

przedaży traci tyle na 100. z ceny swęga kupna, ile ią koń kosztował.

Pytanie za iaką cenę kupiła tego konia?

Rozwiązanie. Niech x oznacza liczbę dukatów, za które był kupiony koń: $x - 24$. oznaczać będzie stratę. A że podług zagadnienia tyle traci dukatów na 100. ile jest jedności w x , więc na jednym du-

kacie traci $\frac{x}{100}$, a na dukatach x , traci $\frac{x^2}{100}$: będzie

więc równanie

$$\frac{x^2}{100} = x - 24;$$

czyli $x^2 - 100x = -2400$,

skaż $x = 50 \pm \sqrt{2500 - 2400} = 50 \pm 10$.

to jest: $x = 60$, $x = 40$;

Obie te ważności odpowiadają na pytanie, iak to łatwo sprawdzić; czy 60. Złt: czy 40. Złt: wzięwszy za cenę kupna.

Roztrząśnienie ogólnego równania stopnia drugiego.

Dotąd rozwiązaliśmy zagadnienia; w których ilości dane były liczbami. Weźmy teraz równanie nayogólniejsze drugiego stopnia, to jest którego spółczynniki byłyby oznaczone głoskami, i śledźmy ięgo naturę, czyli roztrząśniemy ięgo własności.

93. Widzieliśmy (ust: 89.), że każde równanie stopnia drugiego może być wyrażone w postaci

$$x^2 + px = q \dots\dots (1),$$

gdzie p i q mogą być ilości liczebne, albo algie-

braiczne, całkowite, albo ułamkowe, ze znakami iakiemikolwiek.

Dopełniemy kwadratu, dodawszy $\frac{p^2}{4}$, po obu stronach równania: będzie

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} + q,$$

czyli
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q.$$

Jakakolwiek będzie wartość dla $\frac{p^2}{4} + q$, zawsze można oznaczyć jej pierwiastek, przez m , a zatem równanie przemieni się na $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = m^2$, czyli przeniosłszy m^2 na pierwszą stronę, będzie

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - m^2 = 0;$$

a że pierwsza strona tego równania, jest różnicą kwadratów; więc może być wyrażona przez

$$\left(x + \frac{p}{2} - m\right)\left(x + \frac{p}{2} + m\right) = 0 \dots (2)$$

Ten wypadek oznacza, że można pierwszą stronę równania stopnia drugiego $x^2 + px - q = 0$ uważać za iloczyn z dwóch czynników dwumianowych stopnia pierwszego względem x , których pierwszą częścią wspólną jest x , druga wartości

x , wzięte ze znakami przeciwnemi. A ponieważ gdy iloczyn jest równy zero, ieden lub każdy z jego czynników musi być równy 0; więc w przypadku który uważamy jest

$$\text{albo} \quad x + \frac{p}{2} - m = 0 \text{ skąd } x = m - \frac{p}{2}$$

$$\text{albo} \quad x + \frac{p}{2} + m = 0 \text{ skąd } x = -m - \frac{p}{2};$$

czyli przywróciwszy ważność za m ,

$$\text{albo} \quad x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

$$\text{albo} \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

$$\text{lub też razem} \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q};$$

to jest, wszelkie równanie stopnia drugiego można rozwiązać albo iedną z dwóch równych ważności, albo dwiema różnemi ważnościami.

Ogólne zaś równanie stopnia drugiego ma dwie ważności dla niewiadomey, i nie może ich mieć więcej.

94. Jakoż, gdy rozmnożymy przez siebie dwa czynniki, na iakie można rozebrać pierwszą stronę równania.

$$x^2 + px - q = 0;$$

Na iloczyn wypadnie pierwsza strona tegoż równania. Z tych względów dwie ważności dla x , sprawdzające równanie stopnia drugiego, nazwano jego *pierwiastkami*.

Niech będzie równanie $x^2 + 3x - 28 = 0$, roz-

wiązawszy je otrzymamy $x=4$, $x=-7$, a zatem pierwsza strona równania jest $(x-4)(x+7)$. Jakoż wykonawszy mnożenie; otrzymamy

$$x^2 - 4x + 7x - 28 = 0; \quad x^2 + 3x - 28 = 0.$$

Oznaczywszy przez x' , i x'' dwa pierwiastki równania $x^2 + px - q = 0$, będziemy mieli na mocy poprzedzających własności

$$x^2 + px - q = (x - x')(x - x'').$$

wykonawszy mnożenie otrzymamy

$$x^2 + px - q = x^2 - (x' + x'')x + x'x''.$$

Pórownaawszy teraz wyrazy odpowiadające w obu stronach, będzie $x' + x'' = -p$, $x'x'' = -q$. To jest 1sze, Że *summa algebriczna dwóch pierwiastków*, równa się *spółczynnikowi drugiego wyrazu równania wziętemu ze znakiem przeciwnym*.

2re, *Iloczyn z dwóch pierwiastków*, równa się *ostatniemu wyrazowi równania, przeniesionemu na pierwszą stronę i wziętemu ze swoim znakiem*.

Jakoż ponieważ

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}},$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{q + \frac{p^2}{4}};$$

więc

$$\begin{aligned} x' + x'' &= -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2} - \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} \\ &= -p: \end{aligned}$$

powtórę

$$\begin{aligned} x'x'' &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}\right) \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}\right) \\ &= \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} + q\right) = -q. \end{aligned}$$

Uwaga. Własności powyższe okazują się w ten-
czas, kiedy równanie jest przywiedzione do postaci

$$x^2 + px - q = 0,$$

Roztrząśnienie.

95. Weźmy równanie ogólne $x^2 + px = q$: ro-
związawszy je, otrzymamy.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Ażeby to wyrażenie oznaczało ważność liczebną
zupełną, albo przybliżoną, potrzeba (ust. 81), ażeby
ilość pod znakiem pierwiastku była dodatna, to iest;

aby $\frac{p^2}{4} + q$ było dodatne. Lecz $\frac{p^2}{4}$ zawsze iest
dodatne, niezależnie od znaku ilości p ; więc znak ilo-

ści $\frac{p^2}{4} + q$, zależy od znaku ilości q , to iest; od zna-
ku wyrazu trzeciego w równaniu.

Gdy q iest dodatne, równanie będzie miało po-
stać $x^2 \pm px = q$; obie ważności są rzeczywiste,

i mogą być wyznaczone, albo zupełnie, jeżeli $\frac{p^2}{4} + q$,
iest zupełnym kwadratem, albo tylko przez przybli-
żenie w przeciwnym razie. Lecz zawsze pierwsza
ważność będzie dodatna, i odpowie wprost zaga-
dnieniu, choćby nawet równanie było algebriczne:

albowiem, ponieważ ilość pierwiastkowa $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$,

liczebnie iest większą od $\frac{p}{2}$; wyrażenie zatem....

$\mp \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, jest koniecznie z tym znakiem

iaki ma ilość pierwiastkowa.

Druga ważność dla teyże przyozyny musi być odjemna, albowiem mieć będzie taki znak, iaki ma ilość pierwiastkowa. Uważana ta ilość bez względu na znak, nie odpowiada temu zagadnieniu, z którego była wyprowadzona, lecz temu w którymby zamiast x , położono $-x$, to jest, równaniu $x^2 \mp px = q$.

Jakoż to nowe równanie daie $x = \pm \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$,

którego ważności różnić się będą tylko znakami.

Gdy q jest odjemne, w tenczas równanie mieć będzie postać $x^2 \pm px = -q$, a dwie ważności dla x będą:

$$x = \mp \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

które aby były rzeczywiste, ma być $\frac{p^2}{4} > q$.

Lecz jeżeli $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$,

jest liczebnie mnieysze od $\frac{p}{2}$; natenczas obie wa-

żności będą odjemne, to jest, jeżeli p jest dodatne, czyli, jeżeli mamy równanie $x^2 + px = -q$: będą zaś obiedwie ważności dodatne, jeżeli p jest odjemne, czyli gdy równanie ma postać $x^2 - px = -q$.

Można przyysć do tych wniosków opierając rozumowanie na tych dwóch własnościach, że w równaniu drugiego stopnia $x^2 + px - q = 0$.

Summa algebriczna pierwiastków, równa się spółczynnikowi drugiego wyrazu, wziętemu ze znakiem przeciwnym, a iloczyn z tych pierwiastków równa się ostatniemu wyrazowi; albo całej ilości wiadomej, przeniesionej na pierwszą stronę równania.

I tak niechay q będzie dodatne na drugięj stronie, więc przeniesione na pierwszą, będzie odjemne; iloczyn z dwóch pierwiastków będzie odjemny, a zatem te pierwiastki muszą być ze znakami przeciwnymi. Również, summa pierwiastków równania będzie odjemna lub dodatna, podług tego iak p będzie odjemne lub dodatne, to jest: z dwóch pierwiastków, większy będzie miał znak przeciwny ilości p .

Lecz jeżeli q jest odjemne w drugięj stronie, czyli dodatne na pierwszëj; iloczyn z dwóch pierwiastków jest dodatny, a zatem oba pierwiastki będą z temi samemi znakami, to jest, obadwa będą dodatne, gdy p jest odjemne, zaś obadwa będą odjemne, gdy p jest dodatne, ponieważ w pierwszym przypadku ich summa algebriczna jest odjemna, a w drugim razie jest dodatna.

96. Można okazać bezpośrednio, że ile razy p jest odjemne na pierwszëj stronie, q także odjemne na drugięj: równanie ma dwa pierwiastki, z których każdy rozwiązanie bezwarunkowo zagadnienie,

skoro $\frac{p^2}{4} > q$. I tak: równanie $x^2 - px = -q$

zmieniając znaki w obu stronach może być wyrażone w postaci:

$$px - x^2 = q \text{ czyli } x(p - x) = q.$$

To zaś nowe wyrażenie jest tłómaczeniem algebricznem następującego zagadnienia: Liczbę daną p , podzielić na dwie części z których iloczyn byłby

równy ilości q : oznaczywszy bowiem jedną część przez x , druga będzie $p-x$, a ich iloczyn wyrazi się przez $x(p-x)$, będzie dodatny, i równy q , czy to, gdy x będzie większą, czy mniejszą częścią ilości p . A że nadto summa dwóch części ma być równa ilości $+p$, ich zaś iloczyn ilości q , a ta sama własność służy pierwiastkom równania $x^2 - px + q = 0$; więc ile razy p jest odjemne, q dodatne na pierwszemy, czyli q odjemne na drugiey stronie równania; równanie ma dwa pierwiastki, które bezwarunkowo rozwiążuią zagadnienie.

Pozostaie okazać, że aby zagadnienie wrazie który uważamy mogło być rozwiązane, warunkiem

koniecznym iest, aby było $\frac{p^2}{4} > q$.

Ponieważ $\frac{p^2}{4}$ czyli $\frac{p}{2} \times \frac{p}{2}$, iest iloczynem z dwóch

równych części ilości p , a zaś q , iloczynem z dwóch nierównych części téży ilości p ; więc ieżeli dowiemy, że iloczyn z dwóch równych części iest większy od iloczynu z dwóch nierównych części téży sa-

méy ilości; warunek $\frac{p^2}{4} > q$, będzie tém samem do-

wiedziony. Jakoż oznaczywszy przez r różnicę dwóch nierównych części, na iakie ma być podzielona ilość

p ; część większa będzie $\frac{p}{2} + \frac{r}{2}$.

mnieysza $\frac{p}{2} - \frac{r}{2}$,

ich zaś iloczyn $\left(\frac{p}{2} + \frac{r}{2}\right)\left(\frac{p}{2} - \frac{r}{2}\right)$, jest $\frac{p^2}{4} - \frac{r^2}{4}$, i

ten oznacza to samo co wyraz q równania; a po-

$$\text{niemaj } \frac{p^2}{4} > \frac{p^2}{4} - \frac{r^2}{4},$$

$$\text{więc także } \frac{q^2}{4} > q;$$

to jest w każdym razie iloczyn z dwóch równych części ilości p , jest większy od iloczynu z dwóch nierównych części téżże ilości: skoro zatem waru-

nek $\frac{p^2}{4} > q$ nie będzie dopełniony, i nadto będzie

$$q > \frac{p^2}{4}, \text{ równanie } x^2 - px + q = 0, \text{ nie będzie mo-}$$

gło być rozwiązane, to jest żadnych rzeczywistych pierwiastków mieć nie będzie: czyli iak się mówi po algebricznemu mieć będzie pierwiastki urojone.

Rozbiór niektórych szczególnych przypadków.

97. 1° Jeżeli q na drugiey stronie równania jest odjemne, to jest, jeżeli równanie będzie $x^2 + px = -q$, zaś p będzie z iakimkolwiek znakiem, nadto jeżeli $\frac{p^2}{4} = q$; natenczas ilość pierwiastkowa $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ będzie

$$= 0; \text{ obie ważności dla } x \text{ będą } = -\frac{p}{2}: \text{ to jest,}$$

w tym razie obadwa pierwiastki są sobie równe.

Jakoż, gdy w powyższe równanie zamiast q wstawimy $\frac{p^2}{4}$; równanie to zamieni się na

$$x^2 + px = -\frac{1}{4}p^2;$$

czyli na $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = 0$,

czyli na $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$. To jest pierwsza stro-

na równania jest *iloczynem z dwóch czynników równych*; a tem samem pierwiastki tego równania są sobie równe; albowiem oba czynniki są równe zero; przeto dadzą tę samą ważność dla x .

2° Jeżeli w równaniu ogólnem $x^2 + px = q$, będzie $q = 0$, dwie ważności dla x będą

$$x = -\frac{p}{2} + \frac{p}{2} \text{ czyli } x = 0;$$

$$\text{ i } x = -\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p \text{ czyli } x = -p.$$

Jakoż równanie w tym razie jest $x^2 + px = 0$,

czyli $x(x + p) = 0$, i sprawdzi się czy to uczynimy $x = 0$, czy $x + p = 0$, stąd zaś $x = -p$.

3° Gdy w równaniu ogólnem $x^2 + px = q$, będzie $p = 0$; wypadnie $x^2 = q$ stąd zaś $x = \pm \sqrt{q}$, to jest, w tym przypadku *obie ważności dla x są równe*, i ze znakami przeciwnemi, rzeczywiste, jeżeli q dodatnie, a urojone jeżeli q ujemne. Równanie takie należy do gatunku równań o dwóch wyrazach (ustę: 88.)

4te Jeżeli nakoniec uczynimy $p = 0$, i $q = 0$, równanie zamieni się na $x^2 = 0$, i da zero na obie ważności dla x .

98. Pozostaie nam jeszcze wytłomaczyć przypadek dosyć szczególny, który się często trafia w rozwiązywaniu zagadnień drugiego stopnia.

W tym celu weźmy równanie $ax^2 + bx = c$.

Otrzymamy $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$. Dajmy na to,

że podług szczególnych podań zagadnienia jest $a = 0$;

w tym razie będzie $x = \frac{-b \pm b}{0}$,

$$\text{to jest } \begin{cases} x = \frac{0}{0}, \\ x = -\frac{2b}{0}. \end{cases}$$

Pozostaie wytłomaczyć te dwa wypadki.

Widzieliśmy pod rozbiorem równań stopnia pier-

wszego, że pierwszy z nich $\frac{0}{0}$, oznacza iż równania

są niewyznaczone; drugi $\frac{b}{0}$, iż ich rozwiązać nie-

można. Tu zaś, uczyniwszy $a = 0$, w równaniu $ax^2 + bx = c$; otrzymamy naprzed $bx = c$, skąd

$x = \frac{c}{b}$, i przeto $\frac{0}{0}$ powinno oznaczać $\frac{c}{b}$. Lecz cze-

muż ten wypadek nie okazał się od razu? Jużśmy wi-

dzieli wyżej że postać $\frac{0}{0}$ iaką przybiera ułomek

po nadaniu pewney ważności dla ilości weń wcho-
dzący, pochodzi z bytności czynnika spólnego w obu-
dwóch wyrażach ułamku. Ten sam przypadek jest
z ułamkiem.

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

Rozmnożywszy bowiem iego wyrazy przez

$$-b - \sqrt{b^2 + 4ac}, \text{ wypadnie } \frac{b^2 - (b^2 + 4ac)}{2a(-b - \sqrt{b^2 + 4ac})},$$

$$\text{czyli } \frac{4ac}{2a(-b - \sqrt{b^2 + 4ac})},$$

i teraz widzimy że $2a$ jest spólnym czynnikiem
w obudwóch wyrażach ułamku, który zniósłszy,

$$\text{wypadnie } \frac{-2c}{-b - \sqrt{b^2 + 4ac}}, \text{ ten zaś ułomek,}$$

$$\text{wziąwszy w nim } a=0 \text{ przejdzie na } \frac{-2c}{-2b}, \text{ czyli}$$

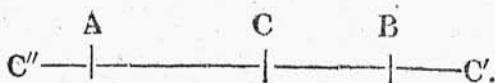
$$\text{na } \frac{c}{b}.$$

Co do wypadku $x = \frac{b}{0}$; ten oznacza *ważność*
nieskończenie wielką dla x , jest bowiem w tym ra-
zie $\frac{b}{x} = 0$, i przeto x musi być liczbą nieskończenie

wielką, aby ułomek $\frac{b}{x}$ był nieskończenie małą, i

przywiedzioną do zera.

Zastosujemy teraz wypadki tego rozbioru do zagadnień, w których iednoczą się wszystkie okoliczności, napotymane w zagadnieniach drugiego stopnia.



99. Piąte zagadnienie. Na linii łączący dwa światła A i B różnych natężeń, znaleźć punkt, któryby od tych dwóch światel zarówno był oświecony.

(Zakładamy wiadome z fizyki prawo, że natężenia iednegoż światła, z dwóch różnych odległości, są w stosunku odwrotnym kwadratów z odległości).

Rozwiązanie. Niech a oznacza odległość dwóch światel, to jest linią AB: b natężenie światła A, w odległości pewney oznaczoney przez iedność, c natężenie światła B w tey saméy odległości. Niech C będzie punktem szukany: uczynimy $AC = x$, skąd $BC = a - x$.

Ponieważ na mocy z prawa z fizyki znanego, kiedy natężenie światła A, w odległości za iedność wziętęy jest b ; więc natężenie iego w odległości 2,

3, 4.... razy większy będzie $\frac{b}{4}$, $\frac{b}{9}$, $\frac{b}{16}$ i t. d.

a zatem w odległości x , to natężenie wyrazi się

przez $\frac{b}{x^2}$. Podobnież wyrazimy natężenie światła B,

w odległości $a - x$, przez $\frac{c}{(a - x)^2}$: a że według