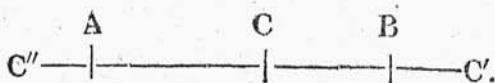


przywiedzioną do zera.

Zastosujemy teraz wypadki tego rozbioru do zagadnień, w których iednoczą się wszystkie okoliczności, napotymane w zagadnieniach drugiego stopnia.



99. Piąte zagadnienie. Na linii łączący dwa światła A i B różnych natężeń, znaleźć punkt, któryby od tych dwóch światel zarówno był oświecony.

(Zakładamy wiadome z fizyki prawo, że natężenia iednegoż światła, z dwóch różnych odległości, są w stosunku odwrotnym kwadratów z odległości).

Rozwiązanie. Niech a oznacza odległość dwóch światel, to jest linią AB: b natężenie światła A, w odległości pewney oznaczoney przez iedność, c natężenie światła B w tey saméy odległości. Niech C będzie punktem szukany: uczynimy $AC = x$, skąd $BC = a - x$.

Ponieważ na mocy z prawa z fizyki znanego, kiedy natężenie światła A, w odległości za iedność wziętęy jest b ; więc natężenie iego w odległości 2,

3, 4.... razy większy będzie $\frac{b}{4}$, $\frac{b}{9}$, $\frac{b}{16}$ i t. d.

a zatem w odległości x , to natężenie wyrazi się

przez $\frac{b}{x^2}$. Podobnież wyrazimy natężenie światła B,

w odległości $a - x$, przez $\frac{c}{(a - x)^2}$: a że według

założenia, takowe natężenia powinny być sobie równe, więc mamy równanie,

$$\frac{b}{x^2} = \frac{c}{(a-x^2)^2}; \text{ wykonawszy skazane działanie, i}$$

przywiódłszy wyrazy otrzymamy

$$(b-c)x^2 - 2abx = -a^2b,$$

$$\text{skąd wypadnie } x = \frac{ab}{b-c} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2}{(b-c)^2} - \frac{a^2b}{b-c}},$$

$$\text{czyli przywiódłszy, } x = \frac{a(b \pm \sqrt{bc})}{b-c}.$$

Wyrażenie to uprości się, jeżeli uważymy łód, że $b \pm \sqrt{bc}$, może być wyrażone w postaci $\sqrt{b} \cdot \sqrt{b \pm \sqrt{bc}}$, czyli $\sqrt{b} \cdot (\sqrt{b} \pm \sqrt{c})$ 2re, że $b-c = (\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2 = (\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})$.

A zatem w wyrażeniu wyższem biorąc znak górny otrzymamy

$$x = \frac{a\sqrt{b}(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}};$$

biorąc zaś znak dolny otrzymamy drugą ważność

$$x = \frac{a\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Wreście te ważności uproszczone moglibyśmy bezpośrednio wyprowadzić z równania danego. Jakoż

równanie $\frac{b}{x^2} = \frac{c}{(a-x)^2}$ zamieni się na $\frac{(a-x)^2}{x^2} = \frac{c}{b}$.

Skąd wyciągnąwszy pierwiastki otrzymamy

$$\frac{a-x}{x} = \pm \sqrt{\frac{c}{b}} = \frac{\pm \sqrt{c}}{\sqrt{b}},$$

zniósłszy mianowniki i przeniosłszy wyrazy będzie,

$$a\sqrt{b} - x\sqrt{b} = \pm x\sqrt{c}, \text{ skąd } x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}.$$

Roztrząśniemy teraz dwie ważności.

Ponieważ

$$\left. \begin{array}{l} \text{1o} \quad x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \\ \text{2o} \quad x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} \end{array} \right\} \text{ więc } \left\{ \begin{array}{l} a-x = \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \\ a-x = \frac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} \end{array} \right.$$

Niech będzie naprzód $b > c$.

PIERWSZA WAŻNOŚĆ dla x , to jest $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$,

jest dodatna i mniejsza od a , albowiem

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

jest ułamkiem: a zatem ważność ta, daie nam punkt równie oświecony C, położony między punktami A. i B. Widzimy oprócz tego, że ten punkt jest bliższy punktu B, a niżeli punktu A, bo ponieważ $b > c$; więc $\sqrt{b} + \sqrt{b}$ czyli $2\sqrt{b} > \sqrt{b} + \sqrt{c}$,

skąd

skąd $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \frac{1}{2}$, a następnie, $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \frac{a}{2}$.

Tak też powinno być w istocie, ponieważ założyliśmy że natężenie punktu A, jest większe od natężenia A punktu B.

Ważność dla $a - x$, to jest, $\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$, jest dodatna, i mniejsza od $\frac{a}{2}$ co łatwo sprawdzić.

DRUGA WAŻNOŚĆ dla x , to jest $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$, jest jeszcze dodatna, lecz większa od a , ponieważ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} > 1$. Drugą tą ważność daie nam drugi punkt

C; położony na przedłużeniu linii AB. i na linii prostej dwóch światła. Jakoż, łatwo pojąć że ponieważ oba światła rozchodzą się na wszystkie strony, więc może się znajdować na przedłużeniu linii AB, inny punkt równie oświecony, lecz ten punkt powinien być bliższy tego światła, którego natężenie jest słabsze. Można przez wyrozumowanie okazać, dla czego te dwie ważności są połączone iednem równaniem. Jeżeli nie AC, lecz AC' weźmiemy za niewiadomą x , wypadnie $BC' = x - a$, a zatem mamy

równanie $\frac{b}{x^2} = \frac{c}{(x-a)^2}$, a że $(x-a)^2$ jest to sa-

mo co $(x-a)^2$, więc nowe równanie jest to samo co równanie już ułożone, i tem samem da równie AC, iak AC'. Odpowiadająca ważność $a - x$, to jest

$\frac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ jest odjemna, ponieważ $x > a$, lecz od-
mieniwszy znaki równania $a-x = \frac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$; wy-
padnie $x-a = \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ na ważność dla BC'.

Niech będzie $b < c$.

PIERWSZA WAŻNOŚĆ dla x , to jest $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$,
jest zawsze dodatna, lecz mniejsza od $\frac{a}{2}$, ponieważ
 $\sqrt{b}+\sqrt{c} > \sqrt{b}+\sqrt{b} > 2\sqrt{b}$.

Ważność dla $a-x$ odpowiadająca, to jest $\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$
jest dodatna i większa od $\frac{a}{2}$.

A zatem w tém przypuszczeniu punkt C, poło-
żony pomiędzy punktami A i B, będzie bliższy pun-
ktu A, niżeli punktu B.

DRUGA WAŻNOŚĆ dla x , to jest $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$
czyli $\frac{-a\sqrt{b}}{\sqrt{c}-\sqrt{b}}$, jest odjemna. Aby wytłómaczyć tę
ważność, wstawmy w równanie $-x$, zamiast x , i
będzie $\frac{b}{x^2} = \frac{c}{(a+x)^2}$. A że $a-x$ z razu oznacza-
ło odległość punktu B, od punktu szukanego, więc
 $a+x$ wyraża teraz tę samą odległość, co byż ina-

czéy nie może, tylko kiedy punkt szukany przypadnie z lewej strony punktu A, na przykład, w punkcie C''.

Jakoż, ponieważ natężenie światła B, podług tego przypuszczenia, większe jest w punkcie B, a niżeli w punkcie A, zatem drugi punkt szukany, powinien być bliżej punktu A, niżeli punktu B.

Ważność $a - x$ odpowiadająca, to jest $\frac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, czyli $\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{c}-\sqrt{b}}$ jest dodatna, dla tego, że x będąc odjemne, $a - x$ oznacza rzeczywiście *summę arytmetyczną*

Niech będzie $b = c$.

Dwie pierwsze ważności dla x , i dla $a - x$, zamieniają się na $\frac{a}{2}$: skąd wypada, że środek linii AB,

będzie punktem zarówno oświeconym. Ten wypadek jest zgodny z przypuszczeniem. Dwie inne wa-

żności zamieniają się na $\frac{a\sqrt{b}}{0}$; to jest staną się nie-

skończonemi; co oznacza: że punkt drugi zarówno oświecony, znajduje się w odległości od punktów A i B większej, niż wszelka ilość naznaczona. Ten wypadek zupełnie odpowiada obecnemu przypuszczeniu, albowiem zakładając że różnica $b - c$, nie będąc zerem, jest jednak bardzo małą; drugi punkt musi być w odległości bardzo wielkiej od tych dwóch światel.

A właśnie tę okoliczność skazuje wyrażenie $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, którego mianownik jest bardzo mały wzglę-

dem licznika. Gdy nakoniec założymy $b=c$, czyli $\sqrt{b}-\sqrt{c}=0$, nie będzie żadnego punktu oświeconego, czyli znajdować się on będzie w odległości nieskończenie wielkiej.

Zakładając $b=c$, uważamy, że z dwóch ważeńności

$$x = \frac{a(b-\sqrt{bc})}{b-c} \text{ i } x = \frac{a(b+\sqrt{bc})}{b-c},$$

pierwsza, która odpowiada $x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, zamieni

się na $\frac{2ab}{0}$, druga zaś, która odpowiada $x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$,

zamieni się na $\frac{0}{0}$; a to z przyczyny bytności czyn-

nika $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ spólnego wyrazom, i ważeńności dla x . (patrz co było powiedziane pod ustęp: 68).

Niech będzie $b=c$, i $a=0$.

Pierwszy skład ważeńności, dla x , i dla $a-x$, zamieni się na 0, drugi na $\frac{0}{0}$. Ten ostatni wypadek

jest znakiem niewyznaczenia: gdy się bowiem zwrócimy do równania $(b-c)x^2-2abx=-a^2b$; takowe, na mocy obecnego założenia, zamieni się na $0x^2-0x=0$, które iak widzimy może być sprawdzone przez iakąkolwiek liczbę wziętą za x . Jakoż, ponieważ obadwa światła mają to samo natężenie, i znajdują się w iednym punkcie; więc powinny zarówno oświecać każdy z punktów linii AB.

Rozwiązanie 0, iakie daie pierwszy skład ważeńności, oznacza nieskończenie wielką liczbę rozwiązań.

Nakoniec niech będzie $a=0$, b , różne od c .

W tym razie każdy skład ważeńności, przywiedzie

się do 0; co oznacza, że w tym razie ieden tylko punkt będzie zarówno oświecony, to jest: ten, w którym oba te światła są umieszczone. Równanie zaś zamieni się na $(b-c)x^2=0$, i da dwie wartości równe, $x=0$, $x=0$.

Rozbiór ten uczy, że Algiebra z całą ścisłością odpowiada na wszystkie okoliczności, iakie może obymować brzmienie zagadnienia.

100. Zagadnienie szóste. Znaleść dwie liczby takie, ażeby różnica iloczynów pierwszy przez liczbę a , a drugi przez liczbę b , równała się liczbie s , różnica zaś kwadratów z tych liczb, innej daney liczbie q .

Rozwiązanie. Oznaczmy liczby szukane przez x i y : według brzmienia zadania, będą dwa równania:

$$\begin{cases} ax - by = s, \\ x^2 - y^2 = q. \end{cases}$$

z których pierwsze da $x = \frac{by + s}{a}$.

Ważność tę wstawiwszy w równanie drugie za x ; otrzymamy:

$$(a^2 - b^2)y^2 - 2bsy = s^2 - a^2q \dots (1);$$

skąd
$$y = \frac{bs \pm a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}.$$

Tę znowu ważność y , wstawiwszy w powyższą dla x , będzie

$$x = \frac{\left(\frac{bs \pm a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2} \right) + s}{a};$$

czyli, przywiódłszy

$$x = \frac{as \pm b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}.$$

(Uważamy, że w tych ważnościach dla x i y , dwa znaki górne, iako też dwa znaki dolne odpowiadają sobie.)

Rozstrząśnienie. W tem co nastąpi, założymy, że ilości a , b , q , s , są liczbami bezwzględnie: bo inaczej, pewne wyrazy, ważności dla x i y zmieniłyby swoje znaki, i potrzebaby uczynić te zmiany, przed rozbiorem zagadnienia.

Niech będzie $a > b$; a zatem $a^2 - b^2$ dodatnie.

Ażeby dwie ważności dla x i dla y były rzeczywiste, musi być

$$q(a^2 - b^2) < s^2; \text{ skąd } q < \frac{s^2}{a^2 - b^2}.$$

Daymy na to, że ten ostatni warunek iest dopełniony, i znajdziemy jakie znaki będą miały dwa składki ważności.

$$\text{PIERWSZY SKŁAD JEST } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{as + b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2} \\ y = \frac{bs + a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2} \end{array} \right.$$

Dwie pierwsze ważności tego składu, są koniecznie dodatnie, i dają bezpośrednio rozwiązanie zagadnienia założonego,

$$\text{DRUGI SKŁAD JEST } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{as - b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2} \\ y = \frac{bs - a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2} \end{array} \right.$$

Ważność dla x iest istotnie dodatnia: gdy bowiem $a > b$, więc $as > bs$ a tym bardziej $as > b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}$

dla tego, że ilość pierwiastkowa jest mniejsza od s .
Ważność dla y może być dodatnia, albo ujemna.
Aby była dodatnia, musi być:

$$bs > a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)};$$

skąd obie strony tego wyrażenia podniosłszy do kwadratu; będzie $b^2 s^2 > a^2 s^2 - a^2 q(a^2 - b^2)$,
dodawszy $a^2 q(a^2 - b^2)$ po obu stronach, a odjąwszy $b^2 s^2$, otrzymamy $a^2 q(a^2 - b^2) > s^2(a^2 - b^2)$: skąd,
podzieliwszy przez $a^2(a^2 - b^2)$, wypadnie $q > \frac{s^2}{a^2}$.

A tak, żeby i w drugim składzie rozwiązanie było rzeczywiste i bezpośrednie; musi być $q < \frac{s^2}{a^2 - b^2}$;

i $q > \frac{s^2}{a^2}$, to jest, q musi być zawarte między dwiema liczbami $\frac{s^2}{a^2}$ i $\frac{s^2}{a^2 - b^2}$.

(Uważamy, że warunek $q > \frac{s^2}{a^2}$ mógłby być o-
trzymany łatwiej, zwracając się do równania z nie-
wiadomą y .

Ponieważ to równanie jest $(a^2 - b^2)y^2 - 2bsy = s^2 - a^2q$; więc w założeniu $a > b$, przybierze po-
stać

$ax^2 - px = -q$; jeżeli $a^2q > s^2$, czyli $q > \frac{s^2}{a^2}$: wie-

my zaś (ustęp 95), że w tym razie obadwa pierwia-
stki są dodatnie).

Gdyby przeciwnie było $q < \frac{s^2}{a^2}$, skąd tym bardziej

$q < \frac{s^2}{a^2 - b^2}$; ważność dla y w drugim układzie była

by *odjemną*, a zatem (niezważając na znak przy ilości y), ten skład ważności nie dałby *rozwiązania* odpowiadającego brzmieniu zagadnienia, lecz zagadnie-

nia, któremu odpowiadałyby równania $\begin{cases} ax + by = s \\ x^2 - y^2 = q \end{cases}$

i które temby się tylko różniło od danego zagadnienia, że ilość s oznaczałyby *summę* iloczynów, a nie ich *różnicę*. A zatem, gdy $a > b$, zagadnienie mieć będzie *dwa rozwiązania rzeczywiste i bezpośredne*, skoro

$$q > \frac{s^2}{a^2}; \text{ lecz } q < \frac{s^2}{a^2 - b^2};$$

ma zaś tylko jedno, gdy $q < \frac{s^2}{a^2}$.

Wziąwszy za a, b, s , liczby iakiekolwiek bezwzględne, byleby a było $> b$, i naznaczywszy dla q

liczbę zawartą między dwiema granicami, $\frac{s^2}{a^2}$ i $\frac{s^2}{a^2 - b^2}$; otrzymamy zawsze *dwa rozwiązania*.

Niech będzie na przykład $a=6, b=4, s=15$,

$$\text{skąd } \frac{s^2}{a^2} = \frac{225}{36} = 6\frac{1}{4}; \quad \frac{s^2}{a^2 - b^2} = \frac{225}{20} = 11\frac{1}{4}.$$

Można naznaczyć $q=10$, a otrzymamy:

$$x = \frac{6 \times 15 \pm 4 \sqrt{225 - 20 \times 10}}{20} = \frac{90 \pm 20}{20} = \frac{11}{2} \text{ i } \frac{7}{2},$$

$$y = \frac{4 \times 15 \pm 6 \sqrt{225 - 20 \times 10}}{20} = \frac{60 \pm 30}{20} = \frac{9}{2} \text{ i } \frac{3}{2}.$$

Ważności $x = \frac{11}{2}$, $y = \frac{9}{2}$ | $x = \frac{7}{2}$; $y = \frac{3}{2}$, dają

dwa rozwiązania bezpośrednie równań,

$$\begin{aligned} 6x - 4y &= 15 \\ x^2 - y^2 &= 10. \end{aligned}$$

Lecz gdybyśmy naznaczyli $a=12$, $b=4$, $s=15$, $q=5$, łatwobyśmy postrzegli że z dwóch składów ważności, tylko pierwszy dałby rozwiązanie bezpośrednie.

Przypadki ściągające się do przypuszczenia $a > b$.

Niech będzie $q = \frac{s^2}{a^2 - b^2}$, skąd $q(a^2 - b^2) = s^2$.

Dwa składki ważności dla x i dla y , zamieniają się na $x = \frac{as}{a^2 - b^2}$, $y = \frac{bs}{a^2 - b^2}$. A zatem w tém przypuszczeniu otrzymamy tylko jedno rozwiązanie bezpośrednie zagadnienia.

Naznaczmy jeszcze $q = \frac{s^2}{a^2}$, skąd $s^2 = a^2 q$, $s = a\sqrt{q}$

a zatem pierwszy skład przejdzie

$$\text{na } \dots\dots\dots \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{as + b\sqrt{b^2 q}}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \sqrt{q}, \\ y &= \frac{bs + a\sqrt{b^2 q}}{a^2 - b^2} = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \sqrt{q}. \end{aligned} \right.$$

$$\text{drugi na } \dots\dots\dots \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{as - b\sqrt{b^2 q}}{a^2 - b^2} = \sqrt{q}, \\ y &= \frac{bs - a\sqrt{b^2 q}}{a^2 - b^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Jakoż założywszy $s^2 = a^2 q$, w równaniu z niewiadomą y ; to zamieni, się na następujące

$$(a^2 - b^2)y^2 - 2bsy = 0, \text{ skąd } y = 0;$$

$$y = \frac{2bs}{a^2 - b^2} = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{q}.$$

Wstawivszy każdą z tych wartości w równanie $x = \frac{by + s}{a}$, wypadnie

$$x = \frac{s}{a} = \sqrt{q}; \quad x = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{q}.$$

Uczyńmy teraz $a < b$: skąd $a^2 - b^2$ będzie odjemne.

Ważności dla x i y , mogą być w téj postaci wyrażone

$$x = \frac{-as \mp b\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2},$$

$$y = \frac{-bs \mp a\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2}.$$

Wszystkie te ważności są rzeczywiste, ponieważ ilość pod znakiem pierwiastku, jest dodatna.

Co się tyczy znaków; pierwsza ważność tak dla x iak dla y jest odjemna. A zatem te ważności nie zważając na znaki, nie odpowiedzą równaniom danym, lecz równaniom $by - ax = s$; $x^2 - y^2 = q$, z których w pierwszym porządek różnicy między iloczynami ax i by jest odwrotny.

Druga ważność dla x jest dodatna: gdy bowiem $b > a$, więc $b\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)} > as$, dla tego, że ilość pierwiastkowa jest licznie większa od s .

Lecz druga ważność dla y nie jest zawsze dodatna: aby zaś taką była; musi być

$$a\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)} > bs,$$

czyli podniósł do kwadr: $a^2 s^2 + a^2 q(b^2 - a^2) > b^2 s^2$,

czyli przeniosłszy $a^2 s^2$, $a^2 q(b^2 - a^2) > (b^2 - a^2)s^2$;

a podzieliwszy przez $a^2(b^2 - a^2)$; będzie... $q > \frac{s^2}{a^2}$.

Nadając ważności szczególne dla a , b , s , q , lecz takie, żeby było $b > a$ i $q > \frac{s^2}{a^2}$; równanie mieć jeszcze będzie *jedno rozwiązanie bezpośrednie*.

Niech będzie na koniec $a = b$; skąd $a^2 - b^2 = 0$.

W takowem przypuszczeniu pierwszy skład ważności jest $x = \frac{2as}{0}$; $y = \frac{2as}{0}$,

drugi $x = \frac{0}{0}$; $y = \frac{0}{0}$.

Lecz gdy się zwrócimy do równania

$$(a^2 - b^2)y^2 - 2bsy = s^2 - a^2q,$$

które w przypuszczeniu $a = b$ za-

mieni się na..... $-2asy = s^2 - a^2q$,

w tym mówię razje otrzymamy..... $y = \frac{a^2q - s^2}{2as}$,

ważność zaś dla x w którą wchodzi y :

to jest $x = \frac{by + s}{a}$ będzie $x = \frac{a^2q + s^2}{2as}$.

A żeby rozwiązanie $x = \frac{a^2 q + s^2}{2as}$, $y = \frac{a^2 q - s^2}{2as}$,
 było bezpośrednie musi być $q > \frac{s^2}{a^2}$.

O nierównościach (inégalité.)

101. W ciągu rozbioru dwóch poprzedzających zagadnień, zakładaliśmy nierówności; i wykonywaliśmy na nich takie same, iak na równaniach przerabiania. Jakoż często zachodzi potrzeba takowych przera-biań, gdy rozbierając zagadnienie, chcemy wykryć stosunki zachodzące pomiędzy ilościami danemi, aby rozwiązanie zagadnienia było bezpośrednie, a przy-najmnięj rzeczywiste, i za pomocą tych stosunków oznaczyć granice, między którymi znajdować się mogą ważności szczególne niektórych ilości danych, a brzmienie równania zawierało tę lub ową okoli-czność. Ale chociaż prawidła dowiedzione dla ró-wnań, służą w ogólności nierównościom, są iednak wyjątki, o których wiadomość iest koniecznie po-trzebna.

I tak przekształcenie przez dodawanie i odey-mowanie.

Można bez żadnego wyjątku dodać lub odjąć po obu stronach nierówności, tę samą ilość; a nierówność zachowa dawne znaczenie.

I tak niech będzie $8 > 3$; będzie także $8 + 5 > 3 + 5$, i $8 - 5 > 3 - 5$. Podobnie $-3 < -2$, będzie także $-3 + 6 < -2 + 6$, i $-3 - 6 < -2 - 6$. To pra-widło wypada z tego cośmy powiedzieli pod (ust. 61.). Służy ono tak, iak w równaniach, do przenoszenia wyrazów z iednej strony na drugą.

I tak niech będzie $a^2 + b^2 > 3b^2 - 2a^2$; będzie także $a^2 + 2a^2 > 3b^2 - b^2$ czyli $3a^2 > 2b^2$.

Można bez wyjątku, mając ilekolwiek wyrazów nierówności iednego znaczenia, dodać strony odpowiadające, a summy wynikłe zachowają nierówność w tém samém znaczeniu, co założone nierówności. I tak gdy $a > b, c > d, e > f$, będzie także $a + c + e > b + d + f$.

Lecz w odeymowaniu to prawidło podlega wyjątkowi.

I tak niech będą równości $4 < 7$ i $2 < 3$, będzie wprowadzie $4 - 2 < 7 - 3$ czyli $2 < 4$: lecz mając nierówności $9 < 10$ i $6 > 8$; po odjęciu otrzymamy $9 - 6$, czyli $3 > 10 - 8$ albo 2.

Gdy więc zajdzie potrzeba takowego przekształcenia, należy uważać iakie znaczenie przybierze wypadek wynikły z odeymowania nierówności.

Przekształcenie przez mnożenie i dzielenie.

Można obie strony wyrażenia nierówności rozmnożyć przez liczbę dodatnią lub bezwzględną, a wypadająca nierówność zachowa to samo znaczenie co dana. I tak jeżeli $a < b$, będzie także $3a < 3b$: albo jeżeli $-a < -b$, będzie także $-3a < -3b$.

To prawidło służy do zniesienia mianowników,

Niech będzie; $\frac{a^2 - b^2}{2d} > \frac{c^2 - d^2}{3a}$; stąd wypadnie

$$3a(a^2 - b^2) > 2d(c^2 - d^2).$$

Toż samo prawidło służy dzieleniu.

Lecz mnożąc, albo dzieląc obie strony wyrażenia nierówności, przez ilość odjemną, wypadek oznaczać będzie nierówność w znaczeniu przeciwném.

I tak weźmy np: $8 > 7$ rozmnożywszy obie strony tego wyrażenia przez -3 , będziemy mieli $-24 < -21$.

Podobnież $8 > 7$, da, $-\frac{8}{3} < -\frac{7}{3}$ czyli $-\frac{8}{3} < -\frac{7}{3}$.

A zatem, mnożąc albo dzieląc obie strony wyrażenia nierówności, przez liczbę wyrażoną Algiebraicznie; należy się przekonać, czy *mnożnik* lub *dzielnik* nie jest odjemny, albowiem w tym ostatnim przypadku, nierówność wypadnie w znaczeniu przeciwnem pierwszemu.

W zagadnieniu (pod ustę: 100) nierówności.

$$a^2q(a^2 - b^2) > s^2(a^2 - b^2),$$

można było wyprowadzić $q > \frac{s^2}{a^2}$; dzieląc obie strony przez $a^2(a^2 - b^2)$; ponieważ było założono $a > b$ czyli $a^2 - b^2$ dodatne.

Niemozna zmienić znaków nierówności w obu stronach, nie nadawszy przeciwnego znaczenia wynikłéj nierówności, albowiem takowe przekształcenie na iedno wychodzi, co rozmnożenie dwóch stron nierówności przez -1 .

Przekształcenie przez podniesienie do kwadratu.

Można podnieść obie strony nierówności do kwadratu, jeżeli liczby są bezwzględne, a nierówność zachowa to samo znaczenie.

I tak mając $5 > 3$, będzie także $25 > 9$; mając $a + b > c$ będzie także $(a + b)^2 > c^2$.

Lecz gdy dwie strony nierówności mają iakiekolwiek znaki, i w tym razie nie można naprzód wiedzieć, w iakim sposobie zachodzić będzie nierówność w otrzymanych kwadratach.

Naprzykład $-2 < 3$, daie $(-2)^2$ czyli $4 < 9$; lecz chociaż $-3 > -5$; iednak będzie

$$(-3)^2 < (-5)^2 \text{ czyli } 9 < 25.$$

Potrzeba zatem przed wyniesieniem do kwadratu zapewnić się, czyli obie strony nierówności mogą być uważane za *liczby bezwzględne*, to jest takie, iakie się uważają w Arytmetyce.

Przekształccie przez wyołaganie pierwiastków kwadratowych.

Można wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z obu-
dwóch liczb, iako stron nierówności; a nierówność
między pierwiastkami zostanie w tém samém zna-
czeniu, co między kwadratami.

Uważaymy że nie można wyciągnąć pierwiastku
z dwóch stron nierówności, kiedy te strony są *licz-
bami odjemnymi*: w tym bowiem razie pierwiastki
byłyby *liczbami urojonemi*.

Leez gdy mamy $9 < 25$, będzie także $\sqrt{9} < \sqrt{25}$;
czyli $3 < 5$. Gdy $a^2 > b^2$; będzie także $a > b$, ie-
żeli a i b oznaczają liczby bezwzględne.

Podobnie nierówność $a^2 > (c-b)^2$ da $a > c-b$
w założeniu iż c większe od b ; tndzież $a > b-c$,
ieżeli b jest większe od c .

Krótko mówiąc, ieżeli obie strony nierówności,
składaia się z wyrazów dodatnych, i z wyrazów od-
jemnych, potrzeba za pierwiastek kwadratowy w ka-
żdey stronie napisać wielomian, w którym można
wykonać odejmowanie.

102. Siódme Zagadnienie. Z dwóch kupców
przedaie każdy iednakową materją, drugi prze-
dał więcej łokci 3. iak pierwszy, lecz razem ze-
brali 35. dukatów. Pierwszy mówi do drugiego,
dostałbym za twoją materją 24. dukaty; drugi od-
powiada, a iabym dostał za twoją 12½. dukata.
Po ile łokci każdy z nich sprzedał?

Odp: 1szy kupiec $x=15$ lub też $x=5$.

2gi $y=18$ $y=8$.

Osmie Zagadnienie. Pewny kupiec daie na siebie dwa wezle, ieden na Złt: 6240. płatny za 8. miesięcy, drugi na Złt: 7632. płatny za 9. miesięcy. Lecz odbiera te dwa wezle, a w ich miejsce daie inny na Złt: 14256. płatny za rok ieden.

Pytanie iaki procent roczny?

(Odpowiedź Złt: $10 + \frac{33}{100}$ czyli Złt: 10 gr: $9 + \frac{9}{10}$

na rok 1).

Dziewiąte Zagadnienie. Pewna osoba posiada 13,000 Złt: które podzieliwszy na dwie części daie na procent w ten sposób, że od każdéj z tych dwóch części pobiera równą prowizyą. Lecz gdyby od pierwszész części, taki sam pobierała procent iaki pobiera od drugiéj; miałaby od pierwszész części 360 Złt: prowizyi, gdyby zaś pobierała od drugiéj części taki procent, iaki pobiera od pierwszész części; naówczas od drugiéj miałaby prowizyi Złot: 490. Pytanie iaki był procent w pierwszész części, a iaki w drugiéj?

(Odp: 7 i 6.)

Dziesiąte Zagadnienie.. Znaleść dwa prostokąty, których summa powierzchni iest q , summa podstaw iest a , i których powierzchnie byłyby p i p' , gdyby podstawie każdego z nich dano wysokość drugiego, czyli gdyby przemieniono ich wysokości.

Rozwiązać i roztrząsnąć to zagadnienie.

(Odp: Podstawa 1go $x = \frac{a(2p+q \pm \sqrt{q^2 - 4pp'})}{2(p+p'+q)}$.)

Jedenaste zagadnienie. Podzielić każdą z dwóch liczb a i b na dwie części, tak, żeby iloczyn z części

ści liczby a , przez część liczby b , równy był daney liczbie p : iloczyn zaś z dwóch pozostałych części liczb b i a , był równy liczbie p' . Rozwiązać i roztrząsnąć to zagadnienie.

Dwunaste Zagadnienie. Znaleźć liczbę z której kwadrat, takby się miał do iloczynu z różnicy między tą liczbą, a dwiema a i b , iak się ma $p : q$?

Rozwiązać i roztrząsnąć to zagadnienie.

Uwaga. Polecamy Uczniom rozwiązanie i roztrząśnienie tych wszystkich przykładów, dla wznowienia sobie tego, co wyżej o równaniach i nierównościach poznali.

Podania o największych i najmniejszych ważnościach (de maximis et minimis)

Własności Tróymianów 2go stopnia.

103. Znayduie się gatunek zagadnień należących do teoryi równań drugiego stopnia, a zachodzących w zastosowaniu Algiebry do Jeometrii. Zamiarem tych zagadnień iest: *Wyznaczyć największą lub najmniejszą ważność, iaką mieć może wypadek pewnych działań arytmetycznych, wykonanych na liczbach.*

Weźmy to pierwsze zagadnienie: *Podzielić liczbę daną $2a$ na dwie części, z których iloczyn byłby MAXIMUM, to iest największy z iloczynów z innych części, na iakie można podzielić daną liczbę.*

Jedną część oznaczmy przez x , druga będzie $2a - x$, a iloczyn z nich $x(2a - x)$; Nadaiąc dla x różne ważności, iloczyn przechodzić będzie przez różne stany wielkości, trzeba zaś wyznaczyć dla x ważność taką, któraby uczyniła ten iloczyn największym ze wszystkich.