

§ V. Sposób spółczynników niewyznaczonych.

Wiadomości o szeregach zwrotnych.

(Séries récurrentes).

183. Algiebraiści wynaleźli inny sposób rozwiania wyrażen algiebraicznych na szeregi, który jest prościwszy od tych, o których mówiliśmy powyżej, a który oprócz tego jest dogodniejszy w tym względzie, że może być zastosowany do wyrażen algiebraicznych iakichkolwiek.

Aby tego sposobu dać wyobrażenie, załóżmy sobie rozwinąć wyrażenie $\frac{a}{a'+b'x}$; na szereg, któryby

był ułożony podług potęg rosnących x . Widoczną jest rzeczą, że to rozwinięcie może być wykonane,

albowiem $\frac{a}{a'+b'x}$ zamieni się na $a(a'+b'x)^{-1}$, i za-

stosowawszy formułę dwumianu otrzymalibyśmy szereg wyrazów według rosnących potęg dla x .

$$\frac{a}{a'+b'x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \dots (1),$$

A, B, C, \dots są to spółczynniki, w funkcji a, a', b' , niezależące od x , które mamy wyznaczyć, a które dla tej przyczyny zowią się *spółczynnikami niewyznaczonemi* (nazwisko to jest niewłaściwe, z przyczyny znaczenia, iakie przywiązuemy do wyrazu *niewyznaczony*: lecz naruszać nie będziemy zwyczaju). Aby wyznaczyć takowe spółczynniki, mnożmy obie strony równania (1) przez $a'+b'x$; uporządkoymy wyrazy podług głoski x , i przemieśmy wyraz a ; wypadnie

$$0 = \left\{ \begin{array}{c} Aa' + Ba' | x + Ca' | x^2 + Da' | x^3 + Ea' | x^4 + \dots \\ -a + Ab' | +Bb' | +Cb' | +Db' \end{array} \right\} \quad (2).$$

Uważamy teraz, że gdy ważności dla A, B, C, D... będą wyznaczone, równanie (1) sprowadzi się, biorąc iakąkolwiek ważność dla x : podobnie będzie z równaniem (2).

Aże czyniąc $x=0$, mamy $0=Aa'-a$, skąd $A=\frac{a}{a'}$ więc równanie (2) zamieni się na

$$0 = \left\{ \begin{array}{c} Ba' | x + Ca' | x^2 + Da' | x^3 + \dots \\ +Ab' | +Bb' | +Cb' \end{array} \right\}$$

czyli, podzieliwszy przez x , na

$$0 = \left\{ \begin{array}{c} Ba' | +Ca' | x + Da' | x^2 + \dots \\ +Ab' | +Bb' | +Cb' \end{array} \right\} \quad (2).$$

Równanie to powinno się sprawdzić, gdy iakąkolwiek ważność nadamy dla x , uczynimy więc $x=0$; skąd

$$B = -\frac{Ab'}{a'}, \text{ czyli}$$

$$B = \frac{a}{a'} \times -\frac{b'}{a'} = -\frac{ab'}{a'^2};$$

i teraz równanie (3) przejdzie na

$$0 = \left\{ \begin{array}{c} Ca' + Da' | x + Ea' | x^2 + \dots \\ +Bb' + Cb' | +Db' \end{array} \right\}$$

Uczyniwszy znowu $x=0$; wypadnie $Ca'+Bb'=0$, skąd

$$C = -\frac{Bb'}{a'} \text{ czyli}$$

$$C = -\frac{ab'}{a'^2} \times -\frac{b'}{a'} = \frac{ab'^2}{a'^3},$$

Podobnież otrzymalibyśmy

$$Da + 'Cb' = 0,$$

skąd

$$D = -\frac{Cb'}{a'}, \text{ czyli}$$

$$D = \frac{ab'^2}{a'^3} \times -\frac{b'}{a'} = -\frac{ab'^3}{a'^4};$$

i tak następnie.

Łatwo teraz spostrzedz, że wszelki spółczynnik tworzy się ze spółczynnika poprzedzającego, mnożąc go przez $-\frac{b'}{a'}$, a zatem będziemy mieli,

$$\frac{a}{a' + b'x} = \frac{a}{a'} - \frac{ab'}{a'^2}x + \frac{ab'^2}{a'^3}x^2 - \frac{ab'^3}{a'^4}x^3 + \frac{ab'^4}{a'^4}x^4 - \dots$$

184. Zastanowiwszy się nad rozumowaniem poprzedzającym widzimy, że główne pravidło sposobu spółczynników niewyznaczonych polega na tém, że jeżeli równanie postaci

$$0 = M + Nx + Px^2 + Qx^3 + \dots$$

(w którym spółczynniki: M, N P... nie są zależne od x ,) *ma się sprawdzić, nadając iakąkolwiek ważność dla x , potrzeba; ażeby każdy oddzielnie ze spółczynników równał się 0.*

Jakoż ponieważ te spółczynniki są nie zależne od x , więc biorąc $x=0$; otrzymamy $M=0$, a równanie zamieni się, podzieliwszy przez x , na

$$0 = N + Px + Qx^2 + \dots$$

W tém nowém równaniu uczyniwszy $x=0$; otrzymamy $N=0$, równanie zaś podzieliwszy przez x zamieni się na

$$0 = P + Qx + \dots$$

i tak następnie.

Mamy więc

$$M=0, N=0, P=0, Q=0 \dots;$$

tym sposobem otrzymamy tyle równań, ile się znajdzie współczynników A, B, C, D.... do wyznaczenia.

Prawidłó to można jeszcze wysłowić następującym sposobem:

Jeżeli równanie postaci

$$a+bx+cx^2+dx^3+x\dots=a'+b'x+c'x^2+\dots$$

ma się sprawdzić, nadając iakąkolwiek ważność dla x; naówczas wyrazy, mające ilość x w dwóch stronach równania z tą samą potęgą, są sobie równe, albowiem przeniósłszy wszystkie na iedną stronę; otrzymamy równanie w postaci

$$0=M+Nx+Px^2+\text{etc.}$$

skąd wniesiemy że

$$a'-a=0, b'-b=0, c'-c=0\dots,$$

a tём samém $a'=a, b'=b, c'=c, d'=d\dots$

Równaniem identycznym (identique), nazywa się wszelkie równanie, którego wyrazy są uporządkowane podług pewnéj głoski, i które powinno się sprawdzić, gdy iakiekolwiek ważności nadamy dla téjże głoski, ma zaś to nazwisko dla rozróżnienia go od równań zwyczajnych, które mogą być sprawdzone, tylko pewną liczbą ważności nadawanych ilości niewiadoméj.

185. Sposób współczynników niewyznaczonych wymaga jeszcze, aby była przewidziana postać rozwinięcia podług wykładników głoski x. Pospolicie przypuszcza się, że wyrazy rozwinięcia następują po sobie według kolejnie rosnących potęg ilości x, poczynając od x^0 , lecz niekiedy zmienia się ta postać, a ciąg działania daie to poznać.

Niechby np: trzeba było rozwinąć wyrażenie

$$\frac{1}{3x-x^2}.$$

Uczyńmy

$$\frac{1}{3x-x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots,$$

zniósłszy mianownik i uporządkowawszy, będzie

$$0 = -1 + 3Ax + 3B \begin{vmatrix} x^2 \\ -A \end{vmatrix} + 3C \begin{vmatrix} x^3 \\ -B \end{vmatrix} + 3D \begin{vmatrix} x^4 \\ -C \end{vmatrix} + \dots,$$

a zatem (ustęp 184)

$$-1=0, 3A=0, 3B-A=0 \dots$$

równanie pierwsze $-1=0$ jest fałszywe, i oznacza, że postać powyższa szeregu nie jest właściwa dla

wyrażenia $\frac{1}{3x-x^2}$, lecz jeżeli napiszemy je tak:

$$\frac{1}{x} \times \frac{1}{3-x} \text{ i uczynimy}$$

$$\frac{1}{x} \times \frac{1}{3-x} = \frac{1}{x} (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots),$$

otrzymamy po skróceniu,

$$0 = \begin{Bmatrix} 3A+3B \\ -1-A \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} x+3C \\ -B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x^2+3D \\ -C \end{vmatrix} + \dots$$

a zatem

$$3A-1=0, 3B-A=0, 3C-B=0 \dots,$$

a następnie

$$A = \frac{1}{3}; B = \frac{1}{9}; C = \frac{1}{27}; D = \frac{1}{81} \dots$$

i prze-

i przeto

$$\frac{1}{3x-x^2} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}x^2 + \frac{1}{81}x^3 + \dots \right),$$

czyli

$$= \frac{1}{3}x^{-1} + \frac{1}{9}x^0 + \frac{1}{27}x + \frac{1}{81}x^2 + \dots,$$

to jest: szereg zawiera jeden wyraz z wykładnikiem ujemnym.

186. Dowodzenie formuły dwumianu, za pomocą współczynników niewyznaczonych.

Uważamy naprzód, że $(x+a)^m$ może być w ten sposób wyrażone $x^m \left(1 + \frac{a}{x}\right)^m$, czyli

$x^m(1+y)^m$, czyniąc $y = \frac{a}{x}$; a zatem, dosyć będzie rozwinąć $(1+y)^m$, gdy m będzie iakąkolwiek liczbą.

To założwszy, niech m będzie liczbą dodatnią $\frac{p}{q}$, (q może być $=1$, w którym to przypadku wykładnik będzie liczbą całkowitą).

Uczynmy

$$(1+y)^{\frac{p}{q}} = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots (1),$$

taką postać nadając szeregowi dla tego, że się sprawdzi to równanie biorąc $y=0$.

Aby wyznaczyć współczynniki A, B, C, D, \dots , wstawmy w równanie (1) z , zamiast y : otrzymamy

$$(1+z)^{\frac{p}{q}} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots \quad (2)$$

A, B, C, ... widocznie mają tu te same ważności, ponieważ są nienależne od wszelkiej ważności y.

Odiawszy te dwa równania, iedno od drugiego, otrzymamy:

$$(1+y)^{\frac{p}{q}} - (1+z)^{\frac{p}{q}} = A(y-z) + B(y^2 - z^2) + C(y^3 - z^3) + D(y^4 - z^4) + \dots \quad (3).$$

Uczyńmy na chwilę $(1+y)^{\frac{p}{q}} = u$, $(1+z)^{\frac{p}{q}} = v$: skąd wypada $1+y = u^q$, $1+z = v^q$; a zatem $y-z = u^q - v^q$; równanie zaś (3) zamieni się na

$$u^p - v^p = A(y-z) + B(y^2 - z^2) + C(y^3 - z^3) + \dots \quad (4),$$

czyli dzieląc pierwszą stronę przez $u^q - v^q$, zaś drugą stronę przez $y-z$ które się równa $u^q - v^q$; na

$$\frac{u^p - v^p}{u^q - v^q} = \frac{A(y-z) + B(y^2 - z^2) + C(y^3 - z^3) + \dots}{y-z}$$

Aże podług twierdzenia (ustęp 31), $u^p - v^p$ jest podzielne przez $u - v$, i daie na iloraz

$$u^{p-1} + vu^{p-2} + v^2 u^{p-3} + \dots + v^{p-1}.$$

podobnie $u^q - v^q$ podzielne przez $u - v$, i daie

$$u^{q-1} + vu^{q-2} + v^2 u^{q-3} + \dots + v^{q-1}.$$

oprócz tego $y-z$, $y^2 - z^2$, $y^3 - z^3$

podzielone przez $y-z$ daia ilorazy

$$1; y+z; y^2 + yz + z^2; y^3 + yz^2 + y^2 z + z^3 \dots \dots \dots ,$$

a zatem równanie (4) zamieni się na

$$\frac{u^{p-1} + v u^{p-2} + v^2 u^{p-3} + \dots + v^{p-1}}{u^{q-1} + v u^{q-2} + v^2 u^{q-3} + \dots + v^{q-1}} = A + B(y+z) + C(y^2 + yz + z^2) + D(y^3 + yz^2 + y^2z + z^3) + \dots$$

Uczyńmy teraz, w tém ostatniém równaniu $y = z$,

skąd wypadnie $u = v$, z powodu równań $(1+y)^{\frac{x}{q}} = u$,

$(1+z)^{\frac{x}{q}} = v$, pierwsza strona zamieni się na $\frac{p \cdot u^{p-x}}{q \cdot u^{q-x}}$

czyli na $\frac{p \cdot u^p}{q \cdot u^q}$. Gdy teraz zamiast u^p , wstawi-

my wartość $(1+y)^{\frac{p}{q}}$ czyli....

$$1 + Ay + By^2 + Cy^3 + \dots,$$

a zamiast u^q wartość $1+y$; pierwsza strona rō-

wnania zamieni się jeszcze na $\frac{p \cdot 1 + Ay + By^2 + Cy^3 \dots}{q \cdot 1 + y}$,

oprócz tego druga strona zamieni się na

$$A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \dots;$$

mamy więc nowe równanie

$$\frac{p \cdot 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 \dots}{q \cdot 1 + y} = A + 2By + 3Cy^2 + \dots$$

Zniósłszy mianownik $1+y$, i skuteczniejszy działanie otrzymamy

$$\frac{p}{q} + \frac{p}{q} \cdot Ay + \frac{p}{q} \cdot By^2 + \frac{p}{q} \cdot Cy^3 + \frac{p}{q} \cdot Dy^4 \dots =$$

22;

$$\begin{array}{r} A + 2B|y + 3C|y^2 + 4D|y^3 + 5E|y^4 + \dots \\ + A| + 2B| + 3C| + 4D| \end{array}$$

Porównyując (ustę: 184) dwie strony tego *identycznego równania*, to jest wyraz z wyrazem, otrzymamy następujące równania.

$$\frac{p}{q} = A$$

$$\frac{p}{q}A = 2B + A, 2B = A\left(\frac{p}{q} - 1\right); \text{ więc } B = \frac{A\left(\frac{p}{q} - 1\right)}{2},$$

$$\frac{p}{q}B = 3C + 2B, 3C = B\left(\frac{p}{q} - 2\right); \text{ więc } C = \frac{B\left(\frac{p}{q} - 2\right)}{3},$$

$$\frac{p}{q}C = 4D + 3C, 4D = C\left(\frac{p}{q} - 3\right); \text{ więc } D = \frac{C\left(\frac{p}{q} - 3\right)}{4},$$

Prawo formowania współczynników iednych za pomocą drugich jest oczywiste. Niech będzie współczynnik N , który ma przed sobą współczynników n , zaś M , współczynnik pierwszy przed N : będzie

$$\frac{p}{q}M = nN + (n-1)M; \text{ skąd } N = \frac{M\left(\frac{p}{q} - n + 1\right)}{n}$$

Łatwo się przekonać, że poprzedzające dowodzenie może być zastosowane do przypadku, w którym $q=1$, to jest: gdy będzie wykładnik całkowity.

Co do przypadku w którym m równa się liczbie ułomkowej odjemnej $-\frac{p}{q}$; postąpilibyśmy tym sa-

mym sposobem iak poprzedniczo, lecz otrzymamy równanie odpowiadające równaniu (4), to jest: następujące.

$$u^{-P} - v^{-P} = A(y-z) + B(y^2 - z^2) + C(y^3 - z^3) + \dots$$

postrzeżemy że

$$u^{-P} - v^{-P} = \frac{1}{u^P} - \frac{1}{v^P} = \frac{v^P - u^P}{u^P v^P} = \frac{u^P - v^P}{u^P v^P},$$

a zatem dzieląc pierwszą stronę przez $u^q - v^q$, a drugą przez $y - z$, które jest równe $u^q - v^q$; otrzymamy

$$-\frac{1}{u^P v^P} \frac{u^P - v^P}{u^q - v^q} = \frac{A(y-z) + B(y^2 - z^2) + \dots}{y - z},$$

czyli, zniósłszy czynniki $u - v$, i $y - z$,

$$-\frac{1}{u^P v^P} \frac{u^{P-1} + vu^{P-2} + \dots + v^{P-1}}{u^{q-1} + vu^{q-2} + \dots + v^{q-1}} = A + B(y+z) + \dots$$

uczyniwszy potem, $y = z$ skąd $u = v$; otrzymamy,

$$-\frac{1}{u^{2P}} \frac{pu^{P-1}}{pu^{q-1}} = -\frac{P}{q} \frac{u^{-P}}{u^q} = A + 2By + 3Cy^3 + \dots$$

reszta działania jest podobna iak w poprzedzającym przypadku. O szeregach zwrotnych.

187. Rozwinięcie ułomków algebricznych spółmierznych za pomocą spółczynników niewyznaczonych,

daie początek tak zwanym szeregom zwrotnym.

Widzieliśmy już (pod ustę: 183) że ułomek $\frac{a}{a'+b'x}$, można rozwinąć na szereg

$$\frac{a}{a'} - \frac{ab'}{a'^2} x + \frac{ab'^2}{a'^3} x^2 - \frac{ab'^3}{a'^4} x^3 + \dots,$$

w tym szeregu tworzy się każdy wyraz z poprzedzającego, mnożąc go przez $-\frac{b'}{a'}$.

Własność ta nie jest szerególną, aby miała służyć tylko ułomkowi danemu; służy ona także wszystkim ułomkom algebricznymi spółmiernymi, i zasada się na tém, że wszelki ułomek spółmierny zawierający x , może być zamieniony na szereg wyrazów, z których każdy równa się summie algebricznej kilku wyrazów poprzedzających, mnożonych względnie przez pewne ilości, które są stałe i te same, w całej rozciągłości szeregu. Zbiór ilości stałych przez które potrzeba mnożyć pewną liczbę wyrazów poprzedzających, aby otrzymać następny, nazywać będziemy wykładnikiem zwrotu, (l'échelle de relation) bo ta ilość tu jest tém samym, czém jest wykładnik w postępach arytmetycznych i geometrycznych.

W szeregu poprzedzającym wykładnikiem zwrotu jest $-\frac{b'}{a'}$, a szereg nazywa się zwrotnym pierwszego rzędu.

Daymy na to, że mamy rozwinąć na szereg wyrażenie

$$\frac{a + b x + c x^2}{a' + b' x + c' x^2 + d' x^3}.$$

Uczynimy $\frac{a + b x + c x^2}{a' + b' x + c' x^2 + d' x^3} = A + B x + C x^2 + D x^3 + \dots$

znosząc mianowniki i przeniosłszy wyrazy na jedną stronę, otrzymamy

$$0 = \begin{cases} Aa' + Ba' & x + Ca' & x^2 + Da' & x^3 + Ea' & x^4 + \dots \\ -a + Ab' & + Bb' & + Cb' & + Db' & \\ -b & + Ac' & + Bc' & + Cc' & \\ -c & + Ad' & + Bd' & & \end{cases}$$

skąd

$$Aa' - a = 0, \quad A = \frac{a}{a'}$$

$$Ba' + Ab' - b = 0, \quad B = -\frac{b'}{a'} A + \frac{1}{a'} b = -\frac{ab' + ba'}{a'^2}$$

$$Ca' + Bb' + Ac' - c = 0, \quad C = -\frac{b'}{a'} B - \frac{c'}{a'} A + \frac{1}{a'} c,$$

czyli
$$C = \frac{ab'^2 - ba'b' - aa'c' + ca'^2}{a'^3},$$

$$Da' + Cb' + Bc' + Ad' = 0, \quad D = -\frac{b'}{a'} C - \frac{c'}{a'} B - \frac{d'}{a'} A,$$

$$Ea' + Db' + Cc' + Bd' = 0, \quad E = -\frac{b'}{a'} D - \frac{c'}{a'} C - \frac{d'}{a'} B$$

.....

.....

Widzimy teraz, że trzy pierwsze współczynniki otrzymują się bez żadnego prawa, lecz poczynając od

czwartego, ten i każdy następny tworzy się z summy trzech współczynników tych, które go poprzedzają, roz-

mnożonych względnie przez $-\frac{b'}{a'}$, $-\frac{c'}{a'}$, $-\frac{d'}{a'}$, to

jest: przez $-\frac{b'}{a'}$ współczynnik, który go bezpośrednio

poprzedza; przez $-\frac{c'}{a'}$ współczynnik, który go poprzedza

dwoma; przez $-\frac{d'}{a'}$ który go poprzedza trzema mie-

scami. A tak już współczynniki A, B, C, D..., tworzą pomiędzy sobą szereg zwrotny którego wykładnik zwrotu jest

$$\left(-\frac{b'}{a'}; -\frac{c'}{a'}; -\frac{d'}{a'}\right).$$

Z tego prawa tworzenia współczynników wypada, że czwarty wyraz szeregu, Dx^3 , równa się

$$-\frac{b'}{a'} Cx^3 - \frac{c'}{a'} Bx^3 - \frac{d'}{a'} Ax^3,$$

$$\text{czyli} \quad -\frac{b'}{a'} x \cdot Cx^2 - \frac{c'}{a'} x^2 \cdot Bx - \frac{d'}{a'} x^3 \cdot A.$$

Otrzymamy podobnie dla wyrazu Ex^4 , ważność

$$-\frac{b'}{a'} Dx^4 - \frac{c'}{a'} Cx^4 - \frac{d'}{a'} Bx^4,$$

$$\text{czyli} \quad -\frac{b'}{a'} x \cdot Dx^3 - \frac{c'}{a'} x^2 \cdot Cx^2 - \frac{d'}{a'} x^3 \cdot Bx;$$

i tak następnie.

A zatem każdy wyraz szeregu żadanego, począwszy od czwartego, równa się summie trzech wyrazów poprzedzających, rozmnożonych względnie przez

$$\left(-\frac{b'}{a'}x, -\frac{c'}{a'}x^2, -\frac{d'}{a'}x^3\right).$$

Co do trzech pierwszych wyrazów, $A+Bx+Cx^2$, te otrzymamy, kładąc zamiast A, B, C ich wartości wyżej otrzymane.

188. Szeregi zwrotne dzielą się na różne rzędy, a rzędy uważają się podług liczby wyrazów potrzebnych do utworzenia iakiegokolwiek wyrazu.

I tak, wyrażenie $\frac{a}{a'+b'x}$ daie szereg zwrotny pierwszego rzędu, którego wykładnik z wrotu iest $-\frac{b'}{a'}x$.

Ten szereg wychodzi na postęp geometryczny, a iego wykładnik zwrotu iest wykładnikiem postępu geometrycznego którego pierwszy wyraz $=\frac{a}{a'}$.

(O postępach w następującym rozdziale).

Wyrażenie $\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}$ daie szereg zwrotny drugiego rzędu, którego wykładnik zwrotu iest

$$\left(-\frac{b'}{a'}x, -\frac{c'}{a'}x^2\right).$$

Szereg otrzymany w ustępie poprzedzającym iest rzędu trzeciego.

W ogólności, wyrażenie $\frac{a + b x + c x^2 + \dots + k x^{n-1}}{a' + b' x + c' x^2 + \dots + k' x^n}$ daie szereg zwrotny *ngorzędu*, którego wykładnik zwrotu jest $\left(-\frac{b'}{a'} x, -\frac{c'}{a'} x \dots -\frac{k'}{a'} x^n\right)$.

Uwaga. Zakładamy tu, że stopień ilości x jest mniejszy w liczniku a niżeli w mianowniku.

Gdyby było inaczej, potrzebaby zaraz w początku odbyć dzielenie, porządkując wyrazy podług wykładników rosnących dla x , z tego dzielenia otrzymalibyśmy pewny iloraz całkowity, pod względem na x , więcéy ułomkiem, którego licznik jest stopnia niższego niż mianownik.

Niech będzie np. wyrażenie

$$\frac{1 - x - 3x^2 + 4x^3 + x^4}{2 - 5x + 3x^2 - x^3}$$

Wykonawszy dzielenie; otrzymamy iloraz $-x - 7$,

i resztę $\frac{15 - 34x + 13x^2}{2 - 5x + 3x^2 - x^3}$

którą teraz moglibyśmy rozwinąć na szereg zwrotny.
