

ści liczby a , przez część liczby b , równy był daney liczbie p : iloczyn zaś z dwóch pozostałych części liczb b i a , był równy liczbie p' . Rozwiązać i roztrząsnąć to zagadnienie.

Dwunaste Zagadnienie. Znaleźć liczbę z której kwadrat, takby się miał do iloczynu z różnicy między tą liczbą, a dwiema a i b , iak się ma $p : q$?

Rozwiązać i roztrząsnąć to zagadnienie.

Uwaga. Polecamy Uczniom rozwiązanie i roztrząśnienie tych wszystkich przykładów, dla wznowienia sobie tego, co wyżej o równaniach i nierównościach poznali.

Podania o największych i najmniejszych ważnościach (de maximis et minimis)

Własności Tróymianów 2go stopnia.

103. Znayduie się gatunek zagadnień należących do teoryi równań drugiego stopnia, a zachodzących w zastosowaniu Algiebry do Jeometrii. Zamiarem tych zagadnień iest: *Wyznaczyć największą lub najmniejszą ważność, iaką mieć może wypadek pewnych działań arytmetycznych, wykonanych na liczbach.*

Weźmy to pierwsze zagadnienie: *Podzielić liczbę daną $2a$ na dwie części, z których iloczyn byłby MAXIMUM, to iest największy z iloczynów z innych części, na iakie można podzielić daną liczbę.*

Jedną część oznaczmy przez x , druga będzie $2a - x$, a iloczyn z nich $x(2a - x)$; Nadając dla x różne ważności, iloczyn przechodzić będzie przez różne stany wielkości, trzeba zaś wyznaczyć dla x ważność taką, któraby uczyniła ten iloczyn największym ze wszystkich.

Oznaczmy przez y ten największy iloczyn, a będzie

$$x(2a-x)=y.$$

Uważając y za ilość wiadomą, otrzymamy według tego równania ważność

$$x=a\pm\sqrt{a^2-y}.$$

Lecz zastanowiwszy się nad tym wypadkiem, widzimy, że dwie ważności dla x , nie mogą być rzeczywiste, jeżeli nie będzie $y < a^2$, a przynajmniej $y = a^2$. Skąd wypada, że największa ważność jaką można otrzymać dla y , czyli największy iloczyn z dwóch części jest a^2 . A że uczyniwszy $y = a^2$; wypadnie $x = a$. Więc, aby otrzymać największy iloczyn, potrzeba podzielić liczbę daną $2a$, na dwie równe części, a MAXIMUM iloczynów jest kwadrat z połowy liczby. Wypadek ten otrzymaliśmy już innym sposobem (ust: 96).

Inne rozwiązanie. Nazwiemy $2x$, różnicę zachodzącą pomiędzy dwiema częściami liczby $2a$. Większa z tych dwóch części będzie (ust: 4) wyrażona

przez $\frac{2a+2x}{2}$, czyli $a+x$, mniejsza zaś przez

$a-x$, a zatem $(a+x)(a-x)=y$, czyli $a^2-x^2=y$,

skąd $x=\pm\sqrt{a^2-y}$. Ażeby ta ważność dla x była rzeczywistą, potrzeba, ażeby przynajmniej było $y=a^2$; uczyniwszy więc $y=a^2$, wypadnie $x=0$, co dowodzi, że obie części powinny być sobie równe.

104. Uwaga. W równaniach $x(2a-x)=y$, i $(a+x)(a-x)=y$, przez które rozwiązaliśmy osta-

tnie zagadnienie; ilość x nie tylko jest niewiadomą, ale i zmienną, wyrażenie zaś $x(2a-x)$ albo $(a+x)(a-x)$, nazywa się FUNKCYĄ zmiennę x .

Funkcya ta wyrażona przez y , jest drugą zmienną ilością, której ważność zależy od ważności iaką nadamy dla x . Dla tego to Analisci nazywają ilość x zmienną niezależną, dla tego, że zmienna druga czyli y , otrzymuje ważności zależące od tych, iakie nadamy zmiennę x .

Rozwiązując dwa równania $x(2a-x)=y$, i $(a+x)(a-x)=y$ pod względem na x ; otrzymamy

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - y};$$

$$\text{i} \quad x = \pm \sqrt{a^2 - y}.$$

a w tych znowu wyrażeniach można uważać y , za zmienną niezależną, zaś x , za funkcją téj zmiennę.

105. Drugie zagadnienie. Podzielić liczbę $2a$ na dwie części, ażeby summa pierwiastków kwadratowych z tych dwóch części była MAXIMUM.

Nazwiemy x^2 iedną z dwóch części: $2a-x^2$ będzie drugą częścią; sumnę ich pierwiastków kwadratowych wyrazimy tém samém przez $x + \sqrt{2a-x^2}$, tego to wyrażenia potrzeba znaleźć maximum.

$$\text{Założmy} \quad x + \sqrt{2a-x^2} = y;$$

$$\text{skąd} \quad \sqrt{2a-x^2} = y - x;$$

podniosłszy teraz obie strony do kwadratu, otrzymamy

$$2a - x^2 = y^2 - 2xy + x^2,$$

uporządkowawszy zaś podług x , będzie

$$2x^2 - 2yx = 2a - y^2,$$

skąd
$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{2a - y^2}{2}},$$

czyli króćcy
$$x = \frac{y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4a - y^2}.$$

Aby dwie wartości dla x były rzeczywiste, potrzeba aby przynajmniej y^2 było równe $4a$; a zatem $2\sqrt{a}$, jest *naywiększą* wartością jaką może przyjąć y . Lecz uczyniwszy $y = 2\sqrt{a}$; wypadnie $x = \sqrt{a}$, a zatem $x^2 = a$, i $2a - x^2 = a$.

A zatem, liczba dana $2a$, powinna być podzielona na dwie części równe, ażeby *summa* pierwiastków kwadratowych z tych dwóch części była *Maximum*.

To maximum jest oprócz tego równe $2\sqrt{a}$.

I tak, niech będzie dana liczba 72, będzie $72 = 36 + 36$; z tego $\sqrt{36} + \sqrt{36} = 12$. Liczba więc 12 jest *maximum* z wartości, jakie możnaby otrzymać na *summę* pierwiastków kwadratowych z dwóch części liczby 72.

Jakoż, rozłożmy 72 na $64 + 8$, będzie $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{8} = 2 +$ pewny ułomek; z tego $\sqrt{64} + \sqrt{8} = 10 +$ pewny ułomek. Niech będzie jeszcze $72 = 49 + 23$; a zatem $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{23} = 4 +$ pewny ułomek: przeto także $\sqrt{49} + \sqrt{23} = 11 +$ pewny ułomek.

Weźmy na 3ci^o przykład wyrażenie $\frac{m^2 x^2 + n^2}{(m^2 - n^2)x}$ dla którego trzeba znaleźć wartość *NAYMNIĘSZĄ*. (Założywszy, że $m > n$.)

Założmy
$$\frac{m^2 x^2 + n^2}{(m^2 - n^2)x} = y;$$

skąd
$$m^2 x^2 - (m^2 - n^2)yx = -n^2,$$

$$x = \frac{(m^2 - n^2)y}{2m^2} \pm \frac{1}{2m^2} \sqrt{(m^2 - n^2)^2 y^2 - 4m^2 n^2}.$$

Lecz aby dwie wartości dla x , odpowiadające jednej wartości y , były rzeczywiste; musi $(m^2 - n^2)^2 y^2$, być przynajmniej równe $4m^2 n^2$, a następnie y równe

$$\frac{2mn}{m^2 - n^2}.$$

A zatem $\frac{2mn}{m^2 - n^2}$ jest *minimum* ze wszystkich wartości które może przyjąć funkcyja y .

Lecz uczyniwszy $y = \frac{2mn}{m^2 - n^2}$; w wyrażeniu dla x , ilość pierwiastkowa zniknie; a wartość dla x stanie się

$$x = \frac{m^2 - n^2}{2m^2} \times \frac{2mn}{m^2 - n^2} = \frac{n}{m}.$$

Ta więc wartość $x = \frac{n}{m}$, nada wyrażeniu danemu *minimum* wartości.

106. Przykłady te są dostateczne do skazania drogi, którą należy postępować, w rozwiązywaniu tego gatunku zagadnień.

Utworzywszy wyrażenie *Algebraiczne* ilości, która może przyjąć *MAXIMUM* lub *MINIMUM* wartości, zrównać to wyrażenie iakiegokolwiek głosce np: y . Jeżeli równanie w ten sposób otrzymane jest stopnia drugiego względem x , (przez x oznacza się tu ilość zmienna wchodząca w wyrażenie *Algebraiczne*), należy je względem x rozwiązać, potem uczynić równą zero ilość pod znakiem pier-

wiastkowym, i z tego ostatniego równania wyciągnąć wartość dla y , która będzie szukaniem Maximum lub Minimum. Wkładając tę wartość dla y , w wyrażenie zawierające x , otrzymamy wartość tej ostatniej zmiennej, czyniąc zadosyć brzmieniu zadania.

Gdy się zdarzy, iż ilość pod znakiem pierwiastku będąca, zostanie zawsze dodatnia, bez względu na wartość dla y ; naówczas dane wyrażenie algebriczne mieć nie może ani maximum, ani minimum wartości.

Objasniamy tę okoliczność następującym przykładem:

Znaleźć czy wyrażenie $\frac{4x^2 + 4x + 3}{6(2x + 1)}$, może mieć maximum lub minimum wartości?

naznaczmy $\frac{4x^2 + 4x - 3}{6(2x + 1)} = y$,

stąd wyprowadzimy równanie:

$$4x^2 - 4(3y - 1)x = 6y + 3,$$

które da, $x = \frac{3y - 1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{9y^2 + 4}$.

Naznaczywszy dopiero, według znalezionej reguły,

$$9y^2 + 4 = 0,$$

Otrzymamy $y = \sqrt{-\frac{4}{9}}$, czyli $y = \frac{2}{3} \sqrt{-1}$;

to jest: wartość urojoną dla szukanego maximum lub minimum wyrażenia danego, która oznacza, iż to wyrażenie nie ma ani maximum, ani minimum wartości.

Dokończymy teraz teoryi, gdy poznamy własności trójmianów postaci $my^2 + ny + p$.

Własności tróymianów 2go stopnia (Trinomies.)

107. Nazywamy *tróymianem drugiego stopnia*, każde wyrażenie algebriczne, które może być sprowadzone do téj postaci $my^2 + ny + p$: a w którym m , n , i p , są ilości wiadome z iakiemikolwiek znakami, y oznacza ilość zmienną, to iest: mogącą mieć różne wartości.

$$\text{I tak} \quad 3y^2 - 5y + 7, \quad -9y^2 + 2y + 5,$$

$$(a - b + 2c)y^2 + 4b^2y - 2ac^2 + 3a^2b,$$

nazywają się tróymianami drugiego stopnia względem y .

Uczyniwszy równy zero tróymian $my^2 + ny + p$, to iest: naznaczywszy $my^2 + ny + p = 0$, otrzymamy

$$y = -\frac{n}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{n^2 - 4mp}; \text{ można tu uczynić trzy}$$

główne przypuszczenia, względem natury wartości dla y .

Może być $n^2 - 4mp > 0$, to iest *dodatne*: w tym przypadku dwa pierwiastki są rzeczywiste i nierówne z iakiemikolwiek znakami. Albo $n^2 - 4mp = 0$, w tym razie oba pierwiastki są rzeczywiste i równe.

Albo nakoniec $n^2 - 4mp < 0$, to iest *odiemne*; natenczas obadwa pierwiastki są urojone.

To założywszy, oto własności szczególne w każdym z tych trzech przypadków.

Naprzód. Zawsze ile razy tróymian drugiego stopnia iest taki, że uczyniwszy go równym 0, i rozwiązuwszy takowe równanie, otrzymamy obadwa pierwiastki rzeczywiste i nierówne, wszelka ilość dodatna, lub odjemna, zawarta pomiędzy temi pierwiastkami, wstawiona w tróymian zamiast y , daie koniecznie wypadek ze znakiem przeciwnym, temu

znakowi, iaki jest przy spółczynniku ilości y^2 ; lecz wszelka ilość niezawarta pomiędzy dwoma pierwiastkami, a wstawiona zamiast y , daie wypadek z tym znakiem, iaki jest przy spółczynniku ilości y^2 .

Jakoż oznaczywszy przez y' i y'' dwa pierwiastki (zakładając, że są rzeczywiste) równania

$$my^2 + ny + p = 0,$$

czyli
$$m\left(y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{p}{m}\right) = 0.$$

Pierwsza strona $m\left(y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{p}{m}\right)$ może (us: 94)

być wyrażona w postaci $m(y - y')(y - y'')$. A zatem mamy *tosamość*, czyli *identyczność*

$$my^2 + ny + p = m(y - y')(y - y'').$$

Oznaczmy przez α ilość zawartą pomiędzy y' i y'' , to jest taką, ażeby było $\alpha >$ albo $< y'$, lecz $\alpha <$ albo $> y''$ z tego wypada $\alpha - y' >$ albo < 0 , lecz $\alpha - y'' <$ albo > 0 .

Skąd widzimy, że czynniki $\alpha - y'$, $\alpha - y''$ mają znaki przeciwne, a zatem iloczyn z nich, $(\alpha - y')(\alpha - y'')$ jest ujemny. Przeto iloczyn $m(\alpha - y')(\alpha - y'')$; czyli jego wartość $m\alpha^2 + n\alpha + p$, ma znak przeciwny temu, iaki się znajduje przy ilości m : Jeżeli przeciwnie założymy razem $\alpha >$ albo $< y'$, i $\alpha >$ albo $< y''$, skąd $\alpha - y' >$ albo < 0 , i $\alpha - y'' >$ albo < 0 ; naówczas dwa czynniki mieć będą ten sam znak, i przeto ich iloczyn $(\alpha - y')(\alpha - y'')$ będzie dodatny, a tém samém, $m(\alpha - y')(\alpha - y'')$, czyli $m\alpha^2 + n\alpha + p$ ma ten sam znak co ilość m .

Powtóre: jeżeli dwa pierwiastki są rzeczywiste i równe, wszelka ilość odmienna od téj ilości, która

uczyni tróymian $= 0$, wstawioną w ten tróymian, da wypadek z tym samym znakiem, jaki jest przy współczynniku ilości y^2 .

Jakoż, ponieważ dwa pierwiastki są równe, więc $n^2 - 4mp = 0$, skąd $p = \frac{n^2}{4m}$. Aże tróymian...

$my^2 + ny + p$, czyli $m\left(y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{p}{m}\right)$ może być

wyrażony w téj postaci, $m\left(y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{n^2}{4m^2}\right)$

$= m\left(y + \frac{n}{2m}\right)^2$, więc wszelka ważność dla y od-

mienna od $-\frac{n}{2m}$; uczyni $\left(y + \frac{n}{2m}\right)^2$ ilością doda-

tną. To jest $m\left(y + \frac{n}{2m}\right)^2$, czyli $my^2 + ny + p$,

mieć będzie ten sam znak jaki ma ilość m .

Polrzecie: jeżeli dwa pierwiastki są urojone, wszelka ilość rzeczywista, dodatna lub ujemna, wzięta za y , da wypadek z tymże znakiem jaki jest przy współczynniku ilości y^2 .

Albowiem ponieważ dwa pierwiastki są urojone; więc $n^2 - 4mp < 0$, skąd $4mp > n^2$, czyli (ust. 101)

dzieląc obie strony przez $4m^2$, $\frac{p}{m} > \frac{n^2}{4m^2}$.

Niech więc będzie $\frac{p}{m} = \frac{n^2}{4m^2} + k^2$, gdzie k^2 ozna-

cza ilość dodatną; w tym razie ilość $my^2 + ny + p$,

$$\text{czyli } m\left(y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{p}{m}\right) = m\left(y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{n^2}{4m^2} + k^2\right) \\ = m\left(y + \frac{n}{2m}\right)^2 + mk^2,$$

mieć będzie zawsze ten sam znak, jaki ma ilość m , gdy iakąkolwiek wartość weźmiemy dla y .

108. Stąd wypada, że ile razy tróymian drugiego stopnia, $my^2 + ny + p$, jest zupełnym kwadratem, zawsze pomiędzy jego współczynnikami zachodzi powinowactwo zawarte w równaniu $n^2 - 4mp = 0$.

Jakoż jeżeli ten tróymian jest zupełnym kwadratem, i w postaci $(m'y + n')^2$, uczyniwszy go równym 0; dwa pierwiastki takowego równania powinny być sobie równe. Aby zaś były urojone, ilość pod znakiem pierwiastku to jest $n^2 - 4mp$ musi być $= 0$, to jest $n^2 - 4mp = 0$.

I na odwrot. Jeżeli pomiędzy współczynnikami zachodzi powinowactwo $n^2 - 4mp = 0$; tróymian jest zupeł-

nym kwadratem: albowiem mamy naprzód $p = \frac{n^2}{4m}$, skąd zaś

$$my^2 + ny + p = my^2 + ny + \frac{n^2}{4m} = \left(y\sqrt{m} + \frac{n}{2\sqrt{m}}\right)^2.$$

109. Zobaczmy teraz użycie tych własności, w rozwiązywaniu zagadnień *de maximis et minimis*.

$$\text{Znajdźmy teraz np: czy funkcyja } \frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14},$$

może mieć *maximum* lub *minimum* wartości.

W tym zamiarze uczynimy

$$\frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14} = y, \text{ skąd } x^2 - 2(3y + 1)x = -21 - 14y,$$

$$\text{i } x = 3y + 1 \pm \sqrt{9y^2 - 8x - 20}.$$

Aby x miało ważność rzeczywistą, tróymian $9y^2 - 8y - 20$, musi być ilością dodatnią. A ponieważ naznaczymy

$$y^2 - \frac{8}{9}y - \frac{20}{9} = 0, \text{ wypadnie } y = 2, \text{ i } y = -\frac{10}{9};$$

i te dwie ważności są rzeczywiste; więc według pierwszój własności wyżej wymienionój, nadając dla y ważności zawarte między 2 i $-\frac{10}{9}$, iako to 1, 0, -1;

ważność tróymianu będzie *odjemna*, ponieważ współczynnik ilości y^2 iest dodatny, lecz nadając dla y ważności niezawarte pomiędzy 2, i $-\frac{10}{9}$, iako to 2,

3, 4, albo -2, -3, -4; wypadek z takowego wstawienia będzie *dodatny*. Widzimy przeto, że 2 iest pomiędzy liczbami bezwzględniemi *minimum* ważności iakie przyimuie ilość y , aby x mogło być rzeczywistą ilością. Gdy w wyrażeniu powyższem dla x , uczynimy $y = 2$, ilość pierwiastkowa zniknie, i otrzymamy $x = 7$.

Jakoż w przypuszczeniu $x = 7$; wyrażenie

$$\frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14} \text{ zamieni się na } \frac{49 - 14 + 21}{42 - 14} = \frac{56}{28} = 2.$$

Pierwiastek $y = -\frac{10}{9}$, iest pomiędzy liczbami od-

jemnemi *Maximum* ważności, które y może przybrać, zaś ważność dla x odpowiadająca temu *maximum*,

$$\text{iest } x = 3 \times -\frac{10}{9} + 1 = -\frac{7}{3}.$$

Wyraziwszy x w funkcji ilości y , jeżeli współczynnik ilości y^2 pod znakiem pierwiastku będzie odie-

mny, i jeżeli z dwóch ważności dla y , wyprowadzonych z tróymianu naznaczonego $=0$, jedna będzie dodatnią, a druga odjemną; naówczas *ważność dodatnia będzie maximum*, ponieważ wszelka ważność większa od téj dodatniej, da wypadek z tymże znakiem, jaki ma współczynnik ilości y^2 ; zaś *ważność odjemna będzie minimum*, pomiędzy ważnościami odjemnymi, które może przyjąć ilość y .

Mogą uczący się roztrząsnąć inne, przytrafić się mogące okoliczności na przykład, przypadek, w którym współczynnik ilości y będąc dodatnim, dwie ważności dla y są dodatnie, lub tenże sam współczynnik jest dodatni, a dwie ważności są urojone; a to na następujących zagadnieniach.

Podzielić liczbę daną $2a$, na dwie części, tak, aby, *summa ilorazów które się otrzymują, dzieląc wzajemnie część jedną przez część drugą, była minimum*.

(Odp: Dwie części powinny być równe, a minimum jest 2.)

Niech będą a i b dwie liczby dane, z których a jest większą. Pytanie kiedy wyrażenie $\frac{(x+a)(x-b)}{x^2}$ mieć będzie maximum ważności?

(Odp: Maximum $= \frac{(a+b)^2}{4ab}$, a ważność dla x odpowiadająca jest $x = \frac{2ab}{a-b}$).

Pytanie, kiedy $\frac{(a+x)(b+x)}{x}$, mieć będzie minimum ważności?

(Odp: Minimum $= (\sqrt{a+b})^2$; $x = \sqrt{ab}$).