

ROZDZIAŁ DRUGI.

O zagadnieniach pierwszego stopnia.

Wiadomości poprzednicze o równaniach.

42. **D**O algebry należą zwyczajnie te zagadnienia, których brzmienie tłumaczone algebricznie, prowadzi do *równania*. Zastanawiając się nad rozwiązaniem zagadnienia (ust: 3); widzimy, że to rozwiązanie składa się z dwóch wyraźnych części. W pierwszej części wyrażają się algebricznie związki skazane przez brzmienie podania, iakie zachodzą pomiędzy ilościami wiadomymi i niewiadomymi. Tak więc przychodzimy do wyrażenia dwóch ilości równych, i to wyrażenie zowiemy *równaniem*. I tak, równaniem iest (ust: 3) wyrażenie $2x + b = a$. W drugiej części wyprowadzamy z tego równania inne następne, a ostatnie z nich daie w końcu ważność niewiadomey, wyrażoną za pomocą samych ilości wiadomych. Taki iest wypadek $x = \frac{a-b}{2}$; któryśmy otrzymali, i to nazywa się rozwiązaniem równania.

Ponieważ prawidła na ułożenie zagadnienia w równanie są nie stałe, więc przejdziemy do drugiej części; w której prawidła są stałe i niezmiennie.

Podług definicyi *równania*, każde równanie składa się z dwóch części rozłączonych znakiem $=$. Część po lewéy ręce zowie się *pierwszą stroną*, a część po prawéy ręce *drugą stroną* równania.

Jest wiele gatunków równości:

1°. Równość która zachodzi pomiędzy liczbami wiadomymi i danymi *a priori*, lecz wyrażonemi przez głoski; takie są równości

$$a - b = c - d; \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

które sprawdzają się, jeżeli w miejscu głosek a, b, c, d , położymy liczby szczególne sprawdzające równość. Takie równości możnaby nazwać *hypotetycznemi*, to jest równościami przez przypuszczenie.

2°. Równość *widoczna* sama przez się która się sprawdza w swoim rzeczywistym stanie, wykonawszy iednak działania algebryczne lub arytmetyczne które są skazane; takimi są równości:

$$25 = 12 + 13; 3a - 5b = a - b + 2a - 4b.$$

Nazywają się one *identyczne*, czyli *sprawdzone*.

3°. Nakoniec równość która się w tenczas dopiero sprawdza, gdy zamiast iednój lub więcej głosek, wstawimy pewną liczbę; jest to w pewnym względzie równość warunkowa.

Aby ten gatunek równości odróżnić od innych, nazywają go równaniem, i tém zatrudnimy się teraz.

Jest jeszcze ieden gatunek równości zwaný równaniem *identycznym*, o którym niżej mówić będziemy.

Dzielią się równania na różne oddziały: równania te, w które wchodzi niewiadoma w pierwszý potędze, zowią równaniem *pierwszego stopnia*, takimi są:

$$3x + 5 = 17 - 5x, ax + b = cx + d.$$

Równanie $2x^2 + 3x = 5 - 2x^2$, zowią *drugiego stopnia*. Równanie $4x^3 - 5x^2 + x = 2x^2 + 11$, jest *trzeciego stopnia*.

W ogólności *stopień* równania oznacza zawsze wykładnik największy jaki się znajdzie przy niewiadomym w danym równaniu.

Dziela jeszcze równania, na *liczebne*, i *literalne*, czyli *ogólne*. Pierwsze są te, które oprócz niewiadomej, zwykle oznaczonej przez jaką głoskę, zawierają w sobie sameliczby szczególne. Itak $4x-3=2x+5$, $3x^2-x=8$, są równania liczebne; są one tłumaczeniem algebricznym zagadnienia, w którym danymi ilościami są liczby szczególne.

Równania $ax+b=cx+d$; $ax^2+bx=c$, są ogólne. Ilości dane w zagadnieniu są oznaczone głoskami. Zwyczajem jest dla odróżnienia ilości wiadomych, od niewiadomych, oznaczać ilości niewiadome równania przez końcowe głoski abecadła x, y, z, \dots

Wyłożywszy te wiadomości, zobaczymy iak mając równanie stopnia pierwszego z iedną niewiadomą, można je rozwiązać, to jest, iak dla niewiadomej znaleźć ważność czyli liczbę, któraby wstawiona w równanie za niewiadomą, sprawdziła-je, czyli uczyniła pierwszą stronę równą drugiej.

§. 1. Równania pierwszego stopnia z iedną niewiadomą.

43. Należy uważać za *prawidło* spólne wszystkim równaniom, iż można bez naruszenia równania,

1°. *dodać* po obu stronach albo *odjąć* pewną ilość,

2°. można obie strony równania *rozmnóżyć* lub *podzielić* przez iednakową ilość, a równanie się nie zepsunie: to jest, jeżeli pierwéy była równość pomiędzy stronami; to będzie po takowych działaniach.

To założywszy, o to dwa przekształcenia ciągle używane w rozwiązywaniu równań.

Pier-

Pierwsze przekształcenie. Gdy dwie strony równania są wielomianami całymi, potrzeba często niektóre wyrazy przenieść z iednėy strony na drugą.

Niech będnie równanie $5x - 6 = 8 + 2x$. Aby z tego równania wyprowadzić ważność dla x , starać się należy zostawić samo w pierwszėy stronie. I tak, gdy odeymy po obu stronach po $2x$, równość się nie zepsuie (podług zasady poprzedzającej) i otrzymamy $5x - 6 - 2x = 8$. Tu widzimy że wyraz $2x$ będąc w drugiey stronie dodatny, stał się odjemny w pierwszėy stronie. Gdy znowu dodamy liczbę 6 po obu stronach, równość nie będzie naruszona i otrzymamy $5x - 6 - 2x + 6 = 8 + 6$, liczby $+6$ i -6 znoszą się i będnie,

$$5x - 2x = 8 + 6,$$

i tu wyraz 6 był w pierwszėy stronie odjemny, przeniesiony zaś na drugą został dodatnym.

Weźmy jeszcze równanie $ax + b = d - cx$: gdy dodamy po obu stronach po cx , a odeymy po b , otrzymamy

$$ax + b + cx - b = d - cx + cx - b$$

skróciwszy zaś będnie

$$ax + cx = d - b$$

A zatem w ogólności, chcąc przenieść iakikolwiek wyraz równania z iednėy strony na drugą, potrzeba go napisać na drugiey stronie z przeciwnym znakiem.

44. *Drugie przekształcenie.* Często jeszcze, wyrazy równania są ułomkowe, a potrzeba uczynić to równanie takim, aby wszystkie jego wyrazy były całkowite. Niech będnie równanie...

$$\frac{2x}{3} - \frac{3}{4} = 11 + \frac{x}{5}$$

Sprowadźmy naprzód wszystkie ułamki do spólnego mianownika; podług wiadomego sposobu, otrzymamy.

$$\frac{40x}{60} - \frac{45}{60} = 11 + \frac{12x}{60}$$

ponieważ można (ust. 43) rozłożyć obie strony równania przez jednakową ilość, więc rozmnóżmy je przez 60, lecz takowe mnożenie iak widzimy w tém miejscu, uskutecznione zostanie, jeżeli opuścimy mianownik 60, a rozmnóżymy każdy wyraz całkowity przez 60: otrzymamy

$$40x - 45 = 660 + 12x$$

Weźmy na drugi przykład równanie

$$\frac{5x}{12} - \frac{4x}{3} - 13 = \frac{7}{8} - \frac{13x}{6}$$

Rzecz oczywista, że mianowniki mają spólne czynniki, a najmniejsza liczba wielokrotna z tych mianowników jest 24, tę więc liczbę trzeba dać za mianownik wszystkim ułamkom.

Odbywwszy to działanie, i opuściwszy mianownik spólny 24; otrzymamy $10x - 32x - 312 = 21 - 52x$. (Tu rozmnóżyliśmy jeszcze wyraz całkowity -13 przez 24).

Równanie to jest dokładne, ponieważ sprowadzwszy ułamki do spólnego mianownika, rozmnóżyliśmy obie strony równania przez tę samą liczbę 24.

Z tego można wyprowadzić prawo ogólne. *A żeby znieść mianowniki w równaniu; potrzeba znaleźć liczbę wielokrotną najmniejszą dla wszystkich mianowników, (liczba ta jest iloczynem ze wszystkich mianowników jeżeli nie mają czynników spólnych), mnożyć potem każdy wyraz, jeżeli jest*

całkowity przez tę wielokrotność: jeżeli zaś jest ułomkowy, mnożyć go przez iloraz téj wielokrotności podzielony przez mianownik wyrazu na którym działamy: nareszcie opuścić mianownik tego wyrazu.

Trzeba się dobrze przeniknąć tém prawidłem, ponieważ za pomocą niego, otrzymujemy równania bez mianowników, iak tylko można nayprostsze.

Niech będzie dla wprawy równanie ogólne

$$\frac{ax}{b} - \frac{2c^2x}{ab} + 4a = \frac{4bc^2x}{a^3} - \frac{5a^3}{b^2} + \frac{2c^2}{a} - 3b$$

Wielokrotność nayprostsza mianowników jest a^3b^2 , a zatem możemy każdy wyraz całkowity przez a^3b^2 , każdy zaś wyraz ułomkowy przez iloraz z a^3b^2 przez mianownik tego ułamku, na którym odbywamy działanie. Po takowém działaniu otrzymamy,

$$a^4bx - 2a^2bc^2x + 4a^4b^2 = 4b^3c^2x - 5a^6 + 2a^2b^2c^2 - 3a^3b^3.$$

45. Zastosujemy powyższe prawidła do rozwiązania równań, i tak niech będzie równanie

$$4x - 3 = 2x + 5$$

Przeniosłszy wyrazy -3 i $2x$; otrzymamy

$$4x - 2x = 5 + 3: \text{ skróciwszy, } 2x = 8.$$

Podzieliwszy obie strony równania przez 2, otrzymamy $x = \frac{8}{2} = 4$.

Gdy wstawimy 4 za x w równanie otrzymamy:

$$4 \times 4 - 3 = 2 \times 4 + 5 \text{ czyli } 13 = 13.$$

Weźmy na drugi przykład równanie dane (pod ust: 44),

$$\frac{5x}{12} - \frac{4x}{3} - 13 = \frac{7}{8} - \frac{13x}{6}.$$

Zniósłszy mianowniki otrzymamy:

$$10x - 32x - 312 = 21 - 52x$$

przenieśmy wyrazy mające x na pierwszą, zaś wyrazy wiadome na drugą stronę; otrzymamy równanie:
 $10x - 32x + 52x = 21 + 312$; skróciwszy, będzie
 $30x = 333$.

Dzieląc obie strony przez 30, będzie $x = \frac{333}{30} = \frac{111}{10}$;
 wypadek ten wstawiony zamiast x , sprawdzi równanie.

Wźmy jeszcze równanie

$$(3a - x)(a - b) + 2ax = 4b(x + a).$$

Tu potrzeba naprzód wykonać skazane mnożenie, aby sprowadzić obie strony do dwóch wielomianów, a tém samém, aby otrzymać niewiadomą x . Jakoż, gdy tu zastosujemy prawidło (ust: 17) na mnożenie wielomianów; otrzymamy:

$$3a^2 - ax - 3ab + bx + 2ax = 4bx + 4ab,$$

po przeniesieniu i skróceniu będzie,

$$ax - 3bx = 7ab - 3a^2$$

Uważmy, że: $ax - 3bx$ jest to samo, co $(a - 3b)x$; a zatém równanie powyższe wyrazimy inaczej:

$$x(a - 3b) = 7ab - 3a^2;$$

Podzieliwszy nakoniec obie strony przez $a - 3b$; otrzymamy:

$$x = \frac{7ab - 3a^2}{a - 3b}.$$

W ogólności, ażeby rozwiązać równanie stopnia pierwszego, iakkolwiek zawikłane, potrzeba 1° znieść mianowniki, jeżeli się znajdują i wykonać wszystkie działania algebraiczne, jakie są skazane; przez to sprawimy, iż obie strony równania będą wielomianami całkowitemi; 2° przenieść na jedną

stronę (póspolicie na pierwszą) wszystkie wyrazy, w które wchodzi niewiadoma, a na drugą stronę wszystkie wyrazy wiadome; 3° przywieść do iednego wyrazu wszystkie wyrazy mające x , jeżeli równanie jest liczebne, jeżeli zaś jest algebriczne, zrobić z tych wszystkich wyrazów iloczyn, składający się z dwóch czynników, to jest, ażeby iednym czynnikiem było x , a drugim zbiór ilości, ze swoimi znakami, mających x . 4° podzielić obie strony równania przez liczbę, albo przez wielomian mnożący ilość niewiadomą, i wykonać dzielenie, jeżeli można.

Oto przykład, w którym prawo poprzedzające, we wszystkich częściach powinno być zastosowane. I tak, rozwiążmy równanie:

$$\frac{(a+b)(x-b)}{a-b} - 3a = \frac{4ab-b^2}{a+b} - 2x + \frac{a^2-bx}{b},$$

zniósłszy mianowniki otrzymamy:

$$b(a+b)^2(x-b) - 3ab(a^2-b^2) = b(a-b)(4ab-b^2) + 2b(a^2-b^2)x + (a^2-b^2)(a^2-bx);$$

wykonawszy skazane mnożenie otrzymamy:

$$\begin{aligned} a^2bx + 2ab^2x + b^3x - a^2b^2 - 2ab^3 - b^4 - 3a^3b + 3ab^3 \\ = 4a^2b^2 - ab^3 - 4ab^3 + b^4 - 2a^2bx + 2b^3x + a^4 \\ - a^2b^2 - a^2bx + b^3x; \end{aligned}$$

po przeniesieniu i przywiezieniu, będzie:

$$4a^2bx + 2ab^2x - 2b^3x = 4a^2b^2 - 6ab^3 + 2b^4 + 3a^3b + a^4;$$

złączywszy w ieden wyraz wszystkie mające x ,

$$x(4a^2b + 2ab^2 - 2b^3) = 4a^2b^2 - 6ab^3 + 2b^4 + 3a^3b + a^4$$

$$\text{skąd} \quad x = \frac{4a^2b^2 - 6ab^3 + 2b^4 + 3a^3b + a^4}{4a^2b + 2ab^2 - 2b^3}$$

$$\text{czyli} \quad x = \frac{4a^2b^2 - 6ab^3 + 2b^4 + 3a^3b + a^4}{b(4a^2 + 2ab - 2b^2)}$$

ważność, który nie można przywieść do wielomianu całkowitego (ust: 40).

46. Gdybyśmy mieli rozwiązać równanie $3x - 2 = 4x - 7$, przeniósłszy wyrazy mające x na pierwszą stronę, a wyrazy wiadome na drugą, otrzymalibyśmy: $3x - 4x = 2 - 7$; skąd $-x = -5$. Aby wytłumaczyć ten wypadek, dosyć będzie uważać, że można odmienić porządek w przenoszeniu, to jest: wyrazy mające x przenieść na drugą stronę, w takim razie otrzymamy: $7 - 2 = 4x - 3x$ skąd $x = 5$. A zatem ile razy otrzymamy wypadek taki, jak $-x = -5$, potrzeba tylko w obu stronach równania odmienić znaki. Co wychodzi na to, że trzeba wyrazy mające x przenieść na drugą, wyrazy zaś wiadome na pierwszą stronę równania, potem wziąć drugą stronę za pierwszą, a pierwszą za drugą.

Przejdźmy teraz do rozwiązywania zagadnień:

47. Powiedzieliśmy już, że pierwsza część algebrycznego rozwiązania zagadnienia, nie jest podciągnięta pod żadne stałe prawidło. Już to, samo wystawienie zagadnienia daje natychmiast równanie; już trzeba w wystawieniu szukać warunków, które prowadzą do ułożenia równania: już to na koniec trzeba tłumaczyć algebricznie; nie same warunki wystawienia, lecz warunki wynikające z pierwszych. Pierwsze są *warunkami wyraźnemi*, te zaś, które z pierwszych wyprowadzamy, są *warunkami niewyraźnemi*. Jednakże podamy z P. Lacroix prawidło, którego zastosowanie bardzo rozciągle, prowadzi zawsze do równania. Oto wystawienie tego prawidła: *Uważać zagadnienie za rozwiązane i skazać za pomocą znaków algebrycznych, na ilościach wiadomych, czy to liczbami, czy głoskami oznaczonych, i na ilości niewiadomej, która się zawsze oznacza głoseką, te same rozumowania i działania,*

któreby trzeba uskutecznić, chcąc sprawdzić ważność ilości niewiadomej, gdyby ta ważność była dana.

Otrzymamy tym sposobem, dwa różne wyrażenia algebriczne, dla teyże saméj ilości; porównamy je między sobą, i otrzymamy równanie do rozwiązania zagadnienia potrzebne.

Zastósujemy to prawidło do następujących zagadnień.

Pierwsze zagadnienie. Znaleść liczbę, której połowa, trzecia część i ćwierć powiększone liczbą 45, czynią sumę 448?

Niech x oznacza liczbę szukaną, a zatem $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{4}$, oznaczać będą połowę, trzecią i czwartą część liczby szukanéj: a że, podług wysłowienia, te trzy części powiększone liczbą 45, czynią sumę 448, więc,

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 45 = 448$$

odiąwszy 45 po obu stronach będzie,

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 403$$

zniósłszy mianowniki będzie $6x + 4x + 3x = 4836$: przywiódłszy; otrzymamy: $13x = 4836$; skąd

$$x = \frac{4836}{13} = 372.$$

Jakoż

$$\frac{372}{2} + \frac{372}{3} + \frac{372}{4} + 45 = 186 + 124 + 93 + 45 = 448.$$

To zagadnienie jest tego gatunku, iakie w Arytmetyce rozwiązuia się przez regułę fałszywego zało-

żenia: tu widzimy, iak Algiebra łatwo daie odpo-
wiedź na pytanie.

Zagadnienie drugie. *Godzi ktoś robotnika na dni 48, w ten sposób, że za każdy dzień pracy płaci mu groszy 24, za każdy zaś dzień próżnowania odtrąca mu (na żywność) groszy 12: po upływie 48 dni, robotnik dostał Złt: 16 gr: 24 czyli groszy 504, tyle też mu się podług umowy należało. Przez ile dni pracował, a przez ile dni próżnował?*

Gdybyśmy wiedzieli liczbę dni pracy, inż tém samém mielibyśmy i dni próżnowania, rozmnóżywszy dni pracy przez 24 grosze, a dni próżnowania przez groszy 12: odiawszy zaś ten drugi iloczyn od pierwszego, otrzymalibyśmy na wypadek 504 groszy.

Skażmy te działania za pomocą znaków algiebraicznych. Niech x oznacza liczbę dni pracy, a zatem $48-x$ wyrażać będzie dni próżnowania, $24 \times x$ oznaczać będzie sumę, którą ten naiemnik zarobił, zaś $12(48-x)$ oznaczać będzie sumę, którą mu należy wytrącić, za czas próżnowania, a zatem otrzymamy równanie:

$$24x - 12(48 - x) = 504.$$

Uskuteczniwszy działanie, będzie:

$$24x - 576 + 12x = 504;$$

$$\text{skąd} \quad 36x = 504 + 576 = 1008;$$

$$x = \frac{1008}{36} = 30;$$

$$\text{z tego} \quad 48 - x = 48 - 30 = 18.$$

A zatem robotnik pracował przez dni 30, a próżnował przez dni 18. Jakoż za 30 dni pracy powinien był odebrać 24×30 czyli 720 groszy, lecz, że

próżnował dni 18, za które należy mu wytrącić 12×18 czyli 216 gr: a zatem $720 - 216 = 504$ groszy; czyli = Złt: 16 gr: 24. Można uogólnić zagadnienie to, oznaczając, przez n całkowitą liczbę dni próżnowania i pracy, przez a sumę, którą powinien odebrać za każdy dzień roboty, przez b sumę, którą mu należało wytrącić, za każdy dzień próżnowania, na koniec przez c sumę wynikłą z obrachunku, którą otrzymał.

Niech x oznacza liczbę dni, w których pracował, a zatem ax i $b(n-x)$, oznaczać będzie sumę, którą zarobił, i którą mu należy wytrącić, za czas próżnowania. Otrzymamy więc równanie:

$$ax - b(n-x) = c$$

skąd $ax - bn + bx = c$

$$ax + bx = c + bn$$

$$x(a+b) = c + bn$$

a zatem $x = \frac{c + bn}{a + b}$,

a następnie $n - x = n - \frac{(c + bn)}{a + b} = \frac{an + bn - c - bn}{a + b}$,

czyli $n - x = \frac{an - c}{a + b}$.

Trzecie zadanie. Lis będący w odległości 60 skoków od charta, jest przez niego ścigany. Lis czyni 9 skoków, kiedy chart czyni ich tylko 6, lecz 3 skoki charta, ważą 7 skoków lisa. Ileż chart uczyni skoków, ażeby dogonił lisa?

Widać z wysłowienia, że droga, którą ma przebydź chart, składa się z 60 skoków, poprzedzonych przez lisa, więcéy ieszcze drogą, którą lis przebie-

ga od chwili, gdy go zaczęto ścigać; a zatem, gdyby można znaleźć wyrażenie tych dwóch dróg, za pomocą jednéj i téj saméj niewiadoméj, byłoby łatwo ułożyć równanie z tego zagadnienia.

Niech x oznacza liczbę skoków charta: ponieważ lis czyni 9. skoków w tym czasie, w którym

chart robi ich 6, więc lis robi $\frac{9}{6}$ czyli $\frac{3}{2}$, kiedy

chart robi 1. a następnie lis robi liczbę skoków wy-

rażoną przez $\frac{3x}{2}$ gdy chart robi tylko x ; skąd

wniesiemy, żebyśmy już otrzymali równanie, zró-

wnawszy x , i $60 + \frac{3x}{2}$: lecz popełnilibyśmy błąd,

dla tego, że skoki charta są większe od skoków lisa, i że zrównalibyśmy liczby różnorodne, to jest liczby zawierające w sobie jedności różnego gatunku.

Potrzeba więc dla zniesienia téj trudności, wyrazić skoki lisa, w skokach charta, lub przeciwnie. Jakóż podług wysłowienia, trzy skoki charta ważą 7.

skoków lisa, a zatem ieden skok charta waży $\frac{7}{3}$

skoków lisa, a następnie x skoków charta, ważą $\frac{7x}{3}$

skoków lisa. Teraz więc otrzymamy równanie:

$$\frac{7x}{3} = 60 + \frac{3}{2}x,$$

zniosłszy mianowniki będzie:

$$14x = 360 + 9x \text{ czyli } 5x = 360 \text{ i } x = 72.$$

A zatem chart uczyni 72. skoków, ażeby dogonił lisa, który w tym samym czasie uczyni skoków $72 \times \frac{3}{2}$ czyli 108.

Sprawdzenie 72 skoki charta, waży $\frac{72 \times 7}{3}$ albo 168. skoków lisa, a zatem mamy $168 = 60 + 108$.

48. Czwarte zagadnienie. Oyciec, mający trzech synów, przekazuje testamentem, aby się tego majątkiem podzielili następującym sposobem: Pierwszy ma otrzymać sumę a więcej niż część reszty, drugi sumę 2a więcej niż część reszty po odjęciu pierwszej części i 2a; trzeci na koniec powinien otrzymać sumę 3a więcej niż część reszty, iaka pozostanie po odjęciu dwóch pierwszych części i po odjęciu 3a. Majątek cały został zupełnie podzielony; pytanie jaki był ten majątek?

Oznaczmy przez x cały majątek oycy; gdybyśmy za pomocą tej ilości mogli wyrazić algebricznie trzy części, które ci synowie odebrali, naówczas sumę tych trzech części odjąwszy od x , reszta powinna być równa 0, i tak otrzymalibyśmy równanie.

Starajmy się więc oznaczyć z kolei te trzy części.

Ponieważ x oznacza majątek oycy, więc $x - a$ oznaczać będzie resztę po odjęciu sumy a , a zatem $a + \frac{x - a}{n}$ oznaczać będzie część, przypadającą na pierwszego syna. Zamieniając całość na ułamek, będzie $\frac{an + x - a}{n}$ 1sza część

Aby wyrazić część drugą, potrzeba od x odjąć tę część pierwszą, i nadto 2a; będzie

$$x - 2a - \frac{(an + x - a)}{n}$$

zamieniwszy całość na ułomek, i wykonawszy odejmowanie będzie

$$\frac{nx - 3an - x + a}{n} \dots \text{1sza reszta}$$

lecz część dla drugiego syna, składa się z $2a$ więcęcej n tą częścią téj pierwszój reszty, a zatem część dla drugiego syna, będzie $\frac{2a + nx - 3an - x + a}{n^2}$

albo zamieniwszy całość na ułomek będzie,

$$\frac{2an^2 + nx - 3an - x + a}{n^2} \dots \text{2ga część.}$$

Odiawszy od x dwie pierwsze części tudzież $3a$; otrzymamy

$$x - 3a - \frac{(an + x - a)}{n} - \frac{(2an^2 + nx - 3an - x + a)}{n^2}$$

czyli sprowadziwszy do spólnego mianownika, i przywiódłszy będzie

$$\frac{n^2 x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a}{n^2} \dots \text{2ga reszta}$$

A zatem część dla trzeciego syna, będzie wyrażona

$$3a + \frac{n^2 x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a}{n^3}$$

czyli obróciwszy całość na ułomek, będzie,

$$\frac{3an^3 + n^2 x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a}{n^3} \dots \text{3cia część}$$

Lecz podług wystowienia, majątek oycy w tym sposobie został zupełnie rozdzielony, a zatem różnica pomiędzy x sumą tych trzech części, powin-

na być równa zero. Więc otrzymamy równanie,

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{(an+x-a)}{n} - \frac{(2an^2+nx-3an-x+a)}{n^2} \\ - \frac{(3an^3+n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a)}{n^3} \end{aligned} \right\} = 0$$

zniósłszy mianownik, uskuteczniwszy odejmowanie, i przywiódłszy, otrzymamy

$$n^3x - 6an^3 - 3n^2x + 10an^2 + 3nx - 5an - x + a = 0$$

skąd

$$x = \frac{6an^3 - 10an^2 + 5an - a}{n^3 - 3n^2 + 3n - 1} = \frac{a(6n^3 - 10n^2 + 5n - 1)}{n^3 - 3n^2 + 3n - 1}$$

Można otrzymać równanie, i wypadek w prostszej postaci, według następującej uwagi. Mówić, że część trzeciego syna składa się z $3a$, więcęcy nta częścią reszty, i że majątek jest naówczas zupełnie podzielony, wychodzi na iedno, co mówić, że trzeci syn ma tylko sumę $3a$, i że reszta, o której mówimy, jest zero. A żeśmy znaleźli, iż ta reszta jest

$$\frac{n^2x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a}{n^2}$$

więc ją wzięwszy równe zero, i zniósłszy mianownik, otrzymamy:

$$n^2x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a = 0$$

$$\text{skąd } x = \frac{6an^2 - 4an + a}{n^2 - 2n + 1} = \frac{a(6n^2 - 4n + 1)}{n^2 - 2n + 1}$$

Aby okazać to samość liczebną tego wyrażenia z poprzedzającym, dosyć będzie okazać, że to dru-

gie wyrażenie pochodzi z pierwszego, w którego dwóch wyrazach zniesionoby spólny czynnik.
 Jaż gdy zastósuiemy do dwóch wielomianów
 $a(6n^3 - 10n^2 + 5n - 1)$ i $n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ prawidło największego spólnego dzielnika; (ust. 41.)
 przekonamy się, że $n - 1$ iest ich czynnikiem spólnym, i podzieliwszy dwa wyrazy pierwszego wyrażenia, przez ten czynnik spólny, otrzymamy wyrażenie drugie.

Warunki, które posłużyły do następnego ułożenia wyrażen trzech części, są *warunkami wyraźnymi* danego zagadnienia, a warunek, który posłużył do wyznaczenia prościejszego równania w zagadnieniu, iest *warunkiem nie wyraźnym*, którego bytności można się domyslić.

Aby otrzymać ważność tych trzech części, dosyć będzie zamiast x położyć iego ważność w wyrażeniach, któreśmy otrzymali wyżey. Zastósuymy

formułę $x = \frac{a(6n^2 - 4n + 1)}{n^2 - 2n + 1}$ do przykładu; niechay

będzie $a = 10,000$; $n = 5$ otrzymamy

$$\begin{aligned} x &= 10,000(6 \times 25 - 4 \times 5 + 1) = \frac{10,000 \times 131}{25 - 10 + 1} = \frac{131000}{16} \\ &= 81875 \end{aligned}$$

Sprawdźmy wysłowienie na tym przykładzie.
 Pierwszy syn powinien otrzymać

$$10,000 + \frac{81875 - 10,000}{5} \text{ czyli } 24375.$$

Zostae więc $81,875 - 24,375$ czyli $57,500$. na podział pomiędzy dwóch innych synów.

Drugi powinien otrzymać,

$$\frac{20,000 + 57,500 - 20,000}{5} \text{ czyli } 27,500.$$

Pozostaie więc $57,500 - 27,500$, czyli $30,000$ dla trzeciego syna. Jakoż $30,000$. jest potrójną liczbą względem $10,000$; a zatem zagadnienie jest sprawdzone.

Można to zagadnienie rozwiązać jeszcze prościej. Opiera się to rozwiązanie na téj uwadze; że po odjęciu $3a$ od dwóch pierwszych części, nie powinno zostać. Oznaczmy przez r , r' , r'' trzy reszty, o których jest mowa w brzmieniu zadania; a otrzymamy na wyrażenie algebriczne trzech części

$$a + \frac{r}{n}, 2a + \frac{r'}{n}, 3a + \frac{r''}{n}$$

Lecz 1° podług wysłowienia mamy $r'' = 0$
a zatem część trzecia jest $3a$

2° To, co pozostaie, dawszy drugiemu synowi

$$2a + \frac{r'}{n}; \text{ może być wyrażone przez } r' - \frac{r'}{n} \text{ czyli}$$

$$\frac{(n-1)r'}{n} \text{ ta reszta czyni także część trzecią a zatem}$$

$$\text{będzie } \frac{(n-1)r'}{n} = 3a: \text{ skąd } r' = \frac{3an}{n-1}, \text{ a zatem część}$$

$$\text{drugiego syna jest } \frac{2a + \frac{3an}{n-1}}{n} = 2a + \frac{3a}{n-1} \text{ czyli, za-}$$

$$\text{mieniwszy całość na ułomek, i skracając, } = \frac{2an + a}{n-1}$$

3° To co pozostaie, dawszy pierwszemu synowi
iego część, może być wyrażona przez $r - \frac{r}{n}$ czyli
 $\frac{(n-1)r}{n}$, Lecz ta reszta powinna wyrównywać

dwom drugim częściom, czyli $3a + \frac{2an+a}{n-1}$: a za-

$$\text{tém } \frac{(n-1)r}{n} = 3a + \frac{2an+a}{n-1} = \frac{5an-2a}{n-1}$$

$$r = \frac{5an-2a}{n-1} \times \frac{n}{n-1} = \frac{5an^2-2an}{(n-1)^2}$$

$$= a + \frac{5an-2a}{n^2-2n+1} = \frac{an^2+3an-a}{n^2-2n+1}$$

Więc cały majątek iest $3a + \frac{2an+a}{n-1} + \frac{an^2+3an-a}{n^2-2n+1}$

Obróciwszy całość na ułomek, i sprowadziwszy
do iednego mianownika; będzie

$$\frac{3a(n^2-2n+1) + (2an+a)(n-1) + an^2+3an-a}{n^2-2n+1}$$

wykonawszy skazane działanie, i przywiódłszy; będzie

$$\frac{6an^2-4an+a}{n^2-2n+1} = \frac{a(6n^2-4n+1)}{(n-1)^2}$$

wypadek ten sam, któryśmy otrzymali wyżej.

Rozwiązanie to, iest zupełniejsze od poprzedza-
jącego, albowiem otrzymaliśmy i majątek oycą, i
wyrażenia trzech części synów.

49. Piąte zagadnienie. Oyciec przekazuje testa-
mentem, iż najstarszy syn ma otrzymać sumę a
więccy nią część reszty pozostałej, syn drugi sumę

mę 2a, więcęy n ta częścią tego, co pozostanie, po odrzuceniu części pierwszey i 2a; trzeci zaś sumę 3a, więcęy n ta częścią nowęy reszty, i tak następnie. Przypuszczamy, że wszystkie dzieci równo zostały podzielone. Jaki był majątek oycy, iaka część dostała się każdemu synowi, i ilu było synów?

Zagadnienie to z tego względu zasługuie na uwagę, że w brzmieniu iego znajduje się więcęy warunków, a niżeli ich potrzeba, żeby znaleźć ważność niewiadomych ilości.

Niech x oznacza majątek oycy, $x - a$, oznaczać będzie resztę po odjęciu summy a , a zatem część najstarszego iest:

$$a + \frac{x - a}{n} \text{ czyli } \frac{an + x - a}{n} \dots \text{1sza część.}$$

odjąwszy tę pierwszą część i 2a od x otrzymamy

$$x - 2a - \frac{(an + x - a)}{n} \text{ czyli } \frac{nx - 3an - x + a}{n}$$

$$\text{a zatem } n\text{ta część iest, } \frac{nx - 3an - x + a}{n^2},$$

$$\text{przeto część drugiego syna iest } 2a + \frac{nx - 3an - x + a}{n^2},$$

$$\text{czyli, } \frac{2an^2 + nx - 3an - x + a}{n^2} \dots \text{2ga część.}$$

Podobnym sposobem możnaby wyrazić inne części, a że wszystkie te części powinny być równe, więc dosyć będzie dla utworzenia równania, porównać dwie pierwsze części: a tak

$$\frac{an + x - a}{n} = \frac{2an^2 + nx - 3an - x + a}{n^2}$$

skąd $x = an^2 - 2an + a$. Wstawiawszy tę wartość x w wyrażenie pierwszemy części; otrzymamy

$$an + an^2 - \frac{2an + a - a}{n}$$

przywiódłszy zaś, $\frac{an^2 - an}{n} = an - a = a(n-1)$;

Ponieważ wszystkie części powinny być sobie równe, więc podzieliwszy cały majątek przez część pierwszą, otrzymamy na iloraz liczbę dzieci, przeto

$$\frac{an^2 - 2an + a}{an - a} \text{ czyli } n-1 \text{ oznacza liczbę dzieci.}$$

Majątek oycy $an^2 - 2an + a$ czyli $a(n-1)^2$

Część najstarszego i każdego dziecka $a(n-1)$

Ilość dzieci $n-1$

Pozostaie jeszcze przekonać się, czy inne warunki zagadnienia są dopełnione, to jest, czy oddawszy drugiemu dziecku $2a$, więcej $ntą$ część z tego, co pozostało, nadto trzeciemu $3a$, więcej $ntą$ część pozostałą..... czy mówię, część każdego dziecka jest w istocie $a(n-1)$.

Ponieważ różnica pomiędzy majątkiem oycy i pierwszą częścią jest, $a(n-1)^2 - a(n-1)$; więc część drugiego powinna być:

$$2a + \frac{a(n-1)^2 - a(n-1) - 2a}{n} \text{ czyli}$$

$$\frac{2a(n-1) + a(n-1)^2 - a(n-1)}{n}$$

przywiódłszy, będzie $\frac{a(n-1) + a(n-1)^2}{n}$ czyli

$$\frac{a(n-1)(1+n-1)}{n} \text{ czyli } a(n-1)$$

Podobnie ponieważ różnica pomiędzy $a(n-1)^2$ i dwoma pierwszymi częściami jest $a(n-1)^2 - 2a(n-1)$, więc część trzeciego powinna być

$$3a + \frac{a(n-1)^2 - 2a(n-1) - 3a}{n}$$

czyli, po przywiedzeniu $a(n-1) + a(n-1)^2$, czyli nakoniec $a(n-1)$.

Podobnie otrzymamy na część czwartą:

$$4a + \frac{a(n-1)^2 - 3a(n-1) - 4a}{n} = \frac{a(n-1) + a(n-1)^2}{n}$$

i tak następnie: a zatem wszystkie warunki zagadnienia są dopełnione.

§. II. O równaniach i zagadnieniach pierwszego stopnia z dwiema i więcej niewiadomymi.

50. Lubo kilka zagadnień rozwiązanych powyżej zawierały w swóim brzmieniu, więcej niż iedną niewiadomą, iednakże rozwiązaliśmy te zagadnienia uważając iedną tylko ilość za niewiadomą. Polegało to na tém, że z warunków brzmienia mogliśmy łatwo wyrazić inne niewiadome za pośrednictwem iednéj. Lecz nie jest to samo ze wszystkiemi zagadnieniami, w które wchodzi kilka niewiadomych ilości.

Aby poznać postępowanie w rozwiązywaniu tego gatunku zagadnień, wróćmy się do niektórych już wyżej rozwiązanych, za pomocą iednéj niewiadomej.

Znajdź dwie liczby, których wiadoma summa a i różnica b ? (to zagadnienie pod (ust. 4)).