

$$x = \frac{-cf + bg}{-af + bd} = \frac{bg - cf}{bd - af}; \quad y = \frac{ag - cd}{bd - af}.$$

Dowodzenie takie samo iak w przykładzie poprzedzającym.

§. IV. *Ogólne roztrząśnienie zagadnień i równań stopnia pierwszego.*

64. Ażeby uogólnić roztrząśnienie zagadnień stopnia pierwszego, z iedną lub kilką niewiadomemi, założymy sobie wyprowadzić formuły, któreby wyrażały ważność niewiadomych w iakimkolwiek układzie równań z liczbą niewiadomych ilości, równą liczbie równań.

Naprzód, każde równanie stopnia pierwszego z iedną niewiadomą, może być za pomocą zwyczajnych przerobień przywiedzione do postaci $ax = b$, w którój a , oznacza *summę algiebraiczną* ilości mnożących niewiadomą, b zaś *summę algiebraiczną* wszystkich wiadomych wyrazów.

Z tego równania wyprowadzimy $x = \frac{b}{a}$.

Uważmy powtórę, że każde równanie pierwszego stopnia, z dwiema niewiadomemi może być przywiedzione do postaci $ax + by = c$.

Jakoż, jeżeli równanie dane zawiera mianowniki; te naprzód można znieść (ust. 44), przeniósłszy zaś wszystkie wyrazy mające x , i wszystkie wyrazy mające y , na pierwszą, a wiadome na drugą stronę równania, można oznaczyć *summę algiebraiczną* pierwszych przez ax , *summę algiebraiczną* drugich przez by , a *summę algiebraiczną* ostatnich przez c : w tém miejscu a , b , c , są ilości całkowite z iakiemikolwiek znakami.

Niech będą dwa równania $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$

Mnożąc wyrazy pierwszego przez b' , drugiego przez b , i odeymuiąc, będzie

$$(ab' - ba')x = cb' - bc', \text{ skąd } x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'};$$

znaydziemy podobnie

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Weźmy teraz trzy równania

$$ax + by + cz = d \dots \dots (1)$$

$$a'x + b'y + c'z = d' \dots \dots (2)$$

$$a''x + b''y + c''z = d'' \dots \dots (3)$$

Aby wyrugować z , mnożmy wyrazy pierwszego przez c' , drugiego przez c , i odeymyśmy drugie od pierwszego, będzie

$$(ac' - ca')x + (bc' - cb')y = dc' - cd' \dots \dots (4)$$

Podobnie kombinuiąc równanie drugie z trzeciem, znaydziemy

$$(a'c'' - ca'')x + (b'c'' - cb'')y = d'c'' - cd'' \dots \dots (5).$$

Aby wyrugować y , potrzeba mnożyć wyrazy równania (4) przez $b'c'' - cb''$, a równania (5) przez $bc' - cb'$, poczem odiawszy, otrzymamy

$$\{ (ac' - ca')(b'c'' - cb'') - (a'c'' - ca'')(bc' - cb') \} x = (dc' - cd')(b'c'' - cb'') - (d'c'' - cd'')(bc' - cb');$$

czyli skuteczniejszy działanie, przywiódłszy i podzieliwszy przez c' , będzie

$$(ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' + ba'c' + bc'a'' - cb'a'')x = db'c' - dc'b' + cd'b'' - bd'c' + bcd'' - cb'd'.$$

$$\text{stad } x = \frac{db'c' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c' + bca'' - cb'a''}.$$

Wykonawszy potrzebne działanie dla wyrugowania x i z , potem x i y , znajdziemy

$$y = \frac{ad'c' - ac'd'' + ca'd'' - da'c' + dca'' - cd'a''}{ab'c' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c' + bca'' - cb'a''};$$

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c' + bca'' - cb'a''}.$$

Abyśmy poznali sposób, za pomocą którego z wartości x , przychodzimy do wartości y i z , nie odbywając działań poprzedzających, uważamy, że układ równań (1), (2) i (3) zostanie tenże sam, gdy w nim zamiast x , a , a' , a'' , położymy y , b , b' , b'' i na odwrot: gdy zatem w wyrażeniu wartości dla x , zamienimy x na y , potem a , a' , a'' , które są spółczynnikami x , na b , b' , b'' , które są spółczynnikami y , i na odwrot, otrzymamy wartość dla y :

Wykonawszy takową przemianę; otrzymamy

$$y = \frac{da'c' - dca'' + cd'a'' - ad'c' + ac'd'' - ca'd''}{ba'c' - bca'' + cb'a'' - ab'c' + ac'b'' - ca'b''},$$

czyli zmieniwszy znaki w liczniku i mianowniku, i w nich, w miejsce trzech pierwszych wyrazów napisawszy drugie trzy; a w miejsce trzech ostatnich wyrazów napisawszy trzy pierwsze, będzie

$$y = \frac{ad'c' - ac'd'' + ca'd'' - da'c' + dca'' - cd'a''}{ab'c' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c' + bca'' - cb'a''}$$

Podobnie otrzymalibyśmy wartość dla z , zamieniwszy x , a , a' , a'' na z , c , c' , c'' , i na odwrot.

Możemy teraz widzieć drogę, którąby potrzeba postępować mając cztery równania z czterema niewiadomymi.

Uwaga. Ponieważ w równaniu stopnia pierwszego z jedną niewiadomą, jedną tylko ważność może mieć niewiadoma, co jest rzeczą samą przez się jasną, rozwiązanie zaś równań pierwszego stopnia z kilkoma niewiadomymi, których liczba jest równa liczbie równań, przywodzi się do rozwiązania równania z jedną niewiadomą; więc każda niewiadoma takowych równań jedną tylko ważność mieć może.

65. Użył kresek w znaczeniu współczynników, posłużyło do upatrzenia prawa, podług którego tworzą się formuły poprzedzające. To prawo jest następujące:

Uważmy naprzód przypadek dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Otrzymaliśmy wyżej,

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}; \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

1° Aby otrzymać wspólny mianownik dla tych dwóch ważności, trzeba zrobić z głoskami a i b , które oznaczają współczynniki ilości x i y w pierwszym równaniu, dwie przemiany ab i ba , między temi położyć znak $-$; co da $ab - ba$, nakoniec, okreskować w każdym wyrazie ostatnią głoskę, i wypadnie $ab' - ba'$.

2° Aby otrzymać licznik właściwy dla każdej niewiadomej, trzeba w mianowniku zastąpić głoskę, która oznacza współczynnik tej niewiadomej, głoską, która oznacza ilość zupełnie wiadomą, zostawiając kreski na tém samém miejscu. Podług tego, $ab' - ba'$, zamieni się na $cb' - bc'$ dla x ; na $ac' - ca'$, dla y .

Uważmy teraz przypadek trzech równań z trzema niewiadomymi. Niech a, b, c , oznaczają współczynniki ilości x, y, z , zaś d ilość wiadomą.

1° Aby otrzymać wspólny mianownik, weźmy mia-

nownik $ab—ba$; który był właściwy na przypadek dwóch niewiadomych (opuszczając kreski:) wprowadźmy głoskę c , do każdego z wyrazów ab i ba , we wszystkie miejsca, to jest po prawej stronie, we środku i po lewej: między temi wyrazami pokładźmy znaki naprzemian dodatny i ujemny; wypadnie.....

$$abc—acb+ cab—bac+ bca—cba.$$

Pokładźmy potem w każdym wyrazie, nad drugą głoską znak'; a nad trzecią znak": otrzymamy mianownik;

$$ac'b''—ac'b''+ca'b''—ba'c'+bca''—cb'a''.$$

2° Aby otrzymać licznik każdej niewiadomej, zastąpmy w mianowniku głoskę oznaczającą współczynnik tej niewiadomej, głoską oznaczającą ilość znaną, zostawiając znaki w tém samym miejscu. I tak dla x , należy zmienić a na d , dla y , zmienić b na d , dla z , zmienić c na d .

To prawo, które może być uważane za wypadek uwag, nad dwiema lub trzema równaniami, może być rozciągnięte do iakiéykolwiek liczby równań, lecz dowiedzenie tego prawa jest bardzo zawikłane.

66. Zobaczmy użitek tych formuł w zastosowaniach szczególnych.

Niech będą dwa równania $5x—7y=34$, $3x—13y=—6$

Porównyując je z równaniami ogólnemi, $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$, jest $a=5$, $b=—7$, $c=34$, $a'=3$, $b'=—13$ $c'=—6$. Wstawmy te ważności zamiast, a , b , c , a' , b' , c' w formuły,

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, y=\frac{ac-ca'}{ab'-ba'},$$

otrzymamy:

$$1^{\circ} \ x = \frac{34 \times -13 - (-7) \times -6}{5 \times -13 - (-7) \times 3} = \frac{-34 \times 13 - 7 \times 6}{-5 \times 13 + 7 \times 3} \\ = \frac{-442 - 42}{-65 + 21} = \frac{-484}{-44} = 11.$$

$$2^{\circ} \ y = \frac{5 \times -6 - 34 \times 3}{5 \times -13 - (-7) \times 3} = \frac{-30 - 102}{-65 + 21} = \frac{-132}{-44} = 3.$$

A zatem wartości $x=11$; $y=3$ sprawdzą dwa dane równania. Moglibyśmy od razu przekonać się o tém, wstawiając te wartości w równania dane. Lecz, ażeby dowiedzenie było niezależne od szczególnego przykładu, uważmy, że aby przejść od formuł służących równaniom $ax+by=c$ i $a'x+b'y=c'$, do formuł służących równaniom $ax-by=c$, i $a'x-b'y=-c'$, dosyć będzie (ust. 55) zamienić b na $-b$, b' na $-b'$, c na $-c$; otrzymamy

$$x = \frac{c \times -b' - (-b) \times -c'}{a \times -b' - (-b) \times a'}; \quad y = \frac{a \times -c' - c \times a'}{a \times -b' - (-b) \times a'};$$

ażeby zaś wyprowadzić z tych nowych ogólnych formuł, wartości, służące równaniom szczególnym, potrzeba uczynić, $a=5$, $b=7$, $c=34$, $a'=3$, $b'=13$, $c'=6$.

Więc nakoniec, ażeby otrzymać wartości, służące równaniom danym, dosyć będzie uczynić w formułach ogólnych, poprzedniczo otrzymanych, $a=5$, $b=-7$, $c=34$, $a'=3$, $b'=-13$, $c'=-6$, potem wykonać działanie, podług prawideł wyłożonych dla jednomianów.

W ogólności, *prawidło polega na tém, ażeby wstawić w miejsce współczynników a, b, a', b', \dots , ich wartości szczególne, wzięte z temi znakami, iakie*

miały w równaniach szczególnych, i wykonać wszystkie skazane działania, podług wiadomego postępowania.

67. Z rozstrząśnienia formuł poprzedzających, wypada, że w zastosowaniach szczególnych, można otrzymać w równaniach stopnia Igo, cztery gatunki ważności dla niewiadomych, to jest, *ważności do-*

datne, odjemne, w postaci $\frac{A}{0}$ nakoniec w postaci $\frac{0}{0}$

Zagadnienie o gońcach doprowadziło do tych czterech wypadków, które teraz wytłómaczymy ogólnym sposobem.

Naprzód *ważności dodatne* są zwyczajnie odpowiedziami na podania stósownie do ich brzmienia. Jednak zobaczywszy, że w niektórych zagadnieniach nie wszelkie *ważności dodatne* czynią zadosyć brzmieniu podania. Jeżeli np: natura zagadnienia wymaga, ażeby liczby szukane były całkowite, a tym czasem otrzymamy liczby ułamkowe, w tym razie zagadnienie nie może być rozwiązane.

Niekiedy jeszcze natura zagadnienia nie pozwala, żeby liczby niewiadome przewyższały liczby wiadome i dane *a priori*: albo, żeby były mniejsze od nich. Jeżeli otrzymane *ważności*, chociaż *dodatne*, nie czynią zadosyć warunkowi brzmieniem podania obietemu, ale który nie może być wyrażony przez równanie, w tym także razie zagadnienie nie może być rozwiązane. A tak *ważności dodatne niewiadomych*, właściwie mówiąc, są odpowiedziami bezpośrednimi na równania, i rozwiązują zagadnienie tylko o tyle, o ile ich natura jest zgodną z naturą brzmienia podania.

Ażeby pojąć iak liczba może sprawdzić równanie, niesprawdzając zagadnienia, którego tamto jest tło-

maczeniem algebraczném, uważamy, że to samo równanie jest tłómaczeniem algebraczném nieskończonéj liczby zagadnień, z których iedne mogą być rozwiązane wszelkimi liczbami bezwzględniemi, inne zaś tylko liczbami pewnéj natury.

68. Wiemy już, co się powinno rozumieć przez wypadki odjemne, do iakich prowadzi rozwiązanie zagadnień z iedną niewiadomą. Zastanowimy się teraz, w myśl prawidła (w ust: 50) podanego, nad zagadnieniami z kilką niewiadomemi.

Weźmy trzy równania z trzema niewiadomemi: $ax+by+cz=d$, $a'x+b'y=c'z=d'$, $a''x+b''y+c'z=d''$, i załóżmy, że te równania dają $x=p$, $y=-q$, $z=-r$; zamieńmy w tych równaniach y i z , na $-y$ i $-z$, albo na y' i z' (oznaczając na chwilę $-y$ i $-z$, przez y' i z') otrzymamy:

$$ax+by'+c'z=d, \quad a'x+b'y'+c'z=d', \\ a''x+b''y'+c'z=d''.$$

Ponieważ te równania od poprzedzających tém się różnią, że w miejsce y i z położono y' i z' ; więc dadzą, $x=p$, $y'=-q$, $z'=-r$, położywszy zaś $-y$ i $-z$ w miejsce y' i z' będzie $x=p$, $-y=-q$, $-z=-r$, czyli nakoniec, $x=p$, $y=q$, $z=r$; co było do okazania.

A zatem prawidło pod (ustęp: 59) sprawdza się w zagadnieniach 1go stopnia z kilką niewiadomemi.

69. Pozostałe wytłómaczyć wyrażenia $\frac{A}{0}$ i $\frac{0}{0}$.

Weźmy naprzód równanie z iedną niewiadomą

$$ax=b, \text{ które daie } x=\frac{b}{a},$$

1° Założywszy, że $a=0$; wypadnie $x=\frac{b}{0}$: ró-

wnanie w tym przypadku zamieni się na $0 \times x = b$; i nie może być sprawdzone żadną liczbą wyznaczoną.

Lecz uważajmy, że równanie może także być wyrażone w postaci $\frac{b}{x} = 0$, i, że gdy kłaść będziemy

w miejsce x liczbę co raz większą; $\frac{b}{x}$ co raz mniej różnić się od 0, a równanie co raz bardziej zbliżać się będzie do równania prawdziwego i dokładnego: gdy zatem weźmiemy dla x wartość bardzo wielką; $\frac{b}{x}$ będzie mniejsze od wszelkiej ilości naznaczonej.

Dla téj to przyczyny mówi się w Algiebrze, że nieskończoność w tym przypadku czyni zadosyć równaniu, znajdując się zaś zagadnienia, w których takowe wypadki dają prawdziwe rozwiązanie. A tak

wyrażenie $\frac{A}{0}$ oznacza ilość nieskończenie wielką, a przynajmniej, że równanie nie może być rozwiązane w liczbach skończonych, skoro wartość niewiadomej wypadnie w takowej postaci.

2° Uczyniwszy $a=0$, $b=0$, wartość dla x , wypadnie w postaci $x = \frac{0}{0}$.

Ponieważ równanie w tym przypadku zamieni się na $0 \times x = 0$; więc każda liczba skończona dodatnia lub ujemna, może je sprawdzić, a przeto jest niewyznaczone.

70. Tu miejsce uczynić uwagę nad wyrażeniem $\frac{0}{0}$ i okazać, że nie zawsze oznacza niewyznaczoność, ale tylko bytność wspólnego czynnika, obudwom wy-

razem ułamku, który to czynnik staie się zerem, w skutku szczególnego przypuszczenia.

Daymy na to, że po rozwiązaniu zagadnienia otrzymaliśmy wypadek $x = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$.

Uczyniwszy w téj formule $a=b$, wypadnie $x = \frac{0}{0}$:

lecz uważaymy, że $a^3 - b^3$ może (ust. 31) być wyrażone w téj postaci $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$, a zaś $a^2 - b^2$, w téj $(a-b)(a+b)$; i że przeto

$$x = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a-b)(a+b)}$$

Gdy więc naprzód, zniesiemy czynnik $a-b$; otrzymamy ważność $x = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$; gdy zaś te-

raz weźmiemy $a=b$, będzie $x = \frac{3a^2}{2a}$ czyli $x = \frac{3a}{2}$.

Weźmy na drugi przykład wyrażenie $\frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2}$, które przejdzie na $\frac{0}{0}$, gdy weźmiemy $a=b$.

A że $\frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-b)}$, czyli opuściwszy czynnik spólny $a-b$, będzie $\frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2} = \frac{a+b}{a-b}$;

więc wzięwszy teraz $a=b$; otrzymamy $\frac{0}{0} = \frac{2a}{0}$.

A tak wypadek $\frac{0}{0}$ oznacza niekiedy bytność czynnika wspólnego dwóm wyrazom ułamku.

Zapewniwszy się więc, że wyrazy ułamku; z rozwiązania równania wypadłego nie mają wspólnego czynnika; można być pewnym, że równanie jest niewyznaczone: jeżeli zaś go mają, trzeba go odrzucić, potem uczynić szczególne przypuszczenie, a tym sposobem otrzymamy prawdziwą ważność ułamku, która

może się ukazać w trojakiej postaci, $\frac{A}{B}, \frac{A}{0}, \frac{0}{0}$;

i w pierwszym razie równanie będzie wyznaczone, w drugim nie może być rozwiązane w ilościach skończonych, w trzecim będzie niewyznaczone.

71. Powróćmy do naszego przedmiotu, i uważajmy teraz dwa równania z dwiema niewiadomymi.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}, \text{ które dają (ust: 64)}$$

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}; y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

Załóżmy, że $ab' - ba' = 0$, kiedy liczniki $cb' - bc'$, i $ac' - ca'$ nie są równe 0: będzie $x = \frac{A}{0}, y = \frac{B}{0}$.

Aby wytłómaczyć te wypadki, uważajmy, że z równania $ab' - ba' = 0$, wypada $a' = \frac{ab'}{b}$, wstawiając tę ważność w równanie, $a'x + b'y = c$; otrzymamy.... $\frac{ab'}{b}x + b'y = c$ czyli, zniósłszy mianownik, i podzieliwszy przez b' ,

będzie $ax + by = \frac{bc}{b'}$,

w równaniu tém jest pierwsza strona zupełnie ta sama, co w równaniu pierwszym

$$ax + by = c,$$

lecz drugie strony są zupełnie różne, albowiem z nierówności $cb' \geq bc$, wypada $c \geq \frac{bc}{b'}$,

wypada $c \geq \frac{bc}{b'}$,

Stąd widzimy, że dwa dane równania nie mogą być sprawdzone spótcześnie, przez żaden układ wartości skończonych dla x i y .

Gdy zarazem mieć będziemy $ab' - ba' = 0$,
 $cb' - bc = 0$; ważność dla x zamieni się na $x = \frac{0}{0}$,

Aby wytłómaczyć ten wypadek, uważajmy, że dwa dane równania, dla tego, że $ab' - ba' = 0$, mogą być wyrażone w téj postaci

$$\begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = \frac{bc}{b'} \end{cases}$$

i że wychodzą na jedno: gdy bowiem $cb' - bc = 0$,
 więc $c = \frac{bc}{b'}$.

A tak, ażeby rozwiązać zagadnienie, mamy w istocie tylko jedno równanie z dwiema niewiadomemi, i przeto zagadnienie jest niewyznaczone.

Ponieważ $ab' - ba' = 0$, skąd $b' = \frac{ba'}{a}$ więc tę ważność dla b' wstawiając w równanie $cb' - bc = 0$;

wypadnie $\frac{cba'}{a} - bc = 0$,

czyli króćcy $ca' - ac = 0$

Stąd wniesiemy, że gdy ważność dla x wypadnie w postaci $\frac{0}{0}$; ważność dla y mieć będzie taką samą postać, i na odwrot.

72. Sposób poprzedzający z trudnością dałby się zastosować do przypadku, w którymby było więcej równań niż dwa. Można jeden takowy przypadek ułatwić przez następujące rozumowania.

Dla jaśniejszego rzeczy pojęcia uważmy cztery równania, które oznaczmy przez (1), (2), (3), (4), z czterema niewiadomymi x, y, z, u .

Oznaczmy przez $\frac{A}{D}$ ważność x , którąśmy otrzymali przez rugowanie, i założmy, że podług pewnego przypuszczenia dla ilości danych, mamy $D=0$, kiedy A jest iakiekolwiek albo $=0$,

W pierwszym z tych dwóch przypadków, równania dane niemogą być sprawdzone przez ważności skończone, w drugim są niewyznaczone, to jest, mogą być sprawdzone nieskończoną liczbę składów ważności dla x, y, z, u, \dots

Jakoż ze sposobu rugowania wypada, że równania (1), (2), (3) i (4) można zastąpić czterema innemi, z których jedno jest $Dx=A$, drugie zawiera dwie ilości x i y , trzecie trzy ilości x, y, z , a czwarte cztery, czyli będzie jednem z równań danych, na przykład równaniem (1).

To założywszy 1° jeżeli ważność dla x wypadnie $\frac{A}{0}$, w którym to razie równanie z ilością x

przejdzie na $0 \times x = A$; ponieważ to równanie wynika ze spółczesny bytności danych, więc te muszą być w sprzeczności między sobą, skoro równanie $0 \times x = A$ niemoże być sprawdzone przez żadną liczbę skończoną.

2° Jeżeli zaś ważność dla x wypadnie w postaci $\frac{0}{0}$ (byleby nie miały spólnego czynnika dwa wyrazy tego wypadku), równanie $Dx = A$ zamieni się na $0 \times x = 0$, i może być sprawdzone przez nieskończoną liczbę ważności x . Wstawiając każdą z tych ważności, w równanie zawierające x i y , o którym mówiliśmy wyżej, wypadnie nieskończona liczba ważności dla y : wstawiając znowu wszystkie ważności x i y , w równania zawierające x , y , z , otrzymamy nieskończoną liczbę ważności dla z ; i nakoniec wstawiając wszystkie ważności x , y , z , w równanie (1), otrzymamy nieskończoną liczbę ważności dla u , i wszystkie składy tych ważności sprawdzą cztery dane równania.

73. Okoliczność wypadków $\frac{0}{0}$ i $\frac{A}{0}$, wyjaśnimy sobie na następujących przykładach.

Niech będą trzy równania z trzema niewiadomymi.

$$x + 9y + 6z = 16.$$

$$2x + 3y + 2z = 7.$$

$$3x + 6y + 4z = 13.$$

Według formuł ogólnych znajdziemy

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}, \quad z = \frac{0}{0}.$$

Gdy zaś wprost odbędziemy na równaniach działania, otrzymamy, rozmnożywszy wyrazy drugiego równa-

równania przez 3, i odiawszy wyrazy pierwszego od drugiego,

$$5x = 21 - 16 = 5 \text{ skąd } x = 1.$$

wstawiając tę wartość w trzy równania, otrzymamy

$$\text{na 1sze } 9y + 6z = 15 \text{ czyli } 3y + 2z = 5$$

$$\text{na 2gie } \dots\dots\dots 3y + 2z = 5$$

$$\text{na 3cie } 6y + 4z = 10 \text{ czyli } 3y + 2z = 5$$

Wartość więc dla x jest oznaczona i równa się 1, co się tyczy wartości dla y i z , te są niewyznaczone, ponieważ mamy dwie niewiadome, a jedno równanie.

Weźmy jeszcze te trzy równania

$$11x - 8y + 6z = 49$$

$$5x - 12y + 9z = 16$$

$$4x - 20y + 15z = 15$$

Według ogólnych formuł, otrzymalibyśmy

$$x = \frac{0}{0}; \quad y = \frac{0}{0}; \quad z = \frac{0}{0}.$$

Odbywszy zaś wprost działanie na równaniach; to jest, mnożąc pierwsze przez 3, a drugie przez 2, potem odiawszy; otrzymamy $23x = 115$ skąd $x = 5$: wkładając te wartości w trzy równania, wypadnie:

$$\left. \begin{array}{l} 8y - 6z = 6 \\ 12y - 9z = 9 \\ 20y - 15z = 5 \end{array} \right\} \text{ czyli } \left\{ \begin{array}{l} 4y - 3z = 3 \\ 4y - 3z = 3 \\ 4y - 3z = 1 \end{array} \right.$$

Dwa ostatnie równania są widocznie ze sobą sprzeczne. Gdy do nich zastosujemy formuły dla dwóch niewiadomych; otrzymamy

$$y = \frac{A}{0}, \quad z = \frac{B}{0}.$$

ALGIEBRA.

A zatem z trzech ważności $\frac{0}{0}$ otrzymywanych wyżej dla x, y, z , pierwsza jest *skończona*: to jest $x=5$, a dwie inne są *nieskończone*.

74. Zakończymy roztrząśnienie równań pierwszego stopnia rozbiorem szczególnego przypadku, w którym wyrazy wiadome, to jest, drugie strony równań z kilką niewiadomymi są równe zero.

W tym przypadku z prawidła na tworzenie liczników formuł oznaczających szukane ważności niewiadomych (pod ust: 63), wypływa, że te liczniki razem wszystkie się niszczą; to jest, że $A=0$ i $B=0$... Nadto, ponieważ nie zachodzi żaden związek pomiędzy współczynnikami, $a, b, c, a', b', c', \dots$ ilości niewiadomych, więc ilość D , to jest spólny mianownik wypadający z pewnego połączenia współczynników równania nie jest $=0$. A zatem ważności dla niewiadomych są $x=0, y=0; z=0, \dots$. Ważności te widocznie sprawdzają dane równania.

Lecz, jeżeli oprócz tego, że wyrazy wiadome, to jest, drugie strony równań są $=0$, zachodzi pomiędzy współczynnikami taki związek, że $D=0$, natenczas ważności ogólne dadzą $x=\frac{0}{0}, y=\frac{0}{0},$ i t. d.

W tym przypadku, równania są *nie wyznaczone*, lecz stosunki pomiędzy niewiadomymi, są *liczbami stałymi*, które można znaleźć, za pomocą równań danych.

Jakoż niech będą trzy równania:

$$a x + b y + c z = 0$$

$$a' x + b' y + c' z = 0$$

$$a'' x + b'' y + c'' z = 0$$

W których zakładamy, że (ust: 65) $D=0$, czyli $ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' = 0$.

Przywiedźmy je do postaci:

$$a \frac{x}{z} + b \frac{y}{z} + c = 0$$

$$a' \frac{x}{z} + b' \frac{y}{z} + c' = 0$$

$$a'' \frac{x}{z} + b'' \frac{y}{z} + c'' = 0$$

A uważając $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$ za dwie niewiadome, wypro-
wadzimy z dwóch pierwszych

$$\frac{x}{z} = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \quad \frac{y}{z} = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}$$

Skąd widzimy, że nadając dowolne wartości dla z , otrzymamy wartości dla x i y , za pomocą tych dwóch wypadków, których drugie strony są stałe i równe ilościom wiadomym.

Pozostało dowiedzieć się, czy te wartości sprawdzą równanie trzecie. Wstawiliśmy je w równanie trzecie: otrzymamy:

$$a'' \times \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} + b'' \times \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} + c'' = 0.$$

Czyli przywiódłszy i napisawszy wyrazy w przy-
zwoitym porządku,

$ab'c'' - a'cb'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' = 0$: warunek,
który na mocy przypuszczenia, sprawdza się.

75. To prowadzi nas do rozważenia okoliczności,
któreśmy mieliśmy przykład w drugim zagadnieniu
o testamencie, rozwiązanym (w ustępie 49). Jest to
ta okoliczność, gdzie brzmienie podania doprowadziło

do liczby równań, rzeczywiście różnych, i większą od liczby ilości niewiadomych.

Założmy dla uogólnienia, że podanie zawiera niewiadomych n ; i prowadzi do równań różnych m : gdy m jest $> n$.

Potrzeba naprzód rozwiązać n równań, ażeby otrzymać wartości dla n niewiadomych: potem wstawić te wartości w $m - n$ równań pozostałych: przez co otrzymamy tyleż związków pomiędzy ilościami danymi, a te ostatnie związki, muszą się sprawdzić, jeżeli zagadnienie stosownie do swego brzmienia może być rozwiązane. Związki tak otrzymane, których będzie $m - n$, nazywają się równaniami warunkowemi.

76. Oto są wypadki poprzedzającego roztrząśnienia.

1° Układ równań pierwszego stopnia z liczbą niewiadomych, równą liczbie równań, może być sprawdzony tylko jednym sposobem (ust: 64).

2° Każda wartość dodatnia, otrzymana dla niewiadomej, odpowiada wprost czyli bezpośrednio równaniom zagadnienia; chociaż nie zawsze odpowiada jego brzmieniu (ustęp 67).

3° Każda wartość ujemna odpowiada tylko pośrednio brzmieniu, lub równaniom zagadnienia, które są jego tłumaczeniem algebricznym, czyli odpowiada równaniom uważanym w znaczeniu zupełnie algebricznym (ust: 59, 60; 68).

4° Wszelkie wyrażenie w postaci $\frac{A}{0}$, otrzymane dla jednej z niewiadomych oznacza sprzeczność w układzie równań danych (ust: 69, 71, 72).

5° Wszelkie wyrażenie w postaci $\frac{0}{0}$, oznacza albo niewyznaczoność, albo sprzeczność (ust: 69, 71, 72, 73),

albo, że w ułomkową ważność niewiadomę, wchodzi spólny czynnik (ust: 70).

6° Jeżeli w danym układzie wszystkie drugie strony równań są zerem, ważności staną się także 0: jeżeli do tego przypadku dodamy jeszcze ten, że i mianownik spólny dla ważności szukanych będzie 0; ilość składów ważności będzie nieskończona; lecz te ważności są pomiędzy sobą w stałym stosunku (ust: 75).

7° Gdy liczba równań jest większa od liczby niewiadomych, zagadnienie może być rozwiązane, jeżeli ważności dla niewiadomych znalezione, przez liczbę równań, równą liczbie niewiadomych, sprawdzą inne równania (ust: 75).

77. Oto nowe zagadnienia, które mogą być wzięte pod roztrząsanie, lub których rozwiązanie jest interesujące.

Piętnaste zagadnienie. *Bankier ma dwa gatunki monety: potrzeba pierwszy monety sztuk a na ieden talar, zaś drugi monety potrzeba sztuk b, także na ieden talar. Kto inny żąda sztuk c za ieden talar. Ileż bankier da sztuk każdego gatunku za ieden talar?*

(Odpow: 1go gatunku $\frac{a(c-b)}{a-b}$, 2go gatunku $\frac{b(a-c)}{a-b}$)

Szesnaste zagadnienie. *Znaleźć dwa boki przyległe prostokąta, założywszy 1od, że boki te są do siebie w stosunku danym m: n; 2re, że jeżeli zmienimy boki prostokąta, przez dodanie lub odjęcie ilości danych, a i b; powierzchnia zmieni się o ilość p.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{założywszy, że boki zmienione są przez dodanie,} \\ \text{otrzymamy } x = \frac{m(p-ab)}{na+mb}; y = \frac{n(p-ab)}{na+mb} \end{array} \right\}$$

Siedmaste zagadnienie. Jaki jest majątek trzech osób, A, B, C, wiedząc 1^{od}, że summa majątku A, i 1 razy wziętego majątku B i C, równa się p, 2^{re}, że summa majątku B i m razy majątku A i C równa się q, 3^{cie}, że summa majątku C, i n razy wziętego majątku A i B równa się r.

(To zagadnienie może być rozwiązane bardzo łatwo, wprowadzając niewiadomą pomocniczą w rachunek, ta niewiadoma jest summą trzech majątków).

Ośmnaste zagadnienie. Znaleść majątki 6ciu osób, A, B, C, D, E, F, według następujących warunków. 1^o Summa majątku A i B równa się a; summa majątku C i D równa się b; summa majątku E i F równa się c. 2^{re} majątek osoby A znaczy m razy majątek C, majątek osoby D znaczy n razy majątek osoby E, majątek osoby F znaczy p razy majątek osoby B?

To zagadnienie może być rozwiązane, za pomocą jednego równania, z jedną niewiadomą.

Te różne zagadnienia są wyjęte z Algiebry Lhuillera Genewczyka, którego dzieło ma zaletę z wyboru zagadnień algebraicznych.