



Podstawy elektrotechniki

ułożyli prof. M. Pożaryski i inż. elek. W. Hryszkiewicz.

I. Teoria wektorów.*)

1. *Wektor i jego rzuty.* Pojęcie, stanowiące skojarzenie wartości liczbowej dodatniej z określonym kierunkiem, nazywamy wektorem. Wielkość liczbową związaną z pojęciem wektora nazywa się wartością lub natężeniem wektora; wielkość ta posiada swój wymiar. Wektory oznaczamy przy pomocy dużych liter np. A, B, i t. d. Rzuty wektora na trzy osie prostopadłe do siebie określają wartość wektora A i jego kierunek:

$$(1) \begin{cases} A_x = A \cos (A_x) \\ A_y = A \cos (A_y) \\ A_z = A \cos (A_z) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \cos (A_x) = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \\ \cos (A_y) = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \\ \cos (A_z) = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \end{cases}$$

$$(3) \quad \{ A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Jeżeli rzuty dwóch wektorów A i B mają wartości proporcjonalne ze zgodnemi znakami:

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$$

to wektory te mają zgodne kierunki i zwroty

2. *Suma wektorów.* Wektory sumują się geometrycznie, ich rzuty — algebraicznie

$$(4) \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

*) Według Zarysu teorii wektorów Dr. W. Pogorzelskiego.

$$(5) \quad \begin{cases} R_x = A_x + B_x + C_x + D_x \\ R_y = A_y + B_y + C_y + D_y \\ R_z = A_z + B_z + C_z + D_z \end{cases}$$

Różnicę wektora A i wektora B stanowi wektor C:
 $A = B + C$, czyli $C = A - B$;

$$(6) \quad \begin{cases} C_x = A_x - B_x \\ C_y = A_y - B_y \\ C_z = A_z - B_z \end{cases}$$

3. *Iloczyn skalara przez wektor.* Iloczyn skalara k przez wektor A nazywamy wektor B, którego natężenie równa się kA , zaś zwrot jest zgodny lub przeciwny względem zwrotu wektora A, zależnie od tego czy skalar k jest dodatni czy też ujemny, $B = kA$; rzuty iloczynu wyrażają się wzorami:

$$(7) \quad \begin{cases} B_x = kA_x \\ B_y = kA_y \\ B_z = kA_z \end{cases}$$

Iloraz wektora A przez skalar k uważamy za identyczny z iloczynem tego wektora przez odwrotność skalaru k :

$$(8) \quad \frac{A}{k} = \frac{1}{k} \cdot A, \text{ przyczem } k \neq 0.$$

Do iloczynu skalara przez sumę wektorów stosuje się prawo rozdzielności: $k(A + B) = kA + kB$.

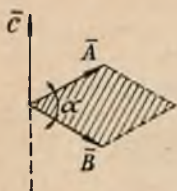
4. *Iloczyn skalarny dwóch wektorów.* Iloczynem skalarnym wektora A przez wektor B nazywamy wielkość skalarną równą iloczynowi natężenia wektora A przez wartość rzutu nań wektora B, czyli $AB = AB \cos \alpha$ Rys 1.; jest to skalar. Wartość iloczynu skalarnego nie zależy od porządku czynników $AB = BA$; iloczyn skalarny dwóch wektorów równa się sumie iloczynów wartości rzutów tych wektorów na osie prostokątne:



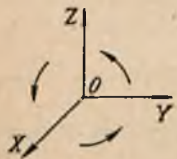
Rys. 1.

$$AB = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

5. *Iloczyn wektorowy dwóch wektorów.* Iloczynem wektorowym wektora A przez wektor B nazywamy taki wektor C, który



Rys. 2.



Rys. 3.

jest prostopadły jednocześnie do dwóch tych wektorów i którego natężenie równa się $AB \sin \alpha$, t. j. powierzchni równoległoboku zbudowanego na wektorach A i B. Rys. 2. Wektor C posiada taki zwrot, że względem obserwatora patrzącego w kierunku wektora C, obrót pierwszego wektora t. j. A do drugiego B, o kąt mniejszy od 180° odbywa się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Iloczyn wektorowy oznacza się: $C = [A, B]$; zmiana porządku czynników zmienia znak iloczynu: $[B, A] = -[A, B]$; $[kA, B] = k[A, B]$; składowe iloczynu wektorowego (Rys. 3):

$$(9) \quad \begin{cases} C_x = [A, B]_x = A_y B_z - A_z B_y \\ C_y = [A, B]_y = A_z B_x - A_x B_z \\ C_z = [A, B]_z = A_x B_y - A_y B_x \end{cases}$$

Do mnożenia wektorowego wektora przez sumę wektorów stosuje się prawo rozdzielności:

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$$

7. *Działania złożone.* Iloczyn skalarny wektora C przez iloczyn wektorowy $[A, B]$

$$[A, B] C = [B, C] A = [C, A] B = \begin{vmatrix} A_x A_y A_z \\ B_x B_y B_z \\ C_x C_y C_z \end{vmatrix};$$

Iloczyn wektorowy C przez iloczyn wektorowy $[A, B]$ $[C, [A, B]] = (BC) A - (AC) B$, gdzie $(BC) A$ i $(AC) B$ są wektorami o zwrocie zgodnym lub przeciwnym do A i B.

Iloczyn skalarny iloczynów wektorowych $[A, B] \cdot [C, D] = = (AC) \cdot (BD) - (AD) \cdot (BC)$; jest to równość skalarna.

7. *Pochodna wektora.* Jeżeli wektor A (t) jest funkcją zmiennej (t), przyczem $A_x(t)$, $A_y(t)$, $A_z(t)$, są oznaczonymi funkcjami, to pochodna jest wektorem i charakteryzuje zmianę wektora pod względem wartości i kierunku; składowe pochodnej wektora są skalarnymi pochodnymi jego składowych, t. j.

$$\frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt};$$

Pochodne wyrażeń wektorowych posiadają własności analogiczne do zwykłych pochodnych, a więc pochodna sumy wektorów $A + B$ jest sumą pochodnych tych wektorów:

$$\frac{d}{dt}(A+B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt};$$

Jeżeli skalar k i wektor A są funkcjami (t) , to

$$\frac{d(kA)}{dt} = k \frac{dA}{dt} + \frac{dk}{dt} A;$$

jest to suma wektorowa, zaś $\frac{dk}{dt}$ jest pochodną skalarną.

Pochodna iloczynu skalarnego :

$$\frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{dt};$$

pochodne są wektorami; wzór jest sumą algebraiczną iloczynów skalarnych.

Pochodna iloczynu wektorowego :

$$\frac{d}{dt}[A, B] = \left[\frac{dA}{dt}, B \right] + \left[A, \frac{dB}{dt} \right];$$

tu pochodne oraz suma są pojęte wektorowo.

8. *Pole wektorowe.* Jeżeli każdemu punktowi przestrzeni podporządkowany jest oznaczony wektor R , to zbiór tych wektorów tworzy tak zwane pole wektorowe. Pole jest określone jeśli składowe wektora R są znanymi funkcjami punktu (xyz) : $R_x(xyz)$; $R_y(xyz)$; $R_z(xyz)$. Linjami pola R są linie w przestrzeni, których styczne w dowolnym punkcie mają kierunek zgodny z kierunkiem R .

9. *Całka linjowa wektora.* W danem polu wektorowym rozważamy ciągły łuk AB dowolnej krzywej. $R_l = R \cos \varphi$ jest wartością rzutu wektora R na styczną do krzywej w pewnym

punkcie. Wyrażenie : $\int_0^L R_l dl$ nazywamy całką linjową wektora

R wzdłuż łuku AB i oznaczamy : $\int_{AB} R_l dl$; zależy od rodzaju krzywej i przyjętego zwrotu dla całkowania :

$$\int_{AB} R_l dl = - \int_{BA} R_l dl$$

Określenie powyższe stosuje się również do obwodów zamkniętych z oznaczonym kierunkiem krążenia.

10. *Całka powierzchniowa.* W polu wektorowym rozważamy dowolną powierzchnię dwustronną; S jest częścią tej powierzchni, ograniczoną krzywą; dla normalnych M_n w punktach M przyjmujemy za dodatnie zwroty związane z jedną stroną powierzchni;

$R_n = R \cos \varphi$; $R_n = R_x \cos \alpha + R_y \cos \beta + R_z \cos \gamma$,
gdzie α , β i γ kąty które tworzy dodatni zwrot M_n z osiami xyz .

$$\lim \sum_i R_n \Delta s_i = \iint_S R_n d s = \\ = \iint_S (R_x \cos \alpha + R_y \cos \beta + R_z \cos \gamma) d s$$

Całką powierzchniową lub strumieniem wektora R przez powierzchnię S nazywamy granicę do której dąży suma iloczynów $R_n \Delta s_i$ gdy cząstki powierzchni Δs_i dążą do zera.

11. *Gradient skalara.* Jeżeli każdemu punktowi przestrzeni odpowiada skalarna funkcja $\varphi (xyz)$, to wektor R o składowych

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

nazywamy gradientem skalara φ i oznaczamy: $R = \text{grad } \varphi$; natężenie gradienta wyraża się wzorem:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2};$$

Zbiór punktów w przestrzeni, dla których skalar $\varphi (xyz)$ przybiera tę samą wartość C tworzy pewną powierzchnię S o równaniu $\varphi (xyz) = C$ wtedy różniczki dx , dy , dz współrzędnych punktu (xyz) dowolnej krzywej K , nakreślonej na powierzchni S spełniają równanie:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0$$

stąd wniosek, że wektor o składowych

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

czyli $\text{grad } \varphi$ jest prostopadły do wektora o składowych dx

dy dz który ma kierunek stycznej do linii K , czyli linie pola, wektora $\text{grad } \varphi$ są ortogonalne do układu powierzchni $\varphi = \text{const.}$

12. *Pole potencjalne.* Jeżeli w całej przestrzeni lub też tylko w jej części (Ω) rzuty wektora R dają się przedstawić jako pochodne pewnej funkcji $\varphi(xyz)$ to funkcję tę nazywamy potencjałem pola a samo pole — potencjalnem w obszarze (Ω).

Całka linjowa w polu potencjalnem równa się różnicy wartości potencjału pola na końcach drogi całkowania, niezależnie od jej kształtu:

$$\int_{AB} R_t \, dl = \varphi(B) - \varphi(A).$$

13. *Potencjał Newtona.* Natężenie pola w dowolnym punkcie A jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości punktu A od pewnego stałego punktu M i jest skierowane wzdłuż promieni wodzących.

$$r = MA; R = \frac{m}{r^2}; R = \frac{m}{r^3} r;$$

Składowe wektora R w punkcie (xyz)

$$R_x = \frac{mx}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m}{r} \right);$$

$$R_y = \frac{my}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{m}{r} \right);$$

$$R_z = \frac{mz}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{m}{r} \right);$$

Pole posiada potencjał $\varphi = m/r$;

14. *Twierdzenie Gaussa.* Otoczmy źródło punktowe o wydajności $4\pi m$ dowolną powierzchnią zamkniętą S , której element ds znajduje się na odległości r od źródła, a kąt pomiędzy promieniem r , a normalną do ds , jest α , tak że $d\omega = \frac{\cos \alpha \, ds}{r^2}$, wtedy strumień pola R przez powierzchnię zamkniętą S będzie:

$$\iint_S R_n \, ds = m \int d\omega = 4\pi m \quad \text{twierdzenie Gaussa.}$$

Strumień pola R przez zamkniętą powierzchnię obejmującą k źródeł punktowych:

$$\iint_S R_n ds = 4\pi \sum_1^k m_i;$$

Ponieważ,

$$R_n = - \left\{ \cos(n,x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos(n,y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \cos(n,z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} = - \frac{\partial \varphi}{\partial n};$$

gdzie przez $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ należy rozumieć pochodną potencjału wzdłuż normalnej w rozważanym punkcie, twierdzenie Gaussa może być napisane w innej postaci:

$$\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = -4\pi \sum_i m_i;$$

15. *Twierdzenie Greena i rozbieżność pola.* Całka powierzchniowa $\iint_S R_n ds$ wektora R przez powierzchnię zamkniętą S może być wyrażona przez całkę potrójną, rozciągniętą na obszar D objęty powierzchnią S .

$$\iint_S R_n ds = \iiint_{(D)} \left(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \right) dx dy dz;$$

Funkcja, występująca pod znakiem całki potrójnej jest skalarem, utworzonym z pochodnych składowych wektora, zwanego rozbieżnością (divergence) danego wektora R w danym punkcie (xyz) ; oznaczamy ją symbolem $\text{div } R$

$$\text{div } R = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}$$

Twierdzenie Greena wyraża więc, że strumień wektora R przez dowolną powierzchnię S , obejmującą obszar (D) równa się całce potrójnej rozbieżności tego wektora R , rozciągniętej na obszar (D) .

$$\iint_S R_n ds = \iiint_{(D)} \operatorname{div} R dv; \quad dv = dx dy dz;$$

przyczem normalna zwrócona jest nazewnątrż powierzchni.

Skalar $\operatorname{div} R$ w danym punkcie pola $A(xyz)$ jest granicą stosunku strumienia wektora R przez powierzchnię S , otaczającą punkt A do objętości Δv obszaru zamkniętego powierzchnią S , gdy rozległość tej powierzchni dąży do zera:

$$\operatorname{div} R = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\iint_S R_n ds}{\Delta v}$$

Pojęcie $\operatorname{div} R$ jest charakterystyczne dla pola wektorowego, gdyż wartość tego skalaru w dowolnym punkcie pola nie zależy od obranego układu współrzędnych.

Twierdzenie Greena dla pola potencjonalnego:

$$\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \iiint_{\Delta} \Delta^2 \varphi dv;$$

gdzie

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

nazywa się *l a p l a s j a n e m* funkcji φ i jest wynikiem operacji div (grad φ) = $\Delta^2 \varphi$.

16. *Twierdzenie Stokes'a i pojęcie wiru.* Całka linjowa wektora R po obwodzie zamkniętym C może być wyrażona w postaci strumienia pewnego wektora przez dowolną powierzchnię S przesuniętą przez dany obwód zamknięty C .

$$\int_C R_i dl = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right\} ds;$$

wyrażenie pod znakiem całki podwójnej jest rzutem na normalną pewnego wektora W o składowych

$$W_x = \frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z}; \quad W_y = \frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x}; \quad W_z = \frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y}.$$

Wektor W pochodzący od wektora R nazywamy *wirem* tego wektora i oznaczamy $W = \text{rot. } R$ lub też $\text{curl } R$ (w/g Heaviside'a).

Twierdzenie powyższe w postaci wektorowej:

$$\int_C R_l dl = \int \int_S \text{rot}_n R ds ;$$

Całka linjowa danego wektora R , po obwodzie zamkniętym, równa się strumieniowi wiru tego wektora przez powierzchnię S przesuniętą przez dany obwód. Wektor $\text{rot } R$ jest określony w każdym punkcie danej przestrzeni i tworzy nowe pole wektorowe; składowe wektora $\text{rot } R$ oznaczamy jak następuje:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}_x R = \frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} \\ \text{rot}_y R = \frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} \\ \text{rot}_z R = \frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \end{array} \right. \quad \text{rot}_n R = \lim_C \frac{\int_C R_l dl}{\Delta s}$$

Wartość składowej normalnej w punkcie M powierzchni S wektora $\text{rot } R$ jest granicą, do której dąży stosunek całki linjowej wektora R po obwodzie C , obejmującym punkt M do powierzchni Δs objętej przez ten obwód, gdy długość obwodu C zdąża do zera. Z tej własności wynika, iż wektor $W = \text{rot } R$, otrzymany przez operacje powyższe nie zależy od wybranego układu współrzędnych (xyz).

17. *Wnioski z twierdzeń poprzednich:* Rozbieżność wiru każdego wektora równa się zeru we wszystkich punktach danej przestrzeni: $\text{div } (\text{rot } R) = 0$.

Strumień wiru przez powierzchnię zamkniętą równa się zawsze zeru:

$$\int \int_S \text{rot}_n R ds = \int \int \int_{(D)} \text{div } (\text{rot } R) dv = 0 .$$

Gdy pole wektorów R posiada potencjał w obszarze (Ω) to w każdym punkcie tego obszaru wir wektora R równa się zeru:

$$\text{rot} (\text{grad } \varphi) = 0.$$

$$\text{rot} (\text{rot } R) = \text{grad} (\text{div } R) - \Delta^2 R;$$

$$\text{div} [A, B] = B, \text{rot } A - A, \text{rot } B;$$

$$\text{rot} (\varphi A) = \varphi \text{rot } A + [\text{grad } \varphi, A].$$

II. Pole elektryczne.

1. *Ogólne własności pola elektrycznego* *). Działanie pola elektrycznego ujawnia się przez siły mechaniczne, wywierane na ładunki elektryczne umieszczone w polu. Siła F wywierana na ładunek Q przez pole elektryczne o natężeniu K wyraża się wzorem:

$$(1) \quad F = Q K$$

Przy przesuwaniu ładunku Q na drodze l wykonaną zostaje praca:

$$(2) \quad A = Q U,$$

gdzie

$$(3) \quad U = \int_0^l K_l dl.$$

Wogóle wyrażenia (2) i (3) zależą od drogi całkowania, jednak w polu elektrostatycznym całka linjowa natężenia pola nie zależy od drogi całkowania i jest równa różnicy potencjałów na końcu i na początku drogi.

2. *Pole elektrostatyczne*. Każdy punkt w polu elektrostatycznym posiada jednoznacznie określony potencjał V . Zasadnicze własności pola elektrostatycznego:

$$(4) \quad K = - \text{grad } V$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \int_{AA} K_l dl = 0 & \text{wyrażenie całkowe Gauss} \\ \text{rot } K = 0 & \text{wyrażenie różniczkowe Maxwell.} \end{array} \right.$$

Rozkład potencjałów w polu uzmysławiają powierzchnie ekwipotencjalne, oraz linje pola, które są styczne do kierunku siły F wywieranej na dodatni ładunek umieszczony w polu.

Linje pola mają kierunek od przewodnika z potencjałem wyższym do przewodnika o potencjale niższym.

*) Wszystkie wzory fizyczne wyrażają zależność pomiędzy wielkościami i stanowią równania pomiędzy liczbami wyrażającymi wartość tych wielkości w pewnych miarach.

Przewodniki umieszczone w polu są wewnątrz pozbawione pola. Powierzchnie przewodników stanowią powierzchnie ekwipotencjalne.

Twierdzenie Gaussa: strumień przez powierzchnię zamkniętą, pochodzący od ładunków znajdujących się zewnątrz tej powierzchni równy jest zeru:

$$(6) \quad \oint_S K_n ds = 0 \quad \text{i} \quad \Delta^2 V = 0$$

W ośrodku jednorodnym o stałej dielektrycznej ϵ indukcja elektryczna D wynosi

$$(7) \quad D = \epsilon K$$

Wielkość $\frac{D}{4\pi}$ stanowi przesunięcie elektryczne (Maxwell).

Stała dielektryczna jest wielkością fizyczną, posiada wymiar. Stała dielektryczna względna ϵ jest liczbą oderwaną:

$$(8) \quad \epsilon = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0},$$

gdzie ϵ_1 — dotyczy pewnego ośrodka, ϵ_0 — dla próżni.

Tablica stałych dielektrycznych względnych:

Dielektryk	ϵ	Dielektryk	ϵ
Alkohol	15—32	Nafta	2,0—2,2
Asfalt	2,5	Olej parafinowy . .	1,9—2,5
Bakelit	4,5	„ rycynowy . . .	4,7—4,9
Benzyzna	1,9	„ transformatorowy	2,2—2,5
Bursztyn	2,2—2,9	Oliwa	3,0
Cellon (jasny) . . .	3,5	Papier używ. do izol.	1,8—2,6
Ebonit	2,0—3,0	Papier impregn., prze-	
Guma czysta	2,1	tłuszczony . . .	3,0—4,0
Guma wulkanizowana	2,7	Parafina	2,0—2,3
Gutaperka	2,8—4,2	Pertinax	4,8
Juta	4,3	Porcelana	4,4—5,3
Kwarc (równoległe do		Powietrze 760 mm, 0°	1,0006
osi głównej) . . .	4,3—4,6	Siarka	2,4
Lód	2,0—3,0	Szelak	2,6—3,7
Marmur	8,3	Szkło	2,0—10,0
Mika	4,0—8,0	Terpentyna	2,2—2,6
Mikanit	4,5—5,5	Woda dystylowana .	80

Całka powierzchniowa wektora D na powierzchni zamkniętej S jest równa sumie ładunków objętych tą powierzchnią:

$$(9) \quad \iint_S D_n ds = 4\pi \sum_i Q_i = 4\pi \iiint_D \rho dv$$

gdzie ρ jest gęstością objętościową ładunku.

W polu z objętościowo rozłożonymi ładunkami

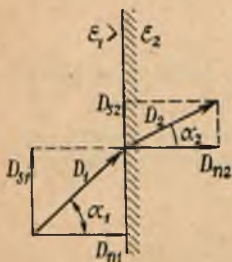
$$(10) \quad \text{div } D = 4\pi\rho$$

W polu bezźródłowym

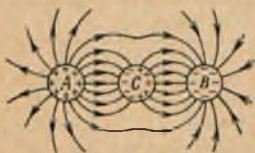
$$(11) \quad \text{div } D = 0$$

W polu bezźródłowym i przy założeniu $\epsilon = \text{const.}$

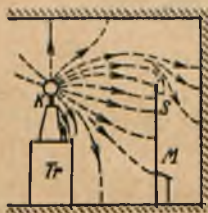
$$(12) \quad \text{div } K = 0; \quad \text{div grad } V = 0$$



Rys. 4.



Rys. 5.



Rys. 6.

Na granicy dwu dielektryków, Rys. 4, posiadających różne stałe dielektryczne ϵ_1 oraz ϵ_2 , linie indukcji doznają załamania; składowe normalne są sobie równe $D_{n1} = D_{n2}$; składowe styczne są proporcjonalne do stałych dielektrycznych.

$$\frac{D_{s1}}{D_{s2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2}$$

Rys. 5. Jeżeli przewodnik C był nieładowany przed wprowadzeniem do pola wytworzonego przez ładunki znajdujące się na A i B , to suma ładunków dodatnich i ujemnych na C jest równa 0. Zjawisko zmiany rozkładu pola elektrycznego wskutek wprowadzenia do pola przewodników bywa wykorzystane w praktyce w postaci t. zw. osłony elektrostatycznej. Na rys. 6. T — transformator wysokiego napięcia, K — elektroda, S — siatka osłonna.

Za siatką osłonną praktycznie nie ma pola elektrycznego.

3. Sposób analityczny wyznaczenia układu sił w polu elektrycznym.

a) Ładunek Q jest równomiernie rozłożony na bardzo cienkim i długim drucie o długości l . Natężenie pola w odległości a od tego drutu wynosi:

$$K = \frac{1}{\epsilon} \frac{2Q}{al}$$

i ma kierunek prostopadły do tego drutu.

b) Ładunek Q jest równomiernie rozłożony na powierzchni kuli o promieniu r . Natężenie pola w odległości a od środka kuli wynosi:

$$K = \frac{1}{\epsilon} \frac{Q}{a^2}; \text{ przy } a \geq r$$

i ma kierunek promienia.

c) Ładunek Q jest równomiernie rozłożony na powierzchni cylindrycznej, o dowolnym promieniu i o długości l ; natężenie pola ma kierunek normalny do powierzchni i wartość jak w przypadku (a) przy $a > r$.

d) W punkcie znajdującym się nieskończenie blisko powierzchni z równomiernie rozłożonym ładunkiem o gęstości powierzchniowej σ , natężenie pola wynosi

$$K = \frac{1}{\epsilon} 4\pi\sigma$$

Potencjał w dowolnym punkcie pola oblicza się ze wzoru

$$V = - \int K_l dl$$

Stała dowolna przy całkowaniu może otrzymać określoną wartość, gdy znany jest potencjał w jakimkolwiek innym punkcie pola.

W przypadkach bardziej skomplikowanych *) rozkład sił w polu elektrycznym można wyznaczyć, wychodząc z równania Laplace'a:

$$\text{div grad } V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Równanie to posiada nieskończenie wiele rozwiązań; aby je zcałkować dla określonego przypadku, należy wyszukać taką

*) dla pól bez ładunków przestrzennych.

postać rozwiązania która spełni warunki graniczne danego zadania; np. pole jednowymiarowe (kondensator płaski), pochodne w kierunkach osi y oraz z są zerami; wtedy $\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$; całka ogólna tego równania

$V = k_1 + k_2 x$, gdzie k_1 i k_2 są stałymi całkowania; natężenie pola ma kierunek osi x i posiada wartość:

$$[K] = k_2$$

Pole dwu wymiarowe:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Równanie to spełnia każda funkcja zmiennej zespolonej, $f(x + jy)$. Funkcja ta może być przekształcona według wzoru: $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$, gdzie u i v są funkcjami rzeczywistymi zmiennych x i y , każda z tych funkcji spełnia równanie różniczkowe. Jeżeli przyjmiemy: $f(x + jy) = c(x + jy)^2$, to $u(x, y) = c(x^2 - y^2)$, a $v(x, y) = 2cxy$.



Rys. 7.



Rys. 8.

Obierając funkcję v jako potencjalną i zakładając $2cxy = V = \text{const.}$ otrzymujemy równanie linii ekwipotencjalnych, a $c(x^2 - y^2) = \text{const.}$ równanie linii sił. Obie rodziny hiperbol są do siebie prostopadłe i przedstawiają obraz pola elektrycznego we wklęsłym rogu przewodnika naelektryzowanego Rys. 7.

Obraz pola elektrycznego Rys. 8, wytworzonego przez dwa równoległe różnoimiennie naelektryzowane przewody znajdujące się od siebie w odległości a otrzymamy zakładając kształt funkcji

$$f(x + jy) = c \ln(x - \frac{a}{2} + jy) - c \ln(x + \frac{a}{2} + jy)$$

4. *Sposób wykreślny układu sił pola.* W wielu przypadkach można znaleźć rozkład sił pola elektrycznego w przybliżeniu wykreślnie, z dokładnością wystarczającą dla celów praktycznych w sposób następujący: linje ekwipotencjalne oraz linje indukcji rysuje się najpierw intuicyjnie, t. j. „na oko”.

Rys. 8. Linje ekwipotencjalne należy tak narysować aby pomiędzy sąsiednimi linjami była ta sama różnica potencjałów; natężenie pola jest odwrotnie proporcjonalne do odległości a sąsiednich linii. Odległość b pomiędzy dwiema sąsiednimi linjami indukcji jest odwrotnie proporcjonalna do przesunięć dielektrycznych. Ponieważ natężenie pola i przesunięcie dielektryczne są do siebie proporcjonalne, rysunek winien być tak wykonany aby w całym polu stosunek $\frac{a}{b}$ był stały; najłatwiej wykonać rysunek za-



kładając $a = b$, oraz pamiętając, że:
Rys 8. a) brzegi przewodników są linjami ekwipotencjalnymi.

- b) linje indukcji są prostopadłe do elektrod i do linii ekwipotencjalnych;
- c) odległość pomiędzy dwiema sąsiednimi linjami ekwipotencjalnymi w każdym miejscu pola powinna być równa odległości pomiędzy dwiema sąsiednimi linjami indukcji;
- d) przy dielektryku uwarstwowionym, należy uwzględnić załamanie linii indukcji na granicy obu dielektryków.

Przez zagęszczanie stopniowe linii na rysunku obraz pola staje się coraz dokładniejszy. Strumień indukcji ograniczony dwiema sąsiednimi linjami indukcji przy długości elektrod l (w kierunku \perp do płaszc. rysunku), wynosi $\psi' = b \cdot l \cdot D$; jeżeli na rysunku pomiędzy elektrodami znajduje się n linii indukcji, strumień całkowity wyniesie: $\psi = \epsilon n l \frac{b}{a} U_1$ gdzie U_1 jest różnicą potencjałów pomiędzy sąsiednimi linjami ekwipotencjalnymi, zaś natężenie pola $K = \frac{U_1}{a}$

Dla obliczenia pojemności układu należy podzielić strumień indukcji przez napięcie pomiędzy elektrodami i przez 4π . Przy m linjach ekwipotencjalnych, napięcie wynosi $(m+1) U_1$, linie są tak narysowane, że $a = b$, zatem pojemność wypadnie:

$$C = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{n}{m+1} l$$

Na rys. 8 $n = 17$ linii indukcji; $m = 2$ linie ekwi-potencjalne, wobec tego pojemność na 1 długości w kierunku prostopadłym do rys. w powietrzu wypadnie; przyjmując $\epsilon = 1$.

$$\frac{C}{l} = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{n}{m+1} = 0.5 \frac{\mu F}{cm}.$$

5. *Kondensatory.* Układ dwóch izolowanych od siebie przewodników stanowi kondensator; prawie wszystkie linie pola elektrycznego przebiegają pomiędzy okładzinami kondensatora; niewielką ilość pozostałych linii, idących do innych sąsiednich przewodników, np. ziemi, można pominąć. Stosunek ładunku Q na każdej z okładzin do napięcia U na kondensatorze nazywamy pojemnością kondensatora.

$$C = \frac{Q}{U};$$

Energja pola elektrycznego kondensatora wynosi:

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C}.$$

Pojemność kondensatora jest określona przez jego kształt geometryczny i własności dielektryka. Pojemności kondensatorów wyznacza się wychodząc ze zworu $\frac{Q}{U}$. Przy układach nieforemnych pojemność można wyznaczyć w sposób podany wyżej, na str. 19

Kondensatory połączone równolegle posiadają łączną pojemność $C = C_1 + C_2 + \dots$, równą sumie pojemności poszczególnych kondensatorów.

Kondensatory połączone szeregowo mają pojemność łączną, której odwrotność wyraża się wzorem:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

Dielektryk poddany działaniu pola elektrycznego znajduje się w stanie naprężenia; nazwa ta została zapożyczona z mechaniki; naprężenie elektryczne jest w istocie swej identyczne z natężeniem pola.

Tablica pojemności kondensatorów.*)

(wszystkie wymiary w cm, powierzchnie w cm²; U — napięcie na kondensatorze, ϵ — stała dielektryczna względna).

Kondensator płaski Rys. 9.

$$C = \frac{\epsilon s}{4\pi d} \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-5} \mu F$$

$$K = \frac{U}{d} \frac{\text{wolt}}{\text{cm}}$$

Rys. 9.



jednakowe w całym dielektryku.

Kondensator płaski z uwarstwieniem równoległym do powierzchni okładzin. Rys. 10.

$$C = \frac{s}{4\pi \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} + \dots + \frac{d_n}{\epsilon_n} \right)} \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-5} \mu F$$

Rys. 10.



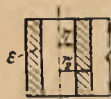
Napężenie w n -tej warstwie

$$K_n = \frac{U_n}{d_n} \frac{\text{wolt}}{\text{cm}} \quad \text{gdzie } U_n = \frac{d_n}{\epsilon_n} \frac{U}{\sum \frac{d_k}{\epsilon_k}}$$

Rys. 11.



Rys. 12.



$$K_1 : K_2 : \dots : K_n = \frac{1}{\epsilon_1} : \frac{1}{\epsilon_2} : \dots : \frac{1}{\epsilon_n}$$

Kondensator płaski z uwarstwieniem prostopadłym do powierzchni okładzin. Rys. 11.

Rys. 13.



$$C = \frac{\epsilon_1 s_1 + \epsilon_2 s_2 + \epsilon_n s_n}{4\pi d} \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-5} \mu F$$

We wszystkich warstwach

$$K = \frac{U}{d} \frac{\text{wolt}}{\text{cm}}$$

Kondensator cylindryczny Rys. 12

$$C = \frac{\epsilon l}{4.6 \lg_{10} \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-5} \mu F$$

*) Pojemność układów trójfazowych patrz linie dalekoosne.

$$K_{\max} = \frac{U}{r_1 \lg n \frac{r_2}{r_1}} \frac{\text{wolt}}{\text{cm}}$$

na powierzchni walca wewnętrznego.

Kondensator kulisty Rys. 13.

Rys. 14.



$$C = \epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-5} \mu F.$$

Rys. 15.



$$K_{\max} = \frac{r_2 U}{r_1 (r_2 - r_1)} \frac{\text{wolt}}{\text{cm}}$$

na powierzchni kuli wewnętrznej.

Kabel jednożyłowy obołowiony. (pojemn. żyły względem powłoki ołowianej uziemionej). Rys. 14.

Rys. 16.



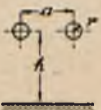
$$C = \epsilon \frac{0,0241}{\lg_{10} \frac{D}{d}} \frac{\mu F}{\text{km}}$$

Rys. 17.



Kabel jednożyłowy opancerzony (pojemn. żyły względem pancerza). Rys. 15.

Rys. 18.



$$C = \frac{0,0241}{\frac{1}{\epsilon} \lg_{10} \frac{R}{r} + \frac{1}{\epsilon} \lg_{10} \frac{R''}{R'}} \frac{\mu F}{\text{km}}$$

Kabel dwużyłowy skręcony. Pojemność żył. Rys. 16.

Rys. 19.



$$C = \epsilon \frac{0,01206}{\lg_{10} \left\{ \frac{2a (R^2 - a^2)}{r (R^2 + a^2)} \right\}} \frac{\mu F}{\text{km}}$$

Przewód pojedynczy względem ziemi. Rys. 17 *).

$$C = \frac{0,0241}{\lg_{10} \frac{2h}{r}} \frac{\mu F}{\text{km}};$$

$$K_{\max} = \frac{U}{r \lg_{10} \frac{2h}{r}} \frac{\text{wolt.}}{\text{cm}}$$

na powierzchni przewodu.

Pojemność pary przewodów równoległych poziomych, umieszczonych obok siebie nad ziemią. Rys. 18.

$$C = \frac{0,01206}{\lg_{10} \frac{a}{r \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2h}\right)^2}}} \frac{\mu F}{\text{km}}$$

Pojemność pary przewodów równoległych umieszczonych nad sobą. Rys. 19.

$$C = \frac{0,01206}{\lg_{10} \frac{a}{r}} \frac{\mu F}{\text{km}}; \quad \text{przy } a \leq h$$

6. *Wytrzymałość elektryczna układów izolacyjnych.*
Gdy dwa przewodniki są izolowane od siebie, to przy pewnem napięciu pomiędzy nimi powstaje wyładowanie elektryczne, stanowiące prąd, przy którym materiał izolacyjny traci swoje własności izolacyjne.

Przy izolacji płynnej lub gazowej mamy tylko wyładowanie skrośne czyli przebicie, natomiast przy izolacji materiałami stałymi np. gdy dwie blaszki metalowe są od siebie izolowane płytką mikową to może zachodzić przebicie wskroś lub t. z. przeskok wokoło płytki mikowej po jej powierzchni.

7. *Wytrzymałość elektryczna dielektryków na przebicie*
stanowi najniższe napięcie w kilowoltach na cm lub na mm grubości warstwy dielektryków, przy którym zachodzi przebicie.

*) $\lg_n x = 2,30259 \lg_{10} x$.

Wytrzymałość elektryczna tej samej grubości powłoki izolacyjnej drutów przy 20° C.

Azbest przebija 2 kV/mm	Bawełna . . 5,5 kV/mm
Jedwab . . 18 "	Papier nasyc. 22 "
Emalja . . 48 "	

Wytrzymałość na przebicie oleju izolacyjnego według prób wykonanych prądem zmiennym w iskierniku o elektrodach kulowych, których promień — 25 mm, odstęp — 3 mm. Liczby wyrażają napięcie skuteczne przebijające.

Olej świeży	powyżej 100 kV/cm
Olej praktycznie suchy (zawartość wody poniżej 0.001%)	powyżej 150 kV/cm
Olej pobrany z przyrządu (np. transformatora) zdalny do użycia	80—100 kV/cm
Olej wymagający suszenia	70 kV/cm lub mniej
Olej nie zdalny do użytku	poniżej 50 kV/cm

Wytrzymałość na przebicie powietrza. Napięcie przeskoku przy wyładowaniu pomiędzy ostrzami lub elektrodami świetłacemi (jarzącemi) przy 25° C, ciśnieniu 760 mm Hg i 80% wilgotności względnej dla odstępów a cm (ważne przy $a > 8$ cm) w kilowoltach wartość skuteczna wynosi:

$$U = 14 + a \cdot 3,16 \text{ przy jednej elektrodzie uziemionej.}$$

$$U = 14 + a \cdot 3,36 \text{ przy układzie symetrycznym.}$$

UWAGA. Napięcia przebicia dla kul w powietrzu i poprawki ze względu na temperat. i ciśnienie patrz PNE — 35 (Pomiar napięcia iskiernikiem kulowym, Przegl. Elektr., str. 445, rocz. 1932).

LITERATURA.

- K. Drewnowski. Materiały i układy izolacyjne.
 H. Schering. Die Isolierstoffe der Elektrotechnik (I. Springer 1924 r. str. 392).
 A. Schweiger. Elektrische Festigkeitslehre (I. Springer 1925 r. str. 484).
 U. Retzov. Die Eigenschaften elektrotech. Materialien in graph. Dartstellung. 1927 r.
 A. Monkhouse. Electrical insulating Materials 1926.

III. Pole prądu elektrycznego stałego.

1. *Gęstością prądu elektrycznego* i jest wektor w kierunku prądu, którego wartość stanowi ilość elektryczności przepływająca w jednostkę czasu przez jeden centymetr kwadratowy pola płaszczyzny prostopadłej do kierunku prądu.

Gdy w jedną stronę płynie elektryczność dodatnia, a w drugą ujemna, to ilość elektryczności obliczamy przez sumowanie arytmetyczne ładunków dodatnich i ujemnych przepływających w tym samym czasie. Za kierunek prądu przyjmujemy wtedy kierunek ruchu elektryczności dodatniej. Zależność gęstości prądu od natężenia pola elektrycznego wyraża się wzorem:

$$i = \gamma K$$

γ — przewodność właściwa ośrodka równa odwrotności oporności właściwej ρ .

$$\gamma = \frac{1}{\rho}$$

Wobec tego, że w rozważanym polu rozkład ładunków nie ulega zmianie, ilość elektryczności przepływająca przez zamkniętą powierzchnię równa się zeru, wyrażają to wzory.

$$\int i_n ds = 0; \quad \text{div } i = 0.$$

2. Wzdłuż drogi prądu elektrycznego mamy napięcie elektryczne:

$$U_{ab} = \int_a^b K dl$$

między dwoma punktami a i b o ile wszędzie linie prądu i linie pola są zgodne.

3. Tu pole elektryczne ma jednoznacznie określony potencjał V w każdym punkcie i

$$K = - \text{grad. } V,$$

wobec tego: $U_{ab} = V_a - V_b$, napięcie jest różnicą potencjałów.

2. Przemiana energii elektrycznej na ciepło. W elemencie objętości ośrodka $s dl$, gdzie dl leży w kierunku prądu, przepływa w jednostkę czasu ilość elektryczności is wzdłuż drogi dl na której mamy napięcie Kdl , wobec tego praca sił pola wyniesie $is Kdl$. Przez tę pracę wytwarza się ciepło. Ilość energii cieplnej na jednostkę objętości i jednostkę czasu wypadnie

$$Ki = \gamma K^2 = \rho i^2.$$

Energja ta nie czerpie się jednak z pola elektrycznego, które jest niezmiennie lecz ze źródeł prądu elektrycznego, które ten prąd podtrzymują.

IV, Obwód elektryczny prądu stałego.

1. Całość urządzenia składająca się ze źródła prądu, odbiornika i przewodów łączących odbiornik ze źródłem stanowi obwód elektryczny. Przekroje obwodu uważamy za małe w porównaniu do długości i promieni krzywizny. Linje prądu elektrycznego i natężenia pola przebiegają wewnątrz przewodników równolegle do ich podłużnej osi.

2. *Natężeniem* prądu elektrycznego w danym przekroju obwodu, (wielkością, siłą lub wprost prądem) nazywamy ilość elektryczności (patrz III p. 1) przepływającą w jednostkę czasu przez ten przekrój obwodu.

3. *Kierunek* prądu jest kierunkiem ruchu elektryczności dodatniej lub kierunkiem odwrotnym do kierunku ruchu elektryczności ujemnej.

4. Każde źródło i większość odbiorników ma siłę elektromotoryczną miarodajną dla zachodzących tam przemian energetycznych. Związek pomiędzy energją ulegającą przemianie w źródle prądu lub odbiorniku, a siłą elektromotoryczną wyraża wzór:

$$W = E I t$$

W — energja, E — siła elektr. motor., I — natężenie prądu, t — czas.

Przykł. $E = 200$ woltów, $I = 10$ amperów, $t = 5$ godzin
 $W = 200 \times 10 \times 5 = 10\,000$ watogodzin $= 10$ kilowatogodzin.

5. W odbiornikach wytwarzających ciepło według prawa Joule'a, przemiany energetyczne warunkuje oporność omowa, tam niema siły elektromotorycznej.

$$W = I^2 R t$$

R — oporność odbiornika.

Tego rodzaju ciepło wydziela każdy przewodnik posiadający oporność R .

Przykł. 1. $I = 20$ amp. $R = 5$ omów, $t = 2$ godziny.

$W = 20^2 \times 5 \times 2 = 4000$ watogodzin $= 4$ kilowatogodz.

$W = 860 \times 4 = 3440$ kilogramkalorji

Przykł. 2. $I = 20$ amp. $R = 5$ omów, $t = 5$ sekund

$W = 20^2 \times 5 \times 5 = 10000$ dżuli

$W = 0,24 \times 10000 = 2400$ gramkalorji

6. Między każdymi dwoma punktami obwodu mamy napięcie prądu, które jest miarodajne dla przemian energetycznych zachodzących w części obwodu pomiędzy temi punktami. Napięcie jest różnicą potencjałów, a więc praca wykonana przez siły elektryczne będzie:

$$A = U I t.$$

gdzie U — jest napięcie prądu elektrycznego. Wobec tego moc prądu będzie:

$$P = U I.$$

7. *Prawo Ohma.* Dla całego nierozgałęzionego obwodu:

$$I = \frac{\sum E}{\sum R}$$

$\sum E$ — suma algebraiczna sił elektromotorycznych, $\sum R$ — suma oporności wszystkich części zamkniętego obwodu.

Dla części obwodu nie zawierającej sił elektromotorycznych:

$$I = \frac{U}{\sum R}$$

$\sum R$ — suma oporności w tej części obwodu, na końcach której mamy napięcie U . Dla części obwodu zawierającej siły elektromotoryczne:

$$I = \frac{U + \sum E}{\sum R}$$

tu $\sum E$ — suma algebraiczna sił elektromotor., znajdujących się w tej części obwodu, siły elektromotoryczne zgodne z prą-

dem przyjmują się jako dodatnie, za dodatnie również uważamy napięcie, tak piszemy wzór dla odbiorników, natomiast dla źródeł prądu odwracamy dodatni kierunek napięcia i piszemy

$$I = \frac{\sum E - U}{\sum R}$$

Na podstawie wzorów powyższych w odbiorniku:

$$U = IR + E$$

a w źródle prądu:

$$U = E - IR$$

8. *Prawa Kirchhoffa.* I-e dotyczy punktu rozgałęzienia przewodów i wyraża się wzorem:

$$\sum_{1}^n I_k = 0$$

II-gie dotyczy obiegu zamkniętego wybranego w sieci przewodów i wyraża się wzorem:

$$\sum_{1}^n I_k R_k = \sum_{1}^n E_k$$

W pierwszym prawie dodatni kierunek np. do węzła, a w drugim np. wedł. ruchu wskazówek zegara.

9. *Łączenie oporów:* a) szeregowo, oporność zastępcza:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

b) równoległe, oporność zastępcza

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

a przewodność zastępcza:

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n .$$

10. *Obliczenie oporności* przeprowadza się zwykle wedł. wzoru:

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

l — w metrach, s — w mm^2 , ρ — w $\frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$

lub l w cm, s — w cm^2 i ρ — w $\Omega \text{ cm}$.

Przewodność

$$G = \frac{1}{R} = \gamma \frac{s}{l}$$

— oporność właściwa, γ — przewodność właściwa.

11. *Zmiana oporności z temperaturą* wyraża wzór:

$$\rho_t = \rho_{t_0} [1 + \alpha (t - t_0)]$$

Na podstawie tego wzoru obliczamy przyrost temperatury ze zmiany oporu według wzoru:

$$t - t_1 = \frac{R - R_1}{R_1} (\vartheta + t_1).$$

Dla miedzi $\vartheta = 235$. Tu R — przy temp. t , a R_1 przy temperaturze początkowej t_1 .

Przykł.: Obliczenie oporności drutu miedzianego przy temp. 50° , jeżeli przy 20° oporność wynosiła 100Ω .

$$R_{50} = 100 (1 + 0,00393 (50 - 20)) = 111,79 \Omega.$$

Zmiana oporu przewodników z temperaturą znalazła zastosowanie do mierzenia temperatury, za pomocą drutów oporowych, włączonych w obwód mostku Wheatstone'a.

Dla grafitu i węgla z retort $\rho_{15} = 13$ do $100 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$,
 $\alpha \times 1000 = -0,8$ do $-0,2$.

11. *Tablica oporności właściwych metali:*

Nazwa	Temp.	Oporność właściwa $\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$	Spółczynnik $\alpha \times 1000$ przy $t_0 = 15^\circ$	Przewodność właściwa $\frac{\text{m}}{\Omega \text{ mm}^2}$	Ciepota właściwa $\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$	Źródło
Cyna	15°	0,11—0,14	4,5	9—7	7,3	Jaeger
Cynk	20°	0,059	3,9	16,9	7,2	Jaeger i Scheel
Glin walcowany 98,8%	20°	0,031	3,7	32,3	2,7	
99,6%	20°	0,0291	—	34,3	—	
Iryd	18°	0,0527	—	18,9	—	Jaeger
Miedź elektrolit. . . .	0°	0,0156	—	64,1	—	Dewar i Fleming
" wzorowa	20°	0,017241	3,93(20°)	58	8,89	
" twarda	15°	0,0175	4,0	57	—	
Nikel	0°	0,0690	4,2	14,5	8,9	Dewar i Fleming
Ołów prasowany . . .	0°	0,20	3,7	5,05	11,37	Niccolai
Platyna	0°	0,094	2,35	10,7	21,5	Strecker
Rtęć	15°	0,9532	0,873	1,049	13,55	Jaeger
Srebro miękkie	15°	0,0158	3,6	63,5	10,55	
" twarde	15°	0,0175	3,6	57,0	10,55	
Stal drut	15°	0,172	5,2	5,8	7,9	

Nazwa	Temp.	Oporność właściwa $\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$	Spółczynnik $\alpha \times 1000$ przy $t_0 = 15^\circ$	Przewodność właściwa $\frac{\text{m}}{\Omega \text{ mm}^2}$	Ciężar właściwy gr/cm^3	Źródło
Stal szyny kolejowe 99,8%	15°	0,103	—	9,7	—	Gumlich Barrel
" " " 98,2%	—	0,224	—	4,5	—	
Żelazo 99,9%	20°	0,10	—	10,0	—	
" 99,0%	15°	0,15	—	6,7	—	
" blacha	15°	0,13	4,6	7,7	7,86	
" lane	15°	0,8	—	1,25	—	Dewar i Fleming Temp. topliwości
" drut	20°	0,143	4,7	7,0	7,65	
Złoto	0°	0,022	3,5	45,5	19,32	
Manganin	—	—	—	—	—	900°
Cu, Mn, Ni	—	0,43	$\pm 0,01$	—	8,3	
Konstantan	—	—	—	—	—	1270°
Cu, Ni	—	0,48—0,50	+0,01	—	8,85	
Nikelin Cu i Ni . . .	—	0,41—0,43	0,019—0,21	—	8,87	8,55
Nowe srebro Cu, Ni, Zn	—	0,36—0,38	0,0725	—	8,77	
Reotan.	—	0,47	0,23	—	8,55	8,1
Krupin Fe i Ni . . .	—	0,85—0,86	0,7	—	8,1	
Chromonikel	—	1,08	0,15	—	8,37	1410°

13. *Tabl. oporności właściwych roztworów wodnych.*

N a z w a	Stężenie ¹⁾ %	Opor- ność właściwa Ω cm	Spółczyn. zmiany prze- wodności od temperat. ²⁾ na 1° C
Soda Na_2CO_3 ³⁾ (20°)	2,9	47	0,0147
" " " "	9,1	22	0,0110
" " " "	23	13	0,0189
Sól kuchenna NaCl ⁴⁾ (18°)	5	15,0	0,022
" " " "	15	6,1	0,021
" " " "	25	4,67	0,023
Kwas siarkowy H_2SO_4 ⁴⁾ (18°)	5	4,80	0,0121
" " " "	30	1,35	0,0162
" " " "	80	9,12	0,0349
Woda wodociągowa w Warszawie ⁵⁾ (20°)	—	3600	—

¹⁾ 50/0 to znaczy 50 gr. na litr.

²⁾ Zmiany przewodności roztworów z temperaturą w przybliżeniu wyraża wzór $G = G_{18} (1 + \alpha \Delta t)$, oporność przy ogrzewaniu znacznie zmniejsza się.

³⁾ Rziha i Seidener Starkstromtechnik.

⁴⁾ Według Kohlrauscha Praktische Physik.

⁵⁾ Przegląd Elektr. 1932 r. str. 457.

14. Tablica oporności właściwej izolatorów i półprzewodników.

N a z w a	Temper. powietrza	Oporność właściwa $M\Omega$ cm	Napięcie woltów	Woltów na mm grub.	Wilgotn. powietrza w %
Beton 1 : 3	—	$1,4 \cdot 10^{-10}$	—	—	—
1 : 5	—	$4,2 \cdot 10^{-10}$	—	—	—
1 : 7	—	$5,0 \cdot 10^{-10}$	—	—	—
Szkieł (okienne)	17°	$6,6 \cdot 10^{-8} - 8,2 \cdot 10^{-6}$	1725—1010	690—405	70—48
Celulozoid biały nieprze- zroczysty	16°	$79 \cdot 10^{-1} - 71 \cdot 10^{-3}$	1020—1975	2040—3960	70
Drzewo sosna	—	$1 \cdot 10^{11}$	—	—	—
⊥ do włók.	—	$3 \cdot 10^{10}$	—	—	—
do włók.	—	50—570	—	—	—
Orzech	19°	53	1010	371	48
Fibra	—	—	—	—	—
Glina wypalona bez po- lewy	19	13000	1010	92	48
Guma twarda	17—19°	$>42 \cdot 10^{-8} - 35 \cdot 10^{-8}$	1010—1715	540—910	48—70
Kauczuk	17°	$21 \cdot 10^{-7} - 113 \cdot 10^{-7}$	2000—630	6000—21000	80
Linoleum	16°	$1 \cdot 10^{-6} - 1,3 \cdot 10^{-6}$	2000—1000	572—286	70
Marmur	16°	435—510	1990—1010	66,5—33,7	70
Mika	19°	$2,3 \cdot 10^6$	1010	4000	48
Parafina	17	$24 \cdot 10^{-7} - 39 \cdot 10^{-8}$	2000—1740	2860—435	70—80
Porcelana	—	$1,7 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 10^{-8}$	—	—	—

Szczególne tablice oporności słupów są u Rziha i Seidenera Starkstromtechnik, str. 800 T. I.
1930 r. Szczegółowe dane co do oporności właściwych innych ciał patrz Landolt-Börnstein Physikalisch-Chemische
Tabellen Berlin 1923 r.

13. *Oporniki wodne.* Pochłaniana moc P_{kW} , G ilość w dy w litrach przepływająca na sekundę:

$$G = 0,24 \frac{P}{t_w - t_p}$$

t_w — temper. wody wypływającej, a

t_p — przyływającej.

Ilość wody w litrach wyparowywanej na sekundę bez przepływu:

$$G' = 0,24 \frac{P}{537 + (100 - t_p)}$$

Gęstość prądu na elektrodach żelaznych 0,5—0,1 A/cm²).

16. *Obliczenie oporności uziemień* stanowiących metalowy przedmiot różnego kształtu zakopany głęboko do ziemi. Wzory są podane dla ośrodka o wymiarach nieograniczonych.

a. Uziemienie kulowe — kula metalowa o promieniu r .

$$R = \frac{\rho}{4 \pi r}$$

b. Uziemienie płytowe — płyta metalowa szerokość — a , wysokość $n \times a$.

$$R = 2,3 \frac{\rho}{2 \pi a \sqrt{N}} \lg_{10} \frac{n+1+\sqrt{N}}{n+1-\sqrt{N}}$$

$$N = (n+1)^2 - 8n/\pi.$$

c. Uziemienie walcowe — rura metalowa o średnicy zewnętrznej d i długości l .

$$R = 2,3 \frac{\rho}{2 \pi l} \lg_{10} \frac{2l}{d}$$

Oporność właściwa ρ gruntu suchego $10^6 - 10^8 \Omega \cdot \text{cm}$, dla wilgotnego $10^1 \Omega \cdot \text{cm}$ i dla wody rzecznej $10^1 \Omega \cdot \text{cm}$. W powyższych wzorach wymiary należy podstawiać w cm.

V. Elektroliza.

1. *Elektrolit* — roztwór albo ciało roztopione poddane elektrolizie.

Anoda — plusowa elektroda przez którą wchodzi prąd.

Katoda — minusowa elektroda przez którą prąd wychodzi.

Jony — cząsteczki naładowane elektrycznością.

Anjon — cząsteczka naładowana ujemnie wędrująca do anody.

Katjon — cząsteczka naładowana dodatnio wędrująca do katody.

2. *Ilość rozłożonej przez prąd substancji*, czyli ilość wydzielonych jonów jest wprost proporcjonalna do ilości elektryczności, która przepłynęła przez elektrolit.

$$m = a Q = a I t.$$

a — równoważnik elektrochemiczny danego ciała.

3. *Równoważnik elektrochemiczny jest proporcjonalny do równoważnika chemicznego.*

$$a = k b$$

$1/k = 96500$ amperosekund czyli kulombów — stała Faraday'a,
 b — równoważnik chemiczny.

4. Przykład. Prąd $5 A$ w ciągu 10 godzin wydziela miedzi z roztworu $CuSO_4$:

$$m = a I t = 1,1858 \times 5 \times 10 = 59,25 \text{ gr. miedzi}$$

5. *Tablica równoważników elektrochemicznych.
Wydzielają się na katodzie.*)*

Nazwa	Znak	Ciężar atomowy	Wartość ciowaść	Równoważ. elektrochem. w gr. na amperogodzinę
Chrom . . .	Cr	52,01	3	0,6467
Cyna . . .	Sn	118,70	2	2,2142
Cynk . . .	Zn	65,37	2	1,2193
Glin . . .	Al	26,97	3	0,3354
Kadm . . .	Cd	112,40	2	2,0966
Kobalt . . .	Co	58,97	2	1,1000
Miedź . . .	Cu	63,57	1	2,3716
" . . .	"	"	2	1,1858
Nikel . . .	Ni	58,68	2	1,0946
Ołów . . .	Pb	207,20	2	3,865
Rtęć . . .	Hg	200,61	2	3,7422
Srebro . . .	Ag	107,88	1	4,0248
Wodór . . .	H	1,008	1	0,03758
Złoto . . .	Au	197,2	1	7,3571
Żelazo . . .	Fe	55,84	2	1,0415

Wydzielają się na anodzie.

Dwutlenek ołowiu	PbO ₂	—	2	4,462
Chlor . . .	Cl	35,46	1	1,3229
Wodorotlenowy anjon	HO'	—	1	0,6345
Tlen . . .	O	16,00	2	0,2984
Siarczanowy anjon	SO ₄ ''	—	2	1,7921

*) Obszerniejsza tablica u Rziha i Seidener Starkstromtechnik - str. 170.

VI. Pole magnetyczne.

Ogólne własności pola magnetycznego.

1. Działanie pola magnetycznego ujawnia się przez siły mechaniczne wywierane na magnesy, a także na przewodniki, przez które płynie prąd elektryczny, oraz przez zjawiska indukcji elektromagnetycznej. Siła F wywierana na masę magnetyczną m przez pole magnetyczne o natężeniu H wyraża się wzorem:

$$F = m H$$

2. Przy przesuwaniu masy magnetycznej m na drodze l zostaje wykonana praca

$$A = m \int_0^l H_l dl$$

W polu magnetycznem magnesu stałego całka linjowa natężenia pola nie zależy od drogi całkowania i jest równa różnicy potencjałów magnetycznych na końcu i na początku drogi. Każdy punkt przestrzeni posiada jednoznacznie określony potencjał magnetyczny V . Zasadnicze własności pola magnetycznego magnesu wyrażają się wzorami:

$$H = - \text{grad } V$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_0^{\quad} H_l dl = 0 & \text{wyrażenie całkowe} \\ \text{rot } H = 0 & \text{wyrażenie różniczkowe} \end{array} \right.$$

3. W polu magnetycznem prądu ustalonego mają miejsce następujące zależności:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\quad} H_l dl = 4 \pi \int_s^{\quad} i_n ds \\ \text{rot } H = 4 \pi i, \text{ gdzie } i \text{ jest gęstością prądu.} \end{array} \right.$$

$\int H dl$ jest siłą magnetomotoryczną (SMM)

$\oint_S i_n ds$ wyraża prąd płynący przez powierzchnię s ograniczoną krzywą l ; kierunek krążenia po krzywej — zgodny z ruchem wskazówek zegara, patrząc w kierunku normalnej. Dla wszelkich okrażeń w polu przy których przewodniki z prądem nie są ani okrażane ani przecinane, S M M, wynosi zero.

4. *Natężenie pola magnetycznego prądu* może być wyrażone w trojaki sposób:

a) Zgodnie z teorią Ampera, działanie magnetyczne obwodu z prądem zastępujemy przez odpowiednią płytkę magnetyczną; I — natężenie magnetyczne płytki; $I ds = dM$ — elementarny moment tej płytki; pole magnetyczne płytki jest identyczne z polem magnetycznym prądu, za wyjątkiem wnętrza płytki. Natężenie pola wyraża się wzorem $H = - \text{grad } V$, zaś $V = I\omega$, gdzie ω jest kątem bryłowym pod którym widać z danego punktu dodatnią stronę płytki.

b) Według Laplace'a — Biot - Savart'a

$$dH = \frac{I \cdot dl \cdot \sin(r, dl)}{r^2};$$

albo wektorowo $dH = \frac{I}{r^3} [dl \cdot r]$.

Wzór ten przedstawia elementarne natężenie pola pochodzące od elementu linowego prądu o natężeniu I i długości dl w punkcie odległym o r ; jest ono skierowane prostopadle do płaszczyzny (r, dl) w kierunku okrażania elementu prądu, zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.

c) Według Maxwella, zapomocą potencjału wektorowego A

$$B = \text{rot } A \quad \text{gdzie}$$

$$A = \mu I \int \frac{dl}{r} \quad \text{dla przewodnika z prądem } I, \text{ lub}$$

$$A = \mu \int \frac{i dv}{r} \quad \text{gdzie } i \text{ jest gęstością prądu.}$$

Ważniejsze przypadki szczególne:

a) Bardzo długi i cienki przewodnik mający przekrój

kołowy o promieniu r z prądem I , wytwarza pole magn. w odległości a od osi przewodnika o natężeniu:

$$H = \frac{2 I}{a} \text{ przy } a \geq r, \text{ lub}$$

$$H = \frac{2 I a}{r^2} \text{ przy } a < r.$$

(przyjmując jednostajną gęstość w całym przekroju).

b) Cewka tworząca pierścień, mająca z zwojów, z prądem I , niezależnie od kształtu przekroju cewki, wytwarza pole tylko wewnątrz pierścienia w odległości a od środka pierścienia o natężeniu

$$H = z \frac{2 I}{a};$$

Jeżeli grubość pierścienia jest mała w stosunku do a , tak że można przyjąć $2\pi a = l$ średniej długości strumienia, to w przybliżeniu w każdym punkcie przekroju cewki

$$H = z \frac{4\pi I}{l};$$

c) Obwód kołowy o promieniu r , z prądem I .

Natężenie pola w punkcie odległym o x od płaszczyzny koła, na prostej poprowadzonej przez środek koła prostopadle do jego płaszczyzny.

$$H_x = 2\pi r^2 I (r^2 + x^2)^{-3/2};$$



Rys. 20.

d) Cewka cylindryczna Rys. 20 mająca z zwojów w jednej warstwie wytwarza w punkcie na osi wewnątrz cewki pole o natężeniu:

$$H_x = \frac{2\pi I z}{l} \left(\frac{a_2}{\sqrt{r^2 + a_2^2}} + \frac{a_1}{\sqrt{r^2 + a_1^2}} \right)$$

l — cała długość cewki, r promień zwojów, a_1 i a_2 odległość punktu x od końców cewki

Gdy l jest znacznie większe od promienia r , wtedy:

$$H = \frac{4\pi I z}{l}$$

(Wedł. Webera, gdy $l = 20 r$ w punktach osi leżących na odległości większej od $1/16 l$ od końców H zmienia się mniej niż o $1^0/0$).

Dla punktów leżących na osi zewnątrz cewki:

$$H_x = \frac{\pi I z r^2 (a_1 + a_2)}{a_1 a_2 \sqrt{(r^2 + a_1^2)(r^2 + a_2^2)}}$$

5. *Wpływ ośrodka* na zjawiska elektromagnetyczne uwzględniamy tworząc pojęcie indukcji magnetycznej B .

$$B = H + 4\pi J$$

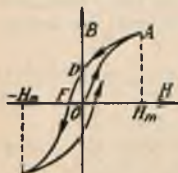
J — natężenie magnetyzacji liczbowo równe gęstości powierzchniowej masy magnetycznej. Własności magnetyczne ośrodka określają dwie liczby charakterystyczne: $\frac{B}{H} = \mu$ — przenikalność magnetyczna ośrodka i $\frac{J}{H} = \kappa$ — podatność magnetyczna, związane równaniem:

$$\mu = 1 + 4\pi \kappa$$

W próżni $\kappa = 0$ i $\mu = 1$; κ jest bardzo małą liczbą dodatnią dla ciał paramagnetycznych i bardzo mają ujemną dla ciał diamagnetycznych, μ dla ciał paramagnetycznych jest trochę większe od jedności i dla diamagnetycznych mniejsze od jedności. Dla ciał ferromagnetycznych: żelaza, kobaltu, niklu i niektórych stopów manganu κ i μ mają duże wartości. Wartości na κ i μ ciał ferromagnetycznych zależą od kształtu rdzenia elektromagnesu, składu chemicznego, natężenia pola magnesującego, poprzedniego stanu magnetycznego i czasu.

Ciała ferromagnetyczne posiadają własność histerazy (spóźniania się) co do zmienności indukcji magnetycznej przy zmianie natężenia pola magnesującego.

Rys. 21. Tu OD indukcja szczątkowa, OF koercyjne natężenie pola. W warunkach zwykłej praktyki temperatura ma wpływ mały. Magnesy stałe ze wzrostem temperatury o 1° tracą 0,0003 do 0,0006 *) swego strumienia magnetycznego.



Rys. 21.

Przy stopniowym ogrzewaniu ciał ferromagnetycznych znajdujących się w polu mag. przenikalność ich stopniowo maleje, początkowo wolno, potem szybko. Od pewnej krytycznej temperatury (punkt Curie) $\mu \approx 1$. Ta temp. dla żelaza — 769° , kobaltu — 1075° , niklu 356° .

6. *Przejście linii magnetycznych z jednego ośrodka do drugiego.* Na powierzchni rozdzielającej dwa ośrodki o różnej przenikalności zachodzi ciągłość składowych normalnych indukcji i składowych stycznych natężenia pola.

$$B_{n_1} = B_{n_2}$$

$$H_{s_1} = H_{s_2}$$

Linie indukcji załamują się według prawa:

$$\mu_1 : \mu_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2$$

Z żelaza do powietrza linie magnetyczne wychodzą zwykle niemal prostopadłe do powierzchni żelaza.

7. *Energja w polu magnetycznym.*

Ilość energii w centymetrze sześciennym pola wynosi:

$$\frac{1}{8\pi} \mu H^2 = \frac{1}{8\pi} BH$$

8. *Strumień magnetyczny* czyli strumień indukcji magnetycznej jest zawsze zamknięty.

Strumień Φ w zależności od indukcji magnetycznej B i pola s przekroju strumienia wyraża się wzorem:

$$\Phi = \int_s B_n ds$$

B_n — składowa indukcji prostopadła do ds .

*) Rziha i. Seidener „Starkstronstechnik“.

9. *Obwód magnetyczny* — jest to droga na której układa się strumień magnetyczny

$$\Phi = \frac{N}{S}$$

gdzie N — siła magnetomotoryczna, S — oporność magnetyczna obwodu.

$$N = 0,4 \pi W = 0,4 \pi I z = 1,256 I z$$

$I z = W$ — wzbudzenie (amperozwoje), I — prąd w amperach, z — liczba zwojów drutu z tym prądem objęta strumieniem magnetycznym.

$$S = \frac{1}{\mu} \frac{l}{s}$$

gdzie l — długość obwodu w cm
 s — przekrój obwodu w cm^2 .

Jeżeli obwód magnetyczny składa się z różnych części, posiadających różne przenikalności, długości i przekroje, to

$$S = \frac{l_1}{\mu_1 s_1} + \frac{l_2}{\mu_2 s_2} + \dots + \frac{l_n}{\mu_n s_n};$$

Jeżeli strumień część drogi ma w powietrzu to:

$$S = \frac{l_1}{\mu_1 s_1} + \dots + \frac{l_n}{\mu_n s_n} + \frac{l_p}{s_p}.$$

Wzbudzenie dla wywołania określonego strumienia oblicza się ze wzoru:

$$W = \sum_1^n w_k l_k + 0,8 B_p \delta$$

w_k — wzbudzenie na jeden centymetr drogi strumienia w żelazie, zależne od gatunku żelaza i indukcji magnetycznej; l_k — długość cząstki linii magnetycznych w żelazie, B_p — ind. mag. w powietrzu; δ — długość linii magn. w szczelinie powietrznej.

Dla przeciętnych gatunków żelaza w_k — podane w tablicy, są to wartości średnie wzięte z praktyki różnych hut.

*Tablica amperozwojów na 1 cm linii magnet. *)*

Ind. magnet. w gausach	Blacha magnet. przeciętna	Odlew stalowy	Odlew żeliwny
6000	1,2	—	25
8000	1,7	—	60
10000	3	6	125
12000	6,2	10	230
14000	16	20	—
16000	55	37	—
18000	160	110	—
20000	400	250	—
22000	1370	1250	—

10. *Spółczynnik rozproszenia* określa stopień rozproszenia magnetycznego, polegającego na tem, że część strumienia przenikającego cewkę magnesującą zamyka się bokiem poza szlakiem strumienia głównego.

Spółczynnik rozproszenia Hopkinsona jest to stosunek strumienia całkowitego do strumienia głównego:

$$\sigma' = \frac{\Phi}{\Phi_{gl.}}$$

Spółczynnik rozproszenia Heylanda jest to stosunek strumienia rozproszenia do strumienia głównego:

$$\sigma'' = \frac{\Phi_r}{\Phi_{gl.}}$$

Zależność pomiędzy temi spółczynnikami:

$$\sigma' - \sigma'' = 1$$

11. Jeżeli pomiędzy dwoma powierzchniami kawałków żelaza mamy szczelinę wąską, w której jest strumień magnetyczny o indukcji B gausów i linje tego strumienia przebiegają prostopadle do powyższych powierzchni to one przyciągają się z siłą wynoszącą:

*) Według F. Ungera Rziha i Seidener „Starkstromtechnik“.

$$F_1 = \frac{B^2}{8\pi} \text{ dyn na cm}^2$$

przekroju poprzecznego strumienia — wzór Maxwella.

12. Siła F działająca na przewodnik o długości l , z prądem i w polu magnetycznym o indukcji B wynosi. Rys. 22.



Rys. 22.

$$F = \int_0^l B i \sin \alpha \, dl.$$

gdzie α jest kątem pomiędzy elementem prądu i kierunkiem indukcji.

Kierunek działania tej siły określa reguła Fleminga rys. 22.

Gdy trzy palce lewej ręki złożymy tak, aby palec środkowy wskazywał kierunek prądu, a palec wskazujący kierunek indukcji magnetycznej, wtedy palec wielki wskaże kierunek siły.

Prostoliniowy przewodnik w polu jednostajnym znajduje się pod wpływem siły:

$$F = B i l \sin \alpha.$$

Przykł.

$$B = 5000 \text{ gauss. } i = 20 \text{ A} = 2 \text{ (C G S) em; } l = 40 \text{ cm, } \alpha = 90^\circ$$

$$F = 5000 \times 2 \times 40 = 4.10^5 \text{ dyn} = 0.408 \text{ kG (kilogramy).}$$

Praca wykonana przez powyższą siłę działającą na element prądu przy ruchu tego elementu względem linii pola wynosi

$$dA = i d\Phi.$$

tu $d\Phi$ strumień magnetyczny przecięty przez przewodnik w ruchu.

13. Dwa przewody równoległe o długości l każdy z prądami I_1 oraz I_2 w odległości a od siebie przyciągają się, gdy kierunki prądów są zgodne lub odpychają się gdy kierunki są przeciwne z siłą

$$F = \frac{2 J_1 J_2 l}{a}$$

VIII. Wzajemny wpływ pól magnetycznego i elektrycznego.

1. Pola magnetostatyczne i elektrostatyczne mogą istnieć w tej samej przestrzeni niezależnie jedno od drugiego. Jeżeli pola są zmienne, to zmiany pola magnetycznego wywołują pole elektryczne, a zmiany pola elektrycznego wywołują pole magnetyczne. Gdy zachodzą nawet powolne zmiany pola magnetycznego powstają już nowe siły elektryczne według praw indukcji elektromagnetycznej odkrytej przez Faraday'a. Zmienność powolna pola elektrycznego tylko pośrednio, przez zmianę prądu elektrycznego, wyrażnie wywołuje nowe siły w polu magnetycznem.

Im szybsza jednak jest zmienność pól, tym wyraźniej obok pola elektrycznego wywołanego zmiennością pola magnetycznego ujawnia się pole magnetyczne wywołane bezpośrednio zmiennością pola elektrycznego według równań Maxwella. Dla jednorodnego dielektryka.

$$\text{rot } H = \frac{\partial D}{\partial t}; \quad \text{rot } K = - \frac{\partial B}{\partial t}.$$

$$D = \epsilon K; \quad B = \mu H.$$

2. Prawo indukcji elektromagnetycznej Faraday'a.

Postać całkowita Faraday'a — Hertza

$$\int_0 K_l dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int_s B_n ds$$

Postać różniczkowa Maxwella:

$$\text{rot } K = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

Napięcie okrężne wyznaczone całką $\int K dl$ równa się

szybkości zmiany strumienia magnetycznego objętego zamkniętą linią całkowania. Gdy wzdłuż powyższej linii zamkniętej mamy przewodnik, to indukowane napięcie okrężne nazywamy siłą elektromotoryczną indukowaną w przewodniku. Kierunek siły elektromotorycznej jest taki, że wywołany przez nią prąd wytwarza strumień magnetyczny przeciwdziałający zmianom zachodzącym w indukującym polu magnetycznem.

Wprowadzając oznaczenia e — na siłę elektromotoryczną i Φ — na strumień magnetyczny otrzymamy:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Jeżeli drut w postaci zwojów obejmuje cały powyższy strumień wielokrotnie, to:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} z.$$

3. *Siła elektromotoryczna powstająca w elemencie przewodnika* poruszającego się względem pola magnetycznego wyraża się wzorem:

$$de = B v dl \sin \alpha \cos \beta.$$

α — kąt pomiędzy B i dl , β — kąt pomiędzy v i normalną do płaszczyzny, w której leżą B i dl .

Gdy $\alpha = 90^\circ$ i $\beta = 0$, a pole jest jednostajne to dla przewodnika o długości l :

$$e = B v l \cdot 10^{-8} \text{ woltów.}$$

Przykł. $B = 5000$ gausów $v = 1000$ cm/sek. $l = 20$ cm.

$$e = 5000 \times 1000 \times 20 = 1 \text{ wolt.}$$

Kierunek siły elektromotorycznej indukowanej w powyższym przewodniku określa się wedł. Fleminga regułą trzech palców prawej ręki: gdy wskazujący palec jest skierowany w kierunku linii magnetycznych, a duży palec w kierunku ruchu przewodnika względem linii magnetycznych, to średni palec wskaże kierunek siły elektromotorycznej.

4. *Siła elektromotoryczna samoindukcji* czyli indukcji własnej.

$$e_s = - \frac{d(Li)}{dt}$$

gdy L — jest stałe:

$$e_s = - L \frac{di}{dt}$$

L — indukcyjność własna obwodu inaczej współczynnik samoindukcji.

5. *Indukcyjność własna obwodu:*

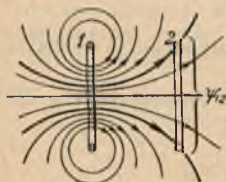
$$L = \frac{\Phi}{i} \cdot z$$

Φ — strumień magnetyczny objęty z zwojami obwodu wytworzony prądem i płynącym po obwodzie.

Przykł: $\Phi = 10^6$ makswełów, $i = 1.5 \text{ A} = 0.15 \text{ (CGS)em}$

$$z = 1500; \quad L = \frac{10^6}{0.15} \cdot 1500 = 10^{10} \text{ cm} = 10 \text{ henrów}$$

6. *Siła elektromotoryczna indukcji wzajemnej obwodów.*



Rys. 23.

$$e_2 = - M \frac{di_1}{dt}$$

e_2 — siła elek. mot. wywołana prądem obwodu pierwszego w drugim Rys. 23 M — współczynnik indukcji wzajemnej. Siła elektromotoryczna indukowana w pierwszym obwodzie prądem drugim będzie:

$$e_1 = - M \frac{di_2}{dt}$$

tu M — to samo co poprzednio.

Przy doskonałym sprzężeniu dwóch obwodów, gdy cały strumień magnetyczny wywołany przez jeden obwód przenika drugi:

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

zwykle zaś

$$M < \sqrt{L_1 L_2}$$

7. *Energja zawarta w polu magnetycznym obwodu:*

$$W = \frac{1}{2} L i^2$$

Przykład $L = 5$ henrów $i = 4$ amp. $W = 40$ dzuli.

8. Wzory na współczynniki indukcji własnej w cm.
(10^9 cm = 1 henr).

Wymiary w cm.

1. Druć w kształcie pierścienia o średnicy D przy grubości drutu d .*)

$$L = 2\pi D \left[\lg n \frac{8D}{d} \left\{ 1 + 0,11 \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right\} - 1,75 - 0,0095 \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]$$

2. Długa cewka z cienką warstwą drutu, średnica cewki d , długość l , liczba zwojów N .**)

$$L = \frac{(\pi d N)^2}{l} \left(1 - \frac{4}{3\pi} \frac{d}{l} + \frac{1}{8} \frac{d^2}{l^2} - \frac{1}{64} \frac{d^4}{l^4} \right)$$

3. Krótka cewka oznaczenia jak dla długiej.***)

$$L = \pi d N^2 \left(2 P \lg n \frac{4d}{l} - Q \right)$$

w tym wzorze

$$P = 1 + \frac{1}{8} \frac{l^2}{d^2} - \frac{1}{64} \frac{l^4}{d^4}; \quad Q = 1 - \frac{1}{16} \frac{l^2}{d^2} - \frac{1}{48} \frac{l^4}{d^4}$$

4. Bardzo krótka cewka w kształcie krążka, średnica zewnętrzna D , wewnętrzna d , zwojów N , grubość mała w porównaniu do średnicy. L oznacza się według następującej tabeli przez interpolację:****)

d/D	L/DN^2	d/D	L/DN^2
0	3,485	0,60	11,507
0,1	4,278	0,70	14,044
0,2	5,256	0,80	17,458
0,3	6,429	0,90	22,871
0,4	7,823	0,99	38,830
0,5	9,487	1,00	∞

*) Max Wien: Wiedem. Ann. 1894 r. str. 934.

**) Uppenborn Kalender 1928 r.

***) Rayleigh i Niven: Proc. Roy Soc. T. 32.

****) Spilrein Arch f. El. 1915 r. str. 187.

5. Indukcyjność dwuprzewodowej *) napowietrznej linii w milihenrach na km., przy odległości drutów d . centym., i promieniu przekroju drutu r — centym.

$$L = 0,921 \log_{10} \left(\frac{d}{r} \right) + 0,1 \frac{m H}{km}$$

VIII. Prąd zmienny sinusoidalnie.

1. Wartości chwilowe natężenia — i napięcia u , maksymalna J_m i U_m

$$i = J_m \sin \omega t \qquad u = U_m \sin \omega t$$

2. Pulsacja — ω , częstotliwość f , okres T .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f; \qquad f = \frac{1}{T}.$$

3. Wartość średnia za pół okresu:

$$I_{sr} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i \, dt = \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m.$$

4. Wartość skuteczna:

$$J = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m.$$

5. Moc chwilowa:

$$p = \frac{1}{2} U_m J_m [\cos \varphi - \cos (2 \omega t + \varphi)]$$

φ — różnica faz u i i .

6. Moc średnia (rzeczywista) $P = U J \cos \varphi$

7. Moc pozorna $P_p = U J$.

*) Układy trójfazowe patrz rozdział o liniach dalekonośnych.

8. Spółczynnik mocy $\cos \varphi = \frac{P}{P_p}$

9. Moc urojona $P_u = U J \sin \varphi$

10. Zależność mocy urojonej od rzeczywistej

$$P_u = P \operatorname{tg} \varphi$$

11. Pozorna moc łączna kilku odbiorników połączonych równolegle:

$$P_p = \sqrt{(\sum P)^2 + (\sum P_u)^2}$$

$\sum P$ — łączna moc rzeczywista odbiorników połączonych równolegle.

$\sum P_u$ — łączna moc urojona tych samych odbiorników,

przy $\varphi < 0$; $P_u < 0$, a przy $\varphi > 0$ $P_u > 0$,

więc suma jest algebraiczna z uwzględnieniem znaku składników.

IX. Obwód prądu zmiennego.

1. *Prądy w obwodach nierozgałęzionych.*

a. Częstka obwodu z opornością omową R i indukcyjnością L .

Napięcie na końcówkach obwodu, $u = U_m \sin \omega t$, prąd ustalony

$$i = J_m \sin (\omega t - \varphi); J_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

Prąd skuteczny

$$J = \frac{U}{Z}, \text{ oporność pozorna } Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

R — oporność rzeczywista, $x_L = \omega L$ — oporność urojona indukcyjna.

b. Częstka obwodu z opornością omową R , indukcyjnością L i pojemnością C

$$u = R i + L \frac{di}{dt} + u_c$$

$$i = J_m \sin (\omega t - \varphi);$$

$$J_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Prąd skuteczny:

$$J = \frac{U}{Z}, \text{ oporność pozorna } Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C} \text{ — oporność urojona.}$$

$x = x_L - x_C$; x_L i x_C — dwie oporności urojone
pierwsza indukcyjna, druga pojemnościowa.

Przy rezonansie napięć

$$x_L = x_C \text{ i } J = \frac{U}{R}; \quad \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

c. Ogólne wzory na obwód w którym połączono szeregowo dowolną liczbę różnych oporności R , ωL i $\frac{1}{\omega C}$;

$$Z = \sqrt{(\sum R)^2 + (\sum x_L - \sum x_C)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum x_L - \sum x_C}{\sum R}.$$

2. Prądy w obwodach rozgałęzionych podlegają dwóm prawom Kirchhoffa.

I. W węzle rozgałęzienia suma geometryczna *) wartości skutecznych prądów równa się zeru o ile dodatnie kierunki przy wykreślaniu sinusoid dla wszystkich prądów przyjęte są do węzła lub od węzła. $\sum J = 0$

II. W obiegu zamkniętym, wybranym w sieci, dla prądów i sił elektromotorycznych skutecznych zachodzi geometryczna zależność:

$$\sum E = \sum J Z$$

*) Patrz rozdział X.

o ile przy wykreślaniu sinusoid przyjęto jednakowe dodatnie kierunki dla E i dla J w kierunku ruchu wskazówek zegarka, lub odwrotnie.

3. *Rezonans prądów.* W dwóch równoległych gałęziach obwodu, z których jedna ma indukcyjność, a druga pojemność zachodzi rezonans prądów, gdy

$$x_L = x_C \text{ czyli } \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

wtedy prąd przed rozgałęzieniem równa się zeru.

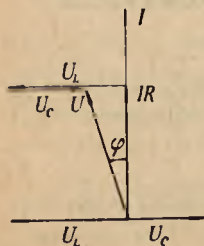
Gdy powyższe gałęzie oprócz pojemności i indukcyjności mają inne własności, rezonans prądów nastąpi gdy

$$\frac{x_1}{x_1^2} = - \frac{x_2}{x_2^2}$$

wtedy prąd przed rozgałęzieniem nie zniknie lecz będzie w fazie z napięciem.

X. Wykresy wektorowe prądów sinusoidalnych.

1. Wielkości sinusoidalnie zmiennej np. $i = J_m \sin \omega t$ podporządkować można na płaszczyźnie wektor o długości J_m , obracający się z szybkością kątową ω w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, rzut tego wektora daje wartości chwilowe i . Przy założeniu pewnych kierunków dodatnich na schemacie przewodów dla poszczególnych wielkości, względne położenie kilku takich wektorów określa różnicę faz. Zamiast wartości maksymalnej, przy dalej podanych wykresach, można również jako długość wektora przyjąć wartość skuteczną danej wielkości zmiennej.



Rys. 24.

2. Wyznaczenie napięcia na częstocie obwodu, zawierającej cewkę z opornością R i indukcyjnością L , oraz kondensator z pojemnością C , jako sumy geometrycznej rys. 24, według wzoru wektorowego:

$$U = \sqrt{R^2 + L^2} + U_L + U_C$$

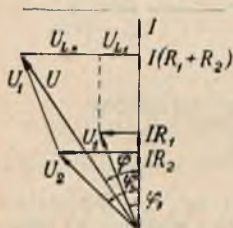
$U_L = J \omega L$ spadek napięcia indukcyjny $U_C = J \frac{1}{\omega C}$ spadek napięcia pojemnościowy

3. Wyznaczenie napięcia Rys. 25 na cząstce obwodu zawierającej dwie cewki w szereg połączone z opornościami omowymi R_1 i R_2 oraz indukcyjnościami L_1 i L_2 jako sumy geometrycznej rys. 25.

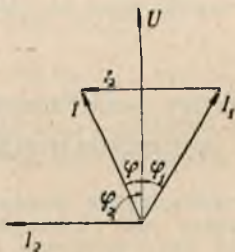
$$\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 \quad \text{lub} \quad \bar{U} = \bar{J}R_1 + \bar{J}R_2 + \bar{U}_{L_1} + \bar{U}_{L_2}$$

Wyznaczenie prądu przed rozgałęzieniem na dwie równoległe cząstki obwodu, z których jedna zawiera cewkę, a druga kondensator, jako sumy geometrycznej prądów w poszczególnych gałęziach Rys. 26, według wzoru wektorowego:

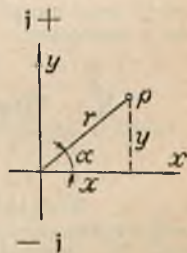
$$\bar{J} = \bar{J}_1 + \bar{J}_2.$$



Rys. 25.



Rys. 26.



Rys. 27.

XI. Sposób symboliczny rozważania prądów zmiennych.

1. *Symboliczne wyrażenie wektora.* Wektor \bar{r} Rys. 27 może być wyrażony symbolicznie za pomocą liczby zespolonej *)

$$r = x + j y$$

x i y są rzutami tego wektora i stanowią dowolne liczby rzeczywiste dodatnie lub ujemne, $j = +\sqrt{-1}$ liczba urojona.

*) Wektory symbolicznie wyrażone oznaczać będziemy literami z kreskami.

Wartość wektora $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ stanowi moduł liczby zespolonej, $tg \alpha = \frac{y}{x}$ określa kąt, stanowiący argument liczby zespolonej.

W tym układzie współrzędnych oś x — nazywamy osią rzeczywistą, a oś y — osią urojoną.

Inna postać wyrażenia symbolicznego:

$$\bar{r} = r (\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

daje się przekształcić według wzoru Eulera *):

$$\cos \alpha + j \sin \alpha = e^{j\alpha}$$

$$\text{stąd: } \bar{r} = r e^{j\alpha}$$

Przy ujemnym rzucie y wypadnie:

$$r = x - jy = r (\cos \alpha - j \sin \alpha) = r \cdot e^{-j\alpha}$$

Mnożenie liczby zespolonej przez j obraca wektor o 90° wbrew ruchowi wskazówek zegarka, mnożenie liczby zespolonej przez $-j$ obraca wektor o 90° w kierunku ruchu wskazówek zegarka. Mnożenie liczby zespolonej przez inną liczbę zespoloną $a + jb$, obraca wektor o kąt φ , którego tg oblicza się ze wzoru $tg \varphi = \frac{b}{a}$, (kąt dodatni liczy się wbrew ruchowi wska-

zówek zegarka) i zwiększa wartość wektora $\sqrt{a^2 + b^2}$ razy. Dzielenie przez taką samą liczbę obraca wektor w przeciwną stronę i zmniejsza jego wartość.

2. Wyrażenie symboliczne sinusoidalnie zmiennego prądu.

$$\bar{J} = a + jb \quad \text{lub} \quad \bar{J} = J e^{j\alpha}$$

są wyrazami symbolicznymi natężenia sinusoidalnego prądu zmiennego, gdzie moduł $\sqrt{a^2 + b^2} = J$ wyraża wartość skuteczną prądu, a kąt α stanowi kąt fazowy względem osi rzeczywistej. Dodawanie i odejmowanie prądów może odbywać się przez zwykłe rachunki z liczbami zespolonymi.

3. Symboliczne wyrażenie prawa Ohma.

W myśl poprzednio podanych własności liczb zespolo-

*) Tu e — zasada logarytmów naturalnych $e = 2,7183$.

nych, spadek napięcia omowy symbolicznie wyrażony ma postać $\bar{U}_R = \bar{J} \cdot R$, spadek napięcia indukcyjny $\bar{U}_L = \bar{J} \cdot j \omega L$, spadek napięcia pojemnościowy $\bar{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \cdot \bar{J}$. Suma wszystkich spadków napięcia.

$$\bar{U} = \bar{J} \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = \bar{J} \cdot \bar{Z}$$

$$\bar{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

jest symboliczną postacią wyrażenia pozornej oporności.

4. Prawa Kirchhoffa symbolicznie wyrażone:

$$\text{I} \quad \Sigma \bar{J} = 0$$

$$\text{II} \quad \Sigma \bar{E} = \Sigma \bar{J} \bar{Z}.$$

5. Wyznaczenie zastępczego pozornego oporu wypadkowego symbolicznym rachunkiem przy połączeniu szeregowym:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \dots$$

przy połączeniu równoległym:

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots$$

Dla dwóch równoległych gałęzi:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$$

Po sprowadzeniu do postaci $\bar{Z} = a + j b$, znajdujemy wartość oporu pozornego ze wzoru

$$Z = \sqrt{a^2 + b^2}$$

*Zestawienie wzorów na wyrazy symboliczne oporów
w obwodach prądu zmiennego.*

Opór omowy	$\bar{Z} = R$
„ indukcyjny	$\bar{Z} = j \omega L$
„ pojemnościowy	$\bar{Z} = -j \frac{1}{\omega C} \quad 1/\bar{Z} = j \omega C$
R, L, C w połącz. szereg.	$\bar{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$
R i C równolegle	$\bar{Z} = \frac{R(1 - jRC\omega)}{1 + (RC\omega)^2}$
L i R równolegle	$\bar{Z} = \frac{R\omega L(\omega L + jR)}{R^2 + (\omega L)^2}$
L i C równolegle	$1/\bar{Z} = j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$

6. Wyrażenie symboliczne wartości chwilowej prądu:

$$\bar{J}_t = J_m e^{j(\omega t + \alpha)}$$

Symboliczny wyraz pochodnej wziętej według czasu:

$$\frac{\partial \bar{J}_t}{\partial t} = j \omega \bar{J}_t; \quad \frac{\partial^2 \bar{J}_t}{\partial t^2} = -\omega^2 \bar{J}_t \text{ i t. d.}$$

Wprowadzając do równań różniczkowych te wyrazy mamy prostsze przekształcenia.

XII. Prądy wielofazowe.

1. W układach trójfazowych przy połączeniu w gwiazdę napięcie międzyprzewodowe U , fazowe U_f ; $U = \sqrt{3} U_f = 1.732 U_f$ przy połączeniu w trójkąt i jednakowem obciążeniu faz prąd przewodowy J , prąd fazowy J_f ; $J = \sqrt{3} J_f$.

Przy jednakowym obciążeniu faz moc prądu trójfazowego $P = \sqrt{3} U J \cos \varphi$ gdzie φ jest różnicą faz prądu fazowego i napięcia fazowego.

Układy trójfazowe trójprzewodowe w urządzeniach elektrycznych mają niskie napięcia: 127, 220 lub 380 V. Układy trójfazowe czteroprzewodowe, z przewodem zerowym są wykonywane na 127/220 i 220/380 V.

2. W układzie dwufazowym niesymetrycznym z różnicą faz napięć 90° . $U = \sqrt{2} U_f = 1,414 U_f$. Przy jednakowym obciążeniu faz prąd w przewodzie zerowym $J_0 = \sqrt{2} J$.

XIII. Straty w żelazie w polu magn. sinusoidalnie zmiennem.

Żelazo w postaci paczki blach izolowanych od siebie, p — straty w watach na kg, f — częst. B_m — indukcja magn. maksym. a_1 i a_2 — współczynniki stałe.*)

$$p = a_1 \left(\frac{f}{50} \right) \cdot \left(\frac{B_m}{10000} \right)^2 + a_2 \left(\frac{f}{50} \right)^2 \cdot \left(\frac{B_m}{10000} \right)^2$$

dla doskonałej blachy $a_1 = 0,5$; $a_2 = 0,8$.

Inny wzór uwzględnia grubość blachy δ w mm**)

$$p = a_1 \left(\frac{f}{100} \right) \cdot \left(\frac{B_m}{1000} \right)^{1,6} + a_2 \left(\delta \frac{f}{100} \cdot \frac{B_m}{1000} \right)^2$$

Dla magnetycznej blachy zwykłej $a_1 = 0,104$; $a_2 = 0,204$
dla blachy nakrzemionej: $a_1 = 0,078$; $a_2 = 0,044$.

Pierwszy składnik straty na histerezę, drugi na prądy wirowe.

Stratność blach wyrażają zazwyczaj liczby stanowiące straty na histerezę i prądy wirowe łącznie przy częstotliwości zmian strum. magn. 50 i $B_m = 10000$ i $B_m = 15000$ gausów w temperaturze 30°C .

*) Według Vidmara „Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik“

**) Fraenckel „Theorie der Wechselströme“.

XIV. Prądy wielofalowe.

1. Według Fourier'a wzór na funkcję okresowo zmienną:

$$\begin{aligned} i &= J_0 + J_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + J_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots = \\ &= J_0 + J'_{1m} \sin \omega t + J'_{2m} \sin 2\omega t \dots + J''_{1m} \cos \omega t + \\ &\quad + J''_{2m} \cos 2\omega t \dots \end{aligned}$$

W tych wzorach:

$$J_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i \, dt; \quad J'_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T i \cdot \sin k\omega t \, dt$$

$$J''_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T i \cdot \cos k\omega t \, dt, \quad \text{oraz} \quad J^2_{1m} = J'^2_{1m} + J''^2_{1m}.$$

$J_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ — fala główna, następne wyższe harmoniczne. Falę główną nazywamy również pierwszą harmoniczną dalsze drugą harmoniczną i t. d.

2. Wartość skuteczna J — wielofalowej wielkości wynosi:

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{J_0^2 + \frac{1}{2} J^2_{1m} + \frac{1}{2} J^2_{2m} + \dots} = \\ &= \sqrt{J_0^2 + \frac{1}{2} J'^2_{1m} + \frac{1}{2} J''^2_{1m} + \dots} \end{aligned}$$

3. Moc prądu wielofalowego bez stałego składnika.

$$P = U_1 J_1 \cos \varphi_1 + \dots + U_n J_n \cos \varphi_n$$

jeżeli

$$U = \sqrt{U_1^2 + \dots + U_n^2} \quad \text{i} \quad J = \sqrt{J_1^2 + \dots + J_n^2}$$

$$J_1 \dots U_1 \dots$$

wartości skuteczne.

$$P = U J \cos \varphi;$$

— współczynnik równoważnego prądu.

$$\cos \varphi = \frac{U_1 J_1 \cos \varphi_1 + \dots + U_n J_n \cos \varphi_n}{\sqrt{(U_1^2 + \dots + U_n^2) \cdot (J_1^2 + \dots + J_n^2)}}$$

Przykłady:*) 1, kształt funkcji $y=f(x)$ prostokątnej, Y wartość maksymalna.

$$y = 4 \frac{Y}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right]$$

2. Kształt trapeceoidalny, poziomy odcinek zajmuje

$$\pi - 2\alpha,$$

$$y = \frac{4}{\pi \alpha} Y \left[\sin \alpha \sin x + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3x + \dots \right]$$

3. Kształt sinusoidy z odwróconą do góry ujemną półfala.

$$y = \frac{2Y}{\pi} \left[1 - \frac{2 \cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{2 \cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cos 6x}{5 \cdot 7} - \dots \right]$$

XV. Prądy nieustalone.

1. W obwodzie z opornością omową R i indukcyjnością L po włączeniu stałego napięcia U w chwili $t=0$ powstaje prąd wzrastający według wzoru:

$$i = U/R (1 - e^{-t/\tau}),$$

w tym wzorze $\tau = L/R$ stała czasu.

2. W tym samym obwodzie po włączeniu w chwili $t=0$ napięcia sinusoidalnie zmiennego $u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$, powstaje prąd, którego zależność od czasu wyraża się wzorem:

*) Fraenckel „Theorie der Wechselströme“.

$$i = J_m [\sin (\omega t + \alpha - \varphi) - e^{-t/\tau} \sin (\alpha - \varphi)]$$

$$J_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Prąd tego rodzaju przy powstawaniu może osiągnąć wartość prawie $2 J_m$ jeżeli $\sin (\alpha - \varphi) = 1$. Jeżeli rdzenie żelazne cewek znajdujące się w obwodzie są przy prądzie ustalonym znacznie nasycone magnetycznie, to skutkiem zmniejszenia się indukcyjności L , prąd przy włączeniu może przekroczyć wielokrotnie J_m .

3. W obwodzie z połączonemi w szereg opornością omową R i pojemnością C po włączeniu stałego napięcia U , powstaje prąd $i = (U/R) e^{-t/\tau}$, w tym wzorze $\tau = RC$.

Napięcie na kondensatorze

$$u_c = U (1 - e^{-t/\tau}).$$

4. W tym samym obwodzie po włączeniu napięcia sinusoidalnie zmiennego $u = U \sin (\omega t + \alpha)$, powstaje na kondensatorze napięcie zmienne według wzoru

$$u_c = \frac{U_m}{\sqrt{1 + R^2 (\omega C)^2}} [\sin (\omega t + \alpha - \varphi) - e^{-t/\tau} \sin (\alpha - \varphi)].$$

5. W obwodzie z połączonemi w szereg opornością omową R , indukcyjnością L i pojemnością C po włączeniu stałego napięcia U powstaje prąd:

$$a) \text{ przy } R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}; i = CU \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} (e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t})$$

$$b) \text{ przy } R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}; i = (U/L) t e^{-at}$$

$$b) \text{ przy } R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}; i = \frac{U}{\beta L} e^{-\alpha t} \sin \beta t.$$

W tych wzorach:

$$\alpha_1 = \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \quad \alpha_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}},$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}; \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

6. W tym samym obwodzie po włączeniu sinusoidalnie zmiennego napięcia $u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$ przy

$$R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

powstaje prąd:

$$i = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) + \frac{U_m}{Z\beta\sqrt{LC}},$$

$$e^{-\alpha t} \left[\sin(\alpha - \varphi) \sin(\beta t - \gamma) - \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\omega\sqrt{LC}} \sin \beta t \right]$$

w tym wzorze

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}; \quad \cotg \gamma = \frac{\alpha}{\beta}$$

inne oznaczenia jak poprzednio. Przy $\omega > \beta$ można spodziewać się przepięcia na kondensatorze, a przy $\omega < \beta$ przetężenia w obwodzie.

XVI. Prąd zmienny ustalony na długiej linii dwuprzewodowej z rozłożonemi RLC i A .

1. Oznaczmy przez R , L , C i A oporność, indukcyjność, pojemność i upływność linii na jednostkę długości, wtedy oporność falowa wyrażona symbolicznie będzie:

$$\bar{Z} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}}$$

a stała falowa

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)}.$$

Wzory symboliczne na prąd i napięcie na początku linii \bar{J}_p i \bar{U}_p w zależności od prądu i napięcia na końcu linii:

$$\bar{J}_k \text{ i } \bar{U}_k; \quad l — \text{długość linii}$$

$$\bar{U}_p = \bar{U}_k \cosh \gamma l + \bar{Z} \bar{J}_k \sinh \gamma l$$

$$\bar{J}_p = \frac{\bar{U}_k}{\bar{Z}} \sinh \gamma l + \bar{J}_k \cosh \gamma l$$

Kosinusy i sinusy hiperboliczne wyrażają się w sposób następujący:

$$\cosh \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}; \quad \sinh \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2},$$

2. Linja bez strat $A=0$; $R=0$. Wę wzorze

$$\gamma = a + jb; \quad a=0$$

$$\bar{U}_p = \bar{U}_k \cos bl + j \bar{J}_k \bar{Z} \sin bl$$

$$\bar{J}_p = \bar{J}_k \cos bl + j \frac{\bar{U}_k}{\bar{Z}} \sin bl$$

$$b = \omega \sqrt{LC}; \quad \bar{Z} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Szybkość biegu fal (L w henrach, C w faradach):

$$v = \frac{\omega}{b} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Przykł. W liniach stosowanych w praktyce w przybliżeniu:

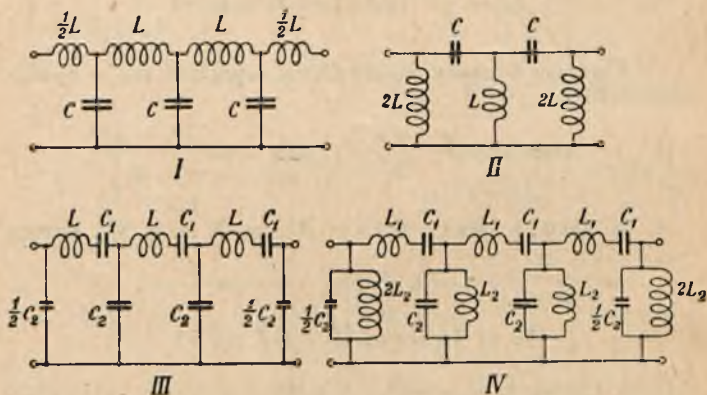
$$L \approx 0.1 \text{ mH/km} \quad C \approx 0.1 \text{ }\mu\text{F/km}.$$

wtedy
$$v = \frac{1}{\sqrt{10^{-11}}} \approx 3.10^5 \text{ km/sek}$$

jest to w przybliżeniu szybkość fal elektromagnetycznych, a więc i światła w próżni. Długość fali przy 50 okr./sek.

$$\lambda = v T = 6000 \text{ km.}$$

XVII. Filtry.



Rys. 28.

Są cztery charakterystyczne układy filtrowe: I-y układ tłumi prąd wszystkich częstotliwości powyżej

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad \text{Rys. 28 I}$$

II-gi układ tłumi prąd wszystkich częstotliwości poniżej

$$\omega_0 = \frac{1}{2 \sqrt{LC}} \quad \text{Rys. 28 II}$$

w III-cim układzie tłumienia niema dla prądów w granicach częstotliwości odpowiadających

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} \quad i \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC'}} \quad , \quad t_{II} \quad C' = \frac{C_1 C_2}{4 C_1 + C_2} ,$$

w iV-tym układzie tłumienia niema dla prądów w granicach częstotliwości odpowiadającej

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \left(\sqrt{1 + \frac{L_2}{L_1}} - \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \right)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \left(\sqrt{1 + \frac{L_2}{L_1}} + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \right);$$

przy założeniu, że $L_1 C_1 = L_2 C_2$. Rys. 28 IV.

XVIII. Jednostki wielkości elektrycznych.

Jednostki stosowane w elektrotechnice oparte są na podstawowych jednostkach bezwzględnych C. G. S. (centymetr, gram, sekunda). Układ jednostek C. G. S. opracowany w latach 1861 i 1862 przez British Association for the Advancement of the Sciences i następnie uzupełniony przez szereg międzynarodowych kongresów i konferencyj*) jest układem jednostek międzynarodowych.

Dla jednostek elektrycznych i magnetycznych mamy dwa układy jednostek bezwzględnych: elektrostatyczny (C.G.S.)_{es} i elektromagnetyczny (C.G.S.)_{em}. W skróceniu oznaczamy jednostkę w układzie (C.G.S.)_{es} przez Jes, w układzie (C.G.S.)_{em} — przez Jem.

*) Międzynarodowy Kongres Elektrotechniczny, Paryż 1881. Międzynarodowa Konferencja jednostek elektrotechnicznych, Paryż 1884. Kongres Mechaniki Stosowanej, Paryż 1889. Międzynarodowy Kongres Elektrotechniczny, Chicago 1893. Międzynarodowa Konferencja jednostek i wzorców elektrotechnicznych, Londyn 1908.

Układ (C.G.S.) es opiera się na określeniu Jes masy elektrycznej (ładunku, naboju) z prawa Coulomba, zaś układ (C.G.S.) em — na określeniu Jem masy magnetycznej z tegoż prawa Coulomba.

Jednostki magnetyczne w układzie (C. G. S.) es oraz jednostki elektryczne w układzie (C.G.S.) em określone są na podstawie prawa Laplace'a-Biot-Savart'a, w którego wzorze współczynnik proporcjonalności przyjmuje się równy jednostce bezwymiarowej.

Są dwa różne rodzaje założeń, na których bywają opierane powyższe układy bezwzględne.

Według Maxwella wzory Coulomba w próżni mają postać:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon_0 r^2} \quad \text{i} \quad F = \frac{m_1 m_2}{\mu_0 r^2}$$

Zakładając $\epsilon_0 = 1$ wyprowadzamy układ wymiarów i jednostek bezwzględnych elektrostatycznych. Zakładając zaś $\mu_0 = 1$ wyprowadzamy to samo w układzie bezwzględnym elektromagnetycznym. Według Heaviside'a i Wallot'a wzory Coulomba dla próżni piszemy w innej postaci:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \quad \text{i} \quad F = \frac{m_1 m_2}{4 \pi \mu_0 r^2}$$

i powyższe dwa układy jednostek bezwzględnych otrzymują się przy założeniu

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4 \pi} \quad \text{i} \quad \mu_0 = \frac{1}{4 \pi}$$

Odmienne założenie postaci wzorów Coulomba prowadzi do uproszczenia szeregu wzorów ważnych w praktyce.

Np. wzór na pojemność kondensatora płaskiego przybiera postać

$$C = \frac{\epsilon_1 s}{d}$$

Według Wallota we wzorze Laplace'a Biot-Savart'a wprowadza się 4π w mianowniku, wtedy:

$$dH = \frac{I dl \sin(r, dl)}{4\pi r^2}.$$

Zachowując jednostki (C.G.S.)em na I wypadną inne jednostki na H . Wzór na strumień magnetyczny przybierze postać:

$$\Phi = \frac{Iz}{S'}.$$

zachowując dla Φ jednostki — makswele, a dla I — ampery, l — cm, a s — cm².

Oporność magnetyczna wypadnie:

$$S' = \frac{10}{4\pi} \int \frac{dl}{\mu s}.$$

Większość jednostek układu C.G.S. okazała się niedogodna w praktyce, gdyż były zbyt duże lub zbyt małe. Na Kongresie międzynarodowym 1893 r. ustalono określenia i nazwy jednostek układu praktycznego.

Stosunek jednostek tego układu do układu (C.G.S.)em stanowi 10 w potęgze całkowitej dodatniej lub ujemnej.

Jednostką praktyczną natężenia prądu jest amper, stanowiący 10^{-1} Jem, napięcia i siły elektromotorycznej-wolt = 10^8 Jem, oporności — om = 10^9 Jem.

Według powyższych określeń ustalono wzorce praktyczne podstawowych jednostek elektrycznych ampera i oma (patrz dział miernictwa). Wzorzec t. zw. ampera międzynarodowego różni się od wielkości określonej względem jednostki bezwzględnej o mały ułamek: 0,0000 m , gdzie m jest mała cyfra. Wzorzec oma międzynarodowego, według National Physical Laboratory w Anglii, = $1,00052 \pm 0,00002$ omów określonych jako wielokrotność jednostki bezwzględnej.*)

Jednostki wielkości magnetycznych, stosowane w praktyce, są jednostkami układu (C.G.S.)em. Międzynarodowa komisja elektrotechniczna, na zebraniu plenarnym w Skandynawii w 1930 roku uznała za pożądane nadać nazwy jednostkom wielkości magnetycznych i związać je z układem jednostek praktycznych.

*) E.T.Z 1932 r. str. 618. oraz Annalen d. Physik 63. 1920 r. str. 179.

Tablica 1. Wielkości elektryczne i magnetyczne; jednostki i ich wymiary.

	Wielkość	Znak wielkości	Jednostka praktyczna		El.-stat. jednostka zawiera jednostek praktycznych	El.-magnet. jednostka	Wymiary w układzie	
			Nazwa	Skrót			El.-stat.	El.-magnet.
1.	Natężenie prądu elektr. . .	J	Amper	A	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-9}$	10	$\frac{3}{2} g s^{\frac{1}{2}} -2$	$\frac{1}{2} c g^{\frac{1}{2}} s^{-1}$
2.	Potencjał elektryczny . . .	V	—	—	—	—	—	—
3.	Napięcie elektryczne . . .	U	Wolt	V	300	10^{-8}	$\frac{1}{2} g s^{\frac{1}{2}} -1$	$\frac{3}{2} c g^{\frac{1}{2}} s^{-2}$
4.	Siła elektromotoryczna . . .	E	—	—	—	—	—	—
5.	Oporność elektryczna . . .	R	Om	Ω	$9 \cdot 10^{11}$	10^{-9}	-1 $c s$	$c s$ -1
6.	Przewodność elektryczna . . .	G	Simens	S	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$	10^9	-1 $c s$	-1 $c s$
7.	Masa elektryczna (ładunek) . . .	Q	Kulomb	C	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-9}$	10	$\frac{3}{2} g s^{\frac{1}{2}} -1$ $c g s$	$\frac{1}{2} c g^{\frac{1}{2}} s^{-1}$ $c g$
8.	Moc elektryczna	P	Wat	W	10^{-7}	10^{-7}	$c^2 g s^{-3}$	$c^2 g s^{-3}$
9.	Praca elektryczna	W	Dżul	J	10^{-7}	10^{-7}	$c^2 g s^{-2}$	$c^2 g s^{-2}$
10.	Pojemność elektryczna . . .	C	Farad	F	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$	10^9	c	-1 $c s^2$

Tablica 2. Zestawienie najczęściej stosowanych układów jednostek.

Jednostki podstawowe	Nazwa układu	Zastosowanie
cm, gr, sek	Układ c. g. s.	Fizyka
cm, sek, om, amp.	Układ praktyczny jednostek elektrycz.	Podstawy miernictwa elektrycznego
cm, sek, wolt, om.	" "	Praktyczna elektrotechnika
m, kg cięż, sek.	Układ techniczny	Mechanika
m, ton, sek	Układ M T S	Mechanika i elektryczność (używany we Francji)

Tablica 3. Jednostki mocy.

Konie mech. (MK) metryczne	Konie ang. (HP) *)	kgm/sek	erg/sek $\times 10^{10}$	Kilowaty (kW)
1,36	1,34	102,02	1,000 51	1
1,013 8	1	76,039	0,745 68	0,745 30
1	0,986	75	0,735 50	0,735 12

Tablica 4. Jednostki pracy.

kgm	Ergi $\times 10^{10}$	Dżule (J)	Kalorie kilogr.	Kilowatogodziny (kWh)
1	0,009 80	9,801 7	0,002 34	$0,272 \cdot 10^{-5}$
0,1020	0,001 000 5	1	0,238 99 $\cdot 10^{-3}$	$0,277 \cdot 10^{-6}$
426,8	4,186 3	4184,2	1	$1,1623 \cdot 10^{-3}$
367 286	3601,84	$3600 \cdot 10^3$	860,38	1

*) Koń angielski (Horse Power) = 550 stopofuntów na sek.

Tablica 5. Jednostki sił. **)

Tonna	<i>MG.</i> (T. t)	$9,806\ 65 \times 10^8$ dyn (dn)
Kilogram	<i>k G</i> (kg)	980 665 dn ***)
Sten	<i>s n</i>	10^8 dn

Tablica 6. Jednostki ciśnienia. **)

Barja	<i>b</i>	1 dyna na cm^2
Bar	—	10^6 <i>b</i>
Piez	<i>pz</i>	10^4 <i>b</i>
Atmosfera techniczna kg/cm^2	<i>at</i> *)	$9,806\ 65 \times 10^5$ <i>b</i>
Atmosfera fizyczna (760 mm Hg 0°; $g_n = 980,665 \text{ cm/sek}^2$)	<i>Atm</i>	$1,013\ 25 \times 10^6$ <i>b</i>

Tablica 7. Wielokrotności.

<i>G</i>	Giga	10^9	<i>dc</i>	Decy	10^{-1}
<i>M</i>	Mega	10^6	<i>c</i>	Centy	10^{-2}
<i>k</i>	Kilo	10^3	<i>m</i>	Mili	10^{-3}
<i>h</i>	Hekto	10^2	μ	Mikro	10^{-6}
<i>dk</i>	Deka	10	<i>m</i> μ	Milimikro	10^{-9}

Milimikro inaczej nazywa się nano — (n). $\overset{\circ}{\text{Å}}$ Angström = 10^{-8} cm — miara długości fali świetlnej.

*) Nadciśnienie t. j. ciśnienie po odjęciu ciśnienia równoważącego ciśnienie atmosfery oznacza się „atn”, a ciśnienie bezwzględne „ata”.

**) Patrz polskie normy *P N/o* 110.

***) W zaokrągleniu 981000 dyn.

BIBLIOGRAFJA

Prof. Dr. W. Pogorzelski — Zarys teorii wektorów.

Prof. Dr. L. Staniewicz — Podstawy elektrotechniki (litogr. skrypty).

Prof. Dr. S. Fryze — Elektrotechnika ogólna (litogr. skrypty).

Prof. M. Pożaryski — Naukowe podstawy elektrotechniki. II wydanie. 1927.

Prof. K. Küpfmüller — Einführung in die theoretische Elektrotechnik 1932 r.

Dr. Ign. A. Fraenckel — Theorie der Wechselströme. 1930 r.

G. Szarvady — Unités électriques. 1919.

E. v. Rziha und J. Seidener — Starkstromtechnik Taschenbuch 1930 r.

Memento d'Electrotechnique par A. Curchod T. I. 1932 r.

Uwaga do strony 23, 24 i 25.

Sprawa wytrzymałości elektrycznej dielektryków została ujęta nie abstrakcyjnie jako właściwości materiałów izolacyjnych, która charakteryzuje się *natężeniem pola elektrycznego jednostajnego przebijającego* dielektryk, lecz rozważano dielektryki w układach izolacyjnych, stąd wytrzymałość pojęta jako napięcie na cm grubości dielektryka, przebijające dielektryk w pewnym zespole dielektryków i przewodników.