

§. III. O równaniach i zagadnieniach drugiego stopnia z dwiema, lub kilką niewiadomymi ilościami.

110. Nie możemy tu wyłożyć całej teorii w którą wstępujemy, bo iak w krótcie zobaczymy, rozwiązanie dwóch równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi ilościami, zależy w ogólności od rozwiązania równania stopnia czwartego z jedną niewiadomą; tu więc rozbierzemy takie tylko zagadnienia, które zależą od rozwiązania równania stopnia drugiego z jedną niewiadomą.

Zagadnienie pierwsze. Znaleźć dwie liczby takie, ażeby *summa* iloczynów z tych liczb i odpowiedziących *a* i *b*, była równa  $2s$ , a iloczyn z samych niewiadomych był równy  $p$ .

Rozwiązanie. Oznaczmy dwie szukane liczby przez  $x$  i  $y$ , a zatem będą równania  $ax + by = 2s$ ,  
 $xy = p$ .

z pierwszego wyprowadzimy  $y = \frac{2s - ax}{b}$ , wstawwszy tę ważność w równanie drugie, i przywiódłszy otrzymamy  $ax^2 - 2sax = -bp$ ,

a zatem 
$$x = \frac{s}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{s^2 - abp},$$

a następnie 
$$y = \frac{s}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{s^2 - abp}.$$

To zagadnienie iak widzimy przyyмуje dwa rozwiązania bezpośrednie, albowiem  $s$  jest  $> \sqrt{s^2 - abp}$ ; lecz, ażeby te ważności były rzeczywiste; potrzeba aby było  $s^2 >$  albo  $= abp$ .

Niech będzie  $a = b = 1$ , ważności dla  $x, y$  zamienia się na  $x = s \pm \sqrt{s^2 - p}$ ; a  $y = s \mp \sqrt{s^2 - p}$ .

Stąd widzimy że dwie ważności dla  $y$ , są równe dwóm ważnościom dla  $x$ , lecz wziętym w odwrotnym porządku; to jest jeżeli  $s + \sqrt{s^2 - p}$  oznacza ważność dla  $x$ ; więc  $s - \sqrt{s^2 - p}$  oznaczać będzie ważność odpowiadającą dla  $y$ , i na odwrot. Okoliczność tę wytłumaczymy, uważając że w tym szczególnym przypadku równania zamieniają się na następujące

$$\begin{cases} x + y = 2s \\ xy = p \end{cases}$$

i natenczas zagadnienie tak się wystawi:

*Znaleźć dwie liczby, których summa  $2s$ , a ich iloczyn  $p$ . Albo też tak: Podzielić liczbę  $2s$  na dwie części, którychby iloczyn równał się daney liczbie  $p$ .*

Lecz widzieliśmy (pod ust. 96.) że te części są koniecznie połączone z sobą, przez równanie drugiego stopnia  $x^2 - 2sx + p = 0$ , w którym współczynnik wyrazu drugiego wzięty ze znakiem przeciwnym, oznacza sumnę  $2s$ , a ostatni wyraz jest iloczynem z tych dwóch części.

111. Zagadnienie drugie. *Znaleźć cztery liczby proporcji, mając wiadomą sumnę skrajnych  $2s$ , sumnę średnich  $2s'$ , i sumnę kwadratów z tych czterech liczb równą  $4c^2$ .*

Oznaczmy przez  $u, x, y, z$ , cztery wyrazy proporcji, a zatem na mocy własności proporcji otrzymamy równania

$$u + z = 2s,$$

$$x + y = 2s',$$

$$uz = xy.$$

i nadto według warunku zagadnienia:

$$u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 4c^2.$$

Mając te cztery równania, ułatwimy ich rozwiązanie przez wprowadzenie ilości niewiadomej pomocniczej.

I tak niech  $p$ , oznacza iloczyn średnich lub skrajnych, a zatem będą

$$1^{\circ} \text{ Równania } \begin{cases} u+z=2s \\ uz=p \end{cases} \text{ skąd } \begin{cases} u=s+\sqrt{s^2-p} \\ z=s-\sqrt{s^2-p} \end{cases}$$

(Zobacz zagadnienie poprzedzające.)

$$2^{\circ} \text{ Równania } \begin{cases} x+y=2s' \\ xy=p \end{cases} \text{ skąd } \begin{cases} x=s'+\sqrt{s'^2-p} \\ y=s'-\sqrt{s'^2-p} \end{cases}$$

Widzimy teraz, że wyznaczenie czterech niewiadomych zależy od iloczynu  $p$ .

Lecz gdy zamiast  $u$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , wstawimy te ich wartości, w ostatnie z równań zagadnienia, otrzymamy

$$(s+\sqrt{s^2-p})^2 + (s-\sqrt{s^2-p})^2 + (s'+\sqrt{s'^2-p})^2 + (s'-\sqrt{s'^2-p})^2 = 4c^2$$

rozwinąwszy i przywiódłszy będzie:

$$4s^2 + 4s'^2 - 4p = 4c^2; \text{ skąd } p = s^2 + s'^2 - c^2,$$

wstawiwszy tę wartość  $p$ , w wartości dla  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $z$ , otrzymane; wypadnie

$$\begin{cases} u = s^2 + \sqrt{c^2 - s'^2}, & x = s' + \sqrt{c^2 - s^2}, \\ z = s - \sqrt{c^2 - s'^2}, & y = s' - \sqrt{c^2 - s^2}. \end{cases}$$

Cztery te liczby widocznie stanowią proporcją, albowiem

$$uz = (s + \sqrt{c^2 - s'^2})(s - \sqrt{c^2 - s'^2}) = s^2 - c^2 + s'^2$$

$$xy = (s' + \sqrt{c^2 - s^2})(s' - \sqrt{c^2 - s^2}) = s'^2 - c^2 + s^2.$$

Uwaga. To zagadnienie wyjęte z Algiebrzy Lhuillera dowodzi, iak wprowadzenie do rachunku *niewiadomey pomocniczey*, ułatwia wyznaczenie niewiadomych. Znayduie się w wspomioném dziele więcej podobnego gatunku zagadnień, które prowadzą do równania stopni wyższych nad drugi, a które iednak można rozwiązać za pomocą równań pierwszego i drugiego stopnia, wprowadzając *niewiadomą pomocniczą*.

112. Póznaymy teraz przypadek, w którym zagadnienie prowadzi do dwóch iakichkolwiek równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomemi.

Nazywa się równanie *drugiego stopnia*, z dwiema niewiadomemi to, które zawiera *drugą potęgę* lub *iloczyn dwóch niewiadomych*.

$$\text{I tak} \quad 3x^2 - 4x + y^2 - xy - 5y + 6 = 0,$$

$$7xy - 4x + y = 0,$$

są równania drugiego stopnia.

A tak wszelkie równanie drugiego stopnia z dwiema niewiadomemi, ma postać

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + fx + g = 0,$$

w którym  $a, b, c$ , oznaczają ilości wiadome, czy to liczebne, czy algebraiczne.

Niech będą dwa równania

$$ax + bxy + cx^2 + dy + fx + g = 0,$$

$$a'x + b'xy + c'x^2 + d'y + f'x + g' = 0.$$

Uporządkowawszy ie podług niewiadomey  $x$ , będzie

$$cx^2 + (by + f)x + ay^2 + dy + g = 0,$$

$$c'x^2 + (b'y + f')x + a'y^2 + d'y + g' = 0.$$

To uczy-

To uczyniwszy, jeżeli dwa współczynniki  $x^2$ , będą te same w dwóch równaniach, otrzymamy, odcinając wyrazy iednego od drugiego, tylko iedno równanie pierwszego stopnia względem  $x$ , które mogło być wzięte za iedno, z równań danych, i z tego równania otrzymalibyśmy ważność dla  $x$ , wyrażoną przez ilość  $y$ , tę dopiero ważność wstawiając w iedno z równań danych, otrzymalibyśmy tym sposobem równanie, które zawierałoby tylko iedną niewiadomą  $y$ .

Lecz gdy rozmnóżemy pierwsze równanie przez  $c'$ , a drugie przez  $c$ ; otrzymamy,

$$cc'x^2 + (by + f)c'x + (ay^2 + dy + g)c' = 0,$$

$$cc'x^2 + (b'y + f')cx + (a'y^2 + d'y + g')c = 0.$$

Te równania mogą być wzięte za równania poprzedzające; nadto współczynnik przy  $x^2$  jest w obu dwóch ten sam. Odcinając więc ich wyrazy od siebie otrzymamy

$$\{ (bc' - cb')y + fc' - cf' \} x + (ac' - ca')y^2 + (dc' - cd')y + gc' - cg' = 0,$$

$$\text{skąd } x = \frac{(ca' - ac')y^2 + (cd' - dc')y + cg' - gc'}{(bc' - cb')y + fc' - cf'}$$

Ważność tę dla  $x$ , wstawiając w iedno z równań danych, otrzymamy *równanie ostateczne* zawierające w sobie tylko niewiadomą  $y$ .

Lecz nie wykonywając tego wstawienia, którego wypadek byłby bardzo zawikłany, łatwo jest rozpoznać, że równanie z niewiadomą  $y$ , powinno być w ogólności stopnia 4go, ponieważ licznik ważności dla  $x$ , jest w postaci  $my^2 + ny + p$ , a zatem kwadrat z niego, czyli wyrażenie dla  $x^2$  jest czwartego

stopnia. Ten zaś kwadrat będzie częścią wypadku wstawienia.

A zatem w ogólności, rozwiązanie dwóch równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi, zależy od rozwiązania równania stopnia 4go z jedną niewiadomą.

113. Znajduie się gatunek równań stopnia 4go, których rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania równań stopnia drugiego. Równania takowe są następującej postaci

$$x^4 + px^2 + q = 0.$$

i zowią się *trzymianowemi*, albo *dwu kwadratowemi* (*bicarrées*), ponieważ zawierają tylko trójakiego gatunku wyrazy; to jest: wyraz mający  $x^4$ , wyraz mający  $x^2$  i wyraz wiadomy.

Ażeby rozwiązać równanie  $x^4 + px^2 + q = 0$ , uczynimy na chwilę  $x^2 = y$ , a zatem równanie poprzedzające zamieni się na  $y^2 + py + q = 0$ ,

skąd 
$$y = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

a że równanie  $x^2 = y$  daie  $x = \pm \sqrt{y}$ ;

więc 
$$x = \pm \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

Z rozwiązania tego równania widzimy, że niewiadoma ma cztery wartości, ponieważ każdy ze znaków  $+$  i  $-$ , znajdujących się przy pierwszym znaku pierwiastku, może być następnie kombinowany z każdym znakiem znajdującym się przy drugim znaku pierwiastku, te jednak wartości po dwiebrane są sobie równe, lecz ze znakami przeciwnymi.

I tak, niech będzie równanie  $x^4 - 25x^2 = -144$ ,  
uczyniwszy  $x^2 = y$ , otrzymamy  $y^2 - 25y = -144$ ,  
skąd .....  $y = 16$ ,  $y = 9$ .

Ważność tę włożywszy w równanie  $x^2 = y$ ,  
wypadnie 1°.  $x^2 = 16$ , skąd  $x = \pm 4$ ;  
2°.  $x^2 = 9$ , skąd  $x = \pm 3$ .

A zatem cztery ważności są  $+4$ ,  $-4$ ,  $+3$ ,  $-3$ .

Weźmy jeszcze równanie  $x^4 - 7x^2 = 8$ .

Uczyniwszy  $x^2 = y$ , otrzymamy  $y^2 - 7y = 8$ ,  
skąd  $y = 8$ ,  $y = -1$ .

A zatem 1°.  $x^2 = 8$ , skąd  $x = \pm 2\sqrt{2}$ ;

2°.  $x^2 = -1$ , skąd  $x = \pm \sqrt{-1}$ ; dwie  
ostatnie ważności dla  $x$  są urojone.

Niech będzie równanie algebryczne,

$$x^4 - (2bc + 4a^2)x^2 = -b^2c^2;$$

uczyniwszy  $x^2 = y$ ; otrzymamy równanie

$$y^2 - (2bc + 4a^2)y = -b^2c^2,$$

skąd  $y = bc + 2a^2 \pm 2a\sqrt{bc + a^2}$ ,

a następnie  $x = \pm \sqrt{bc + 2a^2 \pm 2a\sqrt{bc + a^2}}$ .

*Wyciąganie pierwiastku kwadratowego z wyrażenia częścią spółmiernego (rationnelle), częścią niespółmiernego (radicale).*

114. Rozwiązanie równań trzymianowych czwartego stopnia, skazuje potrzebę nowego rodzaju działań algebrycznych, to jest: wyciągania pierwiastku kwadratowego, z ilości postaci  $a \pm \sqrt{b}$ ;  $a$  i  $b$  są ilości liczebne, lub algebryczne.

Weźmy wyrażenie  $3 \pm \sqrt{5}$ , podnieśmy do kwadratu, otrzymamy

$$(3 \pm \sqrt{5})^2 = 9 \pm 6\sqrt{5} + 5 = 14 \pm 6\sqrt{5}, \text{ a zatem nawzajem } \sqrt{14 \pm 6\sqrt{5}} = 3 \pm \sqrt{5}.$$

Podobnież

$$(\sqrt{7} \pm \sqrt{11})^2 = 7 \pm 2\sqrt{7} \times \sqrt{11} + 11 = 18 \pm 2\sqrt{77};$$

$$\text{a zatem nawzajem } \sqrt{18 \pm 2\sqrt{77}} = \sqrt{7} \pm \sqrt{11}.$$

Skąd widzimy, że wyrażenie takie jak  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ , może być sprowadzone do postaci  $a' \pm \sqrt{b'}$  czyli  $\sqrt{a' \pm \sqrt{b'}}$ .

A gdy to można uczynić; na ówczas ułatwia się działanie, ponieważ w tym razie mamy tylko wyciągnąć ieden, albo dwa pierwiastki kwadratowe gdy tymczasem wyrażenie  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$  oznacza, że trzeba wyciągać pierwiastek z pierwiastku.

115. Weźmy więc następujące zadanie; mając daną ilość w postaci  $a \pm \sqrt{b}$ ; poznać, czy ta ilość jest kwadratem z wyrażenia tejże postaci  $a' \pm \sqrt{b'}$  lub  $\sqrt{a' \pm \sqrt{b'}}$ , i wyznaczyć ten pierwiastek?

Oznaczmy w ogólności przez  $p$  i  $q$  dwie części, z których zakładamy, że się składa pierwiastek kwadratowy z  $a \pm \sqrt{b}$ , a zatem  $p$  i  $q$  są ilości iednowyrazowe niespółmierne, lub iedna z ilości jest spółmierna, a druga niespółmierna.

To uczyniwszy uważmy naprzód, że jeżeli

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = p + q \dots \dots \dots (1).$$

$$\text{więc } \sqrt{a - \sqrt{b}} = p - q \dots \dots \dots (2).$$

Rozmnożywszy strony odpowiadające tych równań, otrzymamy



$$\sqrt{a^2 - b} = p^2 - q^2 \dots\dots\dots (3).$$

A że  $p$  i  $q$  są dwie ilości iednowyrazowe (monomes) niespółmierne, lub iedna spółmierna, a druga niespółmierna, więc  $p^2$  i  $q^2$ , powinny być spółmierne, a zatem  $p^2 - q^2$ , czyli ważność  $\sqrt{a^2 - b}$  iest koniecznie ilością spółmierną.

Skąd wniesiemy, że jeżeli  $a \pm \sqrt{b}$  iest kwadratem z ilości  $a' \pm \sqrt{b'}$ , lub  $\sqrt{a' \pm \sqrt{b'}}$ . że mówię  $a^2 - b$  powinno być *zupełnym kwadratem*. Jest to cecha po której poznać się, czy można wykonać działanie.

Niech więc  $a^2 - b$  będzie *zupełnym kwadratem*, nadto załóżmy  $\sqrt{a^2 - b} = c$ , a zatem równanie (3) zamieni się na

$$p^2 - q = c.$$

Oprócz tego wyrazy równania (1) i (2) podniósłszy do kwadratu, otrzymamy:

$$p^2 + q^2 + 2pq = a + \sqrt{b},$$

$$p^2 + q^2 - 2pq = a - \sqrt{b};$$

i teraz, strony odpowiadające dodawszy, będzie

$$p^2 + q^2 = a \dots\dots\dots (4):$$

$$\text{a że} \quad p^2 - q^2 = c \dots\dots\dots (5);$$

więc dodawszy strony odpowiadające tych dwóch równań, a odjąwszy strony drugiego od pierwszego, otrzymamy

$$2p^2 = a + c,$$

$$2q^2 = a - c;$$

skąd

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \pm \sqrt{\frac{a+c}{2}}, \\ q = \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \end{array} \right.$$

A zatem,

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}, \text{ czyli } p+q=\pm\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}},$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}, \text{ czyli } p-q=\pm\sqrt{\frac{a+c}{2}}\mp\sqrt{\frac{a-c}{2}},$$

albo wyrażniemy

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}\right)\dots\dots (6),$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}\right)\dots\dots (7).$$

Te dwie formuły mogą być teraz sprawdzone. Jakoż obie strony pierwszemy formuły podniósłszy do kwadratu, otrzymamy:

$$\begin{aligned} a+\sqrt{b} &= \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2} + 2\sqrt{\frac{a^2-c^2}{4}} \\ &= a + \sqrt{a^2-c^2}, \end{aligned}$$

a że równanie  $\sqrt{a^2-b}=c$ , daie  $c^2=a^2-b$ ,  
a zatem

$$a+\sqrt{b}=a+\sqrt{a^2-a^2+b}=a+\sqrt{b}.$$

Podobnym sposobem sprawdzilibyśmy drugą formułę.

116. *Uwaga.* Ponieważ formuły (6) i (7) są dowiedzione, dla iakiękolwiek ważności ilości  $c$ ,

czyli  $\sqrt{a^2-b}$ ; więc chociażby  $a^2-b$  nie było zupełnym kwadratem, możnaby zamiast wyrażen

$\sqrt{a+\sqrt{b}}$ ; i  $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ ; wziąć drugie strony równań (6) i (7); lecz w tym razie nie możnaby tak łatwo

uproszczyć wypadku działania, ponieważ ilości  $p$  i  $q$ , byłyby w tej samej postaci co wyrażenie dane.

W ogólności, w ten czas tylko odbyć należy takowe przemiany, gdy ilość  $a^2 - b$  jest zupełnym kwadratem.

117. Zastosujemy formuły (6) i (7) do niektórych przykładów.

Weźmy wyrażenie liczebne  $94 + 42\sqrt{5}$ , które zamieni się na  $94 + \sqrt{8820}$ . W tym razie mamy  $a = 94$ ,  $b = 8820$ , skąd

$$c = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{8836 - 8820} = 4$$

otrzymaliśmy ilość spółmierną. A zatem można zastosować formułę (1).

Będzie więc

$$\sqrt{94 + 42\sqrt{5}} = \pm \left( \sqrt{\frac{94+4}{2}} + \sqrt{\frac{94-4}{2}} \right),$$

$$\begin{array}{l} \text{czyli skróciwszy} \\ \text{czyli nakoniec} \end{array} \quad = \pm (\sqrt{49} + \sqrt{45}),$$

$$\sqrt{94 + 42\sqrt{5}} = \pm (7 + 3\sqrt{5}).$$

$$\text{Jakoż } (7 + 3\sqrt{5})^2 = 49 + 45 + 42\sqrt{5} = 94 + 42\sqrt{5}.$$

Weźmy jeszcze wyrażenie

$$\sqrt{np + 2m^2 - 2m\sqrt{np + m^2}},$$

$$\text{Tu } a = np + 2m^2, b = 4m^2(np + m^2), a^2 - b = n^2p^2,$$

$$c \text{ czyli } \sqrt{a^2 - b} = np.$$

A zatem zastosowawszy formułę (7). Otrzymamy szukany pierwiastek

$$\pm \sqrt{\frac{np + 2m^2 + np}{2}} - \sqrt{\frac{np + 2m^2 - np}{2}},$$

czyli skróciwszy  $\pm(\sqrt{np+m^2-m})$ .

Jakoż  $(\sqrt{np+m^2-m})^2 = np+2m^2-2m\sqrt{np+m^2}$ .

Weźmy na trzeci przykład wyrażenie

$$\sqrt{16+30\sqrt{-1}}+\sqrt{16-30\sqrt{-1}},$$

stosując formuły poprzedzające, otrzymalibyśmy:

$$\sqrt{16+30\sqrt{-1}}=5+3\sqrt{-1};$$

$$\sqrt{16-30\sqrt{-1}}=5-3\sqrt{-1},$$

a zatem

$$\sqrt{16+30\sqrt{-1}}+\sqrt{16-30\sqrt{-1}}=10.$$

Ostatni ten przykład, daie poznać więcéy, iak wszystkie inne, użyteczność ogólnego zagadnienia, któreśmy wyżéy rozwiązali, bo przekonywa, że nawet wyrażenia uroione, pokombinowane z sobą, dają wypadki nietylko rzeczywiste, ale nawet spółmierne. Uczący się mogą dla wprawy rozwiązać następujące przykłady

$$\sqrt{28+10\sqrt{3}}=5+\sqrt{3}; \sqrt{1+4\sqrt{-3}}=2+\sqrt{-3};$$

$$\sqrt{bc+2b\sqrt{bc-b^2}}+\sqrt{bc-2b\sqrt{bc-b^2}}=\pm 2b,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{ab+4c^2-d^2+2\sqrt{4abc^2-abd^2}} \\ =\sqrt{ab}+\sqrt{4c^2-d^2} \end{aligned}$$


---