

nie każdy wyraz pierwszego, a iloraz otrzymuje się, wykrywając czynnik spólny wszystkim wyrazom.

*O ułamkach algebraicznych*

*i o największym spólnym dzielniku.*

33. Takie samo należy mieć wyobrażenie o ułamku algebraicznym, iakie mamy o ułamkach arytmetycznych np:  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{11}{12}$ ....., to jest: że całość uważa się

za podzielną na tyle równych części, ile jest jedności w mianowniku, (Mianownik może być jednomianem, albo wielomianem), i że się bierze tyle tych jedności, ile ich licznik skazuje. A zatem prawidła dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia ułamków w Arytmetyce wyłożone, służą także dla ułamków algebraicznych. Zawsze jednak w zastosowaniu tych prawideł, pamiętać należy o sposobach odbywania działań z ilościami algebraicznymi całkowitemi, czy to jednowyrazowemi, czy też wielomieniami. A zatem byłoby rzeczą zbyteczną zastanawiać się tu nad działaniami ze samemi ułamkami algebraicznymi, zwłaszcza, że w dalszym ciągu mieć będziemy dosyć sposobności, obeznania się z działaniami tego rodzaju.

*Przywodzenie ułamków algebraicznych, dla krótszego ich wyrażenia, zasługuje na szczególną uwagę.*

Jeżeli dzielenia jednomianu lub wielomianu nie można zupełnie, to jest, bez reszty skutecznie, wówczas skazujemy je znakiem wiadomym, i iloraz wyraża się w postaci ułamku, który nauczyliśmy się (pod ust: 23) skracać. Co do wyrażen wielomianów ułamkowych, przytoczymy niektóre przypadki, w których łatwe skrócenie da się wykonać.

Niech

Niech będzie wyrażenie  $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$ . Postrzeżemy (podług ust. 19.), że ten ułomek może być wyrażony w téj postaci:  $\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}$ : dzieląc więc licznik i mianownik przez spólny czynnik  $a-b$  mamy  $\frac{a+b}{a-b}$ .

Weźmy jeszcze wyrażenie  $\frac{5a^3 - 10a^2b + 5ab^2}{8a^3 - 8a^2b}$

To wyrażenie rozłożyć można tak  $\frac{5a(a^2 - 2ab + b^2)}{8a(a-b)}$

albo jeszcze tak,  $\frac{5a(a-b)^2}{8a^2(a-b)}$  dzieląc licznik i miano-

wnik przez spólny czynnik  $a(a-b)$ ; mamy wypadek  $\frac{5(a-b)}{8a}$

Przypadki, które pozostaie roztrząsnąć, są te, w których obu wyrazów ułamku nie można rozłożyć na iloczyn, ze summy przez różnicę dwóch ilości, albo na kwadrat ze summy, albo z różnicy dwóch ilości. Wprawa w rachunek, nauczy takowego rozkładania, gdzie to uskutecznione być może. Lecz dwa wyrazy ułamku, mogą być wielomianami więcej złożonemi: natenczas, dla tego, że rozkładanie na czynniki nie jest tak łatwe, udać się należy do szukania *naywiększego spólnego dzielnika*.

Rzecz ta, iako mająca ścisły związek z teorią

równań, przedstawia niektóre trudności: a zatem zamiarem naszym jest wyłożyć w tém miejscu tylko część materyi poszukiwania największego spólnego dzielnika dwóch wielomianów.

### O NAYWIEKSZYM SPÓLNYM DZIELNIKU ALGIEBRAICZNYM.

34. *Naywiększy spólny dzielnik dwóch wielomianów, jest wielomian naywiększy co do wykładników i współczynników, który dzieli zupełnie dwa wielomiany dane.*

Własność cechująca naywiększy spólny dzielnik jest ta, że po odbytem dzieleniu dwóch wielomianów przez tenże naywiększy spólny dzielnik, ilorazy otrzymane będą *piérwszemi* pomiędzy sobą, to jest: już nie będą zamykać czynnika spólnego.

Podanie to, jest widoczne: albowiem niech będą  $A$  i  $B$  dwa wielomiany dane, zaś  $D$  ich naywiększy spólny dzielnik: niech  $A'$  i  $B'$  będą ilorazy otrzymane: w tym razie mamy  $A = A' \times D$  i  $B = B' \times D$ , lecz gdyby  $A'$  i  $B'$  miały jeszcze iakowy czynnik spólny np.  $d$ , wówczas  $D \times d$  byłoby dzielnikiem spólnym dwóch wielomianów, i takowy dzielnik  $D \times d$  byłby większy od  $D$ , tak co do wykładników, iak co do współczynników: co byłoby sprzeczne z własnością, iaką ma wielomian  $D$ .

35. Widzieliśmy w Arytmetyce:

1. *Że naywiększy spólny dzielnik dwóch liczb całkowitych zawiera w sobie, iako czynnik, wszystkie dzielniki cząstkowe spólne tym dwom liczbom, i że nie może zawierać innych czynników.*

2. *Że naywiększy spólny dzielnik dwóch liczb całkowitych jest ten sam, iaki jest dla liczby mniey-*

szę i dla reszty winikłéy, z podzielenia większêy przez mniejszâ.

Na tych dwóch zasadach polega znalezienie największego spólnego dzielnika algebricznego.

Według tego znajdziemy największy spólny dzielnik dwóch wielomianów.

$$a^3 - a^2b + 3ab^2 - 3b^3 \text{ i } a^2 - 5ab + 4b^2$$

*Pierwsze działanie:*

$$\begin{array}{r} a^3 - a^2b + 3ab^2 - 3b^3 \\ + 4a^2b - ab^2 - 3b^3 \\ \hline 1^a \text{ reszta... } 19ab^2 - 19b^3 \\ \text{czyli } 19b^2(a-b) \end{array} \left\} \frac{a^2 - 5ab + 4b^2}{a + 4b}$$

*Drugie działanie:*

$$\begin{array}{r} a^2 - 5ab + 4b^2 \\ - 4ab + 4b^2 \\ \hline 0 \end{array} \left\} \frac{a-b}{a-4b}$$

A zatem  $a-b$  jest największym spólnym dzielnikiem dwóch danych wielomianów.

Zaczniemy od podzielenia wielomianu mającego wyższy stopień przez wielomian niższago stopnia, otrzymamy iloraz, iak wyżéy,  $a+4b$ , na resztę zaś  $19ab^2-19b^3$ .

Na mocy drugiej zasady największy spólny dzielnik będzie dzielnikiem, i pozostałéy reszty, i danego wielomianu.

A że resztę  $19ab^2-19b^3$  można w téy postaci wyrazić  $19b^2(a-b)$ , tak, że czynnik  $19b^2$  dzieli tę resztę nie dzieląc wielomianu  $a^2-5ab+4b^2$ ; więc na mocy pierwszêy zasady, czynnik  $19b^2$  nie może wchodzić do największego spólnego dzielnika, i prze-

to można go opuścić: w takim razie idzie teraz tylko o największy spólny dzielnik wielomianów:

$$a^2 - 5ab + b^2; \text{ i } a - b.$$

A że dzieląc pierwszy z tych wielomianów, przez drugi, otrzymamy na iloraz zupełny  $a - 4b$ , więc  $a - b$  jest największym spólnym dzielnikiem tej reszty, i tym samym największym spólnym dzielnikiem dwóch wielomianów danych.

Weźmy ten sam przykład i uporządkujemy wyrazy podług głoski  $b$ : będzie

$$-3b^3 + 3ab^2 - a^2b + a^3, \text{ i } 4b^2 - 5ab + a^2.$$

*Pierwsze działanie:*

Rozmnożwszy wszystkie wyrazy pierwszego wielomianu przez 4; będzie

$$\begin{array}{r} -12b^3 + 12ab^2 - 4a^2b + 4a^3 \\ 1^a \text{ reszta... } -3ab^2 - a^2b + 4a^2 \\ \hline 12ab^2 - 4a^2b + 16a^3 \\ 2^a \text{ reszta.... } \hline -19a^2b + 19a^3 \end{array} \left. \begin{array}{l} 4b^2 - 5ab + a^2 \\ -3b, -3a \end{array} \right\}$$

$$\text{czyli } 19a^2(-b + a)$$

*Drugie działanie:*

$$\begin{array}{r} 4b^2 - 5ab + a^2 \\ -ab + a^2 \\ \hline 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} -b + a \\ -4b + a \end{array} \right\}$$

A zatem  $-b + a$ , albo  $a - b$  jest największym spólnym dzielnikiem.

W pierwszym działaniu, nie można było zaraz odbyć dzielenia dwóch wielomianów, ponieważ pier-

wszy wyraz  $-3b^3$  dzielny, nie jest podzielny przez  $4b^2$  pierwszy wyraz dzielnika. Lecz widoczną jest rzeczą, że współczynnik 4, nie jest wspólnym czynnikiem dzielnika, a zatem, na mocy pierwszej zasady, nie może być częścią wspólnego największego dzielnika. Istota rzeczy nie odmieni się przeto, jeżeli ten czynnik 4. wprowadzimy do dzielnej; to to jest: jeżeli pomnożymy wszystkie wyrazy dzielnej przez 4: otrzymawszy więc  $-12b^3 + 12ab^2 - 4a^2b + 4a^3$ , dwa pierwsze wyrazy dzielnej i dzielnika są podzielne, i uskuteczniwszy dzielenie, otrzymamy iloraz  $-3b$ , i resztę  $-3ab^2 - a^2b + 4a^3$ .

W téj reszcie wykładnik przy głosce  $b$  jest równy wykładnikowi przy téjże głosce w dzielniku, żeby zaś dwa pierwsze wyrazy znowu uczynić podzielnymi, pomnożymy przez 4, poczem będzie można odbyć dalsze dzielenie.

Takie przygotowanie uczyniwszy, otrzymamy

$-12ab^2 - 4a^2b + 16a^3$ : to podzielone przez  $4b^2 - 5ab + a^2$  da na iloraz  $-3a$ , reszta zaś będzie  $-19a^2b + 19a^3$ , którą wyrazić można w téj postaci:  $19a^2(-b + a)$ , czynnik  $19a^2$  opuszcza się, iako nie należący do największego wspólnego dzielnika, a zatem idzie tylko o znalezienie największego wspólnego dzielnika dla  $4b^2 - 5ab + a^2$ , i  $-b + a$ . Podzieliwszy te dwa wielomiany przez siebie; otrzymamy iloraz skończony  $-4b + a^2$  a zatem  $-b + a$  czyli  $a - b$  jest największym wspólnym dzielnikiem szukany.

36. W tym przykładzie, iak i we wszystkich innych, w których wykładnik głoski głównej w dzielnej jest większy jednością od wykładnika téjże głoski w dzielniku, skrócić można działanie, mnożąc zaraz z początku dzielną przez kwadrat ze współczynnika wyrazu pierwszego w dzielniku, skąd wypa-

dnie, że pierwszy iloraz cząstkowy zamykać będzie takowy spółczynnik w pierwszy potędze. Mnożąc dzielnik przez iloraz, dalej uskuteczniając przywie-  
dzenie z dzielną tak przygotowaną; otrzymany wy-  
padek zawierać jeszcze będzie takowy spółczynnik  
iako czynnik: tak będzie można odbywać dzielenie,  
dopóki nieotrzymamy reszty, w którejby wykładnik  
głoski główny był mniejszy; od wykładnika téż  
głoski w dzielniku.

Oto wzór działania.

*Pierwsze działanie.*

Mnożenie przez 16, czyli przez kwadrat z 4ch.

$$\begin{array}{r}
 -48b^3 + 48ab^2 - 16a^2b + 16a^3 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4b^2 - 5ab + a^2 \\ \\ \end{array} \\
 -12ab^2 - 4a^2b + 16a^3 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} -12b - 3a \\ \\ \end{array} \\
 \hline
 1^a \text{ reszta. } \dots -19a^2b + 19a^3 \\
 \text{czyli } 19a^2(-b + a).
 \end{array}$$

*Działanie drugie.*

$$\begin{array}{r}
 4b^2 - 5ab + a^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} -b + a \\ \\ \end{array} \\
 -ab + a^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4b + a \\ \\ \end{array} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

*Uwaga.* Jeżeli wykładnik głoski główny w dziel-  
nej przewyższa dwiema lub trzema jednościami, wy-  
kładnik téż głoski w dzielniku; potrzeba pomno-  
żyć dzielną przez trzecią albo czwartą potęgę spół-  
czynnika, iako jest przy pierwszym wyrazie dzielnika.

Weźmy na drugi przykład dwa wielomiany

$$\begin{array}{l}
 15a^5 + 10a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 - 3ab^4 \\
 i \quad 12a^3b^2 + 38a^2b^3 + 16ab^4 - 5b^5
 \end{array}$$

Nim przystąpimy do dzielenia dwóch wielomianów,  
uważmy, że pierwszy wielomian zawiera  $a$  iako spół-

ny czynnik wszystkim wyrazom, lecz, że ten czynnik nie wchodzi do wszystkich wyrazów drugiego wielomianu, można go więc opuścić, iako nie czyniący żadnej części spólnego dzielnika.

Dla podobnej przyczyny czynnik  $2b^2$  spólny wszystkim wyrazom drugiego wielomianu, nie wchodzący do wszystkich wyrazów pierwszego wielomianu, może być opuszczony. A zatem idzie teraz o znalezienie największego spólnego dzielnika dwóch wielomianów następujących.

$$\begin{array}{l} 15a^4 + 10a^3b + 4a^2b^2 + 6ab^3 - 3b^4 \\ i \quad 6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3. \end{array}$$

*Pierwsze działanie.*

$$\begin{array}{r} 30a^4 + 20a^3b + 8a^2b^2 + 12ab^3 - 6b^4 \\ - 75a^3b - 32a^2b^2 + 37ab^3 - 6b^4 \\ - 150a^3b - 64a^2b^2 + 74ab^3 - 12b^4 \\ \hline 1a. \text{ reszta } + 411a^2b^2 + 274ab^3 - 137b^4; \\ \text{czyli } 137b^2(3a^2 + 2ab - b^2). \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3 \\ 5a, - 25b \end{array} \right.$$

*Działanie drugie.*

$$\begin{array}{r} 6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3 \\ + 15a^2b + 10ab^2 - 5b^3 \\ \hline o. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3a^2 + 2ab - b^2 \\ 2a + 5b \end{array} \right.$$

A zatem  $3a^2 + 2ab - b^2$  jest szukany największym spólnym dzielnikiem.

Postępując tym samym sposobem, iak w przykładzie poprzedzającym, potrzebaby mnożyć całą dzielną przez 6 spółczynnik pierwszego wyrazu w dzielniku, albo raczy przez kwadrat z 6, lecz ponieważ tak 15 iak 6 mają spólny czynnik 3; więc dosyć będzie mnożną rozmnożyć przez liczbę 2, która jest czynnikiem 6u, a nie jest czynnikiem 15u.



Według tego odbywając dzielenie, otrzymamy resztę której pierwszy wyraz będzie  $-75a^3b$ . Tu 75 zawiera jeszcze czynnik 3, który wchodzi także iako czynnik do 64: aby więc dalej odbywać dzielenie, dosyć będzie wprzód rozmnożyć tę resztę przez 2: odbywszy dzielenie otrzymamy na pierwszą resztę główną;  $411a^2b^2 + 274ab^3 - 137b^4$ .

Lecz także łatwo postrzedź, że w téj reszcie jest  $173b^3$  spólnym czynnikiem, który ponieważ nie wchodzi do wielomianu drugiego, i tém samém niestanowi części największego spólnego dzielnika, przeto opuszcza się: i teraz idzie tylko o znalezienie największego spólnego dzielnika między wielomianami

$$\begin{array}{l} 6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3 \\ \text{i} \quad 3a^2 + 2ab - b^2 \end{array}$$

Odbywszy dzielenie tych dwóch wielomianów, otrzymamy iloraz zupełny  $2a + 5b$ ; a zatem reszta  $3a^2 + 2ab - b^2$  jest największym spólnym szukany dzielnikiem.

38. *Uwaga.* Można się zastanowić czy odrzucanie w ciągu działania, czynników spólnych wszystkim wyrazom w otrzymaney reszcie, jest tylko skróceniem rachunku, czy też, są te działania konieczne potrzebne?

Lecz można łatwo poznać, że te odrzucenia są konieczne potrzebne; albowiem, gdybyśmy w przykładzie poprzedzającym nie odrzucili czynnika  $137b^2$ ; musielibyśmy mnożyć całą dzielną przez tenże czynnik, aby pierwszy wyraz téj nowéj dzielnej mógł być podzielony przez pierwszy wyraz dzielnika; lecz tym sposobem wprowadzilibyśmy do dzielnej czynnik takowy, któryby się znajdował także w dzielniku, a tém samém szukany największy spólny dzielnik zawierałby w sobie czynnik  $137b^2$ , który, iak

widzieliśmy na samym początku, nie może stanowić części największego wspólnego dzielnika.

39. Wyjaśnimy te prawdy następującym przykładem.

Znaleźć największy wspólny dzielnik dwóch wielomianów.

$$\begin{array}{r} ab+2a^2-3b^2-4bc-ac-c^2 \\ 9ac+2a^2-5ab+4c^2+8bc-12b^2 \end{array}$$

*Pierwsze działanie.*

$$\left. \begin{array}{r} 2a^2+b|a-3b^2 \\ -c|-4bc \\ -c^2 \end{array} \right\} \begin{array}{r} 2a^2-5b|a-12b^2 \\ +9c|+8bc \\ +4c^2 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r} 1 \end{array}$$

1a. reszta ...  $6b|a+9b^2$

$$\begin{array}{r} -10c|-12bc \\ -5c^2; \end{array}$$

czyli  $(3b-5c)(2a+3b+c)$ .

*Drugie działanie.*

$$\left. \begin{array}{r} 2a^2b-5b|a-12b^2 \\ +9c|+8bc \\ +4c^2 \end{array} \right\} \begin{array}{r} 2a+3b+c \\ a-4b \\ +4c \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r} -8b|a-12b^2 \\ +8c|+8bc \\ +4c^2 \end{array}$$


---


$$0$$

A zatem  $2a+3b+c$  jest największy wspólny dzielnik dwóch danych wielomianów.

Po uporządkowaniu dwóch wielomianów, można bez żadnego przygotowania odbyć dzielenie; w obecnym razie otrzymamy pierwszą resztę:

$$\begin{array}{r} 6b \overline{) a + 9b^2} \\ -10c \overline{) -12bc} \\ \hline -5c^2 \end{array}$$

A żeby dalej działać, potrzebaby, biorąc drugi wielomian za dzielną, a otrzymaną resztę za dzielnik; mnożyć tę nową dzielną przez  $6b - 10c$ , albo króćey przez  $3b - 5c$ , ponieważ czynnik 2 wchodzi już w pierwszy wyraz dzielný; lecz przed wykonaniem tego mnożenia, zobaczymy czy czynnik  $3b - 5c$  nie podzieli drugiego wyrazu reszty, to iest: wyrazu  $9b - 12bc - 5c^2$ . Jakoż uskuteczniwszy dzielenie, otrzymamy iloraz zupełny,  $3b + c$ , a zatém resztę można wyrazić w postaci:  $(3b - 5c)(2a + 3b + c)$ .

Należy opuścić  $3b - 5c$  ponieważ czynnik  $3b - 5c$  znajduie się w téy reszcie, a nie wchodzi do nowéy dzielnéy, (albowiem ten czynnik iako niezależący od głoski  $a$ , powinienby (ust. 30) znajdować się pomiędzy współczynnikami różnych potęg teyże głoski, czego w tym przykładzie nie ma).

Opuszczanie takowe iest konieczne, bo inaczey wprowadzilibyśmy ten czynnik do dzielnéy, a na owczas dwa wielomiany zawieraiąc czynnik spólny, którego wprzód nie miały, tém samém miałyby największy spólny dzielnik odmienny, to iest: zawieraiący w sobie czynnik  $3b - 5c$ , który w nim nie powinien, się znajdować.

Po takim opuszczeniu, odbywa się nowe dzielenie, i otrzymuiemy zupełny iloraz, a zatém  $2a + 3b + c$  iest największy spólny dzielnik.

40. Na ostatni przykład znajdźmy największy spólny dzielnik dwóch wielomianów

$$\begin{array}{r} a^4 + 3a^3b + 4a^2b^2 - 6ab^3 + 2b^4 \\ 4a^2b + 2ab^2 - 2b^3, \end{array}$$

Opuściwszy spólny czynnik  $2b$  w drugim wielomianie, otrzymamy  $2a^2 + ab - b^2$ .

*Działanie pierwsze.*

$$\begin{array}{r} 8a^4 + 24a^3b + 32a^2b^2 - 48ab^3 + 16b^4 \\ + 20a^3b + 36a^2b^2 - 48ab^3 + 16b^4 \\ + 26a^2b^2 - 38ab^3 + 16b^4 \end{array} \left. \begin{array}{l} 2a^2 + ab - b^2 \\ 4a^2 + 10ab + 13b^2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{r} 1a. \text{ reszta.....} \quad -51ab^3 + 29b^4 \\ \text{czyli.....} \quad -b^3(51a - 19b). \end{array}$$

*Działanie drugie.*

Rozmnożywszy przez kwadrat z  $51$  czyli przez  $2601$ ,

$$\begin{array}{r} 5202a^2 + 2601ab - 2601b^2 \\ - 5202a^2 + 2958ab \\ \hline + 5559ab - 2601b^2 \\ - 5559ab + 3161b^2 \end{array} \left. \begin{array}{l} 51a - 29b \\ 102a + 109b \end{array} \right\}$$

$$2a. \text{ reszta.....} \quad + 560b^2$$

Wykładnik głośki  $a$  w dzielnicy, przewyższa dwie ma iednościami wykładnik teyże głośki w dzielniku, a zatem wyrazy dzielnicy rozmnożywszy przez trzecią potęgę ze  $2ch$ , to jest przez  $8$ ; można będzie, po takim przygotowaniu odbyć trzy następne działania, a otrzymamy na pierwszą resztę główną,  $-51ab^3 + 29b^4$ . Opuszczając czynnik  $b^3$  w tey reszcie, będzie nowy dzielnik,  $-51a + 29b$ , zmieniawszy znaki, co jest wolno, otrzymamy:  $51a - 29b$ ; nowa zaś dzielna jest  $2a^2 + ab - b^2$ .

Mnożąc tę dzielną przez kwadrat z  $51$ , to jest: przez  $2601$ , potem odbywszy dzielenie; otrzymamy na drugą resztę główną,  $+560b^2$ ; a zatem dwa dane wielomiany są pierwsze pomiędzy sobą, to jest: nie mają żadnego spólnego czynnika.

Jakoż podług drugiey zasady wypada, że największy spólny dzielnik powinien się znajdować iako czynnik w reszcie otrzymaney po każdym działaniu, a zatem powinienby podzielić resztę  $560b^2$ , lecz ta reszta jest nie zależna od główneý głoski  $a$ , gdyby więc dwa te wielomiany mogły mieć spólny dzielnik, takowy powinien być także niezależny od  $a$ , a następnie, (ust: 30) powinien się znajdować iako czynnik w spółczynnikach różnych potęg teyże głoski, którą zamyka każdy z wielomianów danych, co w tym razie nie zachodzi.

Te przykłady będą dostateczne, do pokazania drogi którą postępować należy, aby otrzymać największy spólny dzielnik dwóch wielomianów.

**41. PRAWIDŁO OGÓLNE.** Naprzód opuścić w obu wielomianach czynniki iednowyrazowe spólne wszystkim wyrazom dwóch wielomianów, (zdażyć się może, że czynnik iednowyrazowy który się znajduie w dzielney, i ten który się znajduie w dzielniku, będą miały między sobą spólny dzielnik: w tym przypadku, należy ten spólny dzielnik napisać na boku, iako mający stanowić część największego spólnego dzielnika szukanego).

Po takowém opuszczeniu przygotuie się dzielną tak, aby piérwszy iey wyraz był podzielny przez piérwszy wyraz dzielnika, (wiemy już na czém zasada się takowe przygotowanie), potém uskutecznia się dzielenie, z którego otrzymamy pewną resztę, ta będzie niższego stopnia niż dzielnik. W téy reszcie opuszczają się czynniki iednowyrazowe, albo wielowyrazowe, które zamykają spółczynniki, głoski główneý w różnych potęgach. Następnie bierze się ta reszta za dzielną, a drugi wielomian za dzielną, i odbywa się dzielenie tych dwóch wielomianów iak na poprzedzających przykładach.

Postępuje się w tych działaniach dopóty, dopóki nie otrzymamy reszty takięj, któraby podzieliła zupełnie resztę poprzedzającą, i w tym przypadku reszta dzieląca jest największym wspólnym dzielnikiem. Albo odbywać działania, dopóki nie otrzymamy reszty NIEZALEŻNÉY od głównej głoski, co oznaczać będzie (ust: 40), że dane dwa wielomiany są PIĘRWSZE MIĘDZY SOBĄ, a przynajmniej, że nie mają wspólnego czynnika zależącego od głoski czego w początku działania odkryć nie można było.

Uwaga. Znajdują się przypadki w których to postępowanie skrócić potrzeba, co następnie poznamy.

Oto nowe przykłady dla których sposób podany wyżej jest dostateczny.

$$\begin{array}{l} \text{1szy Prz: } qnp^3 + 3np^2q^2 - 2npq^3 - 2nq^4 \\ \text{ } \quad \quad \quad \text{i} \quad \quad \quad 2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} qnp^3 + 3np^2q^2 - 2npq^3 - 2nq^4 \\ 2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3 \end{array}} \right\}$$

Największy wspólny dzielnik jest  $p - q$ ;

$$\begin{array}{l} \text{2gi Prz: } 36a^6 - 18a^5 - 27a^4 + 9a^3. \\ \quad \quad \quad 27a^5b^2 - 18a^4b^2 - 9a^3b^2. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 36a^6 - 18a^5 - 27a^4 + 9a^3 \\ 27a^5b^2 - 18a^4b^2 - 9a^3b^2 \end{array}} \right\}$$

największy wspólny dzielnik jest  $9a^3(a-1)$ .

Wyłożenie czterech pierwszych działań algebracyjnych, i znalezienie największego wspólnego dzielnika, będą dostateczne do rozwiązywania wielu zagadnień. W dalszym ciągu wyłożone zostaną nowe prawidła, w miarę iak tego okazywać się będzie potrzeba; teraz przejdziemy do rozwiązywania zagadnień pierwszego stopnia.