

*Zadanie 8. Pewna osoba mająca 100,000 Złt. w dobrach, które ięy czynią tylko 4000, przypozyczka na początku każdego roku na różne wydatki po 6000. Złt. od których obowiąznie się płacić procentu po 10%.*

*Nie wypłaca ani kapitału, ani procentu co rok się pomnażającego, (iednakże nie płaci procentu od procentu) Za ile lat ta osoba będzie wyzuta z majątku? (Odpowiedź, za lat 10. miesięcy 6.)*

*Zadanie 9te. Majątek osoby iest 150000. z którego ma dochodu rocznego po 7000, wydaie zaś co rok po 12,000 zapożyczając się po 10%? za ile lat straci cały majątek.*

#### *§ IV Dowodzenie dwumianu Newtona*

Lubo P: Burdon w swoiēy algiebrze dał dowodzenie dwumianu Newtona, iednakże okoliczność tak ważna zasługuie aby inne rozwinięcie, mające zaletę co do iasności i krótkości, podane w czwiczzeniach naukowych wraz z iego zastosowaniem przez tłumacza Statyki Monza, co dosłownie było tu umieszczone.

*Dowód ogólny wzoru Newtona przez Dubourguet.*

Wzór Newtona przez iednych Geometrów iest tylko szczególnie, przez drugich ogólnie dowiedziony: lecz pierwsi nie zaspakaiaią uczących się, drudzy przez subtelność rozumowań stają się dla nich albo trudni, albo nawet nieprzystępni. Mały krok w Matematyce wskazuje potrzebę użycia tego wzoru, kiedy upowszechnienia iego dówodu w głębszych ięy częściach szukać przychodzi. Aby więc przed stosowaniem tego wzoru mieć iego dowód ogólny, wyłożę ten

który nam *P. Dubourguet* podaie, a który przy ogólności i ściśłości zupełnej na początkowym tylko oparty jest rachunku.

I. Wszelką funkcją wielowyrazową wyrazić możemy przez  $a + b$ , czyniąc  $a$  równe pierwszemu lub kilku pierwszym wyrazom, zaś  $b$  równe wyrazom pozostałym. Odkryte więc prawo na rozwinięcie funkcji  $(a+b)^m$ , służyć będzie wszelkim funkcjom wielowyrazowym nacechowanym wykładnikiem  $m$ . Jeżeli w funkcji  $(a+b)^m$ , w której na chwilę przypuszczamy  $m$  całkowitem i dodatnim, uczynimy następnie  $a=0, b=0$ , funkcya ta w pierwszym przypuszczeniu zamieni się na  $b^m$ ; w drugim na  $a^m$ : że zaś  $(a+b)^m$  jest równe swemu rozwinięciu, rozwinięcie to zatem powinno być takie, aby, stosownie do tych dwóch przypuszczeń, zamieniło się na  $a^m$  lub  $b^m$ , zatem  $a^m$  i  $b^m$  muszą się znajdować w tém rozwinięciu, a nazwawszy jeszcze przez  $f$  wszystkie inne jego wyrazy, i temu  $f$ , aby w przypuszczeniu tak  $a=0$  iak  $b=0$  mogło zniknąć, dawszy za mnożnika  $ab$ , będziemy mieli  $(a+b)^m = a^m + f(ab) + b^m$ . W tém równaniu biorąc za  $m, m-1$ , będzie  $(a+b)^{m-1} = a^{m-1} + f^1(ab) + b^{m-1}$ , a mnożąc to ostatnie równanie przez  $a+b$  otrzymamy:

$$(a+b)^m = a^m + a^{m-1}b + f^{11}(ab) + ab^{m-1} + b^m \dots (A).$$

Biorąc znowu w tém ostatniem,  $m-1$  za wykładnika funkcji, będziemy mieli  $(a+b)^{m-1} = a^{m-1} + a^{m-2}b + f^{11}(ab) + ab^{m-2} + b^{m-1}$  a mnożąc przez  $a+b$  otrzymamy  $(a+b)^m = a^m + 2a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + f^{11}(ab) + a^2b^{m-1} + 2ab^{m-1} + b^m$ . Nie rozciągając nawet dalej podobnego przerabiania, w tém ostatniem równaniu czytamy prawo, iakiem rządzą się wykładniki ilości  $a$  i  $b$ , w rozwinięciu funkcji

$(a+b)^m$ . To jest, że wykładnik pierwszego wyrazu  $a$ , funkcji dwuwyrazowej postępuje zmniejszając się w każdym wyrazie jednością, począwszy od  $m$  aż do 0, wykładnik zaś drugiego wyrazu  $b$ , téż, funkcji postępuje zwiększając się w każdym wyrazie jednością, począwszy od 0 aż do  $m$ .

Ażebyśmy w témże rozwinięciu odkryli prawo spółczynników, które nie mogą być tylko funkcjami  $m$ , wykładnika potęgi, naznaczmy je przez  $A, B, C, D \dots P$ ;

a otrzymamy równanie ogólne:

$$(a+b)^m = am + Aam^{-1}b + Bam^{-2}b^2 + \dots + Pabm^{-1} + bm \quad (B).$$

Wartość na  $A$  spółczynnika wyrazu drugiego łatwo odkryjemy, bo w równaniu (A) czyniąc  $m=2$ , wypadnie  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , zatem spółczynnik wyrazu drugiego w tym razie będzie równy 2. Pomnożywszy ostatnie równanie przez  $a+b$ , otrzymamy na wyraz drugi rozwinięcia  $(a+b)^3$ ,  $3a^2b$ , zatem spółczynnik wyrazu drugiego w tym razie jest 3, podobnie otrzymalibyśmy z rozwinięcia  $(a+b)^4$ , spółczynnik drugiego wyrazu rozwinięcia równy 4, więc ogólnie spółczynnik drugiego wyrazu rozwinięcia wypadłego z  $(a+b)^m$  będzie  $m$ . Równanie przeto (B), uczyniwszy w nim  $A=m$  zamieni się na:

$$(a+b)^m = am + mam^{-1}b + Bam^{-2}b^2 + Cam^{-3}b^3 + i \text{ t. d. } (C).$$

Pamiętni na znaczenie dane ilościom  $a$  i  $b$ , z równania (C) otrzymamy jeszcze:

$$\{a+(b+1)\}^m = am + mam^{-1}(b+1) + Bam^{-2}(b+1)^2 + i \text{ t. d. } (D).$$

W tém równaniu  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , i t. d. mieć będą też samą wartość co i w równaniu (B), bo nie będąc funkcjami tylko samego wykładnika  $m$  funkcji dwu-wyrazowey, nie będą w wartościach swoich zależeć od ięć wyrazów. Wykonawszy naznaczone w równaniu (D) działania, i nie pisząc tylko po dwa wyrazy rozwinięcia  $(b+1)^2$ ,  $(b+1)^3$  i t. d. które wystarczą do oznaczenia wartości  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , i t. d. otrzymamy:

$$\begin{aligned} (a+b+1)^m = am + mbam^{-1} + Bb^2am^{-2} + \\ Cb^3am^{-3} + \text{i t. d.} \\ + mam^{-1} + 2Bbam^{-2} + \\ Cb^2am^{-3} \text{ i t. d.} \\ + \text{i t. d. (E)} \end{aligned}$$

Równanie (C) daie nam jeszcze:  $\{(a+1)+b\}^m = (a+1)^m + m(a+1)^{m-1}b + B(a+1)^{m-2}b^2 + C(a+1)^{m-3}b^3 + \text{i t. d.}$  a wykonawszy podobnie naznaczone działanie, i nie pisząc tylko po dwa wyrazy rozwiniętych potęg z  $(a+b)$ , będzie:

$$\begin{aligned} (a+b+1)^m = am + mbam^{-1} + Bb^2am^{-2} + Cb^3am^{-3} + \text{i t. d.} \\ + mam^{-1} + m(m-1)bam^{-2} \\ + B(m-2)b^2am^{-3} + \text{i t. d.} \\ + \text{i t. d. (F)} \end{aligned}$$

Z porównania wartości  $(a+b+1)$  w równaniach (E) i (F), otrzymamy iedno równanie którego dwie strony iako wypadłe z odwikłania téżże samęć funkcji, w wyrazach odpowiadających porównane z sobą, dadzą znowu inne równania, które przerobione zamienia się na  $2B = m(m-1)$ , skąd  $B = m\left(\frac{m-1}{2}\right)$

$3C = B(m-2)$ , skąd  $C = B \left( \frac{m-2}{3} \right) = m \left( \frac{m-3}{2} \right)$   
 $\left( \frac{m-2}{3} \right)$ ;  $4D = C(m-3)$ , skąd  $D = C \left( \frac{m-3}{3} \right)$   
 $= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ ; i t. d. Włożywszy te  
 wartości za B, C, D, i t. d. w równanie (C), otrzy-  
 mamy:

$$\begin{aligned}
 (a \pm b)^m = & am \pm mam^{-1}b + \frac{m \cdot m-1}{2} am^{-2}b^2 \pm \\
 & \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3} am^{-3}b^3 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\
 & am^{-4}b^4 \pm \text{i t. d. (G).}
 \end{aligned}$$

Wzór ten nazywa się *wzorem Newtona*, dla tego, że ten wielki Filozof pierwszy go odkrył.

Położyliśmy dwa znaki  $\pm$  przed wyrazami na miejscach parzystych, bo w tych  $b$  znajduje się w potęgach nieparzystych, wyrazy te więc będą odjemnymi, ile razy  $b$  będzie odjemnym, przed wyrazami zaś zamykającymi  $b$  w parzystych potęgach zachowaliśmy tylko znak  $+$ , gdyż  $(\pm b)^{2n} = b^{2n}$ .

Szereg (G) będzie skończonym, kiedy  $m$ , iakęśmy przypuścili, będzie całkowitem i dodatnem.

II. Sposób iakim dowiedliśmy że wyrazem drugim rozwinięcia funkcji  $(a+b)^m$  jest  $ma^{m-1}b$ , nie daie nam zapewne mniemać, że wzór (G) służy do rozwinięcia funkcji z iakimkolwiek  $m$  wykładnikiem. Tém bardziéy Bezout (*Algèbre art.* 157) i Marie (*Leçons de Mathématiques p.* 119) nie mieli prawa

twierdzić bez dowodu, że za pomocą tego wzoru można wyciągać pierwiastki przybliżone z funkcji, które nie są potęgami zupełnemi (1); ile że dowód przez nich użyty upoważnia ich do takowego twierdzenia mniej jeszcze niżeli ten, któryśmy dopiero wyłożyli (2)

*Lacroix* (w §§. 65. 66. *du complement d'Algèbre*) podaje dwa dowody upowszechniające wzór *Newtona*: ieden *Eulera*, drugi znajdujący się w *Tranzakcyjach Filozoficznych* (*Philosophical Transactions*) z roku 1796. Lecz pierwszy, iak sam *Lacroix* uznaje, jest zbyt subtelny, a przez to samo dla poczynających trudny, drugi zdaie mi się być długi i zawiły. Sądzę że ten który wyłożę, wyższość nad tamtymi otrzyma.

III. Oczywiście jest, że kiedy uczynimy  $b=0$  funkcya  $(a+b)^{\frac{p}{n}}$ , w której przypuszczamy na chwilę, że  $p$  i  $n$  są całkowite i dodatne, zamieni się na  $a^{\frac{p}{n}}$  oznaczywszy więc wszystkie wyrazy rozwinięcia

(1) Na stron: 119 *des Leçons de Mathématiques de Lacroix* revues par l'Abbé Marie, ten ostatni *Geometra* mówi: „że za pomocą wzoru *Newtona* możnaby wyciągać pierwiastki potęgi zupełnej, lecz rachunek byłby zbyt długi” powinien był powiedzieć, że sposób ten dałby tylko pierwiastki przybliżone, kiedy ie zupełne za pomocą wzorów szczególnych na potęgi otrzymać można.

(2) Mówię mniej, bo gdybyśmy tylko dowiedli że  $m$ , iakąkolwiek mając wartość, jest współczynnikiem  $a^{m-1}b$  wyrazu drugiego rozwinięcia, tedy sposób iakim odkryliśmy wartości na  $B, C, D$  i t. d. nie zależnie tylko od wykładnika, przekonałby nas, że i inne wyrazy rozwinięcia  $(a+b)^m$  muszą być takie, że służą wszelkim na  $m$  wartościom.

funkcyi  $(a+d)^{\frac{p}{n}}$  niknące w przypuszczeniu  $b=0$  przez  $f(ab)$ , będzie  $(a+b)^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p}{n}} + f(ab)$ , skąd będzie równie  $(a+b)^{\frac{p}{n}-1} = a^{\frac{p}{n}-1} + f^{(1)}(ab)$ ; mnożąc to równanie przez  $(a+b)$  wypadnie  $(a+b)^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p}{n}} + ab^{\frac{p}{n}-1} + f^{(1)}(ab)$ , skąd znowu  $(a+b)^{\frac{p}{n}-1} = a^{\frac{p}{n}-1} + ba^{\frac{p}{n}-2} + f^{(1)}(ab)$ , a mnożąc znowu to ostatnie przez  $(a+b)$  będzie  $(a+b)^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p}{n}} + 2ba^{\frac{p}{n}-1} + b^2 a^{\frac{p}{n}-2} + f^{(2)}(ab)$ , i tak dalej. Ostatnie równanie wskazuje nam prawo tworzenia wykładników: naznaczwszy więc współczynniki ogólnie przez  $A, B, C$ , i t. d. i drugą stronę równania rozebrawszy na mnożniki, wypadnie:

$$(a+b)^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p}{n}} \left\{ 1 + A \left(\frac{b}{a}\right) + B \left(\frac{b}{a}\right)^2 + C \left(\frac{b}{a}\right)^3 + D \left(\frac{b}{a}\right)^4 + \text{i t. d.} \right\} \dots (H);$$

Ponieważ jedność do jakiegokolwiek potęgi wyniesiona, jest zawsze równa jedności, to jest

$1 = 1^A = 1^{A-1} = 1^{A-2} = 1^{A-3} = \text{i t. d.}$  więc nazwawszy szereg między nawiasem przez  $S$ , będzie

$$(a+b)^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p}{n}} S, \text{ tudzież } S = 1^A + A 1^{A-1} \frac{b}{a} + B 1^{A-2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 + C 1^{A-3} \left(\frac{b}{a}\right)^3 + \text{i t. d.} = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^A;$$

Z tego równania, działając iak w n° 1. otrzymamy:

$$B = \frac{A \cdot A - 1}{2}, \quad C = \frac{A \cdot A - 1 \cdot A - 2}{2 \cdot 3}, \quad \text{i t. d.} \quad \text{A\kern-1pt\zeta e} \quad S =$$

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^A \quad \text{i} \quad S = \left(\frac{a+b}{a}\right)^{\frac{p}{n}}, \quad \text{wi\kern-1pt\c e c} \quad \left(\frac{a+b}{a}\right)^A = \left(\frac{a+b}{a}\right)^{\frac{p}{n}};$$

to za\kern-1pt\z s równanie nie mo\kern-1pt\z e mie\kern-1pt\c c mieysca tylko kie-

$$\text{dy} \quad A = \frac{p}{n}, \quad \text{co daie} \quad B = \frac{p}{n} \frac{(p-1)}{n}, \quad C = \frac{p}{n} \frac{2}{2}$$

$$\frac{(p-1)}{n} \frac{(p-2)}{n}, \quad \text{i t. d.} \quad \text{a warto\kern-1pt\c ci te za} \quad A, \quad B, \quad C,$$

$$\text{i t. d. wlo\kern-1pt\z ywszy w (H) wypadnie:} \quad \left(a \pm b\right)^{\frac{p}{n}} \\ = a^{\frac{p}{n}} \left\{ 1 \pm \frac{p}{n} \frac{b}{a} - \frac{p(p-1)}{n^2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \pm \frac{p(p-1)(2n-p)}{2 \cdot 3 \cdot n^3} \left(\frac{b}{a}\right)^3 - \text{i t. d.} \right\} (1).$$

wyraz taki sam iaki otrzymamy, czyni\kern-1pt\c w (G)

$$m = \frac{p}{n}.$$

Wz\kern-1pt\o r wi\kern-1pt\c Newтона słu\kern-1pt\z y do rozwini\kern-1pt\c cia fun-  
kcyi z wy\kern-1pt\c ladnikiem ca\kern-1pt\l kowym dodatnym lub  
u\kern-1pt\o mkowym dodatnym. W pierwszym razie otrzy-  
mamy szereg sko\kern-1pt\o czony; gdy\kern-1pt\z od ilo\kern-1pt\c ci sta\kern-1pt\l y  
 $m$ , odeymui\kern-1pt\c si\kern-1pt\c ilo\kern-1pt\c ci ca\kern-1pt\l kowite co raz wzrastai\kern-1pt\c e,  
w drugim wypad\kern-1pt\c szereg niesko\kern-1pt\o czony, gdy\kern-1pt\z od ilo-  
\kern-1pt\c ci  $n$ ,  $2n$ ,  $3n$ ,  $4n$  i t. d. kt\kern-1pt\o re post\kern-1pt\c pui\kern-1pt\c do nie-  
sko\kern-1pt\o czono\kern-1pt\c i wzrastai\kern-1pt\c , odeymui\kern-1pt\c si\kern-1pt\c ilo\kern-1pt\c c sta\kern-1pt\l a  $p$ .



Szereg ten nieskończony będzie malejącym, kiedy  $\frac{b}{a}$  jest ułamkiem właściwym, przeciwnie będzie wzrastającym, kiedy  $\frac{a}{b}$  będzie liczbą całkowitą lub ułamkiem niewłaściwym.

IV. Rozumując podobnie jak w n° poprzedzającym, dowiedziemy, że wzór Newtona służy równie do rozwinięcia funkcji z wykładnikiem odjemnym.

Jakoż  $(a+b)^{-n} = a^{-n} + f(ab)$ , skąd  $(a+b)^{-n-1} = a^{-n-1} + f^1(ab)$ ; mnożąc przez  $a+b$  będzie  $(a+b)^{-n} = a^{-n} + ba^{-n-1} + f^{11}(ab)$ , skąd znowu  $(a+b)^{-n-1} = a^{-n-1} + ba^{-n-2} + f^{111}(ab)$ , co mnożąc znowu przez  $a+b$  wypadnie  $(a+b)^{-n} = a^{-n} + 2ba^{-n-1} + b^2a^{-n-2} + f^{1111}(ab)$ , i tak następnie; naznaczysz więc współczynniki przez  $A, B, C$ , i t. d. otrzymamy:

$$(a+b)^{-n} = \frac{1}{a^n} \left\{ 1 + A\left(\frac{b}{a}\right) + B\left(\frac{a}{b}\right)^2 + C\frac{b^3}{a} + \right. \\ \left. \text{i t. d.} \right\} (L).$$

Lecz dowiedliśmy już, że szereg między nawiasami

jest równy  $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^A$ ; więc  $(a+b)^{-n}$

$$= \frac{1}{a^n} \left(1 + \frac{b}{a}\right)^A \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{a+b}{a}\right)^{-n} = \left(\frac{a+b}{a}\right)^A;$$

równanie to nie może mieć miejsca tylko kie-

dy  $A = -n$ , co da  $B =$

$$\frac{-n(-n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}; \quad C = \frac{-n(-n-1)}{2}$$

$\frac{(-n-2)}{3} = \frac{n(n+1)}{2} \frac{(n+2)}{3}$ ; i t. d. kładąc te wartości w (L) wypadnie:

$$(a \pm b)^{-n} = a^{-n} \left\{ 1 \mp n \frac{b}{a} + \frac{n(n+1)}{2} \frac{b^2}{a^2} \mp \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} \left(\frac{b}{a}\right)^3 + \text{i t. d.} \right\} \quad (M).$$

wyraz taki sam iaki wypada czyniąc w (G)  $m = -n$ .

V. Jeżeli  $m = -\frac{p}{n}$ , działanie podobne poprze-

dzającemu da  $(a+b)^{-\frac{p}{n}} = a^{-\frac{p}{n}} \left\{ 1 + A \frac{b}{a} + B \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right.$

$\left. + C \left(\frac{b}{a}\right)^3 + \text{i t. d.} \right\} = a^{-\frac{p}{n}} \left(\frac{a+b}{a}\right)^A$ ; więc  $\left(\frac{a+b}{a}\right)^A$

$$= \left(\frac{a+b}{a}\right)^{-\frac{p}{n}} \quad \text{skąd } A = -\frac{p}{n}, \quad B = \frac{p(p+n)}{2n^2}$$

$C = \frac{-p(p+n)}{2 \cdot 3} \frac{(p+2n)}{n^3}$ , i t. d. Włóżywszy te

wartości w rozwinięcie funkcji  $(a+b)^{-\frac{p}{n}}$ , wypadnie:

$$(a \pm b)^{\frac{p}{n}} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{(a \pm b)^n}} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{a^n}} \left\{ 1 \mp \frac{p b}{n a} + \frac{p(p-1)}{2n^2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \mp \text{i t. d.} \right\}$$

szereg taki, iakibyśmy otrzymali czyniąc w (G)  $m = -\frac{p}{n}$ .

VI. Nakoniec jeżeli  $m$  jest ilością uroioną  $n \sqrt{-1}$ , działając iak wyżej znajdziemy  $(a \pm b)^{n \sqrt{-1}}$

$$= a^{n \sqrt{-1}} \left\{ 1 + A \left(\frac{b}{a}\right) + B \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^3 + \text{i t. d.} \right\}$$

$$= a^{n \sqrt{-1}} \left(\frac{a \pm b}{a}\right)^A; \text{ skąd } A = n \sqrt{-1}, B = \frac{n \sqrt{-1}(n \sqrt{-1} - 1)}{2}, \text{ i t. d. więc:}$$

$$(a \pm b)^{n \sqrt{-1}} = a^{n \sqrt{-1}} \left\{ 1 \pm n \sqrt{-1} \frac{b}{a} + n \sqrt{-1} - \frac{(n \sqrt{-1} - 1)}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \pm \text{i t. d.} \right\}.$$

wypadek iaki otrzymamy uczyniwszy w (G)  $m = n \sqrt{-1}$ .

Wzór więc Newtona służy ogólnie na rozwinięcie wszelkich funkcy wielowyrazowych nacechowanych iakimkolwiek wykładnikiem  $m$ .

## Zastosowanie Wzoru Newtona.

VII. Dowiedliśmy już Nr. III. że:

$$(a \pm b)^m = a^m \pm m a^{m-1} b + m \frac{(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 \pm$$

i t. d. (G).

$$(a \pm b)^n = a^n \left\{ a \pm \frac{p b}{n a} - \frac{p(p-1)}{2 \cdot n^2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \pm \right. \\ \left. \frac{p(p-1)(2n-p)}{2 \cdot 3 \cdot n^3} \left(\frac{b}{a}\right)^3 - \text{i t. d.} \right\} \quad (\text{J}).$$

$$(a \pm b) = a^{\frac{1}{n}} \left\{ 1 \mp \frac{n b}{a} + \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \mp \right. \\ \left. \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3 \cdot} \left(\frac{b}{a}\right)^3 \mp \text{i t. d.} \right\} \quad (\text{M}).$$

Czyniąc następnie w (G)  $m$  równe 2, 3, 4, 5, i t. d. otrzymane stąd z  $a \pm b$  potęgi 2, 3, 4, 5, i t. d. nauczą nas:

I. Że rozwinięcie z  $(a \pm b)^m$  ma  $m+1$  wyrazów.

II. Że układ tych wyrazów jest sobie podobny; to jest, w pierwszemy połowie rozwinięcia, wyrazy te same mają współczynniki, co i wyrazy w połowie rozwinięcia drugiego; że summa wykładników ilości  $a, b$ , w każdym wyrazie jest ta sama, tak że gdy iakikolwiek wyraz  $n$ , w pierwszemy połowie rozwinięcia jest,  $P a^n b^{m-n}$  tenże wyraz w połowie rozwinięcia drugiego będzie  $P a^{m-n} b^n$ .

Z tych uwag wypada, że gdy funkcji daney wykładnik  $m$  jest liczbą nie parzystą, którą wyrazić możemy przez  $2i+1$  w rozwinięciu téj funkcji bę-

dzie wyrazów  $2i+2$ , z tych dosyć będzie wynaleźć  $i+1$  pierwszych wyrazów, drugą zaś połowę  $i+1$  rozwinięcia, odkryjemy z wyrazów pierwszych bez pomocy rachunku.

Podobnie gdy  $m$  jest liczbą parzystą którą wyrazimy przez  $2i$ , w rozwinięciu będzie  $2i+1$  wyrazów, z których nie trzeba nam szukać tylko  $i+1$  wyrazów pierwszych; z tych  $i$  wyrazów pozostałych odkryjemy bez rachunku. Lekka wskaże uwaga, że w tym razie wyraz  $i+1$  będzie wyrazem środkowym rozwinięcia zamykającym *a* i *b* mnogość z ilości *a*, *b* wyniesionych do potęg połowy wykładnika  $m$ .

Te uwagi wiele ułatwią i skrócą rachunek przywiązany do rozwinięcia iakiękolwiek funkcyi z wykładnikiem dodatnym i całkowitym, okażemy to w przykładach.

I. Wynieść  $x^2 - q^2$  do potęgi iedenastéy.

Potęga funkcyi danéy zamykać będzie 12 wyrazów, z tych dosyć sześć wynaleźć, które znając prawo wykładników odkryjemy łatwo, odkrywwszy ich spółczynniki. Odniosłszy funkcyą daną do wzoru (G), będzie  $a=x^2$ ,  $b=q^2$ ,  $m=11$ ; ostatni war-

tość daie  $\frac{m(m-1)}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$  spółczynnik wy-

razu trzeciego; mnożąc tę liczbę przez  $\frac{m-2}{3} = 3$

wypadnie 165 spółczynnik wyrazu czwartego; ten

znowu pomnożony przez  $\frac{m-3}{4} = 2$ , da 330 spółczyn-

nik wyrazu piątego. Nakoniec mnożąc ostatni

spółczynnik przez  $\frac{m-4}{5} = \frac{7}{5}$ , wypadnie 462 na współczynnik wyrazu szóstego. Kończąc na tém rachunek wniesiemy z wyższych uwag, że  $(x^2 - q^2)^{11} = x^{22} - 11x^{20}q^2 + 55x^{18}q^4 - 165x^{16}q^6 + 330x^{14}q^8 - 462x^{12}q^{10} + 462x^{10}q^{12} - 330x^8q^{14} + 165x^6q^{16} - 55x^4q^{18} + 11x^2q^{20} - q^{22}$ .

II. Jeżeli  $m=10$ , przez rachunek podobny poprzedzającemu znajdziemy współczynniki sześciu pierwszych wyrazów, 1, 10, 45, 120, 210, 252; więc  $(x^2 - q^2)^{10} = x^{20} = 10x^{18}q^2 + 45x^{16}q^4 - 120x^{14}q^6 + 210x^{12}q^8 - 252x^{10}q^{10} + 210x^8q^{12} - 120x^6q^{14} + 45x^4q^{16} - 10x^2q^{18} + q^{20}$ .

III. Chcąc wynieść do potęgi trzecię funkcją trówyrazową  $a^2x - b\sqrt{x+q}$ , uczynimy  $a = a^2x, b = b\sqrt{x-q}$ , włożywszy te wartości w (G) wypadnie  $(a^2x - b\sqrt{x+q})^3 = a^6x^3 - 3a^4x^2(b\sqrt{x-q}) + 3a^2x(b\sqrt{x-q})^2 - (b\sqrt{x-q})^3$ , ze wzoru (G) czyniąc  $m=2$ , otrzymamy  $(b\sqrt{x-q})^2 = b^2x - 2bq\sqrt{x+q^2}$ ; a zaś  $(b\sqrt{x-q})^3 = b^3x\sqrt{x} - 3b^2qx + 3bq^2\sqrt{x-q^3}$ , włożywszy te wartości w rozwinięcie z  $(a^2x - b\sqrt{x+q})^3$ , otrzymamy potęgę trzecią funkcji daney.

VIII. Wzór (G) nie daje nam tylko przybliżone pierwiastki z funkcji które są potęgami zupełnemi (I)

(I) Potęga bowiem zupełna odniesiona do wzoru (G) zamienia się na funkcją wykładnika ułomkowego, która podług (VIII) prowadzi do szeregu nieskończonego.

ale uczy nas, że kiedy  $a$  wyraża jeden wyraz pierwiastku,  $am$  nie jest iak tylko jednym wyrazem potęgi  $m$ ; że  $b$  zamykając wszystkie inne wyrazy pierwiastku, w potędze jest mnożone przez  $am^{m-1}$ ; oczywista więc jest, że  $am^{m-1} b$  podzielone przez  $am^{m-1}$  da na wieloraz  $b$  pozostałe wyrazy pierwiastku, które dodane do  $a$  pierwiastku z  $am$ , uczynią pierwiastek potęgi  $m$ . Ten początek wiedzie nas do następującego prawidła: że aby wyciągnąć pierwiastek potęgi  $m$  z funkcji wielowyrzowej, wziąć w niej należy wyraz najprostszy z któregoby się dał wyciągnąć pierwiastek potęgi  $m$  zupełny, tak otrzymany pierwiastek wynosi się do potęgi  $m-1$ , i mnoży się przez  $m$ , a przez wypadłą stąd mnogość podzieliwszy wszystkie wyrazy potęgi mające też mnogość za mnożnika; wieloraz da inne wyrazy pierwiastku, które złączone z wyrazem pierwszym uczynią pierwiastek zupełny, jeżeli funkcya dana jest potęgą  $m$  zupełną, o czém się łatwo przekonać wynosząc znaleziony pierwiastek do potęgi  $m$ . *Przykład.*

Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z funkcji

$$3qx^4 + 12p^2qx^2 + q^3 - 6pq^2x - 8p^3x^3 + \\ 3q^2x^2 - 10pqx^3 + x^6 + 12p^2x^4 - 6px^5.$$

Biorę  $q^3$ , które jest sześcianiem zupełnym z  $q$ ; potem szukając w funkcji daney wyrazów mnożonych przez  $3q^2$  znajduję ich dwa, czwarty i szósty podzielne przez  $3q^2$ , otrzymam więc na wieloraz  $-2px + x^2$ ,

---

Pierwsze wyrazy tego szeregu będą wyrazami pierwiastku, dalsze za posunięciem szeregu znikną, lecz na to miejsce pokażą się wyrazy inne, które znowu zniszczy dalsze rozwinięcie szeregu i tak następnie. Szereg więc ten nie da tylko przybliżony pierwiastek.

który dodany do  $q$  da  $q - 2px + x^2$  na pierwiastek zupełny, kiedy funkcya dana jest sześcianiem zupełnym, o czem przekonać się nie trudno wyniosłszy ten pierwiastek do potęgi trzeciej.

IX. Wzór (K) służy do otrzymania pierwiastku z funkcji, które nie są potęgami zupełnymi.

Przykład:  $\sqrt{(x^2 \pm q^2)}$ ; ponieważ wyciągnąć pierwiastek z funkcji jest ią wynieść do potęgi wykładnika ułamkowego, więc  $\sqrt{(x^2 \pm q^2)} = (x^2 \pm q^2)^{\frac{1}{2}}$ , odniosłszy tę funkcję do wzoru (K) będzie  $a = x^2$ ,  $b = q^2$ ,  $n = 2$ ,  $p = 1$ ; włożywszy w (K) te wartości, wypadnie  $\sqrt{(x^2 \pm q^2)} = x \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{x}{q} \right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 2} \left( \frac{x}{q} \right)^4 \pm \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{x}{q} \right)^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left( \frac{x}{q} \right)^8 \pm i. t. d. \right\}$

X. Za pomocą wzoru (M) potrafimy rozwinąć na szereg, ułamki z których zupełnego wielorazu otrzymać nie można. Każdy bowiem ułamek  $\frac{P(a, b, c, i. t. d.)}{Q(a, x, y, i. t. d.)}$

przenosząc mianownik do licznika, wyrazi się przez  $P(a, b, c, i. t. d.) \times Q(a, x, y, i. t. d.)^{-1}$ ; nie pozostaje więc nam tylko ostatni mnożnik rozwinąć na szereg i pomnożyć przez  $Q$ . Weźmy sobie za przykład

ułamek  $\frac{p}{q + cx}$ , który mamy rozebrać na szereg, ten ułamek  $= p(q + cx)^{-1}$ ; porównawszy więc  $(q + cx)^{-1}$  ze



wzorem (M), mam  $a=q$ ,  $b=ex$ ,  $n=1$ , włożywszy w tenże wzór otrzymane wartości wypadnie  $p(q+ex)$  <sup>1</sup>

$$= \frac{p}{q+ex} = \frac{p}{q} \left( 1 - \frac{ex}{q} + \left( \frac{ex}{q} \right)^2 - \left( \frac{ex}{q} \right)^3 + i. t. d. \right)$$

Wzór Newtona na rozwinięcie funkcji z wykładnikiem ułomkowym odjemnym da nam jeszcze wie-

$$\text{loraz z funkcji } \frac{x^2}{\sqrt[n]{q+r}} = x(q+r)^{-\frac{1}{n}}$$

XI. To cośmy Nro. VIII. powiedzieli o wyciąganiu pierwiastków z funkcji algebricznych, daie nam ogólne prawidło na wyciąganie pierwiastków z liczb. Każdą bowiem liczbę zamykającą ilość znaków większą od wykładnika pierwiastku uważać możemy iako złożoną z dziesiątków, które wyrazimy przez  $a$ , i jedności które wyrazimy przez  $b$ ; więc potrzeba: 1<sup>o</sup> w liczbie daney wziąć od lewéy strony liczbę znaków wyrażających wartości  $10^m$ ; 2<sup>o</sup> szukać iaka jest liczby wziętęy po lewéy stronie naybliższa i mniéysza potęga  $m$ , téy pierwiastek oddzielony linią pisze się po prawéy stronie liczby daney. 3<sup>o</sup> Wziąć różnicę między potęgą  $m$  wynalezionego pierwiastku, a liczbą oddzieloną po lewéy stronie, i do téy różnicy złożyć pozostałe znaki w liczbie daney. 4<sup>o</sup> W liczbie stąd wypadłéy od prawéy strony oddzielić znaków liczebnych tyle, ile pierwiastku wykładnik zamyka jedności mniéy iednym, 5<sup>o</sup> Obok liczby po lewéy stronie z takowego oddziału pisze się za dzielnika mnogość z części pierwiastku wyniesionego do potęgi  $m-1$  przez  $m$  wykładnika pierwiastku; liczbę tę podzieliwszy przez takową mnogość, wieloraz da drugą część pierwiastku,

jeżeli liczba dana jest potęgą  $m$  zupełną, o czém przekonać się łatwo, wyniosłszy znaleziony pierwiastek do potęgi  $m$ .

Lecz to, cośmy dopiero powiedzieli, nie służy tylko liczbie, w której ilość znaków liczebnych jest między  $m$  i  $2m$ ; gdyby zaś ilość znaków była między  $2m$  i  $3m$ , w tedy w liczbie daney należy od prawey strony oddzielić liczbę znaków  $2m$ , działając potem iakby  $m$  pozostałych znaków po prawey stronie nie było, do pierwiastku już wynalezionego z dwóch znaków przydać się zero, ten wyniosłszy do potęgi  $m$ , odciągnąć należy od liczby daney, z resztą odbywa się działanie poprzedzającym sposobem.

Podobnie postąpić sobie należy gdyby w liczbie daney ilość znaków była między  $(n-1)m$  i  $nm$ , biorąc wszystkie znaki znalezionego pierwiastku za jego dziesiątki. Przykład. Żadamy sobie wyciągnąć pierwiastek potęgi siódmej z liczby:

$$\begin{array}{r|l} 43581,7657216 & (49, 48, 47) \\ 16384 & \text{pier: fałsz:} \\ \hline 28672 | 2.7197,7657216 & 46 \text{ pier: pr:} \end{array}$$

Ponieważ liczba dana ma więcej niż siedm a mniej od czternastu znaków liczebnych, więc iey pierwiastek zamykać tylko będzie dziesiątki i jedności. Oddzielać w niej kreską, siedm znaków od prawey strony, pod liczbą z oddzielenia wypadłą pisać 16384 największą potęgę siódmą mnieyszą od téj liczby, iey zaś pierwiastek 4, kładę po prawey stronie, odciągam 16384 od 43581, do reszty 27197 składam znaki pozostałe, w liczbie 27197,7657216 oddzieliwszy kreską od prawey strony siedm końcowych znaków, liczbę pozostałą 27197 dzielę przez  $7.4^{\circ} = 28672$ , a wieloraz 9. położony

obok 4 da na pierwiastek 49. który jest fałszywy bo wyniesiony do potęgi siódmej, daie liczbę większą od żadaney, w tymże są przypadku liczby 48, 47 lecz 46, wyniesione do potęgi siódmej daie liczbę daną, więc 46 jest pierwiastkiem szukany.

Widzimy iednak że sposób ten wyciągania pierwiastków z liczb acz jest ogólnym, staie się w tém długim i pracowitym; że w dzieleniu nie daie nam od razu trafiać na prawdziwe wielorazy mające składać pierwiastek. Rachunek ten okaże się tem dłuższym im będzie większy wykładnik pierwiastku. Nauka o Logarytmach wskazuje krótszą do tych działań drogę.

Wzór (J) uczy nas ieszcze wyciągać pierwiastki przybliżone z liczb sposobem daleko łatwiejszym niż Arytmetyka.

Lecz aby pierwiastki z liczb otrzymać naybliższe prawdy, potrzeba aby szereg (1) był znacznie male-

jącym, czyli aby w ułamku  $\frac{b}{a}$   $a$  było znacznie wię-

kszem od  $b$ . Liczbę zatem z której mamy wyciągnąć pierwiastek przybliżony potęgi  $m$ , rozebrać należy na dwie znacznie różniące się od siebie, w nięj liczbę większą uczynić równą  $a$ , mnieyszą zaś równą  $b$ . Co wykonamy czyniąc w liczbie daney  $d$ ,  $a$  równe potędze  $n$ , bezpośrednie mnieyszy od  $d$ , iesli różnica między tą potęgą i liczbą daną będzie mnieyszą od samęj potęgi, bo uczyniwszy tę różnicę równą  $b$ , wypadnie  $a$  większe od  $b$ , zatem szereg będzie malejącym; kiedy zaś różnica między potęgą  $n$ , mnieyszą od  $d$  a liczbą  $d$ , nie jest mnieyszą od samęj potęgi, w tedy należy uczynić  $a$  równe potędze  $n$

bezpośrednie większy od  $d$ , co da jeszcze różnicę między potęgą  $n$  i liczbą  $d$  mniejszą od samę potęgi, zatem  $b$  mniejsze od  $a$  czyni szereg malejącym.

Mając w liczbie daney wartości na  $a$ ,  $b$  i  $p=1$ , te włożywszy w (J) otrzymamy szereg w ułamkach prostych, z tych każdy obróciwszy na ułamek dziesiętny, posuwając dzielenie do liczby znaków dziesiętnych większy dwoma od téj jaką mieć chcemy w pierwiastku, potem dodawszy do siebie wyrazy podług znaków wypadnie pierwiastek naybliższy prawdy, bo niedokładność nie rozciągnie się tylko do iednego lub dwóch końcowych znaków dziesiętnych. Okażmy to w przykładach.

1. Przybliżyć się do pierwiastku potęgi szóstey z liczby 65, w pięciu znakach dziesiętnych. Widzę że 64 iest szóstą potęgą z 2, czynię więc  $a=64$ ,  $b=65-64=1$ ,  $p=1$ ,  $n=6$ , włożywszy te wartość

$$\begin{aligned} & \text{w (K), wypadnie: } (64+1) \frac{1}{b} \\ & = \sqrt[6]{65} = 2 \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{1}{64} - \frac{5}{72} \frac{1}{64^2} + \frac{55}{1296} \frac{1}{64^3} - \text{it.d.} \right\} \\ & = 2(1 + 0,0026042 - 0,0000169 + 0,0000002 - \text{it.d.}) \\ & = 2,0051750, \text{ więc pierwiastkiem szukanym będzie } 2,00518. \end{aligned}$$

2. Szukamy pierwiastku potęgi szóstey z liczby 63 przybliżonego w pięciu znakach dziesiętnych. Czypniac  $a=64$ ,  $b=-1$ ,

wypadnie

$$\sqrt[6]{63} = (64-1)^{\frac{1}{6}} = 2(1-0026042-$$

0,0000169 + 0,0000002. i t. d.) = 1,9947574, czyli 1,99476 będzie pierwiastkiem żądanym.

X.III. Chociaż sposób dopiero podany uczy nas iak szereg (J) czyniąc malejącym można otrzymać pierwiastki najbliższe prawdy, iednak kiedy liczba dana nie da się rozebrać na dwie liczby znacznie różniące się od siebie, czyli kiedy w niej  $a$  będzie mało większym od  $b$ , szereg (J) niebędzie dość malejącym i potrzeba go do wielkiej liczby wyrazów posunąć, aby otrzymać z niego pierwiastek przybliżony, co w prowadzi w działania pracowite i długie; lecz skróci się jeszcze tego rodzaju rachunek przez następujące prawidło. Za pomocą dwóch tylko wyrazów szeregu (J) wyciąga się z liczby danej pierwiastek potęgi  $n$  przybliżony w dwóch lub trzech znakach dziesiętnych, tak otrzymany pierwiastek wyniosłszy do potęgi  $n$ , czyni się równym  $a$ , bierze się potem różnica między tą potęgą a liczbą daną, i ta czyni się równa  $b$ . wtedy różnica między  $a$  i  $b$  otrzyma się znaczna, i szereg będzie tak szybko malejącym że tylko trzy jego wyrazy dadzą największe przybliżenie pierwiastku. Nie biorąc więc iak trzy wyrazy z (J) wzór do takowych działań będzie następujący:

$$\sqrt[n]{(\text{liczba dana})} = \sqrt[n]{(a \pm b)} = \sqrt[n]{a} \left\{ 1 \pm \frac{b}{na} - \right.$$

$$\left. \frac{n-1}{2} \left( \frac{b}{na} \right)^2 \right\} (P) \text{ Przykład.}$$

Szukamy pierwiastku potęgi piątej z 161900. przybliżonego w dwunastu znakach dziesiętnych; mamy  $a=15^5=161051$ ,  $b=849$  używszy dwóch tylko wyrazów wzoru (P) i posuwając pierwsze przybliżenie do trzech znaków dziesiętnych, wypadnie

$$\sqrt[5]{161900}=11\left(1+\frac{849}{805255}\right)=11,012.$$

Wyniosłszy ten pierwiastek do potęgi piątej będzie  $a=161931,378732020728832$ . więc  $b=a-161900=31,378732020728832$ . wartości  $a$ ,  $b$ , włożwszy w (P) wypadnie  $\sqrt[5]{161900}=11,011573180339$ .

KONIEC.

# WIDOK RZECZY

## *w tém Dziele zawartych.*

### W S T Ę P.

	<i>strona</i>
Cel Algiebry. Dziesięć głównych znaków algebraicznych I.	
Rozwiązanie niektórych podań, skazujących użyte.	
czność znaków algebraicznych . . . . .	5.

### R O Z D Z I A Ł I.

#### *O Działaniach algebraicznych*

Wiadomości poprzednicze . . . . .	11.
Przywiedzenie wyrazów podobnych . . . . .	13.
Dodawanie i odęmywanie. Prawidło na znaki w ode-	
mowaniu . . . . .	15.
Mnożenie dwóch iednomianów. Prawidło na wykładniki	18.
Mnożenie dwóch wielomianów. Prawidło na znaki .	19.
Uwagi nad mnożeniem . . . . .	23.
Dzielenie dwóch iednomianów . . . . .	27.
Prawidło na znaki . . . . .	30.
Znaczenie wyrażenia $a^0$ . . . . .	30.
Dzielenie dwóch wielomianów . . . . .	32.
Przypadek kiedy wielomian dzielny zamyka iedną, al-	
bo więcej głosek które się nie znajdują w dzielniku	43.
Dowieść, że gdy $m$ jest całkowitą liczbą wyrażenie	
$x^m - a^m$ podzielne jest przez $x - a$ . . . . .	45.
Kiedy dwa wielomiany nie są podzielne . . . . .	46.
O Ułomkach Algebraicznych. Działania z ułomkami	48.
O naywiększym spólnym dzielniku algebraicznym	50.

### R O Z D Z I A Ł II.

#### *O Zagadnieniach pierwszego stopnia.*

Wiadomości poprzednicze o równaniach . . . . .	62.
§ I. Równanie pierwszego stopnia z iedną niewiadomą	
zniesienie wyrazów z iednej strony na drugą	64.
O zniesieniu mianowników w równaniu . . . . .	65.

Rozwiązanie równania stopnia pierwszego według tych prawideł . . . . .	67.
Prawidło prowadzące do ułożenia równania z warunków podania. Zastosowanie do różnych zagadnień . . . . .	70.
Zagadnienie, w brzmieniu którego znajduje się wię- cej warunków, aniżeli ich potrzeba, żeby zna- leść ważność niewiadomych ilości . . . . .	80.

§ II. *O równaniach i zagadnieniach pierwszego Stopnia  
z dwiema i więcej niewiadomymi.*

Sposoby rugowania niewiadomych w równaniach sto- pnia pierwszego . . . . .	83.
Warunek potrzebny aby zagadnienie było wyznaczone . . . . .	92.
Rozwiązanie różnych zagadnień z dwiema lub więcej niewiadomymi. . . . .	93.

§ III. *Zagadnienia prowadzące do wypadków odiemnych.*

Teorya ilości odiemnych, Prawidło ogólne . . . . .	98.
Wyrażenia właściwe językowi algebricznemu . . . . .	103.
Wszelka ilość odiemna, mniejsza jest od 0, a z dwóch ilości odiemnych, mniejsza jest licznie większa . . . . .	104.
Rozbór zagadnień pierwszego stopnia z dwiema lub kilką niewiadomymi . . . . .	106.
Sposób, iak z ważności służących zagadnieniom ogół- nym, przejść do innych, któreby się tylko w tém różniły, że pewne ilości dodatne stałyby się odiemne- mi i nawzajem . . . . .	112.

§ IV. *Ogólne roztrząśnienie zagadnień i równań sto-  
pnia pierwszego.*

Wyprowadzenie ogólnych formuł na ważności dla nie- wiadomych w równaniach stopnia pierwszego . . . . .	115.
Prawo tworzenia liczników i spółnych mianowników . . . . .	118.
Zastosowanie tych formuł do szczególnych przykładów . . . . .	119.
Roztrząśnienie różnych postaci, w których ważności ogólne przedstawić się mogą na mocy szczególnych przypuszczeń . . . . .	

Wytlómaczenie wypadków $\frac{A}{0}$ i $\frac{0}{0}$ w równaniu z iedną niewiadomą . . . . .	122.
Uwaga nad wyrażeniem $\frac{0}{0}$ które oznacza niekiedy by- tność czynnika spółnego dwom wyrazom ułomku . . . . .	123.



Wylômaczenie wypadków $\frac{A}{0}$ i $\frac{0}{0}$ otrzymanych z rozwi-	
zania ilukolwiek równań z tyluż niewiadomemi. Oka-	
zanie że $\frac{0}{0}$ nie zawsze oznacza niewyznaczoność .	125
Inne cechy niepodobieństwa albo niewyznaczoności	
w równaniach .	128.
Szczególny przypadek, w którym wyrazy wiadome	
to jest drugiej strony równań z kilką niewiadomemi	
są równe z ro	130.
Rozważenie okoliczności, gdy brzmienie podania, do-	
prowadza do liczby równań rzeczywiście różnych i	
większcy od liczby ilości niewiadomych. Co zowie-	
my równaniem warunkowem?	131.
Powtórzenie wypadków z rozstrząśnienia poprzedzają-	
cego	132.
Podanie różnych zagadnień do rozwiązania .	133.

### ROZDZIAŁ III.

#### *Rozwiązanie zagadnień i równań stopnia drugiego*

<i>Wstęp</i> . . . . .	135.
------------------------	------

#### § I. *Formowanie Kwadratu i wyciąganie pierwiastku kwadratowego z ilości algebricznych*

Przypadek w którym ilość dana jest jednomianem. Po-	
czątek wyrażeń zwanych urojonemi .	135.
Prawo formowania kwadratu z iakiegokolwiek wielomianu	138.
Sposób postępowania w wyciąganiu pierwiastku kwa-	
dratowego z wielomianu. Znaki po których się pozna-	
ie, że wielomian nie jest zupełnym kwadratem	140.
Rachunek ilości pierwiastkowych drugiego stopnia.	
Przeniesienie współczynnika ilości pierwiastkowej	
pod znak pierwiastku. Uczynić spółmiernym miano-	
wnik ułamku niespółmiernego .	145.

#### § II. *Zagadnienia i równania drugiego stopnia.*

Rozwiązanie równania drugiego stopnia o dwóch wy-	
razach. Ważności urojone .	149.
Sposób rozwiązywania równania zupełnego drugiego sto-	
pnia. Zastosowanie do różnych przykładów	152.
Rozwiązanie równania nie znosząc współczynnika przy	
wyrazie pierwszym $x^2$ . . . . .	156.

Rozwiązanie różnych zagadnień. Wytłomaczenie wypadków odmiennych. Zagadnienie, którego rozwiązanie daie dwa wypadki dodatne.	158.
Rozstrząśnienie ogólnego równania, stopnia drugiego. Inny sposób na rozwiązanie równania Stopnia drugiego. Okazanie że niewiadoma ma dwie ważności	162.
Przyczyna nazwiska pierwiastku który się daie ważności. Związki pomiędzy pierwiastkami i współczynnikami równania	164.
Rozstrząśnienie zupełne pod względem na rozmaite postaci, pod którymi mogą się otrzymać pierwiastki	
Wytłomaczenie wypadków w postaci $\frac{A}{0}$ i $\frac{0}{0}$ Objaśnienie tych wypadków na przykładzie	172.
Inne zagadnienie którego rozbiór przedstawia nowe okoliczności	174.
Uwagi nad nierównością.	
Podania z Teorii <i>de Maximis et Minimis</i> , co zowie-my zmienną, funkcją téy zmiennéy, i zmienną niezależną	193.
Własności trójmianów 2go. stopnia. Jaki powinien być związek pomiędzy współczynnikami aby Trójmian był zupełnym kwadratem	199.
Rozwiązanie innych podań tyczących się Maximum et Minimum	202.
§ III. Zagadnienia 2go. Stopnia z kilką niewiadomemi.	
Szczególne sposoby na rozwiązanie takowych równań	205.
Sposób ogólny dla równań z dwoma niewiadomemi	208.
Sposób wyciągania pierwiastku kwadratowego z ilości częścią spółmiernéy, częścią niespółmiernéy	211.

## ROZDZIAŁ IV.

*Równania niewyznaczone pierwszego i drugiego stopnia.*

§ I. *Równania i zagadnienia pierwszego stopnia z dwiema niewiadomemi ilościami.*

Warunek konieczny aby równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomemi sprawdzone być mogło przez liczby całkowite	217.
Okazanie sposobu pierwszego na przykładach, aby otrzymać wszystkie ważności w liczbach całkowitych i dodatnich. Uproszczenia służące temu sposobowi	218.

	<i>strona</i>
Znaki pokazujące że liczba rozwiązań w liczbach całkowitych jest ograniczona lub nie . . . . .	243.
§ II. <i>Równania i zagadnienia z trzema lub większą liczbą niewiadomych.</i>	
Sposób postępowania, na przykład dwóch równań z trzema, lub trzech równań: z czterema niewiadomymi . . . . .	244.
Sposób otrzymania dla $x$ ważności, które uczynią całkowitemi wyrażenia $\frac{mx + n}{p}, \frac{m'x + n'}{p'}$ ; . . . . .	250.
Rozwiązanie zagadnień zwanych więcej iak niewyznaczonemi . . . . .	251.
§ III. <i>Rozbiór równań niewyznaczonych drugiego Stopnia.</i>	
Cel iaki zakładamy sobie w téj części i rozwiązanie w liczbach całkowitych zagadnień z dwiema niewiadomymi, w których równania zawierają tylko prostokąt z dwóch niewiadomych . . . . .	256.

## ROZDZIAŁ V.

*Tworzenie potęg i wyciąganie pierwiastków iakiegokolwiek stopnia.*

§ I. <i>Dwumian Newtona i wypływające z niego wnioski.</i>	
Wstęp do okazania formuły dwumianu . . . . .	266.
Własności kombinacyi służące do okazania formuły dwumianu . . . . .	268.
Dowodzenie formuły Newtona. Prawo podług którego tworzy się iakikolwiek wyraz dwumianu z wyrazu poprzedzającego . . . . .	271.
Wnioski wypadające z formuły Newtona i z Teoryi kombinacyi . . . . .	276.
§ II. <i>Wyciąganie pierwiastku z liczb szczególnych.</i>	
Sposób wyciągania pierwiastku sześciennego z liczby całkowitéy . . . . .	280.
Wyciąganie pierwiastku stopnia N. z liczby całkowitéy . . . . .	286.
Przypadek gdy skaznik pierwiastku jest liczbą wielokrotną . . . . .	287.
Wyciąganie pierwiastków przez przybliżenie . . . . .	288.

	<i>strona</i>
Szczególne przypadki w wyciąganiu pierwiastku sześciennego	290.
Przypadek gdy stopień pierwiastku jest liczbą wielokrotną ilukolwiek czynników	292.
§ III. <i>Formowanie potęg i wyciąganie pierwiastków z ilości Algebraicznych.</i>	
<i>Rachunek ilości pierwiastkowych</i>	
Tworzenie potęg i wyciąganie pierwiastków z iednomianów	293.
Prawo podług którego tworzy się sześcian z wielomianu	295.
Przykłady wyciągania pierwiastków różnych stopni z wielomianów	297.
Rachunek ilości pierwiastkowych. Zasady rachunku. Przywiedzenia dwóch lub kilku ilości pierwiastkowych do iednakowego skaźnika. Prawidła 6. działań arytmetycznych z ilościami pierwiastkowemi	301.
Spostrzeżenia nad zasadami rachunku ilości pierwiastkowych. Okazać że pierwiastek 2go. 3go. 4go. Stopnia, przyjmie tyle ważności, ile się znajduje iedności w skaźniku. Rozwiązanie niektórych stopni równań o dwóch wyrażach	306.
Skrócenia prawideł na rachunek ilości pierwiastkowych, gdy działamy na ilościach uroionych	309.
§ IV. <i>Teorya Wykładników</i>	
<i>Wiadomości ogólne o szeregach.</i>	
Początek wykładników iakieýkolwiek natury.	
Uogólnienie wyrazu potęga	311.
Prawidła na cztery ostatnie działania arytmetyczne z ilościami muiącemi wykładniki	314.
Dowodzenie tychże prawideł na przypadek wykładników niespółmiernych	318.
Okazanie Dwumianu Newtona na przypadek iakiegokolwiek wykładnika. Zastósowanie formuły dwumianu do wyciągania pierwiastków przez przybliżenie	322.
Uwagi nad szeregami schodzącemi się. Zastósowanie formuły Dwumianu do rozwiiania wyrażń Algebraicznych na szeregi	330.
§ V. <i>Sposób spółczynników niewyznaczonych.</i>	
Wiadomości o szeregach zwrotnych. Rozwinięcie tego sposobu. Zasada główna. Dowód formuły Newtona	332.

Wiadomości o szeregach zwrotnych. Co to nazywamy wykładnikiem zwrotu	strona 341.
---	----------------

## ROZDZIAŁ VI.

### *Teorya Postępów i Logarytmów.*

#### § I. Postępy Arytmetyczne

Co zwiemy postępem arytmetycznym. Formuła na wyraz ogólny, i sumę wyrazów	347.
Zagadnienie ogólne dające dziesięć zagadnień szczegó- lnych o postęпах. Wtrącić $m$ średnich arytmety- cznie proporcjonalnych. Zastosowanie do różnych przykładów	350.

#### Postępy Geometryczne

Co zwiemy postępem Geometrycznym. Formuła na wyraz ogólny i na sumę wyrazów. Szczególne przypadki	355.
O Postęпах nieskończonych Geometrycznych	359.
Zagadnienie ogólne, dające dziesięć zagadnień szczegó- lnych	367.

#### § II. Teorya ilości wykładniczych i Logarytmów

Rozwiązanie równania wykładniczego sposobem ułom- ków ciągłych. Warunek potrzebny aby wykładnik był ilością spółmierną	369.
Teorya Logarytmów	378.
Własności Logarytmów	381.
Układ tablic pospolitych	383.

#### § III. Układ i użycie Tablic pospolitych

Układ logarytmów	386.
Użycie Tablic pospolitych	388.
O dopełniach Arytmetycznych Logaryt: i ich użyciu	397.

#### § IV. Zastosowanie Teoryi Logarytmów.

Zastosowanie do 4. działań Arytmetycznych	400.
Przekształcenia ilości algebraicznych, w celu zasto- sowania do nich logarytmów	404.
Uwaga nad logarytmanii liczb odjemnych	409.
Zastosowania logarytmów do procentów składanych	414.

	<i>strona</i>
§ V. Szeregi Logarytmowe i Wykładnicze.	
Rozwinięcie logarytmu w szereg sposobem spółczyn- ników niewyznaczonych. O logarytmach NEPERA i ich podstawie . . . . .	419.
Rozwinięcie wyrażenia $a^x$ . Inny sposób rozwinię- cia logarytmu . . . . .	426.
Obliczenie błędu jaki popełniamy układając proporcję wskazaną użyciem logarytmów . . . . .	431.

### PRZYPISY TŁOMACZA.

§ I. Inny sposób rozwiązywania równań stopnia 1 <sup>2</sup> . prawdło ogólne . . . . .	439.
§ II. O Proporcji Arytmetycznéy i Geometrycznéy . . . . .	443.
§ III. Dopelnienie Teoryi o postępach. Przykłady . . . . .	456.
§ IV. Dowodzenie Dwumianu Newtona wraz z zastó- sowaniem przez Dubourgueta przełożone przez O- nulrego Lewockiego . . . . .	459.

---

---

## POCZET PRENUMERATORÓW.

---

### B.

Baliński Antoni, X: Prefekt Szk: Płocki.  
Bernhagen, Uczeń Szk: Woiew: Płocki.  
Bober X: Proboszcz Bólkowa.  
Bekanowski Bonaw: Prof: Szk: Seyney.  
Borowicz Prof: Szk: Szczuciński.  
Boroński Szymon, Ucz: Szk: Warszawski.  
Borowski Stanisław, dito  
Bartoszewicz Adam, Prof: Szk: Bialski.  
Bętkowski Benedykt, Ucz. Szk: Bialski.  
Barcikowski, Ucz: Szk: Płocki.

### C.

Czerniewicz- U. S. L.  
Chodecki Julian, U. S. L.  
Chełmicki Wiktor, Ucz: Szk: Warsz.  
Czackowski Józef, Naucz: Szk: Płocki.  
Chmielewski, Dziekan Kated: Płocki.  
Chmielewski, Prof: Seminarium Pułt.  
Cisowski Marjan, Rad: Dy: G. Tow. Kredyt.

### D.

Dogiel Stanisław, Prof: Szk: Seyneński.  
Dąbrowski Maciej, Naucz: dito  
Dziewanowski Dominik, U. L. Warsz.  
Dembiński Franciszek, U. Szk: Płocki.  
Dzienkowski, Fizyk Obwodu Kujawskiego.  
Dytry Romuald, U. S. Lubels.  
Duve Adam, Ucz. szk: Warsz.

### E.

Elenbogen Alexander, U. S. Przygotow:

### F.

Filipowski Jan, U. S. Warsz:

### G.

Godlewski Antoni, U. S. Seyneński.  
Grobicki Alexander, U. S. Płocki.

Grodzicki Xawery, U. S. Warszawskiéy.  
 Gibasiewicz Józef, Assessor Farm:  
 Galle Alexander, U. S. Warszawskiéy.  
 Grudziński Wincenty, U. S. Włocławskiéy.  
 Gorczyzewski Xawery, U. S. Warszawskiéy.

## H.

Hubryk Jan, Obyw. miasta Płocka.

## J.

Jaroszewski Pankracy, Kom: Adm: K. W. Płockiego.  
 Jasiński, Prof: Szk: Seyny.  
 Janowski, Ucz: Szk: Zamoyськіéy.  
 Jawornicki Marceł, Ucz: Szk, Warszawskiéy.  
 Jacob Maturin, Naucz: Szk: Płockiéy.  
 Jaszyński X. Prof. Szk: Sandomierskiéy.  
 Jezierski Jan, Ucz: Szk: Warszawskiéy.

## K.

Krzyżanowski Adnyan, Dok: Filoz Pr, U: W: Exce: 2.  
 Krajewski Wacław, Prof: Szk: Łęczyckiéy.  
 Kulmanowicz Józef, Ucz: Szk: Płockiéy.  
 Kretkowski Emil, dto:  
 Kłobukowski, dto:  
 Kukliński Jacek, Prof: Szk. Płockiéy.  
 Kaczkowski Eugeniusz, Ucz: Szk: Warszawskiéy:  
 Kucharewicz Bazyli, dto.  
 Köppen Wilhelm, dto.  
 Kisielewski Jan, dto.  
 Kubiowski Kalixt, dto.  
 Kern Antoni, dto.  
 Kulig Karól, Xiegarz Płocki Exemp: 20.  
 Kionwicki Izydor, N. szk: Szczuc:  
 Konstantynowicz Antoni, N. szk: Seyn:  
 Karczewski Stanisław, Ucz: L. Warsz:  
 Kobylański, U. L. Krzemie:  
 Koburski, Ucz: szk: Zamoyськіéy:  
 Komorowski, dito  
 Kruszelnicki, dito.  
 Kierglewicz Ludwik, Ucz: szk: Bialskiéy.  
 Krasuski Adam, dito dito  
 Kryze Edward, dito dito



*Kwiecien Błażey, Ucz. sz. Bialskiey.*  
*Kościeski, Kassyer Obw; Plock: Exemplarzy 2.*

L.

*Luboradzki Ignacy, Ref: Kom: Woiew: Płockiego.*  
*Luboradzki Franc: Rach: dito dito*  
*Liedke Julian, Ucz: Szk: Warszaws:*

Ł.

*Łomża Exemplarzy 10.*  
*Łazniewski Józef, Ucz: szk: Płock;*

M.

*Mesner Adolf, Ucz. szk: Płock;*  
*Malinowski Franc; dito*  
*Morykoni Kazimierz, z Kielc.*  
*Mękałski Ignacy, Ucz: Liceum Warsz:*  
*Michałowski Adam, Ucz. szk: Biał:*  
*Meinert Józef, Ucz; szk: Warsz:*  
*Markowski Stanisław, R. H. Cel:*  
*Moszyński Ludwik, Ucz: szk: Warsz:*  
*Mieszkowski Antoni były Półkownik Woysk Polskich.*  
*Maliszewski Kulasanty X. Prefekt szk: W. Piotrk.*

N.

*Nahajewicz Kazimierz, Rekt: szk: Biał: Exempl: 2.*  
*Niemirowski Adam, Prof: szk: Płock:*  
*Niedzwiecki Leonard, Ucz: szk: Sępn:*

O.

*Ossakowski Jan, Ucz: szk: Warsz:*  
*Olszowski Antoni dito*  
*Osiński Jan, Ucz: szk: Płock:*  
*Ostrowski Franc: dito*  
*Orłowski Józef, Rektor szk Szczuc:*  
*Ossowski Offic: Pułtuski.*  
*Okoń Marcin, Prof: szk: Płockiey.*  
*Olszański Wilhelm, Magister Filozofii.*  
*Ostawski Wiktor, Ucz: szk: Lubels:*  
*Okorski Felix, dito dito*

P.

*Plater Zygmunt, Ucz: szk: Warsz:*

Piwnicki Eugeniusz, dito  
 Plater Raz: Siberg, dito  
 Pasiutewicz, Professor szk: Zamoys:  
 Psarski Hipolit, Ucz: szk: Wzrsz:  
 Pohlens Alexander, Ucz: szk: Płock:  
 Półczycki Tytus, dito dito  
 Piwkowski Adolf, dito dito  
 Pinko Albin, Professor szk: dito  
 Przytuński Łukasz, Kanonik Katedr: Płoc:  
 Połczyński Jan, Ucz: szk: Biał:  
 Przedziewicki Ignacy, dito  
 Piotrowski Karol, Mag: Filozofii Prof: szk: Sandomiers:  
 Politowski, X. Rektor szk: Włocławs:  
 Pomeracki Tomasz, Ucz: diso  
 Piński Marecki, dito dito  
 Piasecki Adam, dito szk: Lubels:

## R.

Radomiński Jan, Naczel: K. R. W. R. i O. P. Exempl: 2.  
 Rybicki, D. Med: Chir: Fizyk Woiwódcz: Płockiego.  
 Romanowski Chry: Ucz: szk: Warszaws:  
 Rudnicki Kazimierz, dito dito  
 Ratyński Wiktor, Ucz: Liceum Warsz:  
 Rostworowski Julian, dito dito  
 Rzybiński Woyciech, N. szk: Seyn:

## S.

Sędzikowski Alexander, Ucz: Liceum Warszaws:  
 Skolimowski Józef, Mag: Filozofii Profes: szk: Seyn:  
 Swierczewski Michał, Ucz: szk: Seyn:  
 Szaciński Maciey, dito  
 Szaciński Szczepan, dito  
 Skirmunt, N. szk: Zamoys:  
 Szmidel Jerzy, Rektor szk: Łęczyc:  
 Słupecki Cyprian, Obyw: Płoc: Exempl. 4.  
 dito Ucz: szk: Płoc:  
 dito dito  
 Siniarski Antoni, dito  
 Stepkowski Jan, dito  
 Swierczyński Felix, dito  
 Stawiński Ignacy, dito  
 Smoliński Michał, dito  
 Skórzewski Felix, Magister Filozofii.

*Stepiński Jakób, Prof. sz: Płoc:*  
*Stawnicki Grzegorz, N. dito*  
*Swierczyński, X. Prof. sz: Włocławs:*  
*Sumiński Wincenty, Mag. Filozofii Prof. sz: Sandom:*  
*Szostakowski Hippolit, Professor sz: Płoc:*  
*Sciborski Alexander, Ucz: sz: Bials:*  
*Szkoła Woiewódz: Zamoyska.*  
*dito Wydziałowa Łęczycka.*  
*dito      dito      Bialska Exempl. 2.*  
*Studenkowski Michał, Ucz: sz: Warszaws:*  
*Świętosławski Alexander, dito      dito*  
*Skrzynecki Romuald.      dito      dito*  
*Stepiński Alexander, P. I. Warsz.*

## T.

*Tutajewski Jan, Ucz: Uniwers: Warszaws:*  
*Tarczałowski Roman, Ucz: sz: Warszaws:*

## W.

*Wolicki Jan, Dok. Ob. Pra: Sędzia Sądu Nayw: Ex: 2.*  
*Weyland Xawery, Professor sz: Seyney:*  
*Wilamowski Mateusz, N. sz: E. Płoc:*  
*Woycik Tomasz, Ucz: sz: Warsz:*  
*Wąsowicz Nicefor,      dito*  
*Winnicki, Ucz: sz: Zamoys:*  
*Wnorowski Wincenty, U. S. S.*  
*Woytasz Józef, Ucz: sz: Lubels:*  
*Wiercinski Woyciech,      dito*

## Z.

*Zagier Kolumban, Rektor sz: W. Seyney:*  
*Zinkowski, D. M. Rektor sz: Zamoys:*  
*Zborowski Józef. Prof. sz: Płoc.*  
*Zgierczyński, Kassier K. R. W. R. i O. P.*  
*Zdżarski Augustyn, Prof. sz: Płoc:*  
*Zambrzycki, Ucz: sz. Warsz.*  
*Zaborowski Felicyan, Ucz. sz. Płoc.*  
*Zakrzewski Paweł, N. sz. Sandomierskiey,*



# OMYŁKI DRUKU.

---

<i>stronica</i>	<i>wiersz</i>	<i>zamiast</i>	<i>ma być</i>
7	7	69	99
8	6	$b \times a + b \times a$	$a \times a + b \times a$
18	13	$-3cd$	$+3cd$
22	6	$+10a^2b^3$	$+20a^2b^3$
22	22	$-8b^3$	$-8b^5$
22	25	dito	dito
26	3	$64a^2$	$64a^6$
28	7	$5a^3b^3cd$	$5a^2b^3cd$
30	1	$\frac{15a^2b^3c^3}{3a^2bc^2}$	$\frac{15a^2b^3c^2}{3a^2bc^2}$
71	24	23	93
78	22	$\frac{131000}{16}$	$\frac{1310000}{16}$
72	26	1008	1080
79	3	30,0000	30,000
82	3	$an + an^2 - \frac{2an + a - a}{n}$	$\frac{an + an^2 - 2an + a - a}{n}$
94	8	$-3y$	$-2y$
95	12	60	68
107	13	$m - a$	$m - n$
111	23	$x - y = 0$	$x - y = 0$
112	26	$x + y = a$	$x + y = n$

stronica wiersz

zamiast

ma być

149

3

$$\sqrt{15=19}$$

$$\sqrt{15 \times 19}$$

175

3

$$\frac{c}{(a-x^2)^2}$$

$$\frac{c}{(a-x)^2}$$

189

11

$$6 > 8$$

$$6 < 8$$

201

9

$$\left(y + \frac{n^2}{2m}\right)^2$$

$$\left(y + \frac{n}{2m}\right)^2$$

202

26

$$\sqrt{9y^2 - 8x - 20}$$

$$\sqrt{9y^2 - 8y - 20}$$

367

20

$$l = aq^{1-1}$$

$$l = aq^{n-1}$$

369

10

$$a_x = b$$

$$a^x = b$$

405

12

$$+\log 9$$

$$+\frac{1}{2} \log 9$$

406

2

$$\frac{4b^3c}{a^2}$$

$$\frac{4b^2c}{a^2}$$

424

4

$$-\frac{x^3x^4}{a^2}$$

$$-\frac{x^3-x^4}{3 \quad 4}$$

426

24

$$a^x = 1 + 1Ax$$

$$a^x = 1 + Ax$$

434

14

$$b\delta$$

$$p\delta$$

463

2

$$D=C\left(\frac{m-3}{3}\right)$$

$$D=C\left(\frac{m-3}{4}\right)$$



119.56