

zadasyć uczynić temu podwóynemu warunkowi; a zatem  $x$  nie może mieć innych wartości iak  $x=1$  i  $x=4$ .

Niech będzie  $x=1$ , skąd  $3y+z=27$ , czyli  $z=27-3y$ .

Ważności te dla  $x$  i  $z$  wstawivszy w równanie pierwsze, otrzymamy  $u=72+2y$ .

Pierwsza z tych formuł pokazuje, że  $y$  nie może być  $>9$ ; a zatem jeżeli

$$x=1 \quad \begin{cases} y=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \\ z=27, 24, 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0, \\ \text{mamy} \quad u=72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, \end{cases}$$

Niech  $x$  będzie  $=4$ , otrzymamy  $3y+z=8$ ,

$$\text{skąd} \quad \begin{aligned} z &= 8-3y, \\ u &= 88+2y. \end{aligned}$$

Wyrażenie dla  $z$  dowodzi, że  $y$  nie może być  $>2$ ,

$$\text{a zatem gdy } x=4, \text{ otrzymamy} \quad \begin{cases} y=0, 1, 2, \\ z=8, 5, 2, \\ u=88, 90, 92. \end{cases}$$

Skąd widzimy, że zagadnienie dane przyymuie tylko trzynaście rozwiązań; a dziesięć, jeżeli odrzucimy rozwiązania 0.

### §. III. Rozbiór równań niewyznaczonych drugiego stopnia.

138. W téy części zakładamy sobie, iak w rozbiórze równań niewyznaczonych pierwszego stopnia, rozwiązać w liczbach całkowitych takie zagadnienia, w którychby liczba równań była mniejsza od liczby niewiadomych. Aże w ogólności równanie drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi daje ważność dla iednéy z niewiadomych, w funkcyi niespółmiernej drugiéy niewiadoméy, więc zadanie takowe na

tém

tém polega, i o d aby oznaczyć dla iednéy zniewiadomych ważności spółmierne, któreby miały tę własność, iżby i dla drugiéy niewiadoméy dały ważności spółmierne, 2re wybrać z pomiędzy ważności pierwszéy niewiadoméy, ważności całkowite które dadzą zarazem ważności całkowite dla drugiéy niewiadoméy. Stąd widzimy, że rozbiór równań niewyznaczonych drugiego stopnia, powinien przedstawiać większe trudności, iak rozbiór pierwszego stopnia. Jakoż w istocie iest to iedna z teoryj trudniejszych w algebrze. (\*)

Wyłożymy iednak rozwiązanie, w liczbach całkowitych zagadnień z dwiema niewiadomemi, w których równania zawierają tylko *prostokąt* czyli *iloczyn*, bez kwadratu z niewiadomych.

(Zadania te dosyć ciekawe same przez się, są wyjęte równie iak kilka powyższych z Algiebry Lhuillera).

Zadanie pierwsze. *Znaleźć w liczbach całkowitych boki prostokąta, którego powierzchnia zawierałaby cztery razy tyle stóp kwadratowych, ile iego obwód zawiera stóp podłużnych.*

Niech  $x$  i  $y$  oznaczają boki prostokąta w stopach:  $xy$  oznaczać będzie powierzchnią, a  $2x+2y$  obwód iego. Podług wystowienia będzie równanie

$$xy = 8x + 8y,$$

$$\text{a zatem } x = \frac{8y}{y-8}, \text{ czyli } x = 8 + \frac{64}{y-8}.$$

Według tej formuły ważność dla  $x$ , zawierająca w sobie  $y$ , nie będzie całkowitą choćby taką była ważność dla  $y$ ; ieżeli  $y-8$  nie będzie dzielnikiem 64.

Daymy na to, że są wyznaczone wszystkie dziel-

---

(\*) Odsyłamy w tym przedmiocie do *Teoryi liczb* przez Legendra.

niki liczby 64; i żeśmy ie wzięli ze znakami  $+$  i  $-$ , będzie.

$y = 8 = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, | -64, -32, -16, -8, -4, -2, -1,$

skąd  $y = 9, 10, 12, 16, 24, 40, 72, | -56, -24, -8, 0, 4, 6, 7;$

Wstawiliśmy w wyrażenie  $x$  ważność dla  $y = 8$  i przywiódłszy, otrzymamy.

$x = 72, 40, 24, 16, 12, 10, 9, | 7, 6, 4, 0 = 8 = 24 = 5.$

Zastanowiwszy się nad wypadkami powyższemi widzimy, że ważności dla  $x$  są w porządku odwrotnym względem ważności dla  $y$ , co w istocie tak być powinno, ponieważ równanie zagadnienia *nie* *zmieni się, biorąc w nim  $x$  za  $y$  i nawzajem.*

Stąd wniesiemy odrzucając ważności odienne, że składy rozwiązań istotnie różnych są:

$$y = 9, 10, 12, 16,$$

$$x = 72, 40, 24, 16.$$

A zatem zagadnienie może być czworako rozwiązane.

Sprawdzimy skład  $y = 10; x = 40.$

Gdy podstawa prostokąta zawiera 40 a wysokość 10 stóp; powierzchnia będzie 400 stóp kwa: obwód zaś jest  $2(40 + 10)$  czyli 100 stóp: iakoż  $4000 = 4 \times 100$ : podobnie z trzema innemi składami.

Uogólniwszy to zadanie, i załóżmy sobie wyznaczyć prostokąt, którego by powierzchnia zawierała  $m$  razy tyle stóp kwadratowych ile obwód zawiera stóp podłużonych.

Mamy równanie  $xy = m(2x + 2y) = 2mx + 2my.$

Wyciągnawszy ważność dla  $x$  i wykonawszy o ile można dzielenie będzie.

$$x = 2m + \frac{4m^2}{y - 2m}.$$

Można tu nie mieć względu na dzielniki odjemne ilości  $4m^2$ , ponieważ gdy  $y - 2m$  będzie odjemne i liczebnie mniejsze od  $2m$ ;  $y$  będzie wprawdzie dodatne, aże w tym razie  $\frac{4m^2}{y - 2m}$  jest odjemne i li-

czebnie większe od  $2m$ , więc ważność odpowiada-  
jąca dla  $x$  jest odjemna. Przeciwnie byłoby gdyby  $y - 2m$  było odjemne, lecz liczebnie większe od  $4m^2$ , to jest: gdyby  $y$  dyło odjemne, a  $x$  dodatne. Lecz tu trzymamy się tylko rozwiązań bezpośrednio odpowiadających zadaniu.

To założywszy oznaczmy przez  $d, d', d'', d''' \dots$  dzielniki ilości  $4m^2$ ; a zatem

$$y - 2m = d, d', d'', d''' \dots;$$

skąd  $y = 2m + d, 2m + d', 2m + d'', 2m + d''' \dots$ ,  
następnie oznaczywszy ilorazy całkowite z  $4m^2$  przez  $d, d', d'', d''' \dots$ ; głoskami  $q, q', q'', q''' \dots$ , będzie

$$x = 2m + q, 2m + q', 2m + q'', 2m + q''' \dots,$$

Liczba rozwiązań zdaie się zrazu być równa liczbie dzielników ilości  $4m^2$ : a że równanie jest symetryczne (\*) względem  $x$  i  $y$ , więc rozwiązując je względem  $y$ , ważności dla  $y$  byłyby te same, co dla  $x$ , lecz wzięte w porządku odwrotnym.

---

(\*) Nazywa się *funkcją symetryczną* dwóch albo więcej ilości, wszelkie wyrażenie zawierające te ilości jednym sposobem skombinowane, tak iż zamieniąwszy jedną z tych ilości na drugą, wyrażenie nie zmieni ważności liczebnej.

A tak, *liczba rozwiązań istotnie różnych, równa się połowie liczby dzielników; jeżeli ta ostatnia liczba jest parzysta, będzie zaś równa połowie powiększonej jednością, jeżeli ta liczba jest nieparzysta.*

Niech na przykład będzie,

$$m=3 \text{ kąd } x=6+\frac{36}{y-6};$$

szukając dzielników liczby 36; otrzymamy

$$y-6=1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36;$$

$$\text{skąd } y=7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 42;$$

$$\frac{36}{y-6}=36, 18, 12, 9, 6, 4, 3, 2, 1,$$

$$\text{więc } x=42, 24, 18, 15, 12, 10, 9, 8, 7;$$

to jest mamy pięć różnych rozwiązań.

140. Zadanie drugie. *Mając bok  $a$  kwadratu, znaleźć w liczbach całkowitych, boki prostokąta, którego obwód tak się miał do obwodu kwadratu; jak powierzchnia prostokąta, do powierzchni kwadratu?*

Niech  $x$  i  $y$  oznaczać boki prostokąta,  $2(x+y)$  i  $xy$  oznaczać będą jego obwód i powierzchnią:  $4a$  i  $a^2$  oznaczać jego obwód i powierzchnię kwadratu

$$\text{a zatem mamy równanie, } \frac{xy}{a^2} = \frac{2(x+y)}{4a},$$

$$\text{czyli } 2xy = a(x+y).$$

Mogą być dwa przypadki; albo  $a$  jest parzyste, albo nie parzyste.

1a. Jeżeli  $a$  jest parzyste i równe  $2a'$ , będzie opuszczając spólny czynnik 2,  $xy = a' (x + y)$ , skąd  $x = a' + \frac{a'^2}{y - a'}$ ; a zatem zadanie jest to samo co poprzedzające.

2a. Jeżeli  $a$  jest nieparzyste, mamy

$$x = \frac{ay}{2y - a} \text{ czyli } x = \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2(2y - a)},$$

aby więc ważność, dla  $x$  była całkowitą liczbą, potrzeba ażeby  $2y - a$  było dzielnikiem ilości  $a^2$ .

Oznaczając przez  $d, d', d'' \dots$ , te dzielniki, zaś przez  $q, q', q'' \dots$ , ilorazy wynikłe z podzielenia ilości  $a^2$  przez  $d, d', d'' \dots$ , (ilości  $d, d', d'' \dots, q, q', q'' \dots$  są koniecznie liczbami nieparzystymi ponieważ podług przypuszczenia  $a$  jest nieparzystą) będzie  $2y - a = d, d', d'', \dots$ , (liczby nieparzyste),

$$\text{skąd } y = \frac{a+d}{2}, \frac{a+d'}{2}, \frac{a+d''}{2} \text{ (wyraż: całk.)}$$

$$\frac{a^2}{2y - a} = q, q', q'', \text{ (liczby nieparzyste)}$$

$$\text{a zatem } x = \frac{a+q}{2}, \frac{a+q'}{2}, \frac{a+q''}{2} \text{ (wyrażenia całkow:)}$$

Niech naprzód będzie  $a = 20$ , równanie będzie

$$2yx = 20(x + y)$$

czyli podzieliwszy przez 2 i rozwiązawszy względem  $x$ ,

$$x = 10 + \frac{100}{y - 10};$$

szukając dzielników liczby 100, otrzymamy

$$y - 10 = 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100;$$

$$\text{skąd } y = 11, 12, 14, 15, 20, 30, 35, 60, 110;$$

$$\frac{100}{y - 10} = 100, 50, 25, 20, 10, 5, 4, 2, 1;$$

a zatem  $x = 110, 60, 35, 30, 20, 15, 14, 12, 11$ ,  
to jest mamy *pięć różnych rozwiązań*.

Niech powtórę będzie  $a = 15$ ; w tym razie

$$2xy = 15(x + y),$$

$$\text{skąd } x = \frac{15y}{2y - 15}, \text{ czyli } x = \frac{15}{2} + \frac{225}{2(2y - 15)},$$

szukając dzielników dla 225, otrzymamy

$$2y - 15 = 1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225;$$

$$\text{skąd } y = 8, 9, 10, 12, 15, 20, 30, 45, 120;$$

$$\frac{225}{2y - 15} = 225, 75, 45, 25, 15, 9, 5, 3, 1;$$

a zatem  $x = 120, 45, 30, 20, 15, 12, 10, 9, 8$ ;  
razem *pięć odmiennych rozwiązań*.

141. Zadanie trzecie. *Mając dany bok a sześcianu w liczbie całkowitej, znaleźć w liczbach całkowitych bok podstawy i wysokości równoległościannu prostokątnego z podstawą kwadratową; tak aby objętości tych brył miały się jak ich powierzchnie?*

Niech  $x$  będzie bokiem podstawy,  $y$  wysokością równoległościannu, zatem  $x^2y$  i  $2x^2 + 4xy$  oznaczać będą objętość i powierzchnią całkowitą téj bryły:

$a^3$  i  $6a^2$  są wyrażenia objętości i powierzchni sześcianu danego; mamy równanie

$$\frac{x^2 y}{2x^2 + 4xy} = \frac{a^3}{6a^2},$$

czyli zniosłszy mianowniki i przywiódłszy będzie

$$3xy = ax + 2ay,$$

skąd  $x = \frac{2ay}{3y - a} = \frac{2a}{3} + \frac{2a^2}{3(3y - a)},$

czyli  $3x = 2a + \frac{2a^2}{3y - a}.$

To uczyniwszy, oznaczmy przez  $d, d', d'' \dots$  dzielniki ilości  $2a^2$ ; uczynimy

$$3y - a = d, \quad d', \quad d'' \dots;$$

wypadnie  $y = \frac{a + d}{3}, \frac{a + d'}{3}, \frac{a + d''}{3} \dots$

niech następnie  $q, q', q'' \dots$  oznaczają ilorazy z  $2a^2$  przez  $d, d', d'' \dots$  a zatem będzie

$$\frac{2a^2}{3y - a} = q, \quad q', \quad q'', \dots;$$

skąd  $3x = 2a + q, 2a + q', 2a + q'' \dots$

skąd  $x = \frac{2a + q}{3}, \frac{2a + q'}{3}, \frac{2a + q''}{3} \dots$

Biorąc w tych dwóch szeregach ważności dla  $x$  i  $y$ , tylko całkowite, otrzymamy składy w liczbach całkowitych czyniące zadosyć równaniu.



Niech naprzykład będzie  $a=8$ ; równanie zamieni się na  $3x=16+\frac{128}{3y-8}$ ,

szukając dzielników dla 128 i czyniąc je równe

$$3y-8=1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128,$$

skąd  $y=3, 4, 4, 8, 4, 24, 4,$

$$\frac{128}{3y-8}=128, 32, 8, 2;$$

a zatem  $3x=16+128, 16+32, 16+8, 16+2,$

a następnie  $x=48, 16, 8, 6;$

a tak równanie szczególne przybiera te tylko składy ważności

$$x=48, 16, 8, 6,$$

$$y=3, 4, 8, 24,$$

Dla wprawy podamy do rozwiązania następujące 4ry równania

$$1\text{mo: } xy=2x+2y+20 \begin{cases} x=26, 14, 10, 8, \\ y=3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

2do.  $8xy=6x+5y+12$ , jeden tylko układ ważności przybiera to równanie,  $y=6, x=1$ ,

$$3\text{e } 4xy=3x+2y-12, \begin{cases} x=0; 4, \\ y=6, 0. \end{cases}$$

4to. równanie ogólne  $mxy=ax+by+c$ .

Zadanie czwarte. Jakie są w liczbach całkowitych objętości równoległościanów prostokątnych, z podstawami kwadratowymi, gdy objętość którąkolwiek zawiera pięć razy tyle stóp sześciennych, ile jego powierzchnia zawiera stóp kwadratowych?

(Od: { Podstawa.  $x = 220, 120, 70, 60, 45, 40, 30, 28, 25, 24, 22, 21$   
 { wysokość:  $y = 11, 12, 14, 15, 18, 20, 30, 35, 50, 60, 110, 210$  )

dwanaście rozwiązań.

## ROZDZIAŁ V.

*Tworzenie potęg, i wyciąganie pierwiastków  
 iakiegokolwiek stopnia.*

**W**STEP. Aby rozwiązać równanie stopnia drugiego, potrzeba było umieć wyciągnąć pierwiastek kwadratowy; podobnież rozwiązanie równań trzeciego, czwartego .... stopnia, wymaga wiadomości wyciągania pierwiastku trzeciego, czwartego .... i t. d. potęgi, z ilości bądź liczebnej, bądź algebricznej.

Podniesienie do potęg, wyciąganie pierwiastków, i działania z ilościami pierwiastkowymi, będą przedmiotem tego rozdziału, który z pierwszym, i częścią rozdziału trzeciego, składa całość działań na liczbach szczególnych, lub wyrażonych algebricznie.