

wiadome. Tego gatunku równania zowią się równaniami *wykładniczymi* (*exponentielles*), dla rozróżnienia ich od równań dotąd uważanych, w których wiadoma zawsze była podniesiona do potęgi oznaczony przez liczby wiadome.

Zaymiemy się więc rozwiązaniem tych równań, z którymi ma związek iedna z najważniejszych teoryy, to jest teoria Logarytmów.

## § II. Teorya ilości wykładniczych i Logarytmów.

205. Rozwiązanie równania  $a_x = b$ .

To zadanie polega na tém, ażeby znaleźć wykładnik potęgi, do której potrzeba podnieść daną liczbę  $a$ , aby otrzymać liczbę daną  $b$ .

Uważmy naprzód szczególne przypadki, iakoto: rozwiązać równanie  $2^x = 64$ . Liczbę 2 podnosząc do rozmaitych potęg, przekonamy się, że  $2^6 = 64$ . Więc  $x = 6$  zadosyć czyni zadaniu.

Weźmy iészczę równanie  $3^x = 243$ .

Otrzymamy na rozwiązanie  $x = 5$ .

Wogólności, skoro druga strona  $b$ , będzie zupełną potęgą liczby  $a$ , naówczas  $x$  będzie liczbą całkowitą, którą otrzymamy podnosząc  $a$ , do potęg następujących 0, 1, 2, 3, .....

Rozwiążmy teraz  $2^x = 6$ . Czyniąc  $x = 2$ , i  $x = 3$ , otrzymamy  $2^2 = 4$ ,  $2^3 = 8$ , skąd widzimy, że ważność dla  $x$  iest zawarta po między 2 i 3.

Uczyńmy zatem  $x = 2 + \frac{1}{x'} \dots$  ( $x'$  iest  $> 1$ ),

ważność tę wstawiwszy w dane równanie, otrzymamy

$2^2 + \frac{1}{x'} = 6$  czyli (ustęp 176),  $2^2 \times 2^{\frac{1}{x'}} = 6$ , więc

$2^{\frac{1}{x'}} = \frac{3}{2}$ , czyli podniosłszy obie strony tego

równania do potęgi  $x'$ , będzie  $\left(\frac{3}{2}\right)^{x'} = 2$ .

Aby oznaczyć  $x'$ , czynimy następnie  $x' = 1$ ,  $x' = 2$ , i otrzymamy  $\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}$ , liczbę mniejszą od 2, tudzież  $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ , liczbę większą od 2, a zatem  $x'$  jest zawarte pomiędzy 1 i 2.

Uczynmy więc  $x' = 1 + \frac{1}{x''}$ ,.... ( $x$  jest także  $> 1$ )  
ważność tę wstawiając w równanie wykładnicze  
względem  $x'$ ; otrzymamy

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1 + \frac{1}{x''}} = 2, \text{ czyli } \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x''}} = 2,$$

skróciwszy, będzie  $\left(\frac{4}{3}\right)^{x''} = \frac{3}{2}$ .

Z dwóch przypuszczeń  $x'' = 1$  i  $x'' = 2$  otrzymamy

$\left(\frac{4}{3}\right)^1 = \frac{4}{3}$  liczbę mniejszą od  $\frac{3}{2}$ ; tudzież....

$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9}$  liczbę większą od  $\frac{3}{2}$ ; a zatem  $x''$  jest zawarte pomiędzy 1 i 2.

Uczyńmy więc  $x'' = 1 + \frac{1}{x'''}; \text{ skąd}$

$\left(\frac{4}{3}\right)^{1 + \frac{1}{x'''}} = \frac{3}{2}$ , czyli  $\frac{4}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x'''}} = \frac{3}{2}$ , skąd po przywiedzeniu, wypadnie  $\left(\frac{9}{8}\right)^{x'''} = \frac{4}{3}$ .

Uczyniwszy następnie  $x''' = 1, 2, 3$ , otrzymamy z takowych dwóch ostatnich przypuszczeń,

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64} = 1 + \frac{17}{64} \text{ liczbę } < 1 + \frac{1}{3}; \text{ i}$$

$\left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{729}{512} = 1 + \frac{217}{512} \text{ liczbę } > 1 + \frac{1}{3}; \text{ a zatem } x'''$   
jest zawarte pomiędzy 2 i 3.

Uczyńmy  $x''' = 2 + \frac{1}{x^{IV}}$ , równanie więc wzglę-

dem  $x'''$  zamieni się na  $\left(\frac{9}{8}\right)^{2 + \frac{1}{x^{IV}}} = \frac{4}{3}$ , czyli

$$\frac{81}{64} \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{x^{IV}}} = \frac{4}{3}, \text{ następnie } \left(\frac{256}{243}\right)^{x^{IV}} = \frac{9}{8}.$$

Postępując z tém równaniem wykładniczym, iak z poprzedzającemi, otrzymalibyśmy dwie liczby całkowite  $k$  i  $k + 1$ , między którymi byłoby zawarte

$x^{IV}$ . Czyniąc  $x^{IV} = k + \frac{1}{x^V}$ , wyznaczylibyśmy  $x^V$  podobnie iak  $x^{IV}$ ; i tak następnie.

Zbliźmy teraz równania

$$x = 2 + \frac{1}{x'}; x' = 1 + \frac{1}{x''}; x'' = 1 + \frac{1}{x'''};$$

$$x''' = 2 + \frac{1}{x^{IV}} \dots$$

otrzymamy więc ważność dla  $x$  w postaci ułamku ciągłego

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x^{IV}}}}}$$

Wiemy zaś z arytmetyki, że w ułamku ciągłym im więcej weźmiemy ułamków cząstkowych, (intégrantes,) tym bardziéj ważność ciągłego zbliźmy do liczby zamienionéj na taki ułomek, a zatém, można będzie tym sposobem znaleźć ważność dla  $x$ , któraby sprawdziła równanie  $2^x = 6$ , jeżeli nie zupełnie, to przynajmniéj z takim przybliżeniem iak tylko zechcemy.

Naprzykład, cztery pierwsze przywiedzione ułamki podług sposobu wyłożonego w arytmetyce otrzymamy te

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{13}{5},$$

z których czwarty, to jest  $\frac{13}{5}$  różni się od ważności

$x$ , tylko ilością mniejszą od  $\frac{1}{(5)^2}$  czyli  $\frac{1}{25}$ .

Lecz tu przybliżenie otrzymamy jeszcze większe: albowiem wyprowadziwszy ważność dla  $x^{IV}$  z równania  $\left(\frac{256}{243}\right)x^{IV} = \frac{9}{8}$ , zobaczymy że  $x^{IV}$ , jest zawarte

pomiędzy 2 i 3, a zatem  $x^{IV} = 2 + \frac{1}{x^V}$ , więc pią-

ty przywiedziony ułamek jest  $\frac{13 \times 2 + 5}{5 \times 2 + 2}$ , czyli  $\frac{31}{12}$ .

A tak  $\frac{13}{5}$  różni się od ważności  $x$ , ilością mniejszą

od  $\frac{1}{12 \times 5}$  czyli  $\frac{1}{60}$ , a zaś  $\frac{31}{12}$  różni się ilością mniejszą

od  $\frac{1}{(12)^2}$  czyli  $\frac{1}{144}$ .

*Oto sposób ogólny.* Niech będzie  $a^x = b$  równanie które mamy rozwiązać.

Czyniąc następne potęgi z  $a$ , otrzymamy, że  $b$  jest zawarte pomiędzy  $a^n$  i  $a^{n+1}$ , a zatem uczyni-

wszy  $x = n + \frac{1}{x'}$ ; wstawiwszy tę ważność w ró-

wnanie, wypadnie  $a^{n + \frac{1}{x'}} = b$ , czyli  $a^n \times a^{\frac{1}{x'}} = b$ :

skąd  $\left(\frac{b}{a^n}\right)^{x'} = a$ , czyli (dla skrócenia czyniąc  $\frac{b}{a^n} = c$ ),  
 $c^{x'} = a$ .

Odbywszy z tém równaniem te same działania, co z poprzedzającym, znajdziemy że  $x'$  jest zawarte pomiędzy  $n'$  i  $n' + 1$ , skąd  $x' = n' + \frac{1}{x''}$ : ważność tę wstawiwszy w równanie, w które wchodzi  $x'$ , musielibyśmy jeszcze rozwiązać równanie  $d^{x''} = c$ , w którym  $d = \frac{a}{c^{n'}}$ : i tak dalej. W końcu więc otrzymamy na ważność dla  $x$ , wyrażenie następującej postaci

$$x = n + \frac{1}{n' + 1 + \frac{1}{n'' + 1 + \frac{1}{n''' + 1 + \dots}}}$$

Posuwając zaś dalej takowe działanie, otrzymalibyśmy ważność dla  $x$ , w takim stopniu przybliżoną, jakbyśmy sami chcieli, ten zaś stopień przybliżenia wyznacza się ilorazem z jedności podzielony przez kwadrat z mianownika, ostatniego przywiedzionego ułamku,

206. Uwagi. 1°. Uważając  $b$  za mniejsze od  $a$ , w równaniu  $a^x = b$ , ponieważ  $a^0 = 1$  (ustę. 24), zaś  $a' = a$ , więc  $x$  jest zawarte pomiędzy 0 i 1,

i przeto potrzeba uczynić  $x = \frac{1}{x'}$ .

2°. Gdy  $b$  jest ułamkiem, zaś  $a$  większe od jedności, potrzeba uczynić w równaniu  $a^x = b$ ,

$x = -y$ : będzie przeto  $a^{-y} = b$ , stąd zaś (ustę:175),

$a^y = \frac{1}{b}$ ; a ponieważ  $\frac{1}{b}$  jest  $> 1$ , więc wyznaczmy

$y$ , podług sposobu powyższego, a ważność odpowiadająca  $x$  wzięta odjemnie, będzie równa ważności  $y$ .

Za pomocą tych uwag, zastosowanie sposobu nastąpi bez żadnych trudności. Jedynie tylko działania dla otrzymania wielkiego stopnia przybliżenia, są dość pracowite.

Można się wprawić na następujących przykładach:

$$3^x = 15 \dots x = 2,46 \text{ o } 0,01 \text{ zbliżona,}$$

$$10^x = 3 \dots x = 0,477 \text{ o } 0,001 \text{ zbliżona,}$$

$$5^x = \frac{2}{3} \dots x = -0,25 \text{ o } 0,01 \text{ zbliżona,}$$

$$\left(\frac{7}{12}\right)^x = \frac{3}{4} \dots x = 0,53 \text{ o } 0,01 \text{ zbliżona.}$$

Zakładamy tu, że otrzymane przywiedzione ułamki były zamienione na dziesiętne.

207. Tu można się zapytać, czy postępując sposobem poprzedzającym przyjdziemy do ułamku ciągłego, złożonego z ograniczonej liczby ułamków częściowych, (intégrantes) w którymto razie otrzymamy na ważność dla  $x$  liczbę spółmierną i równą ostatniemu ułamkowi przywiedzionemu; albo czy

liczba ułmków cząstkowych, powinna być koniecznie nieograniczona, w którym to razie  $x$  będzie *nieśpółmierną*? Aby na to pytanie odpowiedzieć, załóżmy iż

w równaniu  $a^x = b$ ,  $x$  jest liczbą spółmierną  $\frac{m}{n}$ , i zo-

baczmy, jaki związek zachodzić powinien pomiędzy liczbami  $a$  i  $b$ , aby ta ważność mogła być przypuszczona: to jest, aby  $x$  było *spółmierne*.

Niech naprzód  $a$  i  $b$  będą dwie liczby całkowite;

mamy równanie  $a^{\frac{m}{n}} = b$ , które zamienimy na  $a^m = b^n$ .

Zaraz widzimy, iż taka równość nie może zachodzić, chyba wtenczas, kiedy  $a$  i  $b$  składać się będą z tych samych czynników pierwszych między sobą: albowiem, przypuściwszy że w ilości  $b$ , znajduie się pewien czynnik pierwszy, a tenże sam nie znajduie się w  $a$ , więc obie strony równania podzieliwszy przez ten czynnik, strona druga byłaby liczbą całkowitą, a pierwsza liczbą ułmkową co jest sprzecznością.

Jeżeli naprzykład mamy  $a = \alpha^p \beta^q \gamma^r \delta^s$ ,

powinno być także  $b = \alpha^{p'} \beta^{q'} \gamma^{r'} \delta^{s'}$ .

Wstawiwszy te ważności w równanie  $a^m = b^n$ , równanie to przydzie na następujące,

$$\alpha^{mp} \beta^{mq} \gamma^{mr} \delta^{ms} = \alpha^{np'} \beta^{nq'} \gamma^{nr'} \delta^{ns'}.$$

To nowe równanie utrzymać się może w tenczas tylko, gdy potęgi tego samego czynnika pierwszego będą równe w obu stronach, albowiem w przeciwnym razie, dzieląc przez najwyższą potęgę, przyślibyśmy do tego niezgodnego z prawdą wypadku, że liczba całkowita równa się liczbie ułmkowej.



A zatem powinno być oddzielnie,

$$mp = np'; \quad mq = nq'; \quad mr = nr'; \quad ms = ns',$$

$$\text{skąd} \quad \frac{m}{n} = \frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r} = \frac{s'}{s}.$$

Aby więc ważność dla  $x$  była spółmierną, potrzeba aby ilości  $a$  i  $b$  składały się z tych samych czynników pierwszych, i aby wykładniki tych czynników tworzyły między sobą szereg stosunków równych.

Jeżeli tym dwom warunkom zadosyć się stanie, ważność dla  $x$  będzie równa stałemu stosunkowi zachodzącemu pomiędzy wykładnikami.

Przypuśćmy powtórę, że  $a$  i  $b$  są liczby ułamkowe, i równe  $\frac{h}{h'}$ ;  $\frac{k}{k'}$ , zatem równanie  $a^m = b^n$  zamieni się na

$$\left(\frac{h}{h'}\right)^m = \left(\frac{k}{k'}\right)^n, \quad h^m k'^n = h'^m k^n.$$

Ponieważ  $h$  i  $h'$ ,  $k$  i  $k'$  mogą być zawsze uważane za pierwsze pomiędzy sobą, więc to samo będzie pomiędzy  $h^m$  i  $h'^m$ ,  $k^n$  i  $k'^n$ ; a zatem ażeby równość poprzedzająca mogła się utrzymać, potrzeba, aby było oddzielnie  $h^m = k^n$ ,  $h'^m = k'^n$ , co prowadzi do warunków podobnych powyższym, między licznikami i mianownikami, względnie pomiędzy sobą porównaniami.

208. *Przypadki szczególne.* 1o. Gdy  $a$  i  $b$ , są liczbami całkowitemi, a zawierają ieden tylko czynnik pierwszy;  $x$  koniecznie jest spółmierną ilością.

Niech będzie równanie  $4^x = 32$ ; równanie to zamieni się na  $2^{2x} = 2^5$ : skąd  $2x = 5$  czyli  $x = \frac{5}{2}$ .

Niech będzie jeszcze  $27^x = 2187$ , czyli  $3^{3x} = 3^7$ : mamy więc  $x = \frac{7}{3}$ .

2°. Gdy  $a$ , nie składa się z czynników pierwszych podniesionych do potęgi pierwszej, naówczas  $b$ , powinno być zupełną potęgą ilości  $a$ , jeżeli  $x$  ma być spółmierne: tak iż  $x$  w tym przypadku jest liczbą całkowitą, albo też niespółmierne.

Jakoż, niech będzie  $a = \alpha\beta\gamma\delta$ , skąd  $b = \alpha^{p'}\beta^{q'}\gamma^{r'}\delta^{s'}$ ; równanie  $a^m = b^n$ , zamieni się na

$$\alpha^m\beta^m\gamma^m\delta^m = \alpha^{p'n}\beta^{q'n}\gamma^{r'n}\delta^{s'n},$$

skąd wyprowadzimy  $m = p'n = q'n = r'n = s'n$  czyli  $p' = q' = r' = s'$ , więc

$$b = \alpha^{p'}\beta^{p'}\gamma^{p'}\delta^{p'} = (\alpha\beta\gamma\delta)^{p'} = a^{p'},$$

a tém samem  $x = p'$ .

Itak niech będzie  $a = 10 = 2 \times 5$ ; musi być  $b$  zupełną potęgą liczby 10, aby  $x$  było spółmierną ilością.

### Teorya Logarytmów.

209. *Wstęp.* Założywszy że w równaniu  $a^x = y$ ,  $a$  zatrzyma zawsze tę samą ważność,  $y$  zaś ma rozmaite, naówczas, będzie można za każdą ważnością wziętą dla  $y$ , wyznaczyć sposobem podanym w ustępie 206, ważność dla  $x$ , jeżeli niedokładną, to przynajmniej tak przybliżoną iak tylko zechcemy.

Założmy naprzód  $a > 1$ .

Wziąwszy następnie,  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots$ ,  
wypadnie  $y = a^0, (=1), a, a^2, a^3, a^4, a^5 \dots$ ;  
a zatem wszystkie wartości  $y$ , większe od jedności,  
są potęgami z ilości  $a$ , całkowitemi lub ułomko-  
wymi, wartość zaś dla  $x$  jest tym większa, im jest  
większa wartość dla  $y$ .

Czyniąc następnie  $x = 0, -1, -2, -3, -4, -5 \dots$ ,  
wypadnie  $y = a^0, (=1), \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4} \dots$

a zatem, wszystkie wartości dla  $y$ , mniejsze od ie-  
dności, są potęgami odjemnemi ilości  $a$ , wartość  
zaś odjemna  $x$ , tym jest liczebnie większa, im wię-  
cej wartość  $y$  zbliża się do zera.

Niech będzie przeciwnie,  $a < 1$  i równe ułom-  
kowi  $\frac{1}{a}$ ;

czyniąc  $x = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$ ,

otrzymamy  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^0$ , czyli  $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4} \dots$

Uczyniwszy  $x = 0, -1, -2, -3, -4, -5 \dots$

otrzymamy  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^5$  czyli  $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5 \dots$ ;

to jest, gdy  $a < 1$ , potęgi z ilości  $a$ , idą w porządku  
odwrotnym, względem potęg z téżże ilości, gdy  
 $a > 1$ .

Stąd ogólny wniosek: że wszystkie iakie tylko  
bydź mogą liczby bezwzględne, to jest takie, ia-

kiemi się trudnimy w arytmetyce; można uważać za utworzone z iakięjkolwiek liczby stałej, podnoszonej do właściwych potęg.

*Uwaga.* Zawsze potrzeba przypuszczać że  $a$  nie jest iednością, bo wszelka potęga z iedności równa się także iedności.

210. To założywszy, wystawmy sobie że ułożono tablice zawierające z iednéj strony wszystkie liczby całkowite, obok zaś tych liczb, *wykładniki potęg*, do których potrzebaby podnieść pewną liczbę *niezmienną*, aby utworzyć wszystkie owe liczby a mieć będziemy wyobrażenie tablic *logarytmowych*.

W ogólności nazywamy, *logarytmem liczby*, *wykładnik potęgi do której potrzeba podnieść pewną liczbę niezmienną*, aby otrzymać ową liczbę.

Liczba ta niezmienna może być wzięta dowolnie; (byleby była  $>$  lub  $< 1$ ), lecz raz obrana powinna zostać tą samą; liczbę takową zowiemy *zasadą* a lepijy będzie *podstawą* układu logarytmów (*basse*).

Jakąkolwiek obierzemy podstawę, *logarytmem podstawy* zawsze *jest iedność*, a *logarytmem iedności* *jest zero*.

Jakoż, mamy  $\log a^1 = 1$ ; skąd  $\log a = 1$ ,

$a^0 = 1$ ; skąd  $\log 1 = 0$ .

(Dla skrócenia oznacza się pospolicie wyraz logarytm, przez trzy pierwsze głoski *log*: albo też przez iedną głoskę *l*; którą kładą przed liczbą tą, której się bierze logarytm):

Zobaczmy teraz jaką mają własność tablice logarytmów, co do rachunków liczebnych.

211. *Mnożenie i dzielenie arytmetyczne.* Dajmy na to, że mamy liczby  $y, y', y'', y''' \dots$  rozmnożyć przez siebie. Oznaczmy przez  $a$ , podstawę układu logarytmów, (uważanych za już obliczone) zaś  $x, x', x'', x''' \dots$  logarytmy liczb  $y, y', y'', y''' \dots$

Podług definicyi (ustęp 210) mamy równania

$$y = a^x, y' = a^{x'}, y'' = a^{x''}, y''' = a^{x'''} \dots$$

Strony odpowiadające tych równań rozmnożywszy przez siebie, stosując prawidło ustępu 176, otrzymamy:

$$yy'y''y''' = a^{x+x'+x''+x'''+\dots}$$

$$\text{Więc log: } yy'y''y''' \dots = x + x' + x'' + x''' + \dots \\ = \log y + \log y' + \log y'' + \log y''' \dots;$$

to jest: że *logarytm iloczynu, równa się summie logarytmów, czynników tegoż iloczynu.*

Weźmy jeszcze dwie liczby  $y$  i  $y'$  z których pierwszą mamy podzielić przez drugą: logarytmy tych liczb niech będą  $x$  i  $x'$ : mamy równania

$$y = a^x; y' = a^{x'} \text{ skąd (ustęp 176) } \frac{y}{y'} = a^{x-x'}$$

$$\text{Więc, } \log \left( \frac{y}{y'} \right) = x - x' = \log y - \log y', \text{ to jest:}$$

*logarytm ilorazu równa się logarytmowi dzielnej, mnięj logarytmem dzielnika.*

*Z téj własności wypadają następujące wnioski.*

Aby wykonać mnożenie, potrzeba wzięte w tablicach logarytmy mnożnéj i mnożnika dodać, a suma logarytmów będzie logarytmem iloczynu, liczba

zaś w tablicach odpowiadająca temu logarytmowi, będzie szukany iloczynem, a tak przez proste dodawanie otrzymujemy wypadek mnożenia.

Podobnie mając jedną liczbę podzielić przez drugą, potrzeba od logarytmu dzielnicy, odjąć logarytm dzielnika, a wypadająca różnica będzie logarytmem ilorazu, liczba zaś odpowiadająca temu logarytmowi jest szukany ilorazem.

A tak przez proste odejmowanie otrzymujemy iloraz z dzielenia.

## 212. Formowanie potęg i wyciąganie pierwiastków.

Niech będzie liczba  $y$ , którą mamy podnieść do potęgi  $\frac{m}{n}$ , oznaczmy przez  $a$  podstawę, zaś przez  $x$  logarytm liczby  $y$ : mamy równanie  $y = a^x$ , podniosłszy obie strony równania do potęgi  $\frac{m}{n}$ ,

$$\text{otrzymamy} \quad y^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n} \cdot x}.$$

$$\text{więc} \quad \log y^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x = \frac{m}{n} \log y;$$

to jest: logarytm potęgi iakiegokolwiek liczby, równa się iloczynowi z logarytmu liczby, przez wykładnik potęgi.

Niech będzie w szczególnym przypadku,  $n = 1$ . Skąd wypada . . .  $\log y^m = m \cdot \log y$ : to równanie odpowiada powyższemu wystowieniu.

Niech teraz będzie  $m=1$ ,  $n$  iakjekolwiek; będzie

$$\log y^{\frac{1}{n}}, \text{ czyli } \log \sqrt[n]{y} = \frac{1}{n} \log y;$$

to iest logarytm pierwiastku iakiegokolwiek stopnia z liczby, równa się ilorazowi wynikłemu z podzielenia logarytmu téżże liczby, przez skażnik pierwiastku.

*Wnioski.* Aby otrzymać iakąkolwiek potęgę z liczby, potrzeba wziąć w tablicach logarytm téy liczby, i rozmnożyć go przez wykładnik potęgi, a liczba odpowiadająca temu logarytmowi będzie szukaną potęgą.

Podobnie, aby wyciągnąć pierwiastek z iakięjkolwiek liczby, potrzeba logarytm téy liczby podzielić przez skażnik pierwiastku, potem szukać w tablicach iakięy liczbie odpowiada ten iloraz, a znaleziona liczba będzie szukanym pierwiastkiem.

A tak, przez proste mnożenie lub dzielenie, otrzymujemy żądane potęgi lub pierwiastki, gdy tymczasem zwyczajne w tym razie sposoby działania z daleko większą pracą są połączone.

213. Własności wyżej okazane, nie zależą od żadnego szczególnego układu logarytmów, a zastósowane do praktyki wymagają tylko tablic logarytmowych, w których z iednéy strony znajdują się wszystkie liczby, z drugiéy logarytmy podług iednéy stałej podstawy obrachowane, odpowiadające tym liczbom.

Aby ułożyć takowe tablice, widzieliśmy wyżej, że potrzeba w równaniu  $a^x = y$ , dla  $y$  nadawać wszelkie ważności liczebne, i szukać w każdym razie wa-

żności odpowiadający dla  $x$ , podług sposobu ustępu 205.

Tablice których zwyczajnie używamy są te, w których podstawą logarytmów jest liczba 10, ich budowa polega na rozwiązaniu równania  $10^x = y$ . Czyniąc następnie  $y$  równie każdą z liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6... składających postęp arytmetyczny, którego wykładnik  $= 1$ , mamy rozwiązać równania

$$10^x = 1, 10^x = 2, 10^x = 3; 10^x = 4 \dots$$

Oprócz tego uważamy, że dosyć będzie podług sposobu (ustęp: 205.) obliczyć logarytmy liczb pierwszych 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,.... albowiem wszystkie inne liczby całkowite wypadną z rozmnożenia tych różnych czynników, i przeto otrzymamy logarytmy tych liczb, przez dodanie do siebie logarytmów czynników tych liczb.

I tak ponieważ 6 może być rozłożone na  $2 \times 3$ , więc  $\log 6 = \log 2 + \log 3$ , podobnież licz:  $24 = 2^3 \times 3$ , więc  $\log 24 = 3 \log 2 + \log 3$ .

Podobnież  $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$  zatem

$$\log 360 = 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 5.$$

Również dosyć było umieścić w tablicach logarytmy liczb całkowitych, albowiem na mocy własności (ustępu 211.) służący dzieleniu, otrzymamy logarytm liczby ułamkowej, odejmując logarytm dzielnika od logarytmu dzielny.

214. Mając ułożone tablice logarytmów, według pewnej podstawy, łatwo będzie ułożyć za ich pomocą tyle innych, ile zechcemy według innej podstawy.



Jakoż niech będzie  $a$  podstawą pierwszego układu już zrobionego,  $b$  podstawą nowego układu mającego się zrobić, oznaczmy przez  $N$  iakąkolwiek liczbę, zaś przez  $\log N$  i  $x$ , te dwa logarytmy obliczone

ne podług podstaw  $a$  i  $b$ : mamy równanie  $b^x = N$ . Biorąc logarytmy dwóch stron tego równania, w układzie którego podstawą jest  $a$ , otrzymamy

$$x \log b = \log N. \text{ Wi\k{e}c } x = \frac{\log N}{\log b}$$

ten wypadek oznacza, że mając logarytm liczby w pierwszym układzie, otrzymamy téżę liczby logarytm w drugim układzie, gdy podzielimy logarytm liczby obliczony w pierwszym układzie, przez logarytm nowéj podstawy, obliczony podług także pierwszego układu.

I tak ważność logarytmu liczby 4, w układzie według podstawy 3, jest  $\frac{\log 4}{\log 3}$ , gdzie  $\log 4$ , i  $\log 3$  mają być obliczone podług podstawy 10.

Niechay będą liczby  $N, N', N'', \dots$  a podstawa układu już obliczonego,  $b$  podstawa układu mającego się obliczyć, będziemy mieli równania

$$x = \frac{\log N}{\log b} = \frac{1}{\log b} \log N; x' = \frac{1}{\log b} \log N'; x'' = \frac{1}{\log b} \log N'' \dots;$$

skąd widzimy, że obliczywszy tablice logarytmów według pewnéj podstawy, gdy chcemy ułożyć nowe tablice według innéj podstawy, potrzeba mnożyć

logarytmy pierwszego układu przez ilość stałą  $\frac{1}{\log b}$ .

Ilość takowa stała, która służy do zamienienia logarytmów iednego układu na inny, zowie się *zamiennikiem* (Modulus).

### § III. Układ i użycie tablic zwyczajnych.

Lubo we wszystkich znaiomych tablicach, znajduie się na czele dzieła tłómaczenie, iakim sposobem te tablice są ułożone, i iak ich używać należy; iednakowoż nie będzie bez pożytku zastanowić się nad tą okolicznością.

Zakładamy że czytelnik ma pod ręką tablice Kallleta, ponieważ za pomocą tablic mniéy rozciągotych, nie można otrzymać wypadków dostatecznie dokładnych. Prawidła które wyłożymy, również się stosują do innych tablic logarytmowych.

215. Widzieliśmy (ustę: 208), że w układzie którego podstawą iest liczba 10, same tylko zupełne potęgi liczby 10, iakie są 100, 1000, 10000.... mogą mieć logarytmy spółmierne. Wszystkie inne liczby całkowite mają logarytmy nie spółmierne, a które można tylko otrzymać w pewnym stopniu przybliżone.

*Tablice Kallleta* zawierają te logarytmy wyrażone w ułómkach dziesiętnych, są zaś dokładne do 7még cyfry dziesiętnéy.

To założywszy, poznamy układ tablic pospolitych.

Czyniąc, w równaniu  $10^x = y$ ;

$$x=0, 1, 2, 3, 4, 5... n-1, n,$$

wypadnie

$$x=1, 10, 100, 1000, 10000, 100000... 10^{n-1}, 10^n.$$