_b = n$ ,  $m_a = m_b = m$  nowe równania warunkowe:  $EJ\Theta_a = -EJm\nu = -1/16 Pl^2 + 1/2 \nu l$ ,  $EJ\eta_a = -EJn A = 1/2 EJn P = D - 1/32 Pl^3 + 1/8 \nu l^2$ . Z tych równań otrzymamy  $\nu = Pl^2 : 8(l + 2EJm)$ , będziemy przeto mogli ustalić równanie odkształconej. Belka tylko co zbadana stanowi dosyć często spotykaną część ustrojów budowlanych; dwie belki tego rodzaju zawiera tak zwana —



**§ 54. Ramownica.** Cztery belki połączone węglami w sposób sztywny stanowią ramownicę. Najczęściej używane są ramownice prostokątne (Rys. 60) o dwóch jednakowej sztywności  $E_1J_1$  pionowych prętach bocznych  $A_0B_0$  i  $C_0D_0$  i dwóch poprzecznicach — górnej  $D_0C_0$  i dolnej  $A_0B_0$  również jednakowej sztywności  $E_0J_0$ . W wypadku zupełnego usztywnienia węglów, kąty proste wierzchołkowe ramownicy nie ulegają zmianie przy odkształceniu, mogą się jednak obracać w płaszczyźnie gięcia. Tego rodzaju ramownice usztywnione na węglach będziemy wyłącznie rozpatrywali — odkształcone ich prętów składowych przecinają się zawsze pod kątem prostym na każdym rogu. To założenie, praktycznie może niezupełnie ściśle, wszelkie bowiem połączenie zupełnie sztywne być nie może, znacznie ułatwi nam wyznaczanie odkształceń ramownicy.

Oznaczmy rozstawienie jej prętów pionowych — podłużnic przez  $l$ , poziomych — poprzecznic przez  $h$  i założmy, że obie podłużnice ulegają działaniu sił pionowych, leżących na osi ramownicy, a skierowanych nazewnątrz. Pod jarzmem tych sił pręty poziome wygną się w łuki, pochylone końcami ku osiom pierwotnym poprzecznic pod kątem  $\theta$  na węglach. Wobec doskonałości usztywnień węglowych odkształcenie to pociągnie za sobą skrzywienie obu pierwotnie prostych podłużnic. Ich odkształcone pochylą się pod tym samym kątem  $\theta$  na węglach ku swym pierwotnie prostym osiom pionowym. Łatwo to udowodnić, zważywszy, że odkształcone prętów ramownicy muszą przecinać się pod kątem prostym na węglach. Kąt  $\theta$  miałby zerową wartość jedynie w wypadku zupełnej sztywności podłużnic. Podłużnice ulegałyby jeno rozciąganiu siłami  $1/2 P$ , a poprzecznicę można by było uważać, jako zamocowane na węglach. Nie znamy jednak tworzyw sztywnych, kąt  $\theta$  jest zawsze różny od zera, zamocowania poprzecznic należą do typu wzorowo sprężystych. Łatwo to udowodnimy. W tym celu rozcinamy ramownicę po rogach, zastępując działanie zniszczonych w ten sposób węglowych usztywnień odpowiednimi parami sił — momentami węglowymi  $\mu$ . Wobec zupełnej symetrii momenty na węglach będą jednakowe, choć różnoskrętne. Odkształcenie ramownicy wyraźnie wskazuje, że dolny pręt w lewym końcu swym  $A$  pod działaniem siły  $P$  obrócił się nieco naokoło  $A$  w kierunku strzałki zegara. Ten obrót niewątpliwie wywołał sprzeciw sprężysty w postaci momentu o parze sił sprecznej co do kierunku obrotu — dał zatem moment oporowy  $\mu$  lewoskrętny, stanowiący odpór zamocowania lewego poprzecznicy. Rozumując w podobny zupełnie sposób dojdziemy do przekonania, że odporem zamocowania prawego będzie również moment  $\mu$  lecz prawoskrętny. Te dwa momenty łącznie z siłą  $P$  i jej odporami pionowymi —  $1/2 P$ , pochodzącymi od górnej siły  $P$ , stanowią obciążenie zewnętrzne poprzecznicy. W ustępie poprzednim badaliśmy belkę w ten sposób obciążoną i wyznaczaliśmy dla końcowego punktu odkształconej — pochylenie ku osi pierwotnej  $\theta = (-1/16 P l^2 + 1/2 \mu l) : E_0 J_0$ . W danym wypadku  $\mu$  stanowi niewiadomą zagadnienia. Chcąc ją wyznaczyć bierzemy pod uwagę podłużnicę



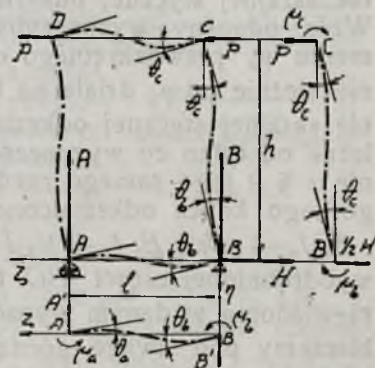
Rys. 60.

$AD$ , lewą. Przy odkształceniu oba jej końce nie schodzą z pioną, jeno się nieco oddalają od siebie w kierunku pionowym pod jarzmem sił rozciągających  $\frac{1}{2}P$ , a nadto zbliżają się, zresztą nader nieznacznie, ku osi sił  $P$  na tle wygięcia obu poprzecznic. Słowem możemy założyć, że końce  $A$ ,  $B$  podłużnicy pozostają na osi jej pierwotnej, pionowej. Wobec tego początek statych osi umieszczamy w  $D$ , oś  $D\zeta$  prowadzimy w dół przez  $A$ , oś  $D\eta$  na prawo, a  $D\xi$  ku patrzącemu. Będzie to więc belka obustronnie podparta, a obciążona siłami  $\frac{1}{2}P$  rozciągającymi i momentami  $\mu$  zastępującymi działanie poprzecznic odciętych. Dolny jej koniec ulega działaniu momentu gnącego  $\mu$  prawoskrętnego, na górny działa również moment  $\mu$ , lecz lewoskrętny, w tych bowiem dwóch kierunkach lewe końce poprzecznic chcą wygiąć podłużnicę po obu jej końcach. W myśl prawa o znakowaniu zasadniczego wzoru gięcia  $-E_1J_1\eta'' = \mu$ , skąd  $-E_1J_1\eta' = C + \mu\zeta$ ,  $-E_1J_1\eta = D + C\zeta + \frac{1}{2}\mu\zeta^2$ . Przy  $\zeta=0$  i  $\zeta=h$  mamy  $\eta=0$  a przeto  $D=0$ ,  $C = -\frac{1}{2}\mu h$  i ostatecznie  $-EJ\eta' = -\frac{1}{2}\mu h + \mu\zeta$ . Czyniąc w tym wzorze  $\zeta=h$  otrzymamy końcowe pochylenie odkształconej  $\Theta' = -\frac{1}{2}\mu h : E_1J_1$ . Wobec doskonałego usztywnienia węglowego  $\Theta = \Theta'$ , czyli:  $[-\frac{1}{16}Pl^2 + \frac{1}{2}\mu l] : E_0J_0 = -\frac{1}{2}\mu h : E_1J_1$ , skąd  $\mu = \frac{1}{8}Pl^2 : [l + hE_0J_0 : E_1J_1]$ . W rachunku powyższym pominęliśmy działanie sił rozciągających  $\frac{1}{2}P$ : popełniony w ten sposób błąd jest zgoła nieznaczny dla podłużnic niezbyt długich; w razie przeciwnym należy siły rozciągające wziąć pod uwagę — oba pręty boczne ulegną wygięciu mimośrodkowemu, o którym będzie mowa niżej jeszcze. Zatem w założeniu podłużnic mocnych a krótkich możemy śmiało rozpatrywać jeno moment  $\mu$ . Po środku strzałka ugięcia wyniesie  $-E_1J_1f_1 = -\frac{1}{2}\mu h \times \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}\mu \times (\frac{1}{2}h)^2$ . Zakładnięcie ramownicy będzie więc równe  $2f_1 = \frac{1}{4}\mu h^2 : E_1J_1$ . W podobny sposób otrzymamy strzałkę poprzecznic  $f_0$ , czyniąc we wzorach ustępu poprzedzającego  $\zeta=0$ . W danym wypadku wydłużenie pręta bocznego, powstałe na tle działania sił rozciągających  $\frac{1}{2}P$  będzie niewątpliwie równe  $\frac{1}{2}Ph : E_1F_1$ , gdzie przez  $F_1$  oznaczyliśmy poprzeczny przekrój podłużnicy. Zatem tu  $n=h : E_1F_1$ . Spółczynnik ten ma oczywiście wartość nieznaczną dla prętów krótkich a tęgich. W tem założeniu —  $n=0$ , a zatem  $D = \frac{1}{32}Pl^3 - \frac{1}{8}\mu l^2$  i ostatecznie  $E_0J_0f_0 = \frac{1}{32}Pl^3 - \frac{1}{8}\mu l^2 - \frac{1}{12}P(\frac{1}{2}l)^3$ . Stąd uwypuklenie ramownicy  $2f_0 = [\frac{1}{24}Pl^3 - \frac{1}{4}\mu l^2] : E_0J_0$ . W danym wypadku moment gnący podłużnic posiada wartość stałą  $\mu$ . Ta sama wartość momentu gnącego panuje w obu końców poprzecznic. Pośrodku natomiast mamy  $\mu_0 = \mu - \frac{1}{2}P \times \frac{1}{2}l$ . Z tych dwóch wartości wyższą należy wziąć pod uwagę przy wyznaczaniu właściwych wymiarów poprzecznic. Dla podłużnic bierzemy  $\mu$ .

**§ 55. Ramownica mostowa.** Ustawmy lewy dolny węgiel  $A$  tylko co rozpatrywanej ramownicy na podporze rolkowej, prawy  $B$  na przegubowej, a otrzymamy ramownicę mostową (Rys. 61). W górnych jej węglach  $C$ ,  $D$  przykładamy dwie jednakowe siły poziome  $P$  dodatnie, bo skierowane tak, jak oś stała  $B\zeta$ . Tę oś prowadzimy przez obie podpory na lewo. Oś  $B\eta$  układamy na osi prawej podłużnicy w dół — oś  $B\xi$  kierujemy ku patrzącemu. Pionowe odpory oznaczamy przez  $A$ ,  $B$ , jedyny odpór poziomy podpory przegubowej przez  $H$ . Równania statyki będą tutaj  $A + B = 0$ ,  $H + 2P = 0$ , oraz dla prawej podpory, jako



środką sprowadzenia momentów:  $Al + 2Ph = 0$ . Stąd  $A = -2Ph$  :  
 $l = -B$ ,  $H = -2P$ . Przy odkształceniu — siły  $P$  przesuną po-  
 przecznice górną w kierunku swego działa-  
 nia, a przeto wobec usztywnień węglow-  
 wych lewy koniec poprzecznic dolnej zo-  
 stanie obrócony przeciw strzałce zegara  
 na kąt  $\theta_a$ , prawy na kąt  $\theta_b$  oczywiście  
 również w tym samym kierunku pochyle-  
 nia się bocznych prętów. Wyznamy oba  
 te kąty. W tym celu rozcinamy ramowni-  
 cę po rogach, zastępując działanie znisz-  
 czonych w ten sposób węglowych usztywnie-  
 nia odpowiednimi momentami węglowymi  
 $\mu_a$ ,  $\mu_b$ ,  $\mu_c$  i  $\mu_d$ . Przęsło dolne stano-  
 wi zatem belkę leżącą na podporach  $A, B$ ,  
 wygiętą pod jarzmem momentów  $\mu_a$  i  $\mu_b$   
 prawoskrętnych. Wobec zupełnej tożsa-  
 mości warunków pracy obu podłużnic mających z założenia jednakową  
 sztywność  $E_1 J_1$ , oba kąty obrotu  $\theta_a$  i  $\theta_b$  będą oczywiście równe. To samo  
 dotyczy również i momentów, które owe odkształcenia wywołały, bę-  
 dziemy mieli przeto  $\mu_a = \mu_b = \mu_0$ . Obciążenie tego typu da odpory  
 pionowe  $A', B'$ , które z łatwością wyznaczymy z równań statyki, wypis-  
 anych dla początku spórzędnych w postaci  $A_1 + B_1 = 0$ ,  $2\mu_0 + A_1 l = 0$ .  
 Stąd  $A_1 = -2\mu_0 : l$ ,  $B_1 = 2\mu_0 : l$ , a przeto zasadnicze równanie gięcia  
 będzie  $E_0 J_0 \eta'' = \mu_0 - 2\mu_0 (l - \zeta) : l$ . Całkując mamy  $E_0 J_0 \eta' = C +$   
 $+ \mu_0 \zeta + \mu_0 (l - \zeta)^2 : l$ ,  $E_0 J_0 \eta = D + C\zeta + \frac{1}{2} \mu_0 \zeta^2 - \frac{1}{3} \mu_0 (l - \zeta)^3 : l$ .  
 W danym wypadku  $\eta_l = 0$  gdy  $\zeta = 0$  lub  $\zeta = l$ . Stąd mamy  $D - \frac{1}{3} \mu_0 l^2 = 0$ ,  
 $D + Cl + \frac{1}{2} \mu_0 l^2 = 0$ , co daje  $D = \frac{1}{3} \mu_0 l^2$ ,  $C = -\frac{5}{6} \mu_0 l$ . Na mocy  
 tylko co otrzymanych wartości będziemy mieli  $E_0 J_0 \theta_b = -\frac{5}{6} \mu_0 l +$   
 $+ \mu_0 l = \frac{1}{6} \mu_0 l$  stąd  $\theta_b = \frac{1}{6} \mu_0 l : E_0 J_0$ . W tym wzorze  $\mu_0$  stanowi nie-  
 wiadomą. Chcąc ją wyznaczyć, bierzemy pod uwagę prawą podłużnicę.  
 Wobec doskonałości usztywnienia węglowego odkształcona podłużnica  
 przetnie się z odkształconą poprzecznicą dolną pod kątem prostym,  
 a przeto koniec dolny podłużnicy pochyli się pod kątem  $\theta_b$  ku osi pier-  
 wotnej tego pręta — pionowej — na tle obrotu o ten sam kąt całej po-  
 dłużnicy około punktu  $B$ . Po uwzględnieniu tego obrotu końcowy prze-  
 krój dolny podłużnicy możemy niewątpliwie rozpatrywać, jako zamoco-  
 wany, a sam pręt uważać za belkę, obciążoną drugostronnie u góry w  $C$   
 siłą poziomą  $P$  i momentem  $\mu_c$ , zastępującym działanie odrzuconej po-  
 przecznicy górnej. Przy odkształceniu podłużnicy pochylają się wier-  
 chołkami naprzód w kierunku osi  $B\zeta$  dodatnim, muszą więc oopowiednio  
 wyginać końce poprzecznic górnej — prawy od góry, lewy ku dołowi.  
 Oba w kierunku jednakowym — przeciw strzałce zegara. Te odkształce-  
 nia świadczą o istnieniu momentów  $\mu_c$ ,  $\mu_d$  lewoskrętnych, stanowiących  
 obciążenie zewnętrzne poprzecznic górnej. Momenty  $\mu_c$ ,  $\mu_d$  zastępują  
 działanie podłużnic. Wobec istnienia trwałej równowagi odkształconej  
 esowe wygięcie poprzecznic górnej wytwarza sprzeciw sprężysty w po-



Rys. 61.

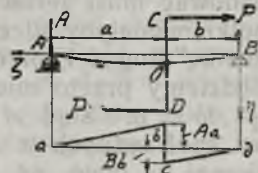
staci momentów  $\mu_c$  i  $\mu_d$  prawoskrętnych. Jeden z nich stanowi część obciążenia zewnętrznego pręta  $BC$ , osadzonego u dołu, daje więc pochylenie skrajnej stycznej odkształconej w  $C$  ku pierwotnej osi pręta pionowej. Wzór odnośny wyznaczyliśmy w § 24 rozdziału niniejszego. Dla momentu  $\mu_c$  prawoskrętnego otrzymamy zeń  $\Theta' = -\mu_c h : J_1 E_1$ . Zupełnie niezależnie od  $\mu_c$  działa na belkę  $BC$  siła gnąca  $P$ , powodując pochylenie skrajnej stycznej odkształconej w  $C$  ku pierwotnej osi pręta niezależne od tylko co wyznaczonego. Będzie to  $\Theta'' = \frac{1}{2} Ph^2 : E_1 J_1$ , zgodnie z § 9 tego samego rozdziału. Ostatecznie więc całkowite pochylenie górnego końca odkształconej podłużnicy  $\Theta_c = \Theta_b + \Theta' + \Theta'' = \frac{1}{6} \mu_0 l : E_0 J_0 - \mu_c h : E_1 J_1 + \frac{1}{2} Ph^2 : E_1 J_1$ . Nadto z warunków równowagi wyodrębnionej części  $BC$  będziemy mieli  $Ph = \mu_0 \uparrow \mu_c$ , jedyną zatem niewiadomą w danym wypadku stanowi moment  $\mu_c$ . Chcąc ją wyznaczyć, bierzemy pod uwagę górną poprzecznicę  $CD$ . Przy odkształceniu oba jej końce przesuwiają się nieco w kierunku działania sił  $P$ , a nadto zbliżają się, zresztą nader nieznacznie, ku osi  $B\zeta$  na tle wygięcia obu podłużnic. Słowem możemy założyć, że końce  $C_1 D_1$  poprzeczniczy górnej pozostają na osi jej pierwotnej — poziomej. Jest to więc belka obustronnie podparta, a obciążona momentami  $\mu_c$ ,  $\mu_d$  lewoskrętnymi na końcach. Wobec zupełnej tożsamości warunków pracy obu podłużnic  $\mu_c = \mu_d$  zupełnie jak dla poprzeczniczy dolnej. A zatem również i w danym wypadku  $\Theta_c = \frac{1}{6} \mu_c l : E_2 J_2$  przyczem przez  $E_2 J_2$  oznaczyliśmy sztywność poprzeczniczy górnej, zazwyczaj w ramownicach mostowych znacznie słabszą od  $E_0 J_0$ . Wobec doskonałej sztywności węglów możemy niewątpliwie napisać  $\frac{1}{6} \mu_0 l : E_0 J_0 - \mu_c h : E_1 J_1 + \frac{1}{2} Ph^2 : E_1 J_1 = \frac{1}{6} \mu_c l : E_2 J_2 = \frac{1}{6} Phl : E_0 J_0 - \frac{1}{6} \mu_c l : E_0 J_0 - \mu_c h : E_1 J_1 + \frac{1}{2} Ph^2 : E_1 J_1$ , stąd  $\mu_c = Ph [l : E_0 J_0 + 3h : E_1 J_1] : [l : E_2 J_2 + l : E_0 J_0 + 6h : E_1 J_1] = Ph - \mu_0$ . Te dwie wartości tylko co wyznaczone rozwiązują zagadnienie.

W szczególnym wypadku, gdy dolna poprzecznicza jest bardzo tęga, możemy założyć  $E_0 J_0 \approx \infty$ , a wtedy  $\mu_c = 3 Ph^2 : [l E_1 J_1 : E_2 J_2 + 6h]$ . Nadto gdy brak górnej poprzeczniczy  $E_2 J_2 = 0$  wtedy  $\mu_c = 0$ ,  $\mu_0 = Ph$ .

**§ 56. Przykłady i ćwiczenia.** <sup>10</sup> *Belka wieloprzęstłowa* statycznie wyznaczalna (Rys. 62) dźwiga poprzeczne ramię  $CD$  leżące w przekroju pośrednim  $O$  w odległości  $a$  od lewej rolkowej i  $b$  od prawej przegubowej podpory. Na ramię działają obustronnie siły poziome  $P$  skierowane odwrotnie, słowem w przekroju  $O$  panuje moment  $\mu = P \times CD$  lewoskrętny, stanowiący obciążenie zewnętrzne belki. Przekrój  $O$  dzieli płaszczyzną gięcia na dwie połacie lewą i prawą, w pierwszej panuje moment  $M_1 = A(l - \zeta)$  w drugiej zaś  $M_2 = A(l - \zeta) + \mu$ . Początek stałych osi współrzędnych, jak zwykle, umieszczamy w prawej podporze, kierując przytem oś  $B\zeta$  wzdłuż osi pierwotnej belki na lewo,  $B\eta$  w dół, a  $B\xi$  ku patrzącemu. Równania statyki dla początku współrzędnych wypisane w postaci  $A + B = 0$ ,  $Al + \mu = 0$  dadzą  $A = -\mu : l = -B$ . W ten sposób dla pierwszej połaci otrzymamy  $EJ\eta_1'' = -\mu(l - \zeta_1) : l$ , dla drugiej zaś  $EJ\eta_2'' = -\mu(l - \zeta_2) : l + \mu$ . Całkując będziemy mieli



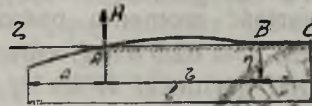
kolejno w założeniu stałego przekroju belki:  $EJ\eta_1' = C_1 + \frac{1}{2} \mu (l - \zeta_1)^2 : l$ ,  $EJ\eta_1 = D_1 + C_1 \zeta - \frac{1}{6} \mu (l - \zeta)^3 : l$  oraz  $EJ\eta_2' = C_2 + \frac{1}{2} \mu (l - \zeta_2)^2 : l + \mu \zeta$ ,  $EJ\eta_2 = D_2 + C_2 \zeta - \frac{1}{6} \mu (l - \zeta_2)^3 : l + \frac{1}{2} \mu \zeta^2$ , tutaj bowiem na granicy obu połaci moment zmienia się nagłym skokiem, nie można przeto łączyć obu wzorów, dzieląc odnośne wyrazy momentów kreskami, jak w zwykłych wypadkach działania sił skupionych. Dla określenia czterech stałych całkowania będziemy mieli  $\eta = 0$  przy  $\zeta = 0$  i  $\zeta = l$ , a nadto dla granicznego przekroju, gdzie  $\zeta = b$ , będzie  $\eta_1 = \eta_2$  oraz  $\eta_1' = \eta_2'$ . Stąd  $D_1 + C_1 l = 0$ ,  $D_2 - \frac{1}{6} \mu l^2 = 0$ ,  $C_1 + \frac{1}{2} \mu a^2 : l = C_2 + \frac{1}{2} \mu a^2 : l + \mu b$ ,  $D_1 + C_1 b - \frac{1}{6} \mu a^3 : l = D_2 + C_2 b - \frac{1}{6} \mu a^3 : l + \frac{1}{2} \mu b^2$  i ostatecznie:  $C_1 = -\frac{1}{6} \mu l + \frac{1}{2} \mu b^2 : l$ ,  $D_1 = \frac{1}{6} \mu l^2 - \frac{1}{2} \mu b^2$ ,  $C_2 = -\frac{1}{6} \mu l + \frac{1}{2} \mu b^2 : l - \mu b$ ,  $D_2 = \frac{1}{6} \mu l^2$ . Te wartości określą odkształconą. Chcąc znaleźć strzałkę ugięcia szukamy pierwiastków równania  $\eta' = 0$ . Dla pierwszej połaci będziemy mieli  $\zeta_0 = l - \sqrt{\frac{1}{3} l^2 - b^2}$  z warunkiem  $l > \zeta_0 > b$ , który istotnie wypełnia się przy  $l \geq b \sqrt{3}$ . Tej wartości  $\zeta_0$  odpowiada strzałka  $f_0 = \mu \sqrt{(\frac{1}{3} l^2 - b^2)^3} : 3 EJl$ . W drugiej połaci będziemy mieli  $\zeta_1 = \sqrt{2 bl - b^2 - \frac{2}{3} l^2} -$  odnośna strzałka będzie  $f_1 = -\mu \sqrt{(2 bl - b^2 - \frac{2}{3} l^2)^3} : 3 EJl$ , z warunkiem  $2 bl - b^2 - \frac{2}{3} l^2 \geq 0$ . Wobec odwrotności znaków obu strzałek wnioskujemy o istnieniu pośredniego punktu przegięcia odkształconej. Wykres momentów  $abcd$  wskazuje, że punkt przegięcia istnieje w przekroju obciążonym, tam bowiem krzywa wykresu przechodzi przez zero.



Rys. 62.

2° *Ciężki linjał mierniczy* należy podeprzeć w dwóch punktach w taki sposób, aby odkształcenie było najmniejsze, a linjał w przybliżeniu poziomy. Wobec wymagania ostatniego podpory muszą być niewątpliwie symetryczne względem środka, ustawione, dajmy na to, w odległości  $x$  od obu końców linjału, obciążonego jego wagą własną. Oznaczmy wagę linjału przez  $Q$  — na jednostkę długości będziemy mieli przeto  $q = Q : l$  kg. Ponad podporą panować będzie moment gnący  $M_x = \frac{1}{2} q x^2$ , pośrodku zaś linjału moment  $M_0 = \frac{1}{2} q [\frac{1}{2} l]^2 - \frac{1}{2} Q \times [\frac{1}{2} l - x] = \frac{1}{2} q l [x - \frac{1}{4} l]$ . Są to wartości skrajne momentów. Na zasadzie pierwszego prawa Hooke'a odkształcenie winno być proporcjonalne do siły odkształcającej — zatem najbardziej poziomy kształt odkształconej otrzymamy niewątpliwie wtedy, gdy  $M_x = -M_0$ . Stąd  $x^2 + lx - \frac{3}{4} l^2 = 0$ , czyli  $x = \frac{1}{2} l (\sqrt{2} - 1)$ . Odległość podpór winna być przeto  $l - 2x = (2 - \sqrt{2}) l \approx 0,586 l$ .

3° *Deska* spoczywa na sztywnym podłożu (Rys. 63); lewy jej koniec zwisa poza skraj  $A$  powodując wygięcie środkowej części. Wyznamy przekrój  $B$  w którym następuje dotyk wygiętej deski do podłoża, dalej bowiem już deska spoczywa całą swą dolną powierzchnią nieodkształconą. Całą długość deski oznaczamy przez  $l$ , jej część zwisającą przez  $a$ , część podpartą odkształconą przez  $b$  — pozostałą przez  $c$ .



Rys. 63.



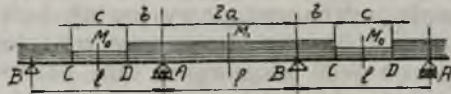
W przekroju  $A$  belka opiera się o kant podłoża, tutaj więc  $\eta = 0$ , dalej w  $B$  mamy ścisły już dotyk belki, a przeto  $\eta = 0$ , i  $\eta' = 0$ . Nadto w  $B$  panować musi zerowa wartość momentu, inaczej bowiem dalsze przekroje belki musiałyby ulec wygięciu. Nazwijmy przez  $q$  ciężar deski na jednostkę długości, przez  $A$  odpór, jaki powstaje na skraju podłoża w  $A$ . Będziemy przeto mieli dla punktu  $B$  równanie momentów:  $\frac{1}{2} q (a+b)^2 + Ab = 0$ . Stąd  $A = -\frac{1}{2} q (a+b)^2 : b$ . Umieścimy początek stałych osi współrzędnych w  $B$ , oś  $B\xi$  poprowadźmy po powierzchni podłoża poziomej na lewo, oś  $B\eta$  w dół,  $B\xi$  — ku patrzącemu. Zasadnicze równanie gięcia będzie tu  $EJ\eta'' = \frac{1}{2} q (a+b-\zeta)^2 \parallel -\frac{1}{2} q (a+b)^2 (b-\zeta) : b$  w założeniu stałego przekroju deski. Całkując, mamy  $EJ\eta' = C - \frac{1}{6} q (a+b-\zeta)^3 \parallel + \frac{1}{4} q (a+b)^2 (b-\zeta)^2 : b$ ,  $EJ\eta = D + C\xi + \frac{1}{24} q (a+b-\zeta)^4 \parallel -\frac{1}{12} q (a+b)^2 (b-\zeta)^3 : b$ . Przy  $\zeta = 0$  mamy  $\eta = 0$  i  $\eta' = 0$ , przy  $\zeta = b$  mamy  $\eta = 0$ . Zatem  $C - \frac{1}{6} q (a+b)^3 + \frac{1}{4} q (a+b)^2 b = 0$ ,  $D + \frac{1}{24} q (a+b)^4 - \frac{1}{12} q (a+b)^2 b^2 = 0$ ,  $D + Cb + \frac{1}{24} qa^4 = 0$ . Z pierwszego równania mamy  $C = \frac{1}{6} q (a+b)^3 - \frac{1}{4} q (a+b)^2 b$ . Mnożąc tę wartość przez  $b$  podstawiamy w trzecie równanie. Po odjęciu drugiego i pomnożeniu przez  $24 : q$  otrzymamy:  $4(a+b)^3 b - 4(a+b)^2 b^2 + a^4 - (a+b)^4 = 2a^2 b^2 - b^4 = 0$ . Stąd  $b = a\sqrt{2}$ . Skoro więc  $l \geq a(1 + \sqrt{2})$ , deska po odkształceniu wygląda tak, jak na rysunku. Gdy  $l < a(1 + \sqrt{2})$  opiera się jeno prawym swym końcem o podłoże. Gdy  $l = 2a$  deska jest podparta tylko w  $A$ , kołysać się może swobodnie, wreszcie, gdy  $l < 2a$  deska spada z podłoża.

4<sup>0</sup> *Budynek fabryczny* podzielono stropem na parter i piętro. Ustawiono podwójnym szeregiem słupy żelazne w odstępach pięciometrowych równoległe do osi podłużnej budynku, dzieląc w ten sposób parter na trzy nawy sześciometrowej szerokości. Na słupach położono belki podłużne podciągowe, łączące ściany poprzeczne, a na nich belki poprzeczne w odstępach metrowych. Na belkowaniu żelaznym ułożono wpoprzek deski tworzące właściwy strop. Przepuszczalne obciążenie stropu wynosi łącznie z wagą desek, belek poprzecznych i podłużnych —  $q = 500$  kg/m<sup>2</sup>. Jest to dość znaczne obciążenie, wyższe od rzeczywistego — z zapasem. Strop w ten sposób obliczony wytrzymuje z łatwością ciężar lżejszych obrabiarek z obsługą. Należy wyznaczyć właściwe wymiary stropu. Rozpoczynamy od desek. W tym celu zakładamy, że deski są łączone ponad osiami belek poprzecznych. Przeczy to istocie rzeczy, zawyczaj bowiem deska pokrywa parę przęseł belkowania. Należałoby je właściwiej liczyć, jako belki wieloprzęstowe, wobec jednak dość znacznej wartości  $q$  możemy uprościć zadanie, rozpatrując je, jako obustronnie podparte na sąsiednich belkach poprzecznych. Oznaczmy szerokość belki przez  $a$  cm, grubość przez  $e$  cm. Nośna długość deski równa jest oczywiście rozstawieniu belek, wynosi przeto  $\lambda = 1$  m. Całkowite obciążenie jednego przęsła deski wynosi  $Q = q \times 1 \times a : 100 = 5a$  kg. Skrajna wartość momentu pośrodku deski będzie  $M_m = \frac{1}{8} Q\lambda = \frac{1}{8} \times 100 \times 5a = 62,5a$  (kg, cm) zgodnie z § 5 niniejszego rozdziału. Ponieważ tutaj dla deski  $W = \frac{1}{6} ae^2$  przeto  $\frac{1}{6} ae^2 k_g = 62,5a$ . Dla sośniny  $k_g \approx 75$  kg/cm<sup>2</sup> zatem  $e = 2,24$  cm. Należy użyć całówek. Z kolei obliczamy belki poprzeczne, zakładając, że połączenia ich wykonano na belkach



podciągowych. Zatem szerokość budynku mieści trzy belki sześciometrowe. Każdą z nich uważamy jako obustronnie podpartą, a obciążoną jednostajnie deskowaniem na całej długości. Obciążenie jednej belki wynosi  $R = 500 \times 6 \times 1 = 3000$  kg, ciśnię bowiem na nią połącz deskowania 6 metrów długa i metr szeroka. Po środku skrajna wartość momentu wyniesie  $M_m = \frac{1}{8} \times 3000 \times 600 = 225000$  (kg/cm). W danym wypadku lwią część obciążenia stanowią siły ciężarowe, a więc stałe. Dla żelaza zlewnego możemy wziąć  $k_g = 1200$  kg/cm<sup>2</sup> ze względu na duży zapas  $q$ . Zatem  $W_x = M_m : k_g = 187,5$  cm<sup>3</sup>. Dla dwuteownika zwykłego № 19 tablice podają  $W_x = 185$  cm<sup>3</sup>. Ten profil należy użyć, stawiając środkiem pionowo. Zupełnie w podobny sposób wyznaczymy belkę podciągową; można ją również rozpatrywać, jako złożoną z poszczególnych belek obustronnie opartych na słupach, aczkolwiek właściwie jest to belka wieloprzęstłowa. Obciążenie jej stanowią siły skupione — nacisku belek poprzecznych. Wobec równomiernego rozłożenia tych belek na podciągu możemy od biedy rozpatrywać to obciążenie, jako jednostajne. Wyniesie ono od słupa do słupa  $V = 500 \times 6 \times 5 = 15000$  kg, słupy bowiem ustawione są w odstępach pięciometrowych, a zatem na karb jednego przęsła podciągowego wypada połącz stropu 5 metrów długa i 6 metrów szeroka. Skrajna wartość momentu po środku będzie równa  $M_m = \frac{1}{8} \times 15000 \times 500 = 937500$  (kg, cm), zatem  $W_x = M_m : k_g = 937500 : 1200 = 781$  cm<sup>3</sup>. Tej wartości odpowiada dwuteownik № 32 zwykły, lub też № 24 — szerokopasowy, dla którego  $W_x = 855$  cm<sup>3</sup>.

5° *Belki wspornikowe.* Wyznaczanie belek wieloprzęstłowych jest nader uciążliwe, z tego powodu nieraz stosują belki wspornikowe, zwłaszcza w wypadku wielu podpór ustawionych w jednakowych odstępach  $l$ . Ustawmy szereg belek  $DABC$  wystających poza podpory  $A, B$  i połączmy je przegubowo belkami  $CD$ . Obciążenie pierwszych jednostajne niech będzie  $p$  — drugich  $q$  na jednostkę długości. Wobec przegubowego zamocowania obustronnego — ogniwa  $CD$  mogą być rozpatrywane, jako belki statycznie wyznaczalne, obustronnie podparte w  $C$  i  $D$ . Ogniwa te wywierają nacisk na belki sąsiednie podparte, wywołując w przegubach odpory pionowe  $C = D = -\frac{1}{2} qc$ . Odpory poziome pomijamy, jako z istoty rzeczy nieznaczne przy słabych wygięciach, jedynie praktycznie dopuszczalnych. Skrajna wartość momentu gnącego panuje niewątpliwie po środku belki  $CD$ . Będzie to  $M_0 = -\frac{1}{2} qc \times \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} q (\frac{1}{2} c)^2 = -\frac{1}{8} qc^2$ . Ta wartość jest miarodajna przy wyznaczaniu właściwego przekroju belki. Siły pionowe  $\frac{1}{2} qc$



Rys. 64.

łącznie z obciążeniem jednostajnym  $p$  stanowią układ odkształcający belek podpartych, tak zwanych wspornikowych  $DABC$ . To obciążenie wywołuje pionowe odpory  $A = B = -p(a + b) - \frac{1}{2} qc$ , możemy przeto wypisać skrajne wartości momentów — ponad podporą  $A$  lub  $B$  w postaci  $M_a = M_b = \frac{1}{2} qcb + \frac{1}{2} pb^2 = \frac{1}{2} b(qc + pb)$  i pośrodku pomiędzy podporami  $M_1 = \frac{1}{2} qc(b + a) + \frac{1}{2} p(b + a)^2 - [\frac{1}{2} qc + p(b + a)] a = \frac{1}{2} b(qc + pb) - \frac{1}{2} pa^2$ . Znaczenie użytych liter w dostatecznej mierze

wyjaśnią (Rys. 64). Momenty  $M_a$  i  $M_1$  jako skrajne wyrokują o właściwych wymiarach belki wspornikowej. W szczególnym wypadku, gdy przekrój i tworzywo belek jest jednakowe, możemy wyznaczyć najkorzystniejsze ustosunkowanie długości  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Należy jeno w tym celu uczynić —  $M_0 = M_a$ , wtedy bowiem oba rodzaje belek ustroju będą pracowały jednakowo w przekrojach niebezpiecznych. Stąd mamy w założeniu  $p = q$  równanie  $c^2 = 4b(c + b)$ . Ponieważ rozpiętość podpór  $l = 2b + c$  przeto  $(l - 2b)^2 = 4b(l - b)$ , stąd  $b = (\frac{1}{2} - 1 : \sqrt{8}) l \approx 0,147 l$ . W tym szczególnym wypadku wyznaczmy właściwy przekrój stały belek z równania  $W = \frac{1}{8} pc^2 : k_g$ .

6° *Belka dwuprzęsłowa* (Rys. 45) dźwiga po środku pierwszego przęsła siłą pionową  $P_c = 5000$  kg, po środku drugiego  $P = 10000$  kg. Rozpiętość pierwszego przęsła  $a = 4$  m, drugiego  $b = 2$  m. W założeniu belki o stałym przekroju poprzecznym możemy wypisać równanie *Clapeyron'a* w postaci:  $2 [400 + 200] M_x = 5000 \times 200 \times [400^2 - 200^2] : 400 + 10000 \times 100 \times [200^2 - 100^2] : 200$ . Stąd  $M_x = 375000$  (kg, cm). Dwie drugie skrajne wartości momentu gnącego wyznaczmy dla przekrojów obciążonych obu przęsłami. W tym celu wyznaczamy odpory. Mamy tu  $A \times 400 + 5000 \times 200 = M_x$  oraz  $B \times 200 + 10000 \times 100 = M_x$  a zatem  $A = -1562,5$  kg,  $B = 3125$  kg. Nadto  $A + B + X + P_0 + P = 0$  a zatem  $X = -10312,5$  kg i ostatecznie otrzymamy dla środkowego przekroju pierwszego przęsła  $M_0 = A \times 200 = -312500$  (kg, cm) — i drugiego  $M_1 = B \times 100 = -312500$  (kg, cm), należy przeto wyznaczyć przekrój poprzeczny z równania  $W_x = M_x : k_g$ . Założmy, jak wyżej  $k_g = 1200$  kg/cm<sup>2</sup> a wtedy  $W_x = 375000 : 1200 = 312,5$  cm<sup>3</sup>. Tej wartości odpowiada dwuteownik zwykły № 23 ustawiony środkiem pionowo, tablice bowiem dają dlań  $W_x = 314$  cm<sup>3</sup>.

Zupełnie tą samą drogą idziemy przy wyznaczaniu belek wieloprzęsłowych o zmiennym przekroju. Z początku liczymy je, jako belki o przekroju stałym; wyznaczamy skrajne momenty i odpory. Podług momentów dobieramy odpowiednie przekroje, a następnie przeliczamy od nowa momenty i odpory, biorąc za punkt wyjścia tylko co wyznaczoną belkę tymczasowo. W ten sposób powtórnie otrzymane wartości momentów pozwolą wyznaczyć nowy kształt belki, ponownie zatem powtarzamy obliczenie, póki nie otrzymamy właściwych ostatecznych przekrojów. Podany sposób jest zrozumiały sam przez się. W danym wypadku, wobec wielkiej różnicy wartości skrajnych momentów belka o stałym przekroju stanowi najkorzystniejsze, bo najprostsze rozwiązanie.

Założmy, że środkowa podpora obniżyła się o  $m$  cm, należy przeto moment  $M_x$  zwiększyć o  $\Delta M_x = 6 EJ [-m : 400 - m : 200] : 1200 = 6 \times 2150000 \times 3605 m : 160000 = -290653 m$  (kg, cm), mamy bowiem dla dwuteownika № 23 z tablic  $J = 3605$ . Zatem już przy  $m = -\frac{1}{3}$  cm poprzednio wyznaczona belka nie wystarczy, mamy bowiem wtedy  $M_x = 375000 + 96884 = 471884$  (kg, cm) a przekrój niebezpieczny pracuje na gięcie przy  $1502$  kg/cm<sup>2</sup>. Nadto będziemy mieli  $A \times 400 + 5000 \times 200 = M_x$ ,  $B \times 200 + 10000 \times 100 = M_x$  czyli  $A = -$



— 1320 kg,  $B = -2640$  kg oraz  $X = -11040$  kg. Stąd znowu  $M_0 = -264000$  (kg, cm),  $M_1 = -264000$  (kg, cm) istotnie więc przekrój ponad podporą pośrednią jest niebezpieczny. Godzi się tu wyraźnie zaznaczyć wzrost momentu  $M_x$  i odpory  $X$ , połączony z dodatkowym naprężeniem tworzywa. Tem się objaśnia grzanie łożyska pośredniego wałów trójłożyskowych, pojawiające się nader często przy niedokładnym ustawieniu silnika. Czasami nawet wał pęka ponad podporą pośrednią. W pewnych warunkach różnica 0,5 m/m może już spowodować znaczną zmianę pracy wału, grożącą nieszczęściem.

7° *Wał generatora prądu trójfazowego.* (Rys. 46) dźwiga pośrodku ciężar wirnika. Załóżmy  $a = 22$  cm,  $b = 18$  cm,  $c = 60$  cm i odpowiednio średnice tych części  $d_a = 29$  cm,  $d_b = 31$  cm,  $d_c = 36$  cm. Wyznamy skrajną wartość siły  $P$  — ciężaru wirnika, dającą strzałkę ugięcia środkową  $f = 0,035$  cm najwyższą dopuszczalną dla generatorów tego rodzaju. Tworzywo wału — stal zlewna, dla której  $E = 2200000$  kg/cm<sup>2</sup>. W § 29 mieliśmy wzór  $f = \frac{1}{48} Pl^3 : EJ_c + \frac{1}{6} Pa^3 [1 : EJ_a - 1 : EJ_c] + \frac{1}{6} P (3 a^2 b + 3 ab^2 + b^3) [1 : EJ_b - 1 : EJ_c]$ . W danym wypadku  $J_a = 34719$  cm<sup>4</sup>,  $J_b = 45333$  cm<sup>4</sup>,  $J_c = 82448$  cm<sup>4</sup>,  $l = 2(a + b + c) = 200$  cm, a przeto po podstawieniu odnośnych wartości otrzymamy:  $P = 1028032$   $f = 36280 \approx 36,3$  t. Rachunek ten nie należy do łatwych.

8° *Belkowanie* złożone z dwóch dyli dębowych, skrzyżowanych pod kątem prostym wykonano w sposób następujący. W przeciwległych ścianach wieży kwadratowej wycięto otwory i ułożono belkę poziomą o przekroju stałym kwadratowym, w sąsiednich ścianach przeciwległych wybito również nieco wyżej otwory tak, aby wetknięty w nie dyl tego samego przekroju dolegał do poprzedniego bez nacisku. Przez skrzyżowanie dyli przerzucono łańcuch, jak szelkę, a na nim zawieszono blok, dźwigający na sznurze ciężki dzwon, wagi  $P$  kg. Całość możemy oczywiście rozpatrywać, jako dwie belki skrzyżowane, obustronnie podparte, a obciążone pośrodku siłą  $P$ , łącznie działającą na oba dyle. Wyznamy ich przekrój właściwy, zakładając odległość ścian wieży przeciwległych  $l = 4$  m i  $P = 1900$  kg. Część siły  $P$  równa  $nP$  ciśnie na dyl górny, pozostała  $(1 - n)P$  na dolny. W ogólnym wypadku dyle mogą się różnić przekrojami i tworzywem; oznaczymy sztywność górnego przez  $EJ$ , dolnego przez  $E_1 J_1$ . Siły, powyżej wypisane, działają niezależnie od siebie — pierwsza daje strzałkę siły  $f_1 = nPl^3 : 48 EJ$ , druga  $f_2 = (1 - n) Pl^3 : 48 E_1 J_1$ . W założeniu stałego dotyku belek mamy  $f_1 = f_2$ , stąd  $n : EJ = (1 - n) : E_1 J_1$  a przeto  $n = 1 : (1 + E_1 J_1 : EJ)$ . W rozpatrywanym przez nas wypadku  $E_1 J_1 = EJ$ , zatem połowa siły stanowi obciążenie dyla górnego, połowa — dolnego. Pośrodku obu dyli panuje moment największy  $M_m = \frac{1}{4} (\frac{1}{2} P) l = \frac{1}{8} \times 1900 \times 400 = 95000$  (kg, cm) możemy przeto napisać  $W = M : k_g$ . Dla dębiny, w założeniu pewności sześciokrotnej  $k_g = K_g : 6 = 600 : 6 = 100$  kg/cm<sup>2</sup>, skąd ostatecznie  $W = 950$  cm<sup>3</sup> =  $\frac{1}{6} c^3$ , gdzie przez  $c$  oznaczyliśmy bok przekroju kwadratowego dyla. Inaczej jeszcze  $c^3 = 5700$  cm<sup>3</sup> i ostatecznie  $c = 17,9 \approx 18$  cm. Należy użyć dyli  $18 \times 18$  cm. Opisany ustrój jest

niewątpliwie statycznie niewyznaczalny; ułamek  $n$  może być określony jedynie na mocy zasady niezależnego działania sił, którą stosowaliśmy w danym wypadku.

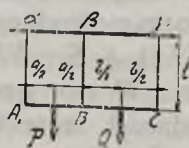
9° *Deska sosnowa* leży na sprężystym podłożu, które pod ciśnieniem jednego kilograma na centymetr kwadratowy osiada sprężystość na  $t$  cm. Prawy koniec belki ulega jarzmu siły pionowej  $P$ . Szerokość deski wynosi  $s$  cm, wyznaczmy jej grubość stałą  $z$  cm, w założeniu znacznej długości deski. Początek stałych osi współrzędnych  $\omega$  obieramy we środku skrajnego przekroju prawego deski, oś  $\omega\zeta$  prowadzimy po osi deski nieodkształconej na lewo, oś  $\omega\eta$  w dół,  $\omega\xi$  — ku patrzącemu. Zgodnie z założeniem odcięta lewego końcowego przekroju będzie  $l = \infty$ . Zasadnicze równanie gięcia będzie tu  $EJ\eta'''' = p = -m\eta$ , gdzie  $p$  oznacza obciążenie jednostkowe — sprzeciw podłoża a  $m$  odnośny współczynnik proporcjonalności. Obierzmy jako jednostkę długości deski centymetr. W tym założeniu  $p = s$  kg/cm, a przeto  $m = s : t$  kg/cm<sup>2</sup>. Całka równania gięcia będzie tu  $\eta = Ae^{n\zeta} \sin n\zeta + Be^{n\zeta} \cos n\zeta + Ce^{-n\zeta} \sin n\zeta + De^{-n\zeta} \cos n\zeta$ . Dla lewego skraju belki przy  $l = \infty$  mamy  $\eta = 0$ , tam bowiem nie sięga wpływ siły odkształcającej. A przeto stałe całkowania  $A$  i  $B$  muszą być równe zero. Nadto w prawym skrajnym przekroju moment gnący jest oczywiście równy zero, a siła tnąca  $T = -P$ , równoważą bowiem siłę skupioną  $P$  obciążenia zewnętrznego. Zatem przy  $\zeta = 0$  mamy  $\eta_0'' = 0$ ,  $\eta_0''' = -T : EJ = P : EJ$ . Różniczkując bezpośrednio otrzymamy  $\eta_1' = -nCe^{-n\zeta} (\sin n\zeta - \cos n\zeta) - nDe^{-n\zeta} (\sin n\zeta + \cos n\zeta)$ ,  $\eta_1'' = -2n^2 Ce^{-n\zeta} \cos n\zeta + 2n^2 De^{-n\zeta} \sin n\zeta$ ,  $\eta_1''' = 2n^3 Ce^{-n\zeta} (\sin n\zeta + \cos n\zeta) - 2n^3 De^{-n\zeta} (\sin n\zeta - \cos n\zeta)$ . Czyniąc w tych wzorach  $\zeta = 0$  otrzymamy  $-2n^2 C = 0$ ,  $2n^3 C + 2n^3 D = P : EJ$ , przyczem, jak zwykle  $n^4 = m : 4 EJ = s : 4 EJt$ . Stąd bezpośrednio  $C = 0$ ,  $D = P : 2n^3 EJ$  i ostatecznie  $EJ\eta = [P : 2n^3] e^{-n\zeta} \cos n\zeta$ , a nadto jeszcze  $EJ\eta_1' = -[P : 2n^2] e^{-n\zeta} (\sin n\zeta + \cos n\zeta)$ ,  $EJ\eta_1'' = M = [P : n] e^{-n\zeta} \sin n\zeta$  oraz  $EJ\eta_1''' = -T = -Pe^{-n\zeta} (\sin n\zeta - \cos n\zeta)$ . Wyznamy skrajną wartość momentu. W tym celu wyznaczamy  $\zeta$  z równania  $dM : d\zeta = -T = -Pe^{-n\zeta} (\sin n\zeta - \cos n\zeta) = 0$ , które da  $n\zeta = \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \dots$  a przeto największy moment gnący  $M_m = [P : n] e^{-1/4\pi} \sin(\frac{1}{4}\pi) = [P : n \sqrt{2}] e^{-1/4\pi} = Wk_g$ . Podnosząc do potęgi czwartej otrzymamy  $P^4 e^{-\pi} : 4n^4 = EJP^4 e^{-\pi} : m = EJt P^4 e^{-\pi} : s = W^4 k_g^4$ . W danym wypadku  $J = \frac{1}{12} sz^3$ ,  $W = \frac{1}{6} sz^2$ , a przeto po skróceniu otrzymamy równanie  $108 EtP^4 = s^4 z^5 e^\pi k_g^4$ , z którego wyznaczmy z łatwością  $z$ . Załóżmy  $P = 1000$  kg,  $s = 20$  cm,  $t = 0,025$  cm. Dla drzewa sosnowego  $E \approx 100000$  kg/cm<sup>2</sup>,  $K_g = 420$  kg/cm<sup>2</sup>. Przy pewności sześciokrotnej  $k_g = 70$  kg/cm<sup>2</sup>, a przeto  $z = 4,97 \approx 5$  cm. Wyznamy odkształconą. Po podstawieniu odnośnych wartości otrzymamy:  $\eta = 0,1392 e^{-n\zeta} \cos n\zeta$ . Stąd dla  $\zeta = 0$  mamy  $\eta_0 = 0,1392$  cm  $\approx 1,4$  m/m.

10° *Belkę stalową* (Rys. 65) zawieszono na trzech prętach jednako-



wej długości  $l$ , zaczepionych o niesprężystą połącz górną i obciążono siłami  $P$  i  $Q$  pionowymi, przyłożonemi po środku obu przęseł  $a$  i  $b$  belki. Wyznaczyć stały przekrój dwuteowy belki oraz średnice prętów stalowych zlewnych, aby po odkształceniu zawieszono punkty  $A, B, C$  belki leżały na linii poziomej. Załóżmy  $P = 20000$  kg,  $Q = 10000$  kg,  $a = 1$  m,  $b = 2$  m i  $l = 10$  m. Równanie *Clapeyron'a* da nam w założeniu połączeń przegubowych  $2(100 + 200) M_B = 20000 \times 50 \times [100^2 - 50^2] : 100 + 10000 \times 100 \times [200^2 - 100^2] : 200$ , skąd  $M_B = 375000$  (kg, cm).

Nadto dla odporu lewego będziemy mieli równanie  $A \times 100 + 20000 \times 50 = M_B$ , dla prawego zaś  $C \times 200 + 10000 \times 100 = M_B$ , skąd  $A = -6250$  kg,  $C = -3125$  kg. Odpór środkowy otrzymamy wprost z równania statyki  $A + B + C + P + Q = 0$ , czyli  $B = -20625$  kg. Nadto w przekrojach obciążonych będziemy mieli skrajne momenty  $M_P = -6250 \times 50 = -312500$  (kg, cm),  $M_Q = -3125 \times 100 = -312500$  (kg, cm), na-



Rys. 65.

leży przeto dostateczny przekrój belki wyznaczyć z równania  $W_x = M_B : k_g$ . Weźmy dla stali zlewnej, w wypadku obciążenia stałego  $k_g = 1500$  kg/cm<sup>2</sup> a wtedy  $W_x = 250$  cm<sup>3</sup>. Tej wartości odpowiada dwuteownik № 21 dla którego  $W_x = 244$  cm<sup>3</sup>, lepiej jednak wziąć numer następny, zawsze są bowiem możliwe pewne obniżenia punktów oporowych połączone ze znacznym wzrostem naprężeń. Bierzemy dwuteownik № 22 dla którego tablice podają  $W_x = 278$  cm<sup>3</sup>. Należy zawiesić go tak, aby środek był w położeniu pionowym. Z kolei wyznaczymy średnice prętów. Znak odporów  $A, B, C$  ujemny wskazuje, że pręty te są rozciągane. W założeniu obciążenia stałego możemy wziąć  $k_r = 1500$  kg/cm<sup>2</sup>, będziemy mieli przeto wydłużenia  $\Lambda_a = lA : EF_a$ ,  $\Lambda_b = lB : EF_b$ ,  $\Lambda_c = lC : EF_c$ . Te wydłużenia muszą być jednakowe, dążymy bowiem do tego, aby belka po odkształceniu leżała punktami  $A, B, C$  na linii poziomej. Zatem  $A : F_a = B : F_b = C : F_c = k_r$ , co da nam  $F_a = 4,167$  cm<sup>2</sup>,  $F_b = 13,75$  cm<sup>2</sup>,  $F_c = 2,083$  cm<sup>2</sup>. Średnice prętów będą:  $d_a = 2,3$  cm,  $d_b = 4,2$  cm,  $d_c = 1,6$  cm. Wszystkie trzy punkty podparcia obniżą się o  $\Delta = lk_g : E = 1000 \times 1500 : 2200000 = 0,68$  cm.

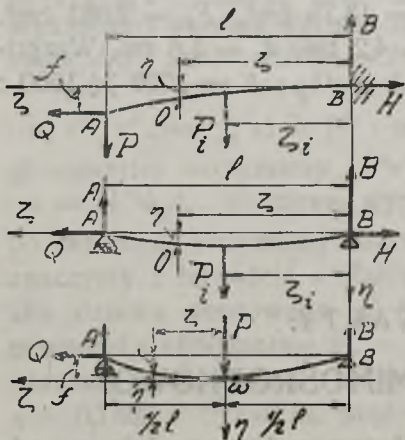
## ROZDZIAŁ CZWARTY:

### BELKI PROSTE ZGINANE MIMOŚRODKOWO.

§ 1. Równanie odkształconej. Weźmy pod uwagę łuk  $mn$  odkształconej belki pierwotnie prostej, płasko wygiętej mimośrodkowo. Stałą

oś odciętych  $\zeta$  ułożyliśmy na osi pierwotnej belki, oś rzędnych  $\eta$  skierowaliśmy ku dołowi, oś  $\xi$  ku patrzącemu. Rozpatrujemy wyłącznie tylko pręty jednorodnie zbudowane, wygięte płasko w płaszczyźnie gięcia  $\zeta\eta$ . Spółrzędne jakiegokolwiek przekroju poprzecznego  $O$  belki odkształconej niech będą  $\zeta, \eta$ . Obciążenie zewnętrzne lewej części belki po sprowadzeniu do środka  $O$  przekroju da moment gnący  $M$ , siłę tnącą  $T$ , którą jak zwykle pomijamy i siłę osiową  $S$ , leżącą na stycznej odkształconej. W danym wypadku  $S \neq 0$ , rozpatrujemy bowiem wypadek gięcia płaskiego mimośrodkowego. Zasadnicze równanie gięcia będzie miało postać  $EJ [1 + S : EF] : \rho = M$ , jakieśmy to ustalili w § 5 rozdziału drugiego. W tym wzorze wyraz  $S : EF$  posiada nader małą wartość i wobec jedności może być pominięty. Łatwo się o tem przekonać, zważywszy, że  $S : F$  oznacza dodatkowe naprężenie przekroju — rozciągające lub ściskające, towarzyszące naprężeniom gnącym momentu  $M$ , a więc nader nieznaczne w stosunku do  $E$ . Po skreśleniu tego wyrazu otrzymamy  $EJ : \rho = M$ , to samo zasadnicze równanie różniczkowe odkształconej, jakim dotąd posługiwaliśmy się przy rozpatrywaniu gięcia zwykłego. Nadto, dla wygięć nieznacznych, jedynie dopuszczalnych w praktyce  $1 : \rho \propto \eta''$ , ostatecznie więc możemy napisać zasadnicze równanie gięcia mimośrodkowego płaskiego w postaci  $EJ\eta'' = M$ . Całkowanie tego równania da odkształconą. Kilka prostych przykładów najlepiej wyjaśni istotę rzeczy.

**§ 2. Belka osadzona jednostronnie**, pozioma (Rys. 66) dźwiga obciążenie gnące, złożone z sił prostopadłych do osi pierwotnej pręta, skupionych, lub rozłożonych szeregiem ciągłym w postaci obciążenia jednostkowego  $p$  na jednostkę długości, a nadto drugostronnie ulega jarzmu



Rys. 66, 67 i 68.

siły poziomej  $Q$ , rozciągającej lub ściskającej. Ze środka  $B$  przekroju osadzonego prowadzimy stałą oś  $B\zeta$  na lewo po osi pierwotnej pręta,  $B\eta$  kierujemy w dół,  $B\xi$  ku patrzącemu. W tym układzie  $+Q$  da siłę rozciągającą,  $-Q$  ściskającą, a środek  $O$  jakiegokolwiek przekroju pręta odkształconego będzie miał spółrzędne  $\zeta, \eta$ . Dla środka  $A$  skrajnego lewego przekroju będziemy mieli  $l, f$ . Po sprowadzeniu do środka  $O$  siły pionowe dadzą moment  $M$ , siła  $\pm Q$  da moment  $\mp Q(f - \eta)$ , a przeto równanie gięcia będzie tu  $\eta'' \mp n^2(\eta - f) = M : EJ$ , przyczem  $n^2 = Q : EJ$ . Oznaczmy przez  $M_K = dKM : d\zeta K$ , a otrzy-



mamy całą tego równania w postaci  $\eta = f + y \mp M : Q - M_3 : n^2 Q \mp \mp M_4 : n^4 Q - M_6 : n^6 Q \mp \dots$ , gdzie  $y$  czyni zadość równaniu pomocniczemu  $y'' \mp n^2 y = 0$ . Dla górnego znaku będziemy mieli  $y = CSin h n \zeta + DCos h n \zeta$ , dla dolnego  $y = CSin n \zeta + DCos n \zeta$ . Całkę powyższą stosujemy wtedy jedynie, gdy którakolwiek z pochodnych, damy na to  $M_{2K+2} = 0$ . W tym wypadku ostatni wyraz całki będzie zawierał pochodną  $M_{2K}$ . Warunek konieczny przy tem, aby  $M$  i jego wszystkie pochodne aż do  $M_{2K+1}$  włącznie były funkcjami ciągłymi  $\zeta$ . W przeciwnym razie należy podzielić płaszczyznę gięcia na połacie w punktach odpowiadających przerwom ciągłości. Dla owych punktów rzędne  $\eta$  i ich pochodne  $\eta'$  muszą posiadać te same wartości, otrzymamy przeto szereg równań z których wyznaczymy stałe całkowania  $C_1, D_1, C_2, D_2 \dots$  dla wszystkich połąci. Skrajne warunki zamocowania pręta również winny być wzięte pod uwagę przy wyznaczaniu stałych całkowania. Zupełnie tak samo możemy wyznaczyć warunki pracy w następującym przykładzie.

**§ 3. Belka jednoprzęsłowa, statycznie wyznaczalna (Rys. 67)** dźwiga takie samo obciążenie gnące pionowe, a nadto ulega działaniu siły  $\pm Q$ , czynnej w  $A$ , ponad podporą rolkową. Zachowując znakowanie poprzedniego ustępu, umieszczamy początek stałych osi w przegubowej podporze prawej  $B$ . Równanie gięcia będzie tu  $\eta'' \mp n^2 \eta = M : EJ$ ; w niem, jak poprzednio, oznaczyliśmy przez  $M$  moment sił gnących pionowych oraz odporu lewego  $A$ , który z łatwością wyznaczymy z równań statyki. Lewy odpór poziomy  $H = \mp Q$ . Zatem równanie to różni się jeno wartością  $f = 0$ , a wszystko to, cośmy powiedzieli wyżej, dotyczy i danego wypadku. Istotę rzeczy najlepiej uwypuklą najprostsze dwa przykłady.

Weźmy pod uwagę belkę osadzoną jednostronnie (Rys. 66), drugostronnie obciążoną siłą  $Q > 0$  i  $P$ . W przekroju  $O$  będziemy mieli moment  $-Q(f - \eta) + P(l - \zeta)$ . Tutaj więc  $M = P(l - \zeta)$ ,  $M_2 = 0$ , zatem równanie odkształconej:  $\eta = f + CSin h n \zeta + DCos h n \zeta - P(l - \zeta) : Q$ . Gdy oprócz siły  $P$ , działa jeszcze obciążenie jednostajne  $p$ , pokrywające całą belkę, należy moment  $M$  wypisać w postaci  $P(l - \zeta) + + 1/2 p(l - \zeta)^2$ . Tutaj więc  $M_2 = p$ ,  $M_4 = 0$ , a przeto  $\eta = f + CSin h n \zeta + + DCos h n \zeta - P(l - \zeta) : Q - 1/2 p(l - \zeta)^2 : Q - p : n^2 Q$ . W obu wypadkach trzy niewiadome  $C, D, f$  wyznaczymy z warunków końcowego obciążenia pręta. W przekroju osadczym  $\eta = \eta' = 0$  przy  $\zeta = 0$ , w skrajnym lewym przekroju  $\eta = f$  przy  $\zeta = l$ . Stąd mamy  $f + D - lP : Q - - 1/2 pl^2 : Q - p : n^2 Q = 0$ ,  $\eta|_0 = [n C Cos h n \zeta + n D Sin h n \zeta + P : : Q + p(l - \zeta) : Q]|_0 = nC + P : Q + pl : Q = 0$ ,  $f = f + CSin h nl + + DCos h nl - p : n^2 Q = 0$ . Z dwóch ostatnich równań wyznaczymy

$C = -P : Qn - pl : Qn$ ,  $D = [(P + pl) \text{Sin } hnl + p : n] : nQ \text{Cos } hnl$ .  
Nadto z pierwszego  $f = -[(P + pl) \text{Sin } hnl + p : n] : nQ \text{Cos } hnl +$   
 $+ lP : Q + \frac{1}{2} pl^2 : Q + p : n^2Q$ . Te wartości po podstawieniu we wzór  
dla  $\eta$  dadzą równanie odkształconej.

Zupełnie te same wzory otrzymamy dla lewej połowy belki jedno-  
przęstowej (Rys. 68), o ile początek stałych osi umieścimy w środkowym  
przekroju i miasto  $P, l$  napiszemy w nich  $-\frac{1}{2}P$  i  $\frac{1}{2}l$ . Łatwo to udo-  
wodnić ze względu na zupełną symetrię obciążenia; w środkowym prze-  
kroju  $\eta = \eta' = 0$ , w skrajnym lewym  $\eta = f$ , jak wyżej — zatem otrzy-  
mamy te same równania warunkowe.

W wypadku działania siły  $Q$  ujemnej przyłożonej w  $A$  (Rys. 66) bę-  
dziemy mieli moment gnący w środku  $O$  w postaci  $Q(f - \eta) + P(l -$   
 $- \zeta) + \frac{1}{2}p(l - \zeta)^2$ , zmieni się jeno znak u  $Q(f - \eta)$ . Równanie od-  
kształconej będzie tu  $\eta = f + C \text{Sin } n\zeta + D \text{Cos } n\zeta + P(l - \zeta) : Q +$   
 $+ \frac{1}{2}p(l - \zeta)^2 : Q - p : n^2Q$ . Niewiadome  $C, D, f$  wyznaczmy z rów-  
nań:  $f + D + P : Q + \frac{1}{2}pl^2 : Q - p : n^2Q = 0$ ,  $\eta'_0 = [n C \text{Cos } n\zeta -$   
 $- nD \text{Sin } n\zeta - P : Q - p(l - \zeta) : Q]_0 = nC - P : Q - pl : Q = 0$ ,  
 $C \text{Sin } nl + D \text{Cos } nl - p : n^2Q = 0$ . Stąd  $C = (P + pl) : nQ$ ,  $D = [p :$   
 $: n - (P + pl) \text{Sin } nl] : nQ \text{Cos } nl$ ,  $f = -[p : n - (P + pl) \text{Sin } nl] :$   
 $: nQ \text{Cos } nl - P : Q - \frac{1}{2}pl^2 : Q + p : n^2Q$ . Te wartości pozwolą wy-  
znaczyć równanie odkształconej. I w danym wypadku, czyniąc  $-\frac{1}{2}P$   
miasto  $P$  i  $\frac{1}{2}l$  miasto  $l$  otrzymamy bezpośrednio równanie odkształco-  
nej dla belki pracującej w sposób wskazany na (Rys. 68).

Wzory tylko co otrzymane na pozór nie różnią się od poprzednich,  
a jednak przy bliższem badaniu wykazać można zasadniczą różnicę pra-  
cy belek, zależną od kierunku działania siły  $Q$ . Łatwo to spostrzec, zwa-  
żywszy, że w mianowniku pierwszego wyrazu wzoru dla strzałki  $f$  mamy  
zupełnie różne dwie funkcje:  $\text{Cos } hnl$  i  $\text{Cos } nl$ . Pierwsza jest stale różna  
od zera, druga przechodzi przez zero okresowo, dla  $nl = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi,$   
 $\frac{5}{2}\pi \dots$ . Zatem w wypadku działania siły  $Q$  dodatniej skrajna strzałka  
ugięcia  $f$  nie może wzrosnąć nieograniczenie, natomiast przy  $Q < 0$   
możemy otrzymać  $f = \infty$ , gdy  $nl = \frac{1}{2}\pi$ , to jest gdy  $n^2l^2 = Ql : EJ =$   
 $= \frac{1}{4}\pi^2$ ! Istnieje pewna szczególna wartość siły  $Q$ , zupełnie zresztą nie-  
zależna od  $P$  i  $p$ : w wypadku obciążenia podanego na (Rys. 66) będzie  
to  $Q_0 = \pi^2 EJ : 4l^2$ , w wypadku obciążenia (Rys. 68)  $Q_0 = \pi^2 EJ : l^2$ .  
Te siły, zresztą, jak widzimy, skończone, dają nieskończenie wielką strzał-  
kę ugięcia, wyginają pręt w sposób nadmierny, powodują tak zwane *wy-*  
*boczenie* pręta niezależnie od sił  $P$  i  $p$ ! Przeczy to prawu Hooke'a.  
Wkraczamy w nieznaną dziedzinę zjawisk, dotychczas bowiem odkształce-  
nie było zawsze proporcjonalne do natężenia siły odkształcającej. Ta  
sprzeczność jest jednak tylko pozorna. Łatwo to udowodnić, zważywszy,  
że moment siły  $Q$  zależy od rzędnej  $\eta$ , stanowi przeto funkcję odkształ-

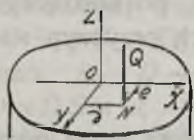


cenia, które sam częściowo wywołał. Tutaj więc odkształcenie nie jest linjową funkcją obciążenia — prawo Hooke'a traci swą moc obowiązującą. Nadto siła  $Q$  dodatnia przeciwdziała wygięciu pręta. Łatwo to spostrzec, rzuciwszy okiem na rysunek. Siła  $Q$  rozciągająca prostuje pręt wygięty pod jarzmem sił  $P$  i  $p$ ; ujemna ściskająca powiększa jego krzywiznę, powstałą na tle działania sił pozostałych. Ten wniosek dotyczy niewątpliwie każdego obciążenia pionowego, niezależnie od sposobu działania i liczby sił  $P$  poprzecznych. We wszystkich jednak wypadkach siła  $Q$  dodatnia łagodzi odkształcenie gnące sił poprzecznych — ujemna wzmacnia, może więc przy sprzyjających warunkach wywołać ugięcie nadmierne — wyboczenie pręta. Godzi się jednak zaznaczyć, że siła  $Q$  ujemna sama przez się nie może wygiąć pręta i pręt doskonale prosty ulegnie jeno ściskaniu. Wybaczające działanie tej siły może więc powstać wyłącznie tylko na tle pierwotnego wygięcia pręta, pochodzącego od innych przyczyn, od siły  $Q$  niezależnych. Badanie tych przyczyn stanowi *naukę o wyboczeniu*.

**§ 4. Istota zjawisk wyboczenia.** Wyboczenie pręta może powstać pod jarzmem siły  $Q$  ściskającej, bez obciążenia poprzecznego, gdy pręt ma lekką krzywiznę pierwotną. Bez niej siła  $Q$  nie da momentu gnącego, pręt pozostanie prosty, jak był — doskonale. Nie znamy jednak prętów pierwotnie prostych — doskonale prostych. Rzeczywiste pręty są zawsze nieco krzywe. Każdy pręt rzeczywisty ulega wyboczeniu pod jarzmem osiowych sił ciśnących. Proste doświadczenie niezbitie to stwierdza. W imadle osadzamy pionowo cienki pręt jaknajdokładniej wyprostowany, a mimo to posiadający pewną krzywiznę niedostępną dla oka. Na koniec pręta, swobodnie sterczący ku górze, zakładamy nieznaczny ciężarek. Pozostawiony samemu sobie pręt odchyła się od pionu, wygina się na bok, jak łodyga pod ciężarem kwiatu i trwa w równowadze odkształconej. Ciężarek dał na tle krzywizny pierwotnej moment gnący — wywołał wygięcie pręta nieznaczne, bo powstrzymane sprężystym sprzeciwem tworzywa. W ten sposób ustalona równowaga pręta jest stała — z łatwością możemy to sprawdzić, potrącając zlekka ciężarek: po pewnej liczbie wahnięć powróci poprzedni stan równowagi trwałej — otrzymamy tę samą strzałkę końcowego odchylenia. Te same zjawiska powtórzą się w nieco ostrzejszej formie, gdy powiększymy ciężarek. Zapanuje nowy stan równowagi trwałej przy większym odchyleniu końcowego przekroju od pionu; gdy jednak powiększymy ciężarek ponad pewną granicę, pręt wygnie się w pałąk, zakrzywi się, ciężarek zwiśnie i oprze się o imadło. Nastąpi wyboczenie pręta, pręt przestanie być sobą. Tylko co opisane zjawiska z łatwością możemy wyjaśnić, zważywszy, że ciężarek ciśnie na pręt siłą pionową. Gdy pręt jest doskonale prosty, siła ta układa się

wzdłuż osi pręta podłużnej, staje się osiową — ściskającą jego pręt. Gdy pręt jest nieco ukośnie osadzony lub niezupełnie prosty, wtedy siła mija oś, obciążając przekroje poprzeczne mimośrodkowo, i powoduje opisane zjawisko gięcia. Skoro już pręt uległ wygięciu, by nieznacznemu nawet, ciężar wychyla się w bok, ramię momentu gnącego wzrasta, samoczynnie powodując dalszy przyrost odkształcenia, póki sprężysty sprzeciw nie zahamuje odkształceń, póki naprężenia gnące nie zrównoważą momentu. W tym wypadku zapanuje trwały stan równowagi — w przeciwnym razie nastąpi wyboczenie pręta. Zatem pierwotną przyczyną wyboczenia jest zawsze pewna *mimośrodkowość obciążenia*. Należy więc poznać przyczyny mimośrodkowości obciążeń rzeczywistych.

Przedewszystkiem *samo obciążenie pręta nie jest nigdy ściśle osiowe*. Weźmy pod uwagę skrajny przekrój pręta (Rys. 69). Zazwyczaj odkształcająca siła  $Q$  trafia nieco mimośrodkowo w punkt  $N$  o współrzędnych  $\delta$ ,  $e$  w układzie osi głównych. Im pręt obciążymy starannie, tem  $e$ ,  $\delta$  będą mniejsze.



Rys. 69.

Z kolei *sam pręt nie jest doskonale prosty*. Jego oś podłużna stanowi w ogólnym wypadku krzywą przestrzenną, niewiele różniącą się od prostej. Jak zwykle będziemy brali pod uwagę wyłącznie pręty jednorodnie

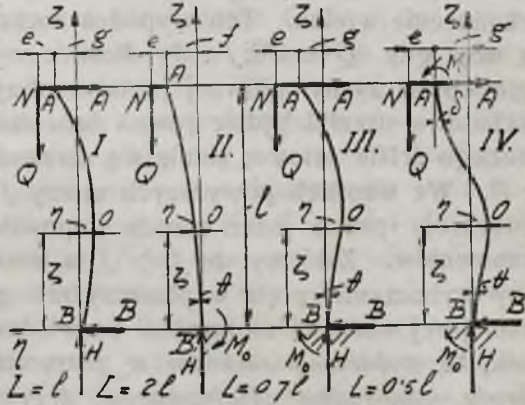
zbudowane o stałym przekroju poprzecznym, możemy przeto miasto krzywej przestrzennej — istotnej osi podłużnej pręta rozpatrywać jej rzuty na płaszczyzny główne, zawierające jednoimienne osie główne przekrojów poprzecznych. Otrzymane w ten sposób rzuty płaskie niewiele się będą różniły od prostej — teoretycznej osi podłużnej pręta doskonale prostego przy dokładnem i sumiennem wykonaniu. Godzi się tu zaznaczyć, że krzywizna osi istotnej, zależna w pierwszej mierze od niedokładności naszych środków technicznych, posiada charakter wypadkowy, uzależniony od bardzo wielu przyczyn, nie da się przeto ująć żadnym wzorem matematycznym, ani uzależnić od głównych wymiarów pręta, zwłaszcza, że ciągłym ulega zmianom na tle odkształceń cieplikowych. Prąd cieplejszego powietrza wystarcza, aby ją zmienić nieznacznie.

Nadto *pręt nawet dokładnie prosty ulega skrzywieniu, gdy jakikolwiek jego przekrój poprzeczny nie jest jednolity*. Wyobraźmy sobie płytkę poprzeczną, utworzoną z powłók owego przekroju. Wobec różnorodności tworzywa płytki współczynnik ściśliwości  $E_c$  ma wartość zmienną, niejednakową dla poszczególnych włókienek. Po obciążeniu siłą osiową  $Q$ , ciśnącą, włókienka skróca się niejednakowo — płytka ulegnie skrzywieniu, które pociągnie za sobą krzywiznę całego pręta. Wyczuć nieznaczną niejednorodność tworzywa, wyznaczyć drobne wahania  $E_c$  w przekroju nie leży w naszej mocy, a każde tworzywo jest mniej lub więcej różnolite. A zatem *obciążenie osiowe pręta prostego nie może być doskonale środkowem*.



Istnieje zawsze strzałka pierwotna przekroju poprzecznego o składowych  $g, h$  w płaszczyznach głównych pręta jednorodnie zbudowanego, zawierających jednoimiennie osie główne przekrojów. W tem założeniu rozpatrujemy przedewszystkiem:

**§ 5. Pierwszy rodzaj wybożenia.** Pręt pierwotnie prosty u dołu zamocowanego przegubowo, u góry rolkowo (Rys. 70) i obciążono siłą  $Q$ , cisnącą na górny przekrój pręta w kierunku średniej osi podłużnej pręta, równoległe do posuwu rolek. Początek stałych osi spólrzędnych umieszczamy we środku dolnego przegubu  $B$ , oś  $B\zeta$  układamy równoległe do osi średniej pręta ku górze, oś  $B\eta$  w płaszczyźnie głównej pręta poziomo na lewo, oś  $B\xi$  — ku patrzącemu. Ze względu na pierwotną krzywiznę pręta, zakładamy, że środek  $A_0$  górnego przekroju, podpartego rolkowo nie leży na osi  $B\zeta$ ; rzut jego na płaszczyznę gięcia wyznaczy punkt  $A$  o spólrzędnych  $l, g$ . Spólrzędna  $l$  ma wartość skończoną, równa jest bowiem długości pręta,  $g$  jest znikomo małe, pręt bowiem został sumiennie do granic możliwości technicznej wyprostowany. Wobec koniecznej zresztą mimośrodkowości obciążenia, siła  $Q$  mija środek górnego przekroju pręta: jej punkt przyłożenia da w rzucie na płaszczyznę gięcia punkt  $N$  o spólrzędnych  $l, e+g$ . Odcinek  $e$  ma również bardzo małą wartość, starano się bowiem obciążyć pręt jaknajdokładniej środkowo. Siła  $Q$  zewnętrzna wywołuje odpory  $A, B$  poziome i odpór  $H$  pionowy. Równania statyki, wypisane dla punktu  $B$ , dadzą:  $Q + H = 0, A + B = 0, Q(e + g) + Al = 0$ . Stąd mamy  $H = -Q, A = -Q(e + g) : l = -B$ . Wobec pewnej, nieznaczonej zresztą mimośrodkowości obciążenia, pręt wygnie się. Obierzmy na odkształconej dowolny zresztą środek  $O$  przekroju w odległości  $\zeta$  od początku osi spólrzędnych. Składowa jego strzałki pierwotnej niech będzie  $h$ , końcowej  $\eta$ . Po sprowadzeniu do środka  $O$  sił odkształcających otrzymamy siłę pionową  $Q$ , poziomą  $A$  i moment gnący  $Q(e + g - \eta) + A(l - \zeta)$ . Siły  $Q$  i  $A$  dadzą osiową siłę  $S$ , ściskającą i  $T$ , tnącą przekroju. Przy wygięciach nieznaczonej  $S \approx Q, T \approx A$ , działania ich możemy pominąć, jako nieznaczone. Moment gnący daje wygięcie pręta. Równanie gięcia będzie tu miało postać  $\eta'' + n^2(\eta - e - g) =$



Rys. 70, 71, 72 i 73.

$= A(l - \zeta) : EJ$ , przyczem  $n^2 = Q : EJ$ ,  $M = A(l - \zeta)$ ,  $M_2 = 0$ ,  
 a przeto jego całka  $\eta = e + g + C \sin n\zeta + D \cos n\zeta + A(l - \zeta) : Q$ .  
 W danym wypadku  $\eta = g$ , gdy  $\zeta = l$ , oraz  $\eta = 0$ , gdy  $\zeta = 0$ . Stąd:  
 $g = e + g + C \sin nl + D \cos nl$ ,  $0 = e + g + D + Al : Q = e + g +$   
 $+ D - Q(e + g) : Q = D$ , czyli więc  $D = 0$ ,  $C = -e : \sin nl$  i osta-  
 tecznie  $\eta = h + y = (e + g) \zeta : l - e \sin n\zeta : \sin nl$ . We wzorze tym  $y$   
 oznacza składową strzałki, zależną od siły  $Q$ . Gdy  $e = g = h = 0$ ,  
 a więc dla pręta doskonale prostego, obciążonego ściśle środkowo, bę-  
 dziemy mieli  $\eta = y = 0$ . Gdy  $\sin nl = 0$ , ostatni wyraz wzrasta ponad  
 wszelką miarę, a  $\eta = y = \infty$ . Jedną ze składowych strzałki będzie nie-  
 skończenie wielka. Ten wypadek zachodzi istotnie wtedy, gdy  $nl = \pi$ ,  
 a więc gdy  $Q = \pi^2 EJ : l^2$ . Powtórzmy to samo rozumowanie dla dru-  
 giej płaszczyzny głównej pręta, a otrzymamy podobne wyniki. Druga  
 składowa strzałki będzie równa zeru dla pręta doskonale prostego, obcią-  
 żonego ściśle osiowo; stanie się nieskończenie wielką przy  $Q_1 = \pi^2 EJ_1 :$   
 $: l^2$ . We wzorach powyższych mamy  $J$  i  $J_1$  — główne momenty stałego  
 przekroju pręta; jeden z nich odpowiada minimum — drugi maximum  
 momentów. Załóżmy, że  $J_1 > J$ , a wtedy przy  $Q = Q_0 < Q_1$ , otrzy-  
 mamy wyboczenie pręta w płaszczyźnie gięcia  $\zeta B\eta$ , w płaszczyźnie naj-  
 mniejszej wartości momentów bezwładności przekrojów pręta. Stąd wnio-  
 sek, że *wyboczenie zachodzi w płaszczyźnie głównej pręta o stałym prze-*  
*croju, jednorodnie zbudowanego, przynależnej do najmniejszej wartości*  
*momentu bezwładności przekrojów*. Można się było spodziewać tego, po-  
 nieważ niewątpliwie w tej płaszczyźnie gięcia, pręt jest wytrzymałości-  
 wo najszabszy. Gdy przekrój pręta jest obojętny, wyboczenie może na-  
 stąpić w jakiegokolwiek płaszczyźnie gięcia. Drobne odstępstwa od praw  
 powyższych zdarzają się czasami przy próbach, należy je przypisać każ-  
 dorazowo istnieniu znaczniejszych strzałek pierwotnych. Tylko co pada-  
 ne wyniki ostateczne dotyczą również i następnych wypadków wybocze-  
 nia, nie będziemy ich przeto powtarzali, wyznaczymy jeno odnośne wzo-  
 ry dla sił  $Q_0$ .

**§ 6. Drugi wypadek wyboczenia.** Pręt zamocowano u dołu  
 (Rys. 71) i obciążono siłą  $Q$ , cisnącą na górny przekrój pręta w kierunku  
 średniej osi pręta podłużnej. Załóżmy nadto dodatkowo, że kierunek  
 działania siły nie zmienia się przy odkształcaniu pręta, a otrzymamy po-  
 wyżej opisany pręt doświadczalny. Początek stałych osi spółrzędnych  
 umieszczamy we środku przekroju osadczego, oś  $B\zeta$  prowadzimy równo-  
 ległe do osi średniej pręta ku górze, oś  $B\eta$  na lewo w płaszczyźnie  
 głównej pręta, oś  $B\xi$  — ku patrzącemu. Wobec koniecznej mimośrodko-  
 wości obciążenia nastąpi wygięcie pręta pod jarzmem siły  $Q$ . Po od-  
 kształceniu środek końcowego przekroju swobodnego da w rzucie na



obraną płaszczyznę główną punkt  $A$  o spólrzędnych  $l$  i  $f$ , a punkt przyłożenia siły  $Q$  da  $N(l, e + f)$ . Odcinek  $e$  stanowi składową mimośrodową siły  $Q$ ; odcinek  $f$  daje składową strzałki górnego przekroju. Dla pręta sumiennie wyprostowanego  $e$  jest nader nieznaczące, choć różne od zera. Gdziekolwiek na odkształconej, w odległości  $\zeta$  od początku osi spólrzędnych obieramy środek  $O$ . Składową strzałki tego przekroju będzie  $\eta$ . Po sprowadzeniu do środka  $O$  odkształcająca siła da moment  $Q(e + f - \eta)$ ; siły osiową i tnącą pomijamy, jak w wypadku wyżej opisanym. Działanie ich jest nieznaczące, a wpływ na wyboczenie znikomy. Równanie gięcia otrzyma postać  $\eta'' + n^2(\eta - e - f) = 0$ . Jego całka  $\eta = e + f + C \sin n\zeta + D \cos n\zeta$  zawiera niewiadome  $C, D, f$ , które wyznaczymy z warunków skrajnych obciążenia pręta. Mamy tu  $\eta = f$ , gdy  $\zeta = l$ , skrócenie bowiem pręta pod jarzmem siły  $Q$  cisnącej pomijamy, jako nieznaczące. Nadto  $\eta_0 = 0$  dla osadczego przekroju, a  $\eta'_0 = \theta$ . Pręt jako niezupełnie prosty może być nieco pochylony w przekroju osadczym ku swej osi średniej  $B\zeta$ . Zresztą kąt  $\theta$  jest nader znikomy dla pręta sumiennie wyprostowanego. Stąd mamy  $f = e + f + C \sin nl + D \cos nl$ ,  $0 = e + f + D$ ,  $\theta = nC$ . Stąd  $C = \theta : n$ ,  $D = -(en + \theta \sin nl) : n \cos nl$ ,  $f = (en + \theta \sin nl) : n \cos nl - e$  i ostatecznie  $\eta = (\theta : n) \sin n\zeta + (en + \theta \sin nl) (1 - \cos n\zeta) : n \cos nl = h + y$ . Przez  $h$  oznaczyliśmy tu składową strzałki pierwotnej przekroju, przez  $y$  przyrost tej składowej na tle działania gnącego siły  $Q$ . Dla pręta doskonale prostego  $h = \theta = e = 0$ , a zatem  $\eta = y = 0$ . Gdy  $\cos nl = 0$ , będziemy mieli  $y = \eta = f = \infty$  przy wszelkich wartościach  $e, \delta, h$ . Siła, czyniąca zadość równaniu  $nl = \frac{1}{2} \pi$ , powoduje wyboczenie pręta. Będzie to  $Q_0 = \pi^2 EJ : 4 l^2$ . Z założenia  $EJ$  jest najmniejsze dla rozpatrywanej płaszczyzny gięcia. Rozumując zupełnie tak samo, jak w wypadku poprzedzającym, dojdziemy do wniosku, że  $Q_0$  stanowi istotnie obciążenie pręta niebezpieczne, bo grożące wyboczeniem. Tylko co otrzymany wzór otrzyma postać nieco prostszą  $Q_0 = \pi^2 EJ : L^2$ , gdy miasto istotnej długości pręta rozpatrywać będziemy *długość sprowadzoną*  $L = 2 l$ , dwukrotnie większą.

**§ 7. Trzeci wypadek wyboczenia.** Pręt, pierwotnie prosty, zamocowano u dołu, u góry obciążono siłą  $Q$ , cisnącą w kierunku posuwu rolek górnej podpory przegubowej pręta. Posuw i siła są równoległe do osi średniej pręta. I w danym wypadku początek stałych osi spólrzędnych umieszczamy we środku  $B$  przekroju osadczego; oś  $B\zeta$ , równoległą do średniej osi pręta, kierujemy do góry, oś  $B\eta$  na lewo,  $B\zeta$  — ku patrzącemu. Rozpatrujemy, jak zwykle, pręt jednorodnie zbudowany, o stałym przekroju poprzecznym,  $\zeta B\eta$  stanowi jego płaszczyznę główną, odpowiadającą najmniejszej sztywności  $EJ$ . Wobec pierwotnej krzywizny pręta środek górnego przekroju w rzucie na obraną płaszczyznę gięcia

da punkt  $A$  o spólrzędnych  $l, g$ , a punkt przyłożenia siły  $Q$  da  $N(l, e + g)$ . To samo mieliśmy wyżej w § 5. Oba odcinki  $e, g$  są nader nieznaczące dla prętów sumiennie wyprostowanych. Siła  $Q$  zewnętrzna wywołuje odpory  $A, B$  poziome, odpór  $H$  pionowy i moment osadczy  $M_0$ . Równania statyki, wypisane dla punktu  $B$ , dadzą  $Q + H = 0, A + B = 0, Q(e + g) + Al + M_0 = 0$ . Wyznamy z nich  $B$  i  $M_0$  w zależności od  $Q$  i statycznie niewyznaczalnej  $A$ . Obierzmy na odkształconej dowolny zresztą srodek  $O$  przekroju o spólrzędnych  $\zeta, \eta$ . Po sprowadzeniu sił odkształcających do tego srodka otrzymamy siłę osiową i tnącą, które i w danym wypadku pominiemy, oraz moment gnący  $Q(e + g - \eta) + A(l - \zeta)$ . Równanie gięcia będzie przeto zupełnie takie, jak w § 5, a całka jego  $\eta = e + g + C \sin n\zeta + D \cos n\zeta + A(l - \zeta) : Q$ . Niewiadome  $C, D, A$  wyznaczymy z warunków końcowych obciążenia. Dla górnego przekroju (Rys. 72)  $\eta = g$  przy  $\zeta = l$ , dla osadczego  $\eta = 0$  i  $\eta' = \theta$  przy  $\zeta = 0$ , pręt bowiem, jako niezupełnie prosty, może w przekroju osadczym tworzyć pewien nieznaczący kąt  $\theta$  nachylenia ku swej osi średniej. Stąd mamy:  $g = e + g + C \sin nl + D \cos nl, 0 = e + g + D + Al : Q, \theta = nC - A : Q$ . Pomnóżmy ostatnie równanie przez  $l$ , po dodaniu do drugiego otrzymamy  $D = -Cnl + l\theta - e - g$ , stąd na mocy równania pierwszego będziemy mieli ostatecznie  $C = [-e + (e + g - l\theta) \cos nl] : (\sin nl - nl \cos nl), D = [nle - (e + g - l\theta) \sin nl] : (\sin nl - nl \cos nl)$ . Nadto  $A = Q(nC - \theta)$ . Te wartości określają równanie odkształconej, z którego możemy wyznaczyć  $\eta$  lub  $h + y = \eta$ . Dla pręta doskonale prostego  $e = g = h = \theta = 0$ , a przeto również  $C = D = A = 0$ , skąd  $\eta = y = 0$ . Taki pręt osiowo obciążony nie ulega wyboczeniu, jeno ściśnięciu. Gdy  $\sin nl - nl \cos nl = 0$ , wtedy  $C = D = A = \infty$ , otrzymamy przeto  $\eta = y = \infty$ . Siła, powodująca wyboczenie czyni zadość tylko co wypisanemu równaniu. Najmniejszy jego pierwiastek  $nl = 1,4303 \pi$ , a przeto  $n^2 l^2 = 2,046 \pi^2 \approx 2 \pi^2$ . Stąd ostatecznie wyznaczymy siłę  $Q_0 = 2 \pi^2 EJ : l^2$ , powodującą wyboczenie pręta. I ten wzór otrzyma prostszą postać  $Q_0 = \pi^2 EJ : L^2$ , gdy miasto istotnej długości pręta będziemy brali pod uwagę jego długość sprowadzoną  $L = 0,7 l$ , wtedy bowiem  $L^2 = 0,49 l^2 \approx l^2 : 2$ .

**§ 8. Czwarty wypadek wyboczenia.** Pręt pierwotnie prosty mocujemy cbustronnie (Rys. 73) w sposób, umożliwiający jednak posuw górnego zamocowania w kierunku osi średniej pręta pod jarzmem siły  $Q$ , cisnącej z góry, a równoległej do tego posuwu. Początek stałych osi spólrzędnych umieszczamy we srodku  $B$  dolnego przekroju osadczego. Oś  $B\zeta$  prowadzimy do góry równoległe do osi średniej pręta, drugą oś  $B\eta$  układamy w głównej płaszczyźnie pręta na lewo, oś  $B\xi$  kierujemy ku patrzącemu. Rozpatrujemy wyłącznie tylko pręty jednorodnie

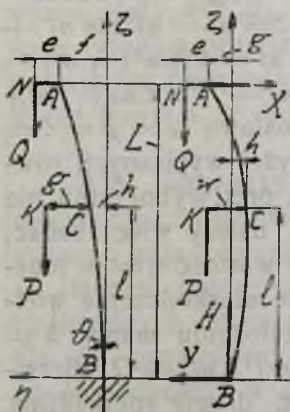


zbudowane o stałym przekroju poprzecznym, płaszczyzna główna  $\zeta B \eta$  odpowiada najmniejszej sztywności pręta  $EJ$ . Na tej płaszczyźnie środek górnego przekroju da rzut  $A(l, g)$ , punkt przyłożenia siły  $Q$  da w rzucie  $N(l, e + g)$ , jak w wypadku poprzednio rozpatrywanym. W górnym przekroju będziemy mieli odpór poprzeczny  $A$  i moment osadczy  $M$ , w dolnym — odpór poprzeczny  $B$ , pionowy  $H$  i moment  $M_0$ . Równania statyki, wypisane dla punktu  $B$  w postaci  $Q + H = 0$ ,  $A + B = 0$ ,  $Q(e + g) + Al + M + M_0 = 0$  dadzą  $H = -Q$ ,  $B = -A$ ,  $M_0 = -Q(e + g) - Al - M$ . Mamy tu dwie wielkości statycznie niewyznaczalne  $A$  i  $M$ . Wobec koniecznej mimośrodkowości obciążenia pręt wygnie się w sposób wskazany na rysunku. Obierzmy na odkształconej dowolny zresztą środek przekroju  $O(\zeta, \eta)$ . Po sprowadzeniu sił górnego układu do środka  $O$  otrzymamy siłę osiową i tnącą, które jak zwykle pomijamy, i moment  $M + Q(e + g - \eta) + A(l - \zeta)$ . Równanie gięcia będzie więc  $\eta'' + n^2(\eta - e - g) = [A(l - \zeta) + M] : EJ$ . Jego całka  $\eta = e + g + C \text{Sin} n\zeta + D \text{Cos} n\zeta + [A(l - \zeta) + M] : Q$  zawiera cztery niewiadome  $C, D, M, A$ , które wyznaczymy z warunków skrajnego obciążenia pręta. W górnym przekroju mamy  $\eta = g$ ,  $\eta' = \delta$  przy  $\zeta = l$ , pręt bowiem, jako niedoskonale prosty, może ujawniać końcowe odchylenie osi o mały zresztą kąt  $\delta$  od osi średniej. W dolnym przekroju przy  $\zeta = 0$  będziemy mieli  $\eta_0 = 0$ ,  $\eta'_0 = \theta$ , jak w wypadku poprzednio rozpatrywanym. Stąd mamy:  $g = e + g + C \text{Sin} nl + D \text{Cos} nl + M : Q$ ,  $\delta = -n C \text{Cos} nl - n D \text{Sin} nl - A : Q$ ,  $0 = e + g + D + Al : Q + M : Q$ ,  $\theta = nC - A : Q$ . Pomnóżmy ostatnie równanie przez  $l$ . Po dodaniu do trzeciego otrzymamy  $0 = e + g - \theta l + Cnl + D + M : Q$ . Ten wynik odejmujemy od pierwszego. Stąd otrzymamy:  $C(\text{Sin} nl - nl) + D(\text{Cos} nl - 1) = g - \theta l$ . Z kolei odejmujemy czwarte równanie od drugiego. Stąd:  $C(\text{Cos} nl - 1) - D \text{Sin} nl = (\delta - \theta) \cdot n$ . Z tych równań otrzymamy  $C = [(g - \theta l) \text{Sin} nl + (\delta - \theta)(\text{Cos} nl - 1) : n] : \Delta$ ,  $D = [(g - \theta l)(\text{Cos} nl - 1) - (\delta - \theta)(\text{Sin} nl - nl) : n] : \Delta$ , gdzie  $\Delta = \text{Sin}^2 nl - nl \text{Sin} nl + \text{Cos}^2 nl - 2 \text{Cos} nl + 1 = 2(1 - \text{Cos} nl) - nl \text{Sin} nl = 4 \text{Sin}^2(1/2 nl) - 2nl \text{Sin}(1/2 nl) \times \text{Cos}(1/2 nl) = 4 \text{Sin}(1/2 nl) [\text{Sin}(1/2 nl) - 1/2 nl \text{Cos}(1/2 nl)]$ . Dla pręta doskonale prostego, obciążonego ściśle osiowo  $e = g = \delta = \theta = 0$ , a przeto  $C = D = 0$ , oraz na mocy powyżej wypisanych równań  $A = M = 0$  i ostatecznie  $\eta = 0$ . Tego rodzaju pręt wyboczeniu nie ulega. Istotne pręty nie są jednak zupełnie proste, należy więc zbadać, kiedy  $\eta = \infty$ . Z równania odkształconej wynika, że wartość  $\eta = \infty$  możliwa jest jeno wtedy, gdy  $C, D, A$  lub  $M$  staną się nieskończenie wielkimi. Załóżmy, że  $C = \infty$  lub  $D = \infty$ . W tem założeniu mamy  $\Delta = 0$ , czyli  $\text{Sin}(1/2 nl) = 0$  lub  $\text{Sin}(1/2 nl) - 1/2 nl \text{Cos}(1/2 nl) = 0$ . Pierwsze równanie daje najmniejszy pierwiastek  $1/2 nl = \pi$ , drugie spotkaliśmy w ustępie poprzednim. Da ono  $1/2 nl = 1,403 \pi$ . Szukamy najmniejszej

wartości siły  $Q$ , niebezpiecznej ze względu na wyboczenie pręta, należy przeto wziąć pod uwagę mniejszy z tych dwóch pierwiastków:  $^{1/2} nl = \pi$ . Istotnie dla niego  $D = \infty$ , a przeto i  $M = \infty$ , jak o tem łatwo się przekonać, rozpatrując powyżej wypisane cztery równania warunkowe. Stąd bezpośrednio  $n^2 l^2 = Q l^2 : EJ = 4 \pi^2$ , siła przy której nastąpi wyboczenie będzie więc równa  $Q_0 = 4 \pi^2 EJ : l^2$ . I ten wzór można przedstawić w postaci  $Q_0 = \pi^2 EJ : L^2$ , rozpatrując miasto istotnej długości pręta  $l$ , długość sprowadzoną  $L = ^{1/2} l$ , dwukrotnie mniejszą.

**§ 9. Wzory Euler'a.** Wszystkie te cztery wzory zawdzięczamy *Euler'owi*. Połączyliśmy je w jeden wzór  $Q_0 = \pi^2 EJ : L^2$ , w którym  $Q_0$  oznacza najmniejszą wartość siły, przy której następuje wyboczenie pręta, jednorodnie zbudowanego, stałego przekroju. Wyboczenia oczekiwać należy w płaszczyźnie głównej pręta, odpowiadającej najmniejszej jego sztywności  $EJ$ . Nadto we wzorze mamy długość sprowadzoną pręta  $L$ , różną od jego długości istotnej  $l$ . W wypadku pierwszym, dla pręta jednostronnie opartego przegubowo, drugostronnie rolkowo  $L = l$ ; dla pręta jednostronnie osadzonego  $L = 2l$ ; dla pręta jednostronnie osadzonego, drugostronnie prowadzonego rolkowo  $L = 0,7l$ ; wreszcie dla pręta obustronnie osadzonego  $L = 0,5l$ . Są to cztery wypadki zasadnicze wyboczenia, wszystkie inne, złożone, możemy sprowadzić do tych czterech najprostszych. Często spotykane proste przykłady najlepiej to uwytknąć. Weźmy pod uwagę —

**§ 10. Słup wspornikowy.** Pręt osadzono u dołu, w górnym swobodnym przekroju obciążono osiową siłą  $Q$ , cisnącą na pręt w kierunku jego średniej osi podłużnej. Nadto jeden z pośrednich przekrojów pręta zaopatrzonego we wspornik, obciążony na końcu siłą  $P$  równoległą do  $Q$  i czynną w tym samym kierunku. Pręt ma być jednorodnie zbudowany. Początek stałych osi współrzędnych obieramy we środku  $B$  przekroju osadzonego, oś  $B\xi$  kierujemy ku górze, równoległe do średniej osi pręta, oś  $B\eta$  układamy w płaszczyźnie głównej pręta, odpowiadającej jego najmniejszej sztywności. Prowadzimy  $B\eta$  na lewo,  $B\xi$  — ku patrzącemu. Wobec mimośrodkowości obciążenia, pręt wygnie się. Środek skrajnego przekroju górnego da w rzucie na obraną płaszczyznę główną punkt  $A(L, f)$ , a punkt przyłożenia siły osiowej  $Q$  — rzut  $N(L, e + f)$ , siła bowiem  $Q$  ujawnia zawsze pewną znikomą mimośrodkowość przyłożenia. Środek przekroju, zaopatrzonego we wspornik da w rzucie na tę samą płaszczyznę punkt  $C(l, h)$  a punkt końcowy wspornika, obciążony siłą  $P$  da rzut  $K(l, g + h)$ . Godzi się tu zaznaczyć, że  $e$  i  $g$  należy zawsze rozpatrywać po jednej stronie pręta, ten układ bowiem



Rys. 74 i 75.



daje największe odkształcenia. Znamy istotny kierunek wspornika, nie wiemy jednak dokładnie, gdzie leży punkt przyłożenia siły  $Q$  w przekroju górnym, bo mimośrodowość tego obciążenia jest dziełem wypadku — zachodzić może we wszystkich kierunkach zupełnie jednakowo z tem samym prawdopodobieństwem. Najlepiej przeto postawić zagadnienie w najgorszych warunkach, wtedy bowiem momenty obu sił będą działały w tym samym kierunku obrotowym. W danym wypadku wspornik dzieli płaszczynę gięcia na dwie połacie zmienności momentów. W górnej panuje moment  $Q(e+f-\eta)$ , w dolnej  $Q(e+f-\eta)+P(g+h-\tau)$ . Zatem dla górnej połaci będziemy mieli równanie gięcia  $\eta''+n^2(\eta-e-f)=0$ , dla dolnej  $\eta''+m^2\eta=[Q(e+f)+P(g+h)]:EJ_2$ , gdzie  $n^2=Q:EJ_1$ ,  $m^2=(Q+P):EJ_2$ , zakładamy bowiem, że pręt posiada sztywność najmniejszą  $EJ_1$  w połaci górnej,  $EJ_2$  — w dolnej. Obie te sztywności są zresztą jednakowe dla wszystkich przekrojów odnośnych połaci. Całkę pierwszego równania otrzymamy w postaci  $\eta=e+f+ASin n\zeta+BCos n\zeta$ , drugiego  $\eta_{11}=[Q(e+f)+P(g+h)]:(Q+P)+CSin m\zeta+DCos m\zeta$ . Stałe całkowania wyznaczmy ze skrajnych warunków obciążenia. Przy  $\zeta=L$ , dla górnego przekroju mamy  $\eta=f$ , dla granicznego przy  $\zeta=l$  będziemy mieli  $h=\eta=\eta_{11}$  i  $\eta'_l=\eta'_{11}$ , odkształcona bowiem punktów podwójnych i osobliwych mieć nie może. Wreszcie dla przekroju osadczego przy  $\zeta=0$  otrzymamy  $\eta_{10}=0$ ,  $\eta'_{10}=\theta$ , jak dla ostatnich trzech typowych wypadków, rozpatrywanych powyżej. Stąd mamy kolejno  $f=e+f+ASin nL+BCos nL$ ,  $h=e+f+ASin nl+BCos nl$ ,  $h=[Q(e+f)+P(g+h)]:(Q+P)+CSin ml+DCos ml$ ,  $nACos nl-nBSin nl=mCCos ml-mDSin ml$ ,  $[Q(e+f)+P(g+h)]:(Q+P)+D=0$ ,  $mC=\theta$ . Z piątego wzoru wyznaczmy  $[Q(e+f)+P(g+h)]:(P+Q)=R=-D$  i podstawiamy w trzeci, skąd  $CSin ml+D(Cos ml-1)=h$ . Po uwzględnieniu szóstego równania, które da  $C=\theta:m$ , otrzymamy  $D=(mh-\theta Sin ml):m(Cos ml-1)$ . Mamy prawo tak czynić, ponieważ  $Cos ml \neq 1$ . Że tak jest istotnie, możemy się łatwo przekonać, wtedy bowiem byłoby  $ml=2\pi$ , otrzymalibyśmy przeto warunek wyboczenia dla pręta obustronnie zamocowanego,  $l$  długiego, a obciążonego siłą  $P+Q$ , co oczywiście nie zgadza się z istotą rzeczy. Z równania czwartego otrzymamy  $ACos nl-BSin nl=[\theta Cos ml-(mh-\theta Sin ml)\times Sin ml:(Cos ml-1)]:n=mhSin ml:n(1-Cos ml)-\theta:n$ , z drugiego znów  $ASin nl+BCos nl=h-(e+f)$ . Te dwa równania dają  $A=[mh Sin ml:n(1-Cos ml)-\theta:n] Cos nl+(h-e-f) Sin nl$ ,  $B=-[mh Sin ml:n(1-Cos ml)-\theta:n] Sin nl+(h-e-f) Cos nl$ . Po podstawieniu tych wartości w równanie pierwsze otrzymamy:  $[mh Sin ml:n(1-Cos ml)-\theta:n] Sin n\lambda+(h-e-f) Cos n\lambda=-e$ , gdzie oznaczyliśmy  $L-l=\lambda$ . Niech będzie dalej  $P=rQ$ . Piąte równanie na nam  $e+f=(mh-\theta Sin ml)(1+r):m(1-Cos ml)-r(g+h)$ . Z tych dwóch równań rugujemy  $e+f$  i ostatecznie otrzymujemy  $h=[(\theta:n) Sin n\lambda-\theta(1+r) Sin ml Cos n\lambda]:m(1-Cos ml)-rg Cos n\lambda-e]:\{[m Sin ml Sin n\lambda-n(1+r) Cos ml Cos n\lambda]:n(1-Cos ml)\}$ . Wyboczeniu pręta odpowiada wartość  $h=\infty$ , a przeto warunek wyboczenia możemy wypisać w postaci  $m Sin ml Sin n\lambda-n(1+r) Cos ml Cos n\lambda=0$ . Inaczej jeszcze  $tg ml tg n\lambda=n(1+r):m$ . Równania tego w ogólnej postaci rozwiązać niepodobna, natomiast

w każdym szczególnym wypadku otrzymać można wartości  $n = \sqrt{Q : EJ_1}$ ,  $m = \sqrt{(P + Q) : EJ_2}$ , czyniące mu zadość.

**§ 11. Stójka wspornikowa.** Pręt (Rys. 75) podparto u dołu przegubowo, u góry rolkowo i obciążono siłą  $Q$ , cisnącą na górny przekrój podparty, a równoległą do średniej osi pręta. Nadto jeden z pośrednich przekrojów pręta połączono sztywnie ze wspornikiem, obciążonym na końcu siłą  $P$ , równoległą do  $Q$ , cisnącą w dół. Pręt ma być jednorodnie zbudowany. Początek stałych osi współrzędnych obieramy we środku  $B$  dolnego przekroju, oś  $B\xi$  kierujemy do góry, równoległe do średniej osi pręta, oś  $B\eta$  układamy w płaszczyźnie głównej pręta, odpowiadającej najmniejszej jego sztywności. Prowadzimy tę oś na lewo, a  $B\xi$  ku patrzącemu. Rzut środka górnego przekroju podpartego w płaszczyźnie głównej da punkt o współrzędnych  $L, g$ , rzut punktu przyłożenia siły  $Q$  będzie miał współrzędne  $L, e + g$ . Środek wspornikowego przekroju wyznaczy w rzucie punkt o współrzędnych  $l, h$ , wreszcie koniec wspornika da w rzucie punkt o współrzędnych  $l, w + h$ . I tu również mimośrodkowość obciążenia górnego, jako też zboczenie  $g$  obieramy po stronie  $w$ , aby otrzymać najgorsze warunki obciążenia. Niema w tem założeniu żadnej sprzeczności z istotą rzeczy,  $e$  bowiem i  $g$  są zupełnie przypadkowe, możemy im przypisać dowolny kierunek. Nazwijmy górny odpór poprzeczny przez  $X$ . Równanie momentów, wypisane dla punktu  $B$  da  $Q(e + g) + P(w + h) + XL = 0$ , skąd  $X = -[Q(e + g) + P(w + h)] : L$ . Przekrój wspornikowy dzieli płaszczyznę gięcia na dwie połacie: górną o sztywności  $EJ_1$  i dolną o stałej sztywności  $EJ_2$ . Dla górnej mamy równanie gięcia  $EJ_1\eta'' = Q(e + g - \eta) + X(L - \zeta)$ , dla dolnej  $EJ_2\eta'' = Q(e + g - \eta) + P(w + h - \eta) + X(L - \zeta)$ . Założmy  $n^2 = Q : EJ_1$ ,  $m^2 = (P + Q) : EJ_2$ , a otrzymamy całkę pierwszego równania  $\eta = e + g + A\text{Sin } n\zeta + B\text{Cos } n\zeta + X(L - \zeta) : Q$ , drugiego  $\eta = C\text{Sin } m\zeta + D\text{Cos } m\zeta - X\zeta : (P + Q)$ . Dla  $\zeta = L$  mamy tu  $\eta = g$ , dla przekroju wspornikowego przy  $\zeta = l$  będziemy mieli  $\eta = \eta_1 = h$ ,  $\eta' = \eta'_1$ , wreszcie dla dolnego podpartego przekroju  $\eta_1 = 0$  przy  $\zeta = 0$ . Stąd:  $A\text{Sin } nL + B\text{Cos } nL = -e$ ,  $A\text{Sin } nl + B\text{Cos } nl + e + g + Xl : Q = h$ ,  $C\text{Sin } ml + D\text{Cos } ml - Xl : (P + Q) = h$ ,  $nA\text{Cos } nl - nB\text{Sin } nl - X : Q = mC\text{Cos } ml - mD\text{Sin } ml - X : (P + Q)$ ,  $D = 0$ . Z równania trzeciego mamy  $C = (h + t) : \text{Sin } ml$ , gdzie oznaczyliśmy przez  $t = Xl : (P + Q)$ . I tutaj również  $\text{Sin } ml \neq 0$ , w przeciwnym bowiem razie mielibyśmy  $ml = \pi$ , skąd  $P + Q = \pi^2 EJ_2 : l^2$ , jak dla pręta o długości  $l$ , obciążonego siłami  $P + Q$  w wypadku pierwszym wybożenia, co niewątpliwie stoi w sprzeczności z założeniem. Po podstawieniu  $C$  i  $D = 0$  w równanie czwarte, otrzymamy:  $A\text{Cos } nl - B\text{Sin } nl = (m : n)(h + t) \text{ctg } ml + X : nQ - X : n(P + Q) = (m : n)(h + t) \text{ctg } ml + s$ , gdzie  $s = PX : nQ(P + Q)$ . Nadto z drugiego równania mamy:  $A\text{Sin } nl + B\text{Cos } nl = h - e - g - u$ , gdzie  $u = Xl : Q$ . Te dwa równania dają  $A = (m : n)(h + t) \text{ctg } ml \text{Cos } nl + s\text{Cos } nl + (h - e - g - u) \text{Sin } nl$ ,  $B = -(m : n)(h + t) \text{ctg } ml \text{Sin } nl - s\text{Sin } nl + (h - e - g - u) \text{Cos } nl$ . Po podstawieniu tych wartości w równanie pierwsze, otrzymamy:  $[(m : n)(h + t) \text{ctg } ml + s] \text{Sin } n\lambda + (h - e - g - u) \text{Cos } n\lambda = -e$ . Z kolei wyznaczmy wartości  $t = -[e + g + r(w + h)] l : (1 + r) L$ ,  $s = -r[e + g + r(w + h)] : n(1 + r) L$ ,  $u = -$



—  $[e + g + r(w + h)] \lambda : L$ . Po podstawieniu tych wartości otrzymamy z ostatniego równania niewiadomą  $h$  w postaci  $h = [(e + g + rw)(ml \times \times ctg ml + r) \sin n\lambda : n(1 + r)L + (el + gl - rw\lambda) \cos n\lambda : L - e] : \{m(L + r\lambda) ctg ml - r^2\} \sin n\lambda : nL(1 + r) + (L + r\lambda) \cos n\lambda : L$ . Przy wyboczeniu pręta  $h = \infty$ , a przeto musi być równy reru mianownik tylko co otrzymanego wzoru. Stąd otrzymujemy ostateczny warunek wyboczenia w postaci  $m ctg ml + n(1 + r) ctg n\lambda = r^2 : (L + r\lambda)$ . Jest tu wzór *Jasniskiego*. Wzór, wyprowadzony w ustępie poprzedzającym, o ile wiem, nie był znany dotychczas. Oba te wzory mają jedną wadę — są bardzo niewygodne w rachunku. Stosują się również w wypadku  $e$  skończonego. Łatwo to udowodnić, zważywszy, że wielkość  $e$  nie gra żadnej roli przy wyznaczaniu wartości krytycznej mianownika. Stanowi to poniekąd istotę powyższych wywodów, milcząc bowiem rozpatrywalimy wszystkie powyżej podane wypadki wyboczenia proste i złożone, jako graniczne wypadki obciążeń mimośrodkowych.

**§ 12. Zakres stosowalności wzorów Eulera.** W rozdziale drugim zaznaczyliśmy wyraźnie, że wzory gięcia mogą być stosowane jedynie w tym wypadku, gdy  $\alpha_g$  ma stałą wartość dla całego obszaru naprężeń gnących. Zatem naprężenia gnące nie powinny przekraczać granicy proporcjonalności  $K_{gH} \approx K_H$ . To samo zastrzeżenie dotyczy również i wzorów *Eulera*, jako wysnutych ze zwykłych wzorów gięcia. Zwęża ono zakres ich stosowalności, czyniąc koniecznym ustalenie pewnych dodatkowych warunków, przez długi czas zupełnie zapoznawanych. Warunki te jednak nie mogą być ustalone bezpośrednio, bo wzory na wyboczenie nie zawierają naprężeń. Stanowią zatem pewien rodzaj zabezpieczenia przeciwko wyboczeniu, wskazując siłę odkształcającą, która może wywołać zjawisko zasadniczo różne od zwykłych odkształceń, pochodzących od sił cisnących. Wyboczenie w istocie swej nie różni się od gięcia mimośrodkowego. Jest jego wypadkiem granicznym. Wobec pierwotnej krzywizny pręta ściskanego w przekrojach panują siły osiowe  $S$  i momenty gnące  $M$ , zresztą nader nieznaczne dla prętów sumiennie wyprostowanych. To obciążenie daje naprężenia gnące  $\sigma = -M_y x : J_y + + M_x y : J_x + S : F$ , skrajne wartości naprężeń  $\sigma$  wyrokują o bezpieczeństwie pręta. Zatem warunkiem istotnym stosowalności wzorów *Eulera* musi być  $\sigma_{max} \leq K_H$ . Niestety, nie możemy korzystać z tej nierówności, nie znamy bowiem strzałki rozpatrywanego przekroju, nie umiemy więc wyznaczyć wartości momentu gnącego w sposób wystarczająco ściśły. Nie znamy skrajnych naprężeń przekroju, jeno ich wartość średnią  $\sigma_0 = S : F$ . Wiemy natomiast, że moment gnący ma wartość znikomą dla prętów sumiennie wyprostowanych, możemy przeto założyć, że skrajne naprężenia przekroju nie wiele się różnią od  $\sigma_0$ . To założenie ma wszelkie cechy prawdopodobieństwa przy małych wygięciach poszczególnych płytek. W tym wypadku naprężenie średnie  $\sigma_0$  stanowi przybli-

zoną miarę naprężeń przekroju. Zatem nierówność  $\tau_0 \leq K_H$  stanowi warunek stosowalności wzorów *Euler'a*. Stąd wnioskujemy, że siła  $Q_0$  wyznaczona z tych wzorów istotnie może spowodować wyboczenie, o ile  $\tau_0 = Q_0 : F \leq K_H$ . Ten czysto teoretyczny wniosek, zupełnie zresztą oczywisty, długi czas leżał odłogiem i wzory *Euler'a* były stosowane nieodpowiednio, dawały wyniki fałszywe. Nie dosyć na tem. Zwykły wzór ściskania wymaga, aby naprężenia cisnące były mniejsze od  $k_c$ , skrajnego dopuszczalnego naprężenia cisnącego, a przeto *pręty obciążone siłami osiowymi cisnącemi winny być liczone na wyboczenie według wzorów Euler'a i na ściskanie według zwykłego wzoru*. Bogaty dorobek doświadczalny stwierdza to prawo w całej rozciągłości.

*Tetmajer* nieco inaczej rozwiązuje zagadnienie, czyniąc we wzorze ogólnym *Euler'a*  $J = Fi^2$ , gdzie  $i$  oznacza ramię bezwładności najmniejszego stałego przekroju pręta jednorodnie zbudowanego. Stąd  $Q_0 = \pi^2 EFi^2 : L^2$ . Nazwijmy iloraz  $Q_0 : F$  *wytrzymałością na wyboczenie*  $K_W$ . Będzie to niewątpliwie *średnie naprężenie pręta niebezpieczne*, grozi bowiem wyboczeniem. Z warunku powyżej ustalonego wypływa, że  $K_W = \pi^2 E(i : L)^2 \leq K_H$ . W tym jedynie wypadku należy oczekiwać *wyboczenia sprężystego*, mamy więc prawo korzystać ze wzorów *Euler'a* dla wyznaczenia  $Q_0$ . Skoro więc  $L : i \geq \pi \sqrt{E : K_H}$ , siła  $Q_0 = \pi^2 EJ : L^2$  daje wyboczenie sprężyste. Po odciążeniu pręt powraca do stanu pierwotnego. Znika wszelki ślad wyboczenia. Inaczej jednak rzecz się ma, gdy  $K_W > K_H$ , to jest gdy  $L : i < \pi \sqrt{E : K_H}$ , gdy naprężenia przekraczają granicę proporcjonalności. W tym wypadku stosować wzorów *Euler'a* nie należy. Wyboczenie ma charakter mniej lub więcej trwały — po odciążeniu pręt pozostaje wygięty. Liczne doświadczenia *Tetmajer'a* stwierdzają wywoły powyższe. Skrajna wartość  $L : i = \pi \sqrt{E : K_H}$  stanowi zatem granicę stosowalności wzorów *Euler'a*. Z tego wzoru można z niejaką dokładnością wyliczyć  $L : i$ . Dla żelaza zlewnego  $E = 2150000$  kg/cm<sup>2</sup>,  $K_H = 1800$  kg/cm<sup>2</sup>, zatem  $L : i = 108$ . Skoro więc  $L : i \geq 108$ , możemy korzystać ze wzorów *Euler'a*. Mimo to jednak wobec niepewnej wartości  $E_g$  i  $K_{Hg}$ , które właściwie powinniśmy byli brać tutaj pod uwagę, lepiej jest wartość graniczną  $L : i$  wyznaczać doświadczalnie. Według *Tetmajer'a* wynosi ona 100 dla drzewa iglastego, 80 dla żeliwa, 112 dla żelaza zgrzewnego, 105 dla żelaza zlewnego, 90 dla stali zlewnej. Pewniejsze wyniki podaje *Jasiński*: dla żelaza zgrzewnego 114,7 i dla żelaza zlewnego i stali zlewnej 110,1. Z wartości powyższych łatwo możemy wyznaczyć najmniejszą długość  $L_0$  pręta o danym przekroju, zachowującego się według wzorów *Euler'a* przy wyboczeniu. Dla mniejszych długości wzory te dają wyniki nieściśle, a nawet wprost fałszywe, o ile nie weźmiemy pod uwagę dodatkowego wzoru na ściskanie. Tą niedokład-



ność wzorów *Euler'a* starano się usunąć oddawna, budując wzory doświadczalne. Najwięcej miał powodzenia stary

**§ 13. Wzór Navier-Schwarz-Rankine'a.** Stanowi on sztuczne połączenie wzoru *Euler'a* ze zwykłym wzorem ściskania. Oznaczmy przez  $Q$  siłę cisnącą osiową, przez  $F$  przekrój stały pręta, a otrzymamy wzór  $Q = Fk$ , gdzie  $k = k_c : [1 + m(l : i)^2]$ . Dotyczy on prętów, rozpatrywanych w pierwszym wypadku wyboczenia, a więc obustronnie podpartych. Uzasadnienie tego wzoru jest bardzo proste, im bowiem długość pręta  $l$  jest mniejsza, tem chyżej maleje wyraz drugi nawiasu, tem bardziej zbliżamy się do idealnego wypadku ściskania, przy  $l = 0$ , kiedy  $k = k_c$ . Natomiast im  $l$  jest większe, im głębiej wkraczamy w dziedzinę możliwości wyboczenia, tem większą wartość wobec jedności ujawnia wyraz, zawierający współczynnik doświadczalny  $m$ . Przy  $l$  dostatecznie wielkiem możemy pominąć jedynekę, a otrzymamy  $Q = k_c F i^2 : m l^2$ , wzór o postaci wzoru *Euler'owskiego*. Całe to teoretyczne podłoże jest jednak nieco chwiejne i, jak dowiodły doświadczenia *Bach'a*, nawet zgoła błędne, nie można bowiem doświadczalnie wyznaczyć stałej wartości dla  $m$ . Zazwyczaj biorą  $m = 0,00016$  dla żelaza lanego,  $0,00008$  dla żelaza szgrzebnego,  $0,00004$  dla stali miękkiej,  $0,00006$  dla stali twardej i  $0,00015$  dla drzewa iglastego. Obecnie wzór powyższy utracił już swą wartość, utrzymał się jedynie szczątkowo w niektórych naszych fabrykach, dzięki zadawnionym nawyknieniom. Zresztą, *Bach* zaleca nawet jego stosowanie w szczególnym wypadku, kiedy napłask prostopadle do osi średniej pręta obcięte końce obustronnie dotykają cisnących powierzchni.

Dalszy postęp w tym samym kierunku stanowią:

**§ 14. Wzory Tetmajera i Jasińskiego,** wysnute czysto doświadczalnie z dużej ilości spostrzeżeń w ogólnej postaci  $K_W = A + BL : i + CL^2 : i^2$  kg/cm<sup>2</sup>. W tym wzorze  $L$  oznacza długość pręta sprowadzoną. *Tetmajer* podaje dla: 1<sup>o</sup> drzewa iglastego, sosnowego, jodłowego i świerkowego  $K_W = 293 - 1,94 L^2 : i^2$  kg/cm<sup>2</sup>, gdy  $100 \geq L : i \geq 1,8$ , — 2<sup>o</sup> żelwa  $K_W = 7760 - 120 L : i + 0,53 L^2 : i^2$  kg/cm<sup>2</sup>, gdy  $80 \geq L : i \geq 5$ , — 3<sup>o</sup> żelaza szgrzebnego  $K_W = 3030 - 12,9 L : i$  kg/cm<sup>2</sup>, gdy  $112 \geq L : i \geq 10$ , — 4<sup>o</sup> żelaza zlewne  $K_W = 3100 - 11,4 L : i$  kg/cm<sup>2</sup>, gdy  $105 \geq L : i \geq 10$ , — 5<sup>o</sup> stali zlewnej  $K_W = 3350 - 6,4 L : i$  kg/cm<sup>2</sup>, gdy  $90 \geq L : i \geq 10$ . Powyżej skrajnych lewych wartości  $L : i$  należy stosować wzory *Euler'a*, poniżej skrajnych prawych — liczyć pręty, jako ściskane. Wzory powyższe wypełniają lukę pomiędzy tymi dwoma sposobami liczenia. Wadę ich stanowi brak teoretycznego umotywowania, to też w ostatnich czasach podnoszą się przeciwko nim nader ostre zarzuty, dotyczące niedokładności doświadczeń, z których

wysnuto owe wzory. Zwykły to zresztą los wszelkich wzorów doświadczalnych. Starzeją się. Nowe doświadczenia doskonalsze zadają kłam wartościom współczynników.

Tą samą drogą poszedł *Jasiński*; opierając się na doświadczeniach *Bauschinger'a*, *Consideré'a* i *Tetmajer'a*, ustalił nieco inne wzory dla 1° żelaza zgrzewnego  $K_W = 3390,7 - 16,48 L : i$  kg/cm<sup>2</sup> z warunkiem stosowalności  $114,7 \geq L : i \geq 73$ , 2° żelaza zlewego i stali miękkiej  $K_W = 3387 - 14,83 L : i$  kg/cm<sup>2</sup> z warunkiem  $110,1 \geq L : i \geq 58$ . Widzimy tu dość poważne rozbieżności, rzucające cień na wiarygodność powyższych wzorów, to też w ostatnich czasach wzory *Tetmajer'a* są coraz rzadziej używane, zwłaszcza ze względu na trudność użycia. Wzory *Jasińskiego* są pewniejsze, jako zbudowane na większej liczbie danych doświadczalnych.

**§ 15. Dopuszczalne naprężenia prętów ściskanych.** Istotne naprężenia średnie prętów ściskanych muszą być niewątpliwie mniejsze od  $K_W$ , przy którym następuje wyboczenie. *Dopuszczalne naprężenie*  $k_W = K_W : j_W$ , gdzie  $j_W$  oznacza *stopień pewności na wyboczenie*. Dla żelaza zgrzewnego lub zlewego oraz dla stali zlewnej w budowlach niewyszukanych, dla belkowań żelaznych, wiązarów i słupów, bierzemy zwykle  $j_W = 4$ , w budowlach większej wagi  $j_W = 5$ . Dla słupów żeliwnych, odlewanych pionowo  $j_W = 8$ . Dla słupów drewnianych  $j_W = 10$ . W wypadku obciążenia cisnącego powtarzanego, dla prętów silników i pomp bierzemy zazwyczaj  $j_W = 8 \div 11$ , w wypadku obciążenia wahliwego  $j_W = 16 \div 25$ . Pomnóżmy przez stały przekrój pręta tylko co wypisane równanie, a otrzymamy:  $Q = Fk_W = FK_W : j_W = Q_0 : j_W$ . Dopuszczalna siła, cisnąca istotnie na pręt osiowo, winna być  $j_W$  razy mniejsza od siły, dającej wyboczenie pręta. Zazwyczaj siła  $Q$  stanowi daną obciążenia, według niej należy liczyć pręt. Przedewszystkiem należy ustalić rodzaj obciążenia cisnącego, określić, który wypadek wyboczenia najlepiej odpowiada istotnym warunkom pracy pręta. W ten sposób z łatwością wyznaczymy sprowadzoną długość pręta  $L$ . Zaleca się tu ostrożność — nie należy przeceniać rodzaju pracy pręta, a zwłaszcza nie należy zbyt ufać sztywności osadzeń, to też zazwyczaj bierzemy jeno pod uwagę pierwsze dwa wypadki obciążenia. Trzeci i czwarty są nader trudne do urzeczywistnienia, a więc niepewne. Po ustaleniu  $L$  obieramy odpowiednią wartość  $j_W$  i stosujemy wzór *Euler'a* dla siły  $Q_0 = j_W Q$ ,  $j_W$  — krotnie większej od danej. W ten sposób otrzymamy pewność  $j_W$  na wyboczenie, wzór *Euler'a* da najmniejszy moment bezwładności  $J$  stałego przekroju pręta poprzecznego, a według tego momentu i sam przekrój właściwy. Następnie stosujemy wzór  $Q = Fk_c$ , z którego wyznaczamy przekrój pręta poprzeczny. W ogólnym wypadku oba sposoby

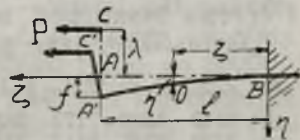


liczenia dają różne wartości dla  $F$ , należy obrać większą i dla niej wyznaczyć  $i = \sqrt{J : F}$  oraz  $L : i$ . Gdy się okaże, iż  $L : i$  przekracza granicę stosowalności wzoru *Euler'a*, trzeba rozpocząć rachunek na nowo, korzystając ze wzorów *Jasińskiego*, lub *Tetmajer'a*. Poniżej podane przykłady najlepiej to uwypuklą.

W ostatnich czasach *Huber*, a zwłaszcza *Kármán* podali inne sposoby rachunku.

**§ 16. Właściwa postać przekroju.** We wszystkich wzorach powyższych  $J$  oznacza najmniejszą wartość momentu bezwładności przekroju, zatem jedynie przekrój obojętny pracuje na wyoboczenie jednakowo we wszystkich kierunkach. Stąd prosty wniosek, że przekrój tego rodzaju stanowi najoszczędniejszą postać przekroju pręta. Z tego względu słupom drewnianym nadajemy zazwyczaj przekrój kwadratowy, żeliwnym pierścieniowy, jako najwygodniejszy w odlewie. Pręty żelazne lub stalowe budujemy o przekroju kołowym pełnym, albo też stosujemy przekroje złożone obojętne. Dawniej używano przeważnie przekroju, złożonego z czterech słupowników (I Rys. 29), okazało się to jednak niepraktyczne wobec niepodobieństwa zabezpieczenia pręta od rdzewienia wewnątrz. Obecnie używane są zazwyczaj przekroje: dwuceownikowe (I Rys. 21, 22, 23), czterokątownikowe (I Rys. 25) lub blachownice.

**§ 17. Przykłady i ćwiczenia:** 1<sup>o</sup> *Dwuteownik*, ustawiony środkiem pionowo zamocowano jednostronnie w  $B$ , drugostronnie sztywnie połączono ze wspornikiem  $AC$  i obciążono w  $C$  siłą poziomą  $P = 2000$  kg. Długość pręta  $l = 4$  m, wspornika  $\lambda = 12$  cm. Jak zwykle początek stałych osi współrzędnych umieszczamy w środku przekroju zamocowanego, oś  $B\xi$  kierujemy po osi pierwotnej pręta,  $B\eta$  w dół,  $B\xi$  ku patrzącemu. Po odkształceniu skrajny przekrój  $A$  obniży się dając strzałkę  $AA' = f$ . Sprowadźmy do środka przekroju  $O(\zeta, \eta)$  siłę  $P$ , w założeniu, że pochylenie wspornika jest nieznaczne i że siła  $P$  nie zmienia swego kierunku działania przy odkształceniu (Rys. 76). Po sprowadzeniu otrzymamy w  $O$  siłę osiową  $P$  i moment gnący  $P(\lambda - f + \eta)$ , a przeto dla pręta o przekroju stałym  $EJ\eta'' = P(\lambda - f + \eta)$ . Całka tego równania  $\eta = f - \lambda + ASin h n \zeta + BCos h n \zeta$  zawiera dwie stałe całkowania, należy je wyznaczyć. Przy  $\zeta = l$  mamy  $\eta = f$ , przy  $\zeta = 0$  mamy  $\eta = \eta' = 0$ . Stąd  $ASin h nl + BCos h nl = \lambda$ ,  $f - \lambda + B = 0$ ,  $nA = 0$ , co daje  $B = \lambda : Cos h nl$ ,  $f = \lambda (1 - 1 : Cos h nl)$  i ostatecznie  $\eta = \lambda (Cos h n \zeta - 1) : Cos h nl$ ,  $\eta' = n \lambda Sin h n \zeta : Cos h nl$ . Wyznaczmy strzałkę końcową pręta i pochylenie skrajnej stycznej jego odkształconej. W tym celu określamy przedewszystkiem właściwe wymiary przekroju poprzecznego pręta, w założeniu żelaza zgrzewnego, jako tworzywa. W wypadku obciążenia trwałego mamy  $k_g = 900$  kg/cm<sup>2</sup> dla tego tworzywa. Skrajna



Rys. 76.

wartość momentu =  $P\lambda$ , gdy  $\eta = f$ , a więc dla przekroju końcowego  $A$ . Wagę własną pręta i wspornika pomijamy, jako zgoła nieznaczną. W przekroju  $A$  panuje zatem naprężenie skrajne  $\sigma_g = P\lambda : W_x + P : F = = 900 \text{ kg/cm}^2 = 2000 \times 12 : W_x + 2000 : F$ . Po kilku próbach przekonamy się, że przekrój dwuteownika № 10 czyni zadość temu równaniu, mamy bowiem  $W_x = 34,1 \text{ cm}^3$ ,  $F = 10,6 \text{ cm}^2$ . Istotnie wtedy  $\sigma_g = = 2000 \times 12 : 34,1 + 2000 : 10,6 = 892 \text{ kg/cm}^2$ . Metr bieżący tego profilu waży 8,33 kg, możemy zatem śmiało pominąć wagę własną ustroju. Po ustaleniu przekroju pręta wyznaczamy  $n^2 = P : EJ_x$ . Dla dwuteownika № 10 mamy z tablic  $J_x = 170 \text{ cm}^4$ , dla żelaza zgrzewnego  $E = = 2000000 \text{ kg/cm}^2$ , skąd  $n = 1 : 412,31$  oraz  $nl = 400 : 412,31 = 0,970$ . Z kolei mamy  $\text{Cos } hnl = 1,5085$ ,  $\text{Sin } hnl = 1,1294$ , a przeto ostatecznie  $f = 12 (1 - 1 : 1,5085) = 4,04 \text{ cm}$ ,  $\theta = 12 \times 1,1294 : (412,31 \times 1,5085) = = 0,02179 \approx 1^{\circ},25$ . Istotnie więc wygięcie jest bardzo małe.

2° *Stójka* obustronnie podparta, ulega jarzmu sił osiowych cisnących, jak w wypadku pierwszym wybočenja. Jej stały przekrój kołowy ma średnicę  $d$  cm stałą dla całej długości  $L$  cm pręta. Zatem  $i = d : 4$ . Graniczną długość dla żelaza zlewego otrzymamy, pisząc  $L_0 = 110,1 i \approx \approx 27,5 d$  cm. Dłuższe pręty zachowują się przy wyboczeniu według wzoru *Euler'a*, krótsze według wzoru *Jasińskiego*. Dla pierwszych  $Q_0 = = K_W F = \pi^2 EJ : L^2$ , dla drugich  $Q^2 = K_W F = [3387 - 14,83 L : i] F$  kg, gdzie  $F = \pi d^2 : 4 \text{ cm}^2$ .

Gdy dany jest przekrój  $F$  i długość pręta  $L$ , możemy wyznaczyć z tych wzorów siłę  $Q_0$ , powodującą wybočenje. Najprościej możemy to skutecznie za pomocą tablicy, dającej  $K_W \text{ kg/cm}^2$  dla różnych tworzyw i różnych stosunków  $L : i$ . Początkowe jej kolumny pod znakiem № zawierają szereg wartości  $L : i$ , kolumny następne dają odnośne wartości  $K_W \text{ kg/cm}^2$  dla żelaza zlewego i stali zlewnej (Ż. S.), dla żelaza zgrzewnego (Ż. Z.), żeliwa (Ż. L.) i drzewa iglastego (D. I.). Dla żeliwa i drzewa brano pod uwagę wzory *Tetmajer'a*, dla tworzyw pozostałych — *Jasińskiego*, jako pewniejsze.

№	Ż. S.	Ż. Z.	Ż. L.	D. I.	№	Ż. S.	Ż. Z.	Ż. L.	D. I.	№	Ż. S.	Ż. Z.	Ż. L.	D. I.
5	3313	3308	7173	283	90	2052	1907	1218	118	175	695	645	322	32
10	3239	3246	6613	274	95	1978	1825	1094	109	180	657	609	304	30
15	3165	3144	6079	264	100	1904	1743	937	99	185	622	577	288	29
20	3090	3061	5572	254	105	1830	1660	895	90	190	589	547	273	27
25	3016	2979	5091	244	110	1756	1578	816	82	195	560	519	260	26
30	2942	2895	4637	235	115	1609	1493	746	75	200	532	493	247	25
35	2868	2814	4209	225	120	1478	1371	686	69	205	507	469	235	23,5
40	2794	2732	3808	216	125	1362	1263	632	63	210	483	447	224	22,5
45	2720	2649	3433	206	130	1259	1168	584	58	215	460	426	214	21
50	2645	2567	3085	196	135	1168	1083	542	54	220	440	407	201	20
55	2571	2484	2763	186	140	1086	1007	504	50	225	420	389	195	19,5
60	2497	2402	2468	177	145	1012	939	470	47	230	402	372	187	19
65	2423	2319	2199	167	150	946	877	439	44	235	385	356	179	18
70	2349	2237	1957	157	155	886	822	411	41	240	369	341	171	17
75	2275	2155	1741	147	160	831	771	386	38	245	355	329	165	16,5
80	2201	2072	1552	138	165	782	725	363	36	250	340	307	158	16
85	2126	1990	1366	128	170	736	683	342	34					
№	Ż. S.	Ż. Z.	Ż. L.	D. I.	№	Ż. S.	Ż. Z.	Ż. L.	D. I.	№	Ż. S.	Ż. Z.	Ż. L.	D. I.



Założmy, dajmy na to,  $d = 8$  cm oraz  $L = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450$  i  $500$  cm. Zatem  $F = 50$  cm<sup>2</sup>,  $i = d : 4$ ,  $L : i = = \frac{1}{2} L$ , odnośnie przeto wartości  $K_H = 3016, 2645, 2275, 1904, 1362, 946, 695, 532, 420$  i  $340$  otrzymamy z tablicy. Stąd bezpośrednio  $Q_0 = = 150800, 132250, 113750, 95200, 68100, 47300, 34750, 26600, 21000, 17000$  kg. Zestawmy wyniki otrzymane w postaci wykresu. Na osi odciętych odłożmy wartości  $N = L : i$ , a prostopadle do nich odnośne wartości  $Q_0$ . Początkowo linja wykresu będzie biegła po prostej aż do granicznej wartości  $L_0 : i$ . Wymaga tego wzór *Jasińskiego*, linjowy względem  $L : i$ . Dalej otrzymamy krzywą drugiego stopnia, odpowiadającą dziedzinie stosowności wzoru *Euler'a*. W ten sposób za pomocą wzorów lub powyższej tablicy możemy zawsze wyznaczyć siłę  $Q_0$ , grożącą wyoboczeniem. Będziemy mogli przeto wyznaczyć obciążenie dopuszczalne pręta  $Q = Q_0 : j_W$ , założywszy odnośną wartość  $j_W$ .

Inaczej rzecz się ma, gdy dano  $l$  cm, pierwotną długość pręta, oraz  $Q$  kg jego obciążenie istotne. Szukamy średnicy stójki. W tym celu należy przedewszystkiem uwzględnić wzór zwykłego ściskania. Założmy  $Q = 20000$  kg  $= 20$  t, oraz kolejno  $L = 50, 100, 150, 200$  i  $250$  cm. Dla żelaza zlewego  $E = 2150000$  kg/cm<sup>2</sup>  $k_c = 900 \div 1200$  kg/cm<sup>2</sup>  $\approx \approx 1000$  kg/cm<sup>2</sup>, zatem niezależnie zupełnie od długości będziemy mieli  $F_0 = Q : k_c = 20$  cm<sup>2</sup>. Stąd  $d_0 \approx 5$  cm. Z kolei należy uwzględnić wzór *Euler'a* dla powyżej wymienionych długości pręta. W założeniu czterokrotnej pewności mamy  $Q_0 = j_W Q = 80000 = \pi^2 E J : L^2$ . Stąd otrzymamy odpowiednio  $J = 9, 37, 83, 148, 231$ , oraz  $d = 3,7 - 5,3 - 6,4 - 7,4 - 8,3$ . Pierwsza wartość dla pręta półmetrowego, jako mniejsza od  $d_0 = 5$  cm powinna być odrzucona. Ostatecznie więc po uwzględnieniu wzorów ściskania i wyoboczenia *Euler'owskich* otrzymamy średnice  $d = 5,0 - 5,3 - 6,4 - 7,4 - 8,3$  cm przy  $L = 50 - 100 - 150 - 200 - 250$  cm. Odnośnie wartości  $L : i = 4$   $L : d = 40 - 75 - 94 - 108 - 120$  Stąd wnioskujemy, że cztery pierwsze wypadki wymagają raczej rachunku według wzoru *Jasińskiego* — ostatni jest policzony bez zarzutu. Zaczniemy od pierwszego, gdzie  $L = 50$  cm. Weźmy na chybi trafi  $L : i = 30$ . Dla tej wartości  $F = 80000 : K_W = 80000 : 2942 = 27,2$  cm<sup>2</sup>, stąd  $d = 5,9$  cm,  $i = 5,9 : 4 = 1,445$  cm i ostatecznie  $L : i = 50 : 1,475 = 34 \neq 30$ . Wobec tej sprzeczności założmy  $L : i = = 40$ , a otrzymamy kolejno  $F = 80000 : 2794 = 28,6$  cm<sup>2</sup>,  $d = 6,05$ ,  $i = 1,51$  cm,  $L : i = 50 : 1,51 = 33 \neq 40$ . Należy przeto wziąć  $L : i \approx \approx 35$ , a wtedy  $F = 80000 : 2868 = 27,9$  cm<sup>2</sup>,  $d = 6,0$  cm,  $i = 1,5$  cm,  $L : i = 50 : 1,5 = 33,3$ . Ta wartość zbliża się do założonej w sposób zupełnie wystarczający. Tak samo, po kilku próbach otrzymamy dla następnej długości  $L = 100$  cm,  $L : i = 60$ ,  $F = 80000 : 2497 = 32,0$  cm<sup>2</sup>,  $d = 6,4$  cm,  $i = 1,6$  cm,  $L : i = 100 : 1,6 = 62$  z przybliżeniem wystarczającym. Z kolei mamy dla  $L = 150$  cm po kilku próbach  $L : i = 85$ ,  $F = 80000 : 2126 = 37,6$  cm<sup>2</sup>,  $d = 6,9$  cm  $\approx 7$  cm,  $i = 1,75$  cm,  $L : i = 150 : 1,75 = 85,6$ . Wreszcie dla  $L = 200$  cm,  $L : i = 105$ ,  $F = = 80000 : 1830 = 43,7$  cm<sup>2</sup>,  $d = 7,5$  cm,  $i = 1,89$  cm,  $L : i = 200 : : 1,89 = 106$ . Ostatecznie mamy więc  $d = 6,0 - 6,4 - 7,0 - 7,5 - - 8,3$  cm gdy  $L = 50 - 100 - 150 - 200 - 250$  cm. Nadto  $d = 5$  cm

stosuje się do wypadku zwykłego ściskania, przy nieznacznym  $L$ . Trudno wskazać istotną wartość tej krytycznej długości. Według *Tetmajera* będzie to przy  $L : i \leq 10$ . Tutaj  $i = 1,25$  cm, zatem krytyczna długość  $L = 12,5$  cm.

3° *Słup* o stałym pierścieniowym przekroju żeliwny, zamocowano u dołu i obciążono u góry siłą osiową  $Q = 10000$  kg, cisnącą. Swobodna długość dręta  $l = 4$  m. Jako dla drugiego wypadku wybożenia  $L = 2l = 800$  cm. Dla żeliwa  $E = 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>,  $j_W = 8$ , a przeto  $Q_0 = j_W Q = 80000 = \pi^2 \times 1000000 \times J : 640000$ . Stąd  $J = 5120$  cm<sup>4</sup>. Po kilku próbach obierzemy średnicę zewnętrzną przekroju  $D = 20$  cm, wewnętrzną  $d = 15$  cm. Moment bezwładności będzie tu  $J = 7854 - 2485 = 5369$  cm<sup>4</sup>, pole  $F = 314,2 - 176,7 = 137,5$  cm<sup>2</sup>, a przeto  $i = 6,25$  cm, oraz  $L : i = 800 : 6,25 = 128$ . Mieliśmy prawo stosować wzór *Euler'a*; otrzymany przekrój istotnie odpowiada wymaganiom.

Założmy z kolei, że  $Q = 50000$  kg,  $l = 1$  m. Stąd  $L = 200$  cm,  $Q_0 = 400000$  kg =  $\pi^2 \times 1000000 \times J : 40000$ . Zatem  $J = 1600$  cm<sup>4</sup>. Po kilku próbach otrzymamy  $D = 15$  cm,  $d = 11,5$  cm. Dla tego przekroju  $J = 2485 - 859 = 1626$  cm<sup>4</sup>,  $F = 176,7 - 103,9 = 72,8$  cm<sup>2</sup>,  $i = 4,72$ ,  $L : i = 200 : 4,72 = 42,4$ . Tutaj nie można używać wzoru *Euler'a*, ponieważ otrzymana wartość jest mniejsza od granicznej  $L_0 : i = 80$ . Założymy najbliższą wartość tabliczną  $L : i = 40$ . Dla niej  $K_W = 3808$ , oraz  $Q_0 : K_W = 400000 : 3808 = 105,0$  cm<sup>2</sup>. Po kilku próbach otrzymamy  $D = 16$  cm,  $d = 11$  cm. Dla tego przekroju  $J = 3217 - 718,7 = 2498,3$  cm<sup>4</sup>,  $F = 201,1 - 95,0 = 106,1$  cm<sup>2</sup>;  $i = 4,85$  cm,  $L : i = 200 : 4,85 = 41$ . Wyznaczony przekrój odpowiada warunkom istotnym.

4° *Dyla* kwadratowy sosnowy zamocowano u dołu. Górny podparty przekrój dyla ulega jarzmu siły osiowej  $Q = 1500$  kg cisnącej. Swobodna długość pręta  $l = 3$  m. Tutaj niewątpliwie zachodzi trzeci wypadek wybożenia, zatem  $L = 0,7 l = 210$  cm. Dla sośniny  $E \approx 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>,  $j_W = 10$ , a przeto:  $15000 = \pi^2 \times 100000 \times J : 210^2$ . Stąd  $J = 661,5$  cm<sup>4</sup> =  $\frac{1}{12} c^4$ , gdzie przez  $c$  oznaczyliśmy bok kwadratowego przekroju  $c = 9,4$  cm. Najbliższy wymiar dyla kwadratowego  $10 \times 10$  cm. Dla niego  $i^2 = \frac{1}{12} c^4 : c^2$ , czyli  $i = 2,89$  cm. Ponieważ jednak  $L : i = 210 : 2,89 \approx 73$  leży poniżej granicznej wartości, przeto należy wziąć pod uwagę wzór *Tetmajer'a*. Założymy  $L : i = 70$ , a otrzymamy  $K_W = 157$  kg/cm<sup>2</sup>, skąd  $F = 15000 : 157 = 95,5$  cm<sup>2</sup> =  $c^2$ . Stąd  $c = 9,8$  cm  $\approx 10$  cm. Z kolei założymy  $L : i = 75$ , a otrzymamy  $K_W = 147$ ,  $F = 15000 : 147 = 102,0$  cm<sup>2</sup> =  $c^2$ . I znowu  $c = 10,1$  cm  $\approx 10$  cm, dla którego, jak wyżej,  $L : i = 73$ . Zatem należy wziąć bal  $10 \times 10$  cm.

5° *Dwuteownik* żelazny zgrzewny obustronnie przynitowano w sposób rzeczywistniający praktycznie osadzenie obu końców pręta i obciążono siłami osiowymi cisnącemi  $Q = 40000$  kg. Jako dla czwartego wypadku wybożenia  $L = 0,5 l$ . Założymy  $l = 40, 400, 760$  cm,  $j_W = 4$ . W pierwszym wypadku  $L = 20$  cm. Jest to niezwykle mała nośna dłu-



gość pręta. Nasuwa to myśl, że pręt pracuje tylko na ściskanie. Istotnie tak jest. Dla żelaza zgrzewnego, w wypadku trwałego obciążenia  $k_c = 900 \text{ kg/cm}^2$ , zatem  $F = 40000 : 900 = 44,4 \text{ cm}^2$ . Dwuteownik zwykły № 24 ma  $F = 46,1 \text{ cm}^2$ ,  $J_{min} = 220 \text{ cm}^4$ , a zatem  $i = \sqrt{220 : 46,1} = 2,18 \text{ cm}$ . Wzory *Tetmajer'a* dają niższą granicę  $L : i = 10$  dla żelaza zgrzewnego. Poniżej pręty można liczyć na zwykłe ściskanie. W danym wypadku  $L : i = 20 : 2,18 = 9,1$ . Pręt jest policzony dobrze.

Z kolei bierzemy  $l = 400 \text{ cm}$  czyli  $L = 200 \text{ cm}$ . Ze wzoru *Euler'a* mamy  $Q_0 = j_W Q = 160000 = \pi^2 \times E \times J : L^2$ . Tutaj  $E = 2000000 \text{ kg/cm}$ , a przeto  $J = 320 \text{ cm}^4$ . Ta wartość odpowiada dwuteownikowi № 27, dla którego  $J_{min} = 325 \text{ cm}^4$ ,  $F = 57,1 \text{ cm}^2$ . A przeto  $i = 2,39 \text{ cm}$ ,  $L : i = 200 : 2,39 = 83,7$ , należy więc użyć wzoru *Jasińskiego*. Po kilku próbach otrzymamy dla  $L : i = 75$  z tablicy wyżej zamieszczonej  $K_W = 2155 \text{ kg/cm}^2$ . Zatem  $F = 160000 : 2155 = 74,2 \text{ cm}^2$ . Ta wartość odpowiada dwuteownikowi № 32, dla którego  $J_{min} = 554 \text{ cm}^4$ ,  $F = 77,7 \text{ cm}^2$ ,  $i = 2,67 \text{ cm}$ . Stąd  $L : i = 200 : 2,67 = 75$ .

Pozostaje nam jeszcze rozpatrzyć trzecie założenie  $l = 760 \text{ cm}$  czyli  $L = 380 \text{ cm}$ . Ze wzoru *Euler'a* mamy:  $160000 = \pi^2 \times 2000000 \times J : 380^2$ , skąd  $J = 1155 \text{ cm}^4$ . Tej wartości odpowiada dwuteownik № 40, dla którego  $J_{min} = 1160 \text{ cm}^4$ ,  $F = 118 \text{ cm}^2$ ,  $i = 3,13 \text{ cm}$ . W danym wypadku  $L : i = 380 : 3,13 = 121 > 114,7$ , zatem pręt policzony dobrze, aczkolwiek we wszystkich trzech tylko co rozpatrywanych wypadkach otrzymujemy bardzo znaczne wymiary przekroju. Pochodzi to stąd, że dwuteownik nie należy do przekrojów obojętnych — nie nadaje się przeto w wypadku pracy na wyboczenie.

5<sup>o</sup> *Stup* o przekroju dwuceownikowym, żelazny zlewny oparto obustronnie i obciążono siłą  $Q = 20 \text{ t}$  osiową cisnącą u góry. Wyznaczyć przekrój (I, Rys. 20) w założeniu długości  $l = 5 \text{ m}$ . Stosunkowo niewielkie różnice, jakie każdorazowo otrzymywaliśmy powyżej przy stosowaniu wzorów *Euler'a* i *Jasińskiego* naprowadziły na myśl praktyczną, aby ujednostajnić obliczenie prętów na wyboczenie, zwłaszcza, że liczenie podług wzorów *Tetmajer'a* i *Jasińskiego*, nawet przy pomocy tablicy — do przyjemności nie należy. W tym celu odrzucamy zupełnie oba wzory doświadczalne, pozostawiając jedynie wzory na wyboczenie i ściskanie. We wzorze *Euler'a* wzmacniamy  $j_W$  do 5 dla żelaza zlewego. W ten sposób będziemy mieli  $Q = \pi^2 \times 2150000 \times J : [5 l^2]$ . Stąd  $J = 2,357 Q l^2 \text{ cm}^4$ , o ile wyrazimy  $Q$  siłę nośną w tonnach, a długość  $l$  — w metrach. Nadto  $Q = F k_c$ . Zazwyczaj  $k_c = 1200 \text{ kg/cm}^2$ , a przeto  $F = Q : 1,2 \text{ cm}^2$ , gdzie znowu  $Q$  mamy w tonnach. Tutaj więc  $J = 2,357 \times 20 \times 25 = 1178 \text{ cm}^4$ ,  $F = 20 : 1,2 = 16,7 \text{ cm}^2$ . W założeniu przekroju dwuceownikowego obojętnego,  $J = 2 J_{xc}$ , zatem dla ceownika składowego otrzymamy  $J_{xc} = 589 \text{ cm}^4$ . Tej wartości odpowiada ceownik № 14. Dla niego  $J_{xc} = 605 \text{ cm}^4$ ,  $F = 20,4 \text{ cm}^2$ , a przeto drugi wzór możemy śmiało pominąć. Należy jeszcze tylko określić rozstawienie  $x$  ceowników, z warunku równości obu głównych momentów złożonego przekroju. Tablice dają  $x_c = 1,75 \text{ cm}$ ,  $J_y = 62,7 \text{ cm}^4$ , a przeto  $2 J_{xc} = 2 J_{yc} + 2 F (x_c +$

+  $\frac{1}{2} x)^2$ . skąd  $x = 6,81 \text{ cm} \approx 6,8 \text{ cm}$ . W razie zachowania tego rozstawienia oba główne momenty złożonego przekroju  $J_x = J_y = 1210 \text{ cm}^4$ .

Założmy teraz  $Q = 49 \text{ ton}$ ,  $l = 3 \text{ m}$ . W tym wypadku  $J = 2,357 \times 49 \times 9 = 1039 \text{ cm}^4$ ,  $F = 49 : 1,2 = 40,8 \text{ cm}^2$ . Wystarczy więc ten sam № 14 — liczony jednak na zwykłe ściskanie. Założmy jeszcze  $Q = 90 \text{ t}$ ,  $l = 3 \text{ m}$ , a otrzymamy  $J = 1909 \text{ cm}^4$ ,  $F = 75 \text{ cm}^2$ . Podług  $J$  wystarczy z nadmiarem przekrój dwuceownikowy № 18, natomiast według  $F$  wystarczający przekrój otrzymamy aż przy № 22. Użyjemy więc № 22, jako sowitszy.

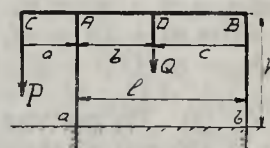
W ten sposób wyznaczamy przekroje prętów złożonych. Składowe pręty należy dobrze ze sobą powiązać, aby otrzymać spoiłą całość wewnętrzną. Inaczej pręt złożony rozpadnie się na poszczególne pręty składowe, a cały rachunek powyższy zawiedzie. W danym wypadku dosyć jest zczepić ceowniki blachami bocznymi ustawionymi jak na (Rys. 23) w pewnych odstępach. Wyznamy owe odstępki  $\lambda$ , rozpatrując każdy ceownik składowy, jako pręt obustronnie podparty, a narażony na wyboczenie siłą  $\mu Q$ . W danym wypadku przekrój składa się z dwóch ceowników, ustawionych symetrycznie względem środka, możemy zatem założyć  $\mu = \frac{1}{2}$ , bo siła osiowa  $Q$  powinna chyba rozłożyć się na oba pręty składowe jednakowo. W istocie jednak tak nie jest. Drobne krzywizny, niedokładności budowy i montażu dają mimośrodkowość obciążenia. Jeden ceownik pracuje znacznie więcej. Który — nie wiemy, mimo to jednak chcemy to wziąć w rachubę — docenić, dając dużą wartość dla  $j'_W$  przy obliczeniu zazwyczaj czterokrotnie większą od tej pewności, z jaką liczyliśmy przekrój złożony. Zatem  $\mu Q j'_W = \pi^2 E J' : \lambda^2$ , skąd  $\lambda^2 = \pi^2 E J' : \mu Q j'_W$ . W tym wzorze  $J'$  oznacza najmniejszy moment bezwładności pręta składowego. Wyżej liczyliśmy z  $j_W = 5$ , zatem tu  $j'_W = 5 \times 4 = 20$  i ostatecznie  $\lambda = \sqrt{1030 J' : \mu Q} \approx \sqrt{1000 J' : \mu Q}$ , o ile w tym ostatnim wzorze wyrazimy  $Q$  w tonnach. Powyżej mieliśmy  $Q = 20 \text{ t}$ ,  $\mu = \frac{1}{2}$ ,  $J' = J_{yc} = 62,7 \text{ cm}^4$ , a przeto  $\lambda = \sqrt{6270} \approx 80 \text{ cm}$ .

7° *Słup* o przekroju czworokątnikowym kwadratowym (I. Rys. 25) dźwiga obciążenie osiowe ciskające  $Q = 45000 \text{ kg} = 45 \text{ t}$ . Bok kwadratu  $H = 20 \text{ cm}$ , wysokość słupa obustronnie wspartego  $l = 4 \text{ m}$ . Mamy tu przeto pierwszy wypadek wyboczenia. Według powyższych wzorów  $J = 2,357 \times 45 \times 16 = 1697 \text{ cm}^4$ ,  $F = 45 : 1,2 = 37,5 \text{ cm}^2$ . Po kilku próbach przekonamy się, że drugiemu równaniu czynią zadość cztery kątowniki  $L 70 \times 70 \times 7 \text{ m/m}$ , dla których  $F = 4 \times 9,4 = 37,6 \text{ cm}^2$ . Dla nich  $J_{xc} = 42,3 \text{ cm}^4$ ,  $x_c = 1,97 \text{ cm}$ , a przeto  $J = 4 J_{xc} + 4 F_c (\frac{1}{2} H - x_c)^2 = 4 [42,3 + 9,4 (10 - 1,97)^2] = 2594 \text{ cm}^4$ . Tutaj więc słup należy liczyć jeno na ściskanie. I w danym wypadku cztery kątowniki naróżnie muszą być powiązane w pewnych odstępach poprzecznymi wzmocnieniami, owijającemi słup w postaci równoległych kwadratowych obrączek. Wyznamy rozstawienie wzmocnień. W danym wypadku  $J' = J_{min} = 17,6 \text{ cm}^4$ ,  $\mu = \frac{1}{4}$ , a przeto  $\lambda \leq \sqrt{1000 \times 17,6 : \frac{1}{4} 45} \approx 40 \text{ cm}$ .

Ten sam przekrój otrzymalibyśmy, lecz już ze wzoru *Euler'a*, gdybyśmy mieli  $Q = 11 \text{ t}$  i  $l = 10 \text{ m}$ .



8<sup>o</sup> *Dwuteownik* szerokopasowy leży na dwóch słupach zamocowanych u podnóży i dźwiga dwie siły, rozłożone w sposób wskazany na (Rys. 77). Wyznamy obciążenia słupów  $Aa$  i  $Bb$ . Będą to zarazem odpory dwuteownika górnego, wzięte ze znakiem odwrotnym. Równanie statyki dla punktu  $B$  dadzą  $A + B + P + Q + O, P(l + a) + Al + Qc = O$ . Stąd mamy:  $A = -[P(a + l) + Qc] : l, B = +[Pa + Q(c - l)] : l$ . Zatem słup lewy dźwiga  $[P(a + l) + Qc] : l$  kg, prawy  $[Q(l - c) - Pa] : l$  kg. Aby w obu słupach panowało naprężenie cisnące, musimy mieć  $P > O, Q > O$ , oraz  $Q(l - c) - Pa > O$ , jak zwykle bowiem siły, skierowane w dół, znakujemy dodatnio. Oznaczmy wysokość obu słupów nieodkształconych przez  $h$ . Pod jarzmem sił cisnących  $A, B$  na słupy, długości ich skrócą się odpowiednio o  $Ah : E_1 F_1, Bh : E_2 F_2$ , na tle zwykłego ściskania. Nadto oba słupy pracują na wyboczenie. Załóżmy, że cały ustrój wykonano z żelaza zlewne. Lewy słup należy przeto liczyć podług wzoru  $J_1 = 2,357 A \times L^2$ , lub też według  $F_1 = A : 1,2$ , prawy podług  $J_2 = 2,357 B \times L^2$ , lub  $F_2 = B : 1,2$ , gdzie niewątpliwie  $L = 2h$ , jako dla słupów swobodnych, jednostronnie zamocowanych. Zatem, gdy słupy będą liczone na ściskanie, z pominięciem wzorów wyboczenia, będziemy mieli  $A : F_1 = B : F_2 = 1,2$ . W tym szczególnym wypadku skrócenia obu słupów będą niewątpliwie jednakowe, ponieważ  $E_1 = E_2$  przy jednakowym tworzywie ustroju.



Rys. 77.

Natomiast skrócenia owe w ogólnym wypadku będą niejednakowe, gdy jeden ze słupów lub oba wypadnie liczyć na wyboczenie z pominięciem wzorów zwykłego ściskania. Wynika to bezpośrednio ze wzorów powyżej wypisanych.

9<sup>o</sup> *Pręt* sumiennie wyprostowany osadzono sprężystie u dołu (Rys. 72), u góry sprężystie podparto i obciążono siłą osiową  $Q$ , cisnącą równoległe do średniej osi pręta. We środku przekroju osadczego dolnego umieścimy początek osi współrzędnych  $B$ . Oś  $B\xi$  ułożymy ku górze na osi średniej pręta, oś  $B\eta$  poprowadzimy na lewo, oś  $B\xi$  — ku patrzącemu. Odpór poziomy górnej sprężystej podpory oznaczamy przez  $A$ , dolnej przez  $B = -A$ . Nadto odpór pionowy dolnej podpory niech będzie  $H = -Q$ , moment osadczy  $M_0$ . Wszystkie te odpory wywołują przesunięcia sprężyste podpór. Wobec powiązania układu osi z prętem, będziemy rozpatrywali jeno przesunięcia względne, sam bowiem układ przesuwa się wraz z prętem. Jak zwykle oś  $B\eta$  ułożyliśmy w głównej płaszczyźnie pręta jednorodnie zbudowanego, przynależnej do najmniejszej wartości momentu bezwładności stałego przekroju. Po odkształceniu środek górnego przekroju da na tej płaszczyźnie rzut  $A(l, g)$  a punkt przyłożenia siły  $Q$  da  $N(l, e + g)$ . Wobec sprężystości podpory górnej rzut  $g$  jest zmienny, zależy bowiem od natężenia odporu  $A$ . Załóżmy, że  $g = g_0$ , gdy  $A = O$ , a wtedy niewątpliwie  $g = g_0 - aA$ , gdzie  $a$  oznacza odnośny współczynnik proporcjonalności dla podpory wzorowo sprężystej. W podobny sposób dojdziemy do wniosku, że kąt  $\theta$  pochylecia odkształconej pręta ku osi  $B\xi$  w przekroju osadczym zależy od momentu  $M_B$ , panującego w tem miejscu. Gdy  $M_B = O$ , mamy  $\theta = \theta_0$ ,

zatem oznaczając odnośny współczynnik proporcjonalności przez  $m$ , będziemy mieli dla podpory wzorowo sprężystej  $\Theta = \Theta_0 - m M_B$ , gdzie  $M_B = Q(e+g) + Al$ . W danym wypadku równanie gięcia będzie  $EJ\eta'' = Q(e+g-\eta) + A(l-\zeta)$ . Jego całka  $\eta = e+g+A(l-\zeta) : Q + C \sin n\zeta + D \cos n\zeta$  zawiera trzy niewiadome  $A, C, D$ , które wyznaczymy z warunków skrajnych zamocowania pręta. Gdy  $\zeta = l$ , mamy  $\eta = g$ , nadto  $\eta = 0, \eta' = \Theta$ , gdy  $\zeta = 0$ . Stąd będziemy mieli:  $g = e+g + C \sin nl + D \cos nl, e+g+Al : Q + D = 0, -A : Q + nC = \Theta = \Theta_0 - m[Q(e+g)+Al]$ . Z ostatniego równania  $C = [\Theta_0 - mQ(e+g_0) + A(1 : Q - ml + maQ)] : n$ , z drugiego  $D = -e - g_0 + A(a - l : Q)$ . Po podstawieniu tych wartości w pierwsze otrzymamy równanie, z którego wyznaczymy niewiadomą  $A$  w postaci ilorazu  $R : T$ . Mianownik tego ilorazu będzie  $T = [(1 - mlQ + maQ^2) \sin nl + (aQ - l)n \cos nl] : nQ$ . Łatwo spostrzec, że wyboczenie pręta zachodzi może jeno wówczas, gdy  $T = 0$ , wtedy bowiem  $A = \infty$ , a co idzie za tem i  $\eta = \infty$ . Ten warunek daje nam  $\operatorname{ctg} nl = 1 : (l - aQ) - mQ$ , wzór, odpowiadający *Euler'owskiemu*, a wyprowadzony dla trzeciego wypadku wyboczenia w założeniu podpór pręta wzorowo sprężystych. Możemy zresztą z tego wzoru otrzymać wprost wzory *Euler'a*. Będzie to rodzaj sprawdzenia rachunku powyższego. Założmy  $a = 0$  i  $m = \infty$  — podparcie górne będzie zupełnie niesprężyste — u dołu będziemy mieli  $M_B = 0$  — przegub pokrętny — swobodny. Słowem otrzymamy pierwszy wypadek wyboczenia. Czyniąc w powyższym wzorze  $a = 0$  i  $m = \infty$ , otrzymamy  $\operatorname{ctg} nl = -\infty$ , skąd  $\sin nl = 0, nl = \pi$ , odnajdujemy przeto pierwszy wzór *Euler'a*, wobec tego, że  $n = Q : EJ$ . W drugim wypadku wyboczenia górny koniec pręta jest swobodny, dolny trwale zamocowany, zatem  $A = 0$ , czyli  $a = \infty$  oraz  $m = 0$ . Po podstawieniu tych wartości we wzór powyższy otrzymamy  $\operatorname{ctg} nl = 0$ , skąd  $\cos nl = 0, nl = \frac{1}{2} \pi$  i ostatecznie  $Q = \pi^2 EJ : 4 l^2$ , otrzymamy drugi wzór *Euler'a*. Wzór dla trzeciego wypadku również odnajdziemy z łatwością z powyższego równania, biorąc  $a = m = 0$ , wtedy bowiem  $n \operatorname{ctg} nl = 1$ , skąd  $n^2 l^2 \approx 2 \pi^2$ , jak to już zresztą wiemy oddawna.

10<sup>o</sup> *Słup wspornikowy* (Rys. 74) dźwiga ciężar dachu, jest więc u góry obciążony siłą osiową  $Q = 8000$  kg, cisnącą. Nadto przez pośrednictwo wspornika w odległości  $g = 50$  cm działa siła równoległa do poprzedniej — ciężar stropu  $P = 16000$  kg. Cała wysokość słupa od przekroju osadczego wynosi  $L = 9$  m, wspornik zamocowano na wysokości  $l = 6$  m, mamy więc ponad wspornikiem u góry jeszcze trzy metry słupa, słowem  $\lambda = L - l = 3$  m. W założeniu pewności  $j_W = 5$  będziemy mieli obciążenie niebezpieczne  $Q_0 = j_W Q = 40000$  kg,  $R_0 = j_W(Q + P) = 120000$  kg, a nadto  $r = P_0 : Q_0 = j_W P : j_W Q = 2, n^2 = Q_0 : EJ_1, m^2 = (P_0 + Q_0) : EJ_2 = R_0 : EJ_2$ . Wzór wyboczenia złożonego będzie tu  $\operatorname{tg} n\lambda \operatorname{tg} ml = n(1+r) : m = 3n : m$ .

W założeniu stałego przekroju słupa będziemy mieli  $n^2 = Q_0 : EJ, m^2 = R_0 : EJ = Q_0(1+r) : EJ = 3n^2$ . Na zasadzie powyżej wypisanych wartości mamy  $l = 2\lambda$ , a przeto  $ml = 2\sqrt{3}n\lambda = 2\sqrt{3}x$ . Stąd bezpośrednio  $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} (2\sqrt{3}x) = 3 : \sqrt{3} = \sqrt{3} = 1,7321$ . Po kilku pró-



bach otrzymamy wystarczająco ścisły pierwiastek tego równania  $x = 22^{\circ}9' = 22^{\circ}$ ,  $15 = 22^{\circ}$ ,  $15 \pi : 180^{\circ} = 0,386 = n$   $= 300\sqrt{40000} : 2150000 J$ .  
 Zatem  $J = 11240 \text{ cm}^4$ . W założeniu obojętnego przekroju (I, Rys. 20), złożonego z dwóch ceowników, otrzymamy ceownik № 28, jako dostateczny, jego bowiem  $J_x = 6276$ , a przeto dla całego przekroju  $J = 2J_x = 12552 \text{ cm}^4$ . Nadto jeszcze górną część pręta ponad wspornikiem należy sprawdzić na ściskanie, dolną na gięcie mimośrodkowe. Zatem dla części górnej musi być  $Q : F \leq k_c$ , dla dolnej  $(P + Q) : F + P \times g : W \leq k_g$ . Dla obranego przekroju tablice dają  $F = 2 \times 53,3 = 106,6 \text{ cm}^2$ ,  $W = 2 \times 450 = 900 \text{ cm}^3$ , stąd  $Q : F = 8000 : 106,6 = 75 \text{ kg/cm}$  oraz  $(P + Q) : F + P_g : W = 24000 : 106,6 + 16000 \times 50 : 900 = 1113 \text{ kg/cm}^2$ . Ta ostatnia wartość jest nieco zbyt wysoka, lepiej przeto wziąć przekrój dwuceownikowy, złożony z ceowników № 30. W ten sposób górna część pręta jest wytrzymałościowo nie wyzyskana, lepiej przeto zbudować słup wspornikowy o dwóch przekrojach, stałych dla obu pości zmienności momentów.

We wszystkich prostych wypadkach wyboczenia iloczyn  $nl$  stanowi miarę pracy na wyboczenie. W pierwszym  $nl = \pi$ , w drugim  $nl = \frac{1}{2} \pi$ , w trzecim  $nl = 1,4303 \pi$ , w czwartym  $nl = 2 \pi$ . Zatem dwa pręty pracują na wyboczenie jednakowo, gdy odnośne wartości  $nl$  tych prętów są sobie równe. I w danym wypadku przeto słup wspornikowy będzie w swych obu częściach pracował na wyboczenie jednakowo, gdy założymy  $n\lambda = m\lambda$ . Stąd  $n : m = l : \lambda = 2$ , a przeto oznaczywszy  $n\lambda = m\lambda = x$ , będziemy mieli z równania zasadniczego  $tg^2 x = 2(1 + 2) = 6$ , czyli  $tg x = \sqrt{6} = 2,4495$ . Stąd  $x = 67^{\circ}50' \approx 67^{\circ},8 = 67,8 \pi : 180 = 213 : 180 = 1,183 = n\lambda = m\lambda$ . Inaczej jeszcze  $300\sqrt{40000} : 2150000 J_1 = 600\sqrt{120000} : 2150000 J_2 = 1,183$ , co da  $J_1 = 1197 \text{ cm}^4$ ,  $J_2 = 14360 \text{ cm}^4$ . W założeniu przekrojów dwuceownikowych otrzymamy z tablic dla górnej pości ceowniki № 14, dla dolnej № 30. Istotnie dla № 14 mamy  $J_x = 605 \text{ cm}^4$  zatem dla całego przekroju złożonego otrzymamy  $J = 2J_x = 1210 \text{ cm}^4$ . Dla № 30 mamy  $J_x = 8026 \text{ cm}^4$ , a przeto  $J = 2J_x = 16052 \text{ cm}^4$ . Oba przekroje policzono z zapasem. Nadto jeszcze górną część pręta należy sprawdzić na ściskanie, dolną na gięcie mimośrodkowe. Dla górnej  $Q : F_1 = 8000 : [2 \times 20,4] = 196 \text{ kg/cm}^2$ , dla dolnej  $(Q + P) : F_2 + P \times g : W_2 = 24000 : (2 \times 58,8) + 16000 \times 50 : (2 \times 535) = 951 \text{ kg/cm}^2$ . Zazwyczaj dla żelaza zlewnego naprężenie dopuszczalne  $k_g = 1000 \text{ kg/cm}^2$ , zatem oba powyższe wyniki są dostateczne. Godzi się zaznaczyć, że cały rachunek powyższy dotyczy również wypadku, gdy  $g = 0$  — wypadku podwójnego wyboczenia pręta jednostronnie osadzonego, zresztą swobodnego.

WARSZAWA 1918.

L. KARASIŃSKI





## SPIS RZECZY.

### CZĘŚĆ PIERWSZA: NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA.

#### Rozdział pierwszy: Ustalenie pojęć zasadniczych.

	<i>Str</i>
§ 1. Nauka o wytrzymałości tworzyw . . . . .	3
§ 2. Odkształcenia ciał stałych . . . . .	3
§ 3. Odkształcenia sprężyste i trwałe . . . . .	5
§ 4. Wyznaczanie naprężeń ciała obciążonego . . . . .	6
§ 5. Naprężenia przekrojów płaskich ciała odkształconego .	10
§ 6. Wyznaczanie naprężeń jednostkowych przekroju płaskiego ciała jednorodnego . . . . .	12
§ 7. Przykłady i ćwiczenia . . . . .	17

#### Rozdział drugi: Momenty przekrojów płaskich.

§ 1. Wyznaczanie momentów przekrojów płaskich . . . . .	19
§ 2. Osie środkowe przekroju . . . . .	20
§ 3. Osie główne przekroju . . . . .	21
§ 4. Środkowa elipsa przekroju . . . . .	23
§ 5. Wykres Mohr'a . . . . .	26
§ 6. Moment biegunowy przekroju . . . . .	28
§ 7. Osie mimośrodkowe . . . . .	28
§ 8. Punkty obojętne przekroju . . . . .	29
§ 9. Momenty przekrojów wypukłych . . . . .	30
§ 10. Momenty przekrojów rzutowanych . . . . .	31
§ 11. Przykłady i ćwiczenia . . . . .	31

### CZĘŚĆ PIĄTA: ZGINANIE.

#### Rozdział pierwszy: Naprężenia gnące.

§ 1. Wyznaczanie składowych naprężeń jednostkowych . .	1
§ 2. Badanie rozkładu naprężeń gnących . . . . .	2
§ 3. Linja obojętna . . . . .	4
§ 4. Obciążenia mimośrodkowe . . . . .	6
§ 5. Środek naprężeń . . . . .	7
§ 6. Rdzeń przekroju . . . . .	8
§ 7. Wyznaczanie skrajnych naprężeń normalnych przekroju za pomocą rdzenia . . . . .	17
§ 8. Przykłady i ćwiczenia . . . . .	19

#### Rozdział drugi: Odkształcenia gnące.

§ 1. Odkształcenia gnące płytki . . . . .	25
§ 2. Gięcie mimośrodkowe . . . . .	29

	<i>Str.</i>
§ 3. Gięcie właściwe . . . . .	32
§ 4. Odkształcenia gnące prętów prostych . . . . .	34
§ 5. Wygięcie płaskie pręta prostego . . . . .	35
§ 6. Wskaźnik wytrzymałościowy . . . . .	36
§ 7. Wygięcie Lamarle'a. . . . .	38
§ 8. Obciążenia gnące . . . . .	39
§ 9. Pręt osadzony jednym końcem, u drugiego obciążony siłą gnącą	39
§ 10. Pręt osadzony jednym końcem, a obciążony jednostajnie . . . . .	41
§ 11. Pręt stałej wytrzymałości jednostronnie osadzony . . . . .	42
§ 12. Obciążenie trójkątne pręta jednostronnie osadzonego . . . . .	43
§ 13. Pręt zamocowany jednostronnie częściowo obciążony. . . . .	44
§ 14. Zasada niezależności działania sił w wytrzymałości tworzyw. . . . .	45
§ 15. Drugie prawo Roberta Hooke'a . . . . .	45
§ 16. Pręt jednostronnie osadzony, obciążenie złożone . . . . .	45
§ 17. Pręt wyginany ukośnie . . . . .	47
§ 18. Pręt jednostronnie osadzony, a obciążony ukośnie. . . . .	47
§ 19. Współczynniki rozciągliwości i ściśliwości przy wy- ginaniu . . . . .	48
§ 20. Przekrój niejednolity. . . . .	51
§ 21. Naprężenia, leżące w przekroju poprzecznym pręta zginanego . . . . .	51
§ 22. Przykłady i ćwiczenia . . . . .	53

### **Rozdział trzeci: Belki proste zginane.**

§ 1. Podpory i odpory . . . . .	57
§ 2. Rodzaje podpór . . . . .	58
§ 3. Belka na dwóch podporach. . . . .	59
§ 4. Obciążenie siłą skupioną, działającą pomiędzy podporami . . . . .	59
§ 5. Obciążenie jednostajne częściowe . . . . .	60
§ 6. Obciążenie siłą zewnętrzną. . . . .	62
§ 7. Obciążenie jednostajne zewnętrzne . . . . .	62
§ 8. Obciążenie jednostajne pręta obustronnie zwisającego . . . . .	63
§ 9. Obustronne obciążenie jednostajne . . . . .	65
§ 10. Obustronne obciążenie siłami skupionymi zewnętrznymi . . . . .	66
§ 11. Belka na dwóch podporach, statycznie niewyznaczalna. . . . .	67
§ 12. Obciążenie ciągłe. . . . .	68
§ 13. Obciążenie siłą skupioną . . . . .	68
§ 14. Belki wieloprzęsłowe . . . . .	69
§ 15. Belka dwuprzęsłowa. . . . .	70
§ 17. Zastosowanie zasady niezależności działania sił do obliczania belek wieloprzęsłowych . . . . .	71
§ 18. Belka trójprzęsłowa . . . . .	73
§ 19. Prawo znakowania wzoru dla gięcia właściwego płaskiego	74
§ 20. Zależność między siłą tnącą, a momentem gnącym przekroju . . . . .	75



	<i>Str.</i>
§ 21. Zależność między obciążeniem jednostkowym a siłą tnącą przekroju . . . . .	77
§ 22. Równania różniczkowe odkształconej . . . . .	77
§ 23. Sposób rachunkowo wykreślny wyznaczania strzałek i kątów pochylenia stycznych odkształconej. . . . .	79
§ 24. Pręt osadzony jednostronnie . . . . .	80
§ 25. Belka jednoprzęsłowa, obciążona momentem gnącym ponad podporą . . . . .	81
§ 26. Belka jednoprzęsłowa, obciążona siłą skupioną . . . . .	81
§ 27. Belka dwuprzęsłowa, obciążona siłą skupioną . . . . .	82
§ 28. Belki o zmiennym przekroju poprzecznym . . . . .	83
§ 29. Belka jednoprzęsłowa o zmiennym przekroju poprzecznym . . . . .	85
§ 30. Twierdzenie o trzech momentach . . . . .	86
§ 31. Całkowe równanie odkształconej . . . . .	87
§ 32. Belka osadzona jednostronnie . . . . .	89
§ 33. Belka osadzona obustronnie . . . . .	90
§ 34. Belka jednoprzęsłowa . . . . .	93
§ 35. Belki wieloprzęsłowe . . . . .	93
§ 36. Wzór Clapeyron'a . . . . .	96
§ 37. Belka dwuprzęsłowa . . . . .	97
§ 38. Belka trójprzęsłowa . . . . .	97
§ 39. Twierdzenie o dwóch momentach. . . . .	98
§ 40. Belka czteroprzęsłowa . . . . .	99
§ 41. Belka na podłożu sprężystym . . . . .	101
§ 42. Belka podwalinowa . . . . .	102
§ 43. Podkład kolejowy . . . . .	103
§ 44. Obciążenie skupione . . . . .	104
§ 45. Podpory sprężyste i sztywne . . . . .	105
§ 46. Belki na podporach wzorowo sprężystych statycznie wyznaczalne . . . . .	106
§ 47. Belka statycznie wyznaczalna na dwóch podporach wzorowo sprężystych . . . . .	107
§ 48. Belki statycznie niewyznaczalne . . . . .	108
§ 49. Belka trójprzęsłowa na podporach wzorowo sprężystych . . . . .	108
§ 50. Twierdzenie o pięciu momentach . . . . .	109
§ 51. Belka dwuprzęsłowa na podporach wzorowo sprężystych . . . . .	110
§ 52. Belki na wielu podporach wzorowo sprężystych równoodległych . . . . .	111
§ 53. Belka jednoprzęsłowa na dwóch podporach wzorowo sprężystych stałych . . . . .	112
§ 54. Ramownica . . . . .	113
§ 55. Ramownica mostowa . . . . .	114
§ 56. Przykłady i ćwiczenia . . . . .	116

#### **Rozdział czwarty: Belki proste zginane mimośrodowo.**

§ 1. Równanie odkształconej . . . . .	123
§ 2. Belka osadzona jednostronnie . . . . .	124

	<i>Str.</i>
§ 3. Belka jednoprzęsłowa, statycznie wyznaczalna . . . . .	125
§ 4. Istota zjawisk wyboczenia . . . . .	127
§ 5. Pierwszy rodzaj wyboczenia . . . . .	129
§ 6. Drugi wypadek wyboczenia . . . . .	130
§ 7. Trzeci wypadek wyboczenia . . . . .	131
§ 8. Czwarty wypadek wyboczenia . . . . .	132
§ 9. Wzory Euler'a . . . . .	134
§ 10. Słup wspornikowy . . . . .	134
§ 11. Stójka wspornikowa. . . . .	136
§ 12. Zakres stosowalności wzorów Euler'a . . . . .	137
§ 13. Wzór Navier-Schwarz-Rankine'a . . . . .	139
§ 14. Wzory Tetmajera i Jasińskiego . . . . .	139
§ 15. Dopuszczalne naprężenia prętów ściskanych. . . . .	140
§ 16. Właściwa postać przekroju . . . . .	141
§ 17. Przykłady i ćwiczenia . . . . .	141

SPROSTOWANIE: W części piątej na str. 96 w trzecim wierszu od dołu zamiast  $+c_0^2$  winno być  $-c_0^2$ . Na str. 97 w drugim wierszu od góry zamiast  $+\partial_0^2$  winno być  $-\partial_0^2$ .

