

PRZYPISY TŁOMACZA.

Lubo teoryje wyłożone w tēn dziele zawierają, gruntowny i obszerny wykład Algiebry niższej, nie bez pożytku iednak będzie przyłączyć do nich kilka przypisow.

§ 1. I tak, na rozwiązywanie równań stopnia 1° z dwiema lub więcej niewiadomemi podane zostały trzy sposoby, z tych sposób przez odejmowanie słusznie ma pierwszeństwo nad innymi, do niego najwięcej zbliża się sposób czwarty, który tu w dodatku umieszczam.

Niech będą dwa równania z dwiema niewiadomemi

$$ax + by = p$$

$$x + y = q.$$

Przybierzmy ilość dowolną m , której nadawać możemy wszelkie wartości, i rozmnożmy przez m wyrazy któregośkolwiek z tych równań np. równania 2g^o, otrzymamy

$$ax + by = p,$$

$$mx + my = mq;$$

odejmiemy strony odpowiadające tych dwóch równań od siebie, będzie

$$ax - mx + by - my = p - mq; \text{ czyli}$$

$$x(a-m) + y(b-m) = p - mq \dots (1)$$

Ponieważ m ma wartość dowolną, uczynimy ją więc taką, aby ilość będąca w nawiasie była zerem:

to iest niech będzie $a - m = 0$,
zatem równanie pierwsze zamieni się na

$$y(b - m) = p - mq,$$

skąd $y = \frac{p - mq}{b - m}$, w téj ważności dla y , zamiast m
położmy ważność a , wziętą z równania $a - m = 0$,

otrzymamy $y = \frac{p - aq}{b - a}$; gdybyśmy chcieli otrzy-
mać ważność naprzód dla x , potrzebaby w równa-
niu (1) uczynić $b - m = 0$, otrzymalibyśmy

$$x = \frac{p - mq}{a - m}; \text{ zamiast } m \text{ położywszy } b$$

$$\text{otrzymamy } x = \frac{p - bq}{a - b}.$$

Weźmy ieszcze równania

$$ax + by = p$$

$$cx + dy = q$$

wyrazy równania pierwszego rozmnożmy przez ilość
 m , otrzymamy

$$amx + bmy = mp;$$

i odejmiemy wyrazy drugiego od otrzymanego, będzie

$$amx - cx + bmy - dy = mp - q \text{ czyli}$$

$$x(am - c) + y(bm - d) = mp - q \quad (!)$$

czyniąc $am - c = 0$, otrzymamy

$$y = \frac{mp - q}{bm - d}, \text{ zamiast } m \text{ położywszy } \frac{c}{a}, \text{ otrzyma-}$$

$$my \dots y = \frac{cp - aq}{bc - ad},$$

nadto w równaniu (1) czyniąc $bm - d = 0$, skąd

$$m = \frac{d}{b} \text{ otrzymamy } \dots x = \frac{dp - bq}{ad - bc}.$$

Uczyniwszy $a = 5; b = 7, p = 43,$

$c = 11; d = 9, q = 69,$

i położywszy te wartości w równania dla x i y , otrzymamy

$$y = \frac{11 \times 43 - 5 \times 69}{7 \times 11 - 5 \times 9} = \frac{120}{32} = 4$$

$$x = \frac{9 \times 43 - 7 \times 69}{5 \times 9 - 7 \times 11} = \frac{-96}{-32} = \frac{96}{32} = 3.$$

Wartości te otrzymaliśmy z równań w rozdziale

II. pod ustę: 51.

Weźmy jeszcze 3 równania z 3ma niewiadomymi

$$ax + by + cz + d = 0,$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

$$a''x + b''y + c''z + d'' = 0,$$

Ponieważ z każdego równania mamy wyrugować dwie niewiadome, potrzeba więc wprowadzić dwie nowe niewiadome, któreby nam dały prawo uczynienia dwóch warunków potrzebnych, mnożę więc pierwsze równanie przez niewiadomą m , drugie przez n ; i dodaję wyrazy trzech równań, będzie

$$(ma + na' + a'')x + (mb + nb' + b'')y + (mc + nc' + c'')z + md + nd' + d'' = 0.$$

chcąc wyrugować razem y i z , uczynimy

$$\left. \begin{aligned} mb + nb' + b'' &= 0 \\ mc + nc' + c'' &= 0 \end{aligned} \right\} (1).$$

zostaje $x = - \frac{md + nd' + d''}{ma + na' + a''} \dots \dots \dots (2).$

Dwa równania warunkowe pod (1) posłużą do wyznaczenia m i n ; aby je więc rozwiązać, mnożę pierwsze z nich przez p , i dodawszy, strony odpowiadające będzie

$$(pb + c)m + (pb' + c')n + pb'' + c'' = 0,$$

aby wyrugować n , uczynimy $pb + c = 0$

skąd $p = -\frac{c}{b}$, a zatem

$$m = -\frac{pb'' + c''}{pb + c} = \frac{c''b' + c'b''}{bc' - b'c};$$

aby wyrugować m , potrzeba uczynić $pb + c = 0$

skąd $p = -\frac{c}{b}$; $n = -\frac{pb'' + c''}{pb' + c'}$; wstawivszy zamiast p

iego wartość $\frac{c}{b}$; otrzymamy $n = \frac{cb'' - c''b}{bc' - b'c}$; zamiast

n i m wstawivszy ich wartości w równanie (2) otrzymamy

$$x = -\frac{c'b'a - c'b'd + cb'd' - c''bd' + c'bd'' - b'cd''}{cb'a - ac'b' + acb - a'bc' + a'be - a''cb'};$$

tym samym sposobem postępując, otrzymalibyśmy wartości dla y i z .

Pravidło ogólne. Niech będzie równań n , aby otrzymać wartość dla każdej z niewiadomych, potrzeba przybrać ilości niewyznaczonych $n-1$, przez

którą mnożąc tyleż równań, dodamy je do siebie wszystkie, chcąc zaś wyrzucić $n-1$ ilości w prowadzonych, uczynimy tyleż współczynników równych zero, co nam da $n-1$ równań warunkowych, które posłużą do wyznaczenia $n-1$ niewiadomych wprowadzonych ilości. Chcąc to $n-1$ równań rozwiązać, przyberzemy znowu $n-2$ ilości niewiadomych, przez które rozmnożywszy tyleż warunkowych równań i dodawszy wszystkie $n-1$ do siebie, wyprowadzimy tym co i przedtym sposobem $n-2$ równań warunkowych. Z tych znowu rozmnożywszy $n-3$, przez tyleż nowych wprowadzonych ilości, przyjdziemy do tyle nowych innych warunkowych równań, których liczba za każdym działaniem zmniejsza się jednością; aż na ostatek przyszedłszy do dwóch ostatnich równań, i ztemi podobnie postępując, otrzymamy ważności $n-1$ niewiadomych, któreśmy wprowadzili. Dla otrzymania zaś każdej niewiadomej, w równania podane wchodzącej, powtarzając te same działania, przyjdziemy do wyrażenia każdej w szczególności niewiadomej w ilościach wiadomych, naczem właśnie rozwiązanie równań zależy.

Sposób ten równie ma zalety z podanym sposobem pod ustęp. 51. albowiem używając go, podobnież nie wprowadzamy mianowników.

§ II. O Proporcyi Arytmetyczney i Geometryczney.

Tak są ważne wiadomości o proporcjach, że ich w tym dziełku pominąć nie możemy.

Zapewne Pan Burdon wyłożywszy własności proporcji w swojej Arytmetyce, dla tego je w dziele Algibry zupełnie opuścił. Lecz raz, że własności

dowiedzione na znakach ogólnych, moenięć nas przekonywają o pewności, *powtórę*, że własności proporcji ułatwiają bardzo wiele zrozumienie postępów; Teorią tę wyłożyć w tym dodatku osądziłem za rzecz istotnie potrzebną.

Wiadomo, że porównujemy dwie ilości jednej go gatunku w dwojakim względzie, albo żeby się dowiedzieć, o ile jedna przewyższa drugą, i natenczas jedną odeymuiemy od drugiey, a *stosunek* taki zowie się *arytmetyczny*, lub też chcemy się dowiedzieć, ile razy jedna jest większa od drugiey, natenczas jedną dzielimy przez drugą, *stosunek* zaś takowy zowie się *geometryczny*.

Równanie $a-b=c-d$ oznacza, że stosunek ilości a do b , równa się *stosunkowi* c do d ; cztery ilości a, b, c, d , w sposobie powyższym napisane czynią *proporcją arytmetyczną*.

Ponieważ w drugim razie dowiaduiemy się, ile razy jedna ilość jest większa od drugiey, przeto równość dwóch *stosunków geometrycznych* czyli *proporcją geometryczną* między ilościami a, b, c, d ,

można wyrazić tak $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$: zwyczajnie iednak tako-

wa proporcya oznacza się tak, $a : b = c : d$.

Cztery ilości składające proporcją zowią się *wyrazami*.

Oprócz tego wyrazy a i d są *skrajne*, b i c *średnie*, wyrazy a i b składają *pierwszy* a wyrazy c i d *drugi* *stosunek*.

Według wyrażenia $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ widzimy, że *poprze-*

dnik i następnik jest to samo, co *dzielna i dzielnik*, a *wykładnik stosunku* to samo, co *iloraz*.

Wyrazy więc dwóch ułamków równych czynią proporcją.

Proporcja $a-b=b-c$ jest *ciągłą arytmetyczną*; proporcją zaś $a : b = b : c$, czyli krócej $a : b : c$ jest *ciągłą geometryczną*, gdy w obu razach wyrazy średnie są równe.

O Proporcji Arytmetycznej

1wsze. W proporcji $a-b=b-c-d$, dodawszy po obu stronach b i d , otrzymamy $a+d=b+c$, to jest w proporcji *arytmetycznej* *summa* wyrazów skrajnych równa się *summie* wyrazów średnich, i na odwrot: W równaniu $a+d=c+b$ odiawszy w obydwóch stronach po d i b , otrzymamy

$$a - b = c = d$$

to jest: gdy *summa* dwóch ilości, równa się *summie* dwóch innych ilości, te 4ry ilości czynią proporcją *arytmetyczną*.

2re. Z własności pierwszy, która jest ogłoszona wypada, że w proporcji ciągłej *summa* skrajnych równa się *średniemu* dwa razy wziętemu.

I tak mając proporcją $a-b=b-c$, gdy dodamy po obu stronach po b i c , otrzymamy

$$a+c=2b$$

I na odwrot, ilość równająca się połowie summy dwóch innych jest między nimi *średnią arytmetycznie proporcjonalną*; i tak niech będzie $a+c=2b$ odiawszy po c i b po obu stronach; otrzymamy

$$a-b=b-c$$

3cie. W proporcji arytmetyczney wyraz czwarty równa się summie średnich, zmniejszonéj wyrazem pierwszym, i tak

$$a - b = c - x$$

$$\text{ponieważ } a + x = b + c$$

$$\text{więc } x = b + c - a.$$

Podobnie można okazać, że wyraz 3ci równa się summie skrajnych, zmniejszonéj wyrazem drugim i t. d.

4te Wyraz ostatni w proporcji arytmetyczney ciągłej równa się podwójnemu wyrazowi średniemu minus wyrazem pierwszym, i tak

$$a - b = b - x$$

$$a + x = 2b, \text{ skąd } x = 2b - a.$$

5te Wyraz średni arytmetycznie proporcjonalny równa się połowie summy dwóch wyrazów skrajnych, i tak

$$a - x = x - b$$

$$\text{skąd } 2x = a + b$$

$$x = \frac{a + b}{2}$$

O Proporcji geometryczney.

1e Proporcją $a:b=c:d$ wyraziwszy tak $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

i zniósłszy mianowniki, będzie $ad=cb$: skąd wypada, że w proporcji geometryczney iloczyn wyrazów skrajnych równa się iloczynowi wyrazów średnich; prawdę tę można jeszcze w ten sposób

okazać: dajmy na to, że $\frac{a}{b} = n$, a zatem będzie tak-

że $\frac{c}{d} = n$, w tych równaniach zniósłszy mianowniki,

będzie $a = bn$, $c = dn$, gdy więc w proporcji danej $a:b = c:d$ zamiast a i c położymy ich ważności będzie

$$bn:b = dn:d$$

$$\text{stąd zaś } bn \cdot d = b \cdot dn$$

$$\text{czyli } ad = bc.$$

I na odwrot. Z równania $ad = bc$ wypada $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

gdy iloczyn dwóch ilości równa się iloczynowi dwóch drugich, cztery czynniki uczynią proporcją geometryczną, wzięwszy dwa pierwszego iloczynu za skrajne, lub średnie, a dwa drugiego za średnie lub skrajne.

2re. W proporcji ciągłej iloczyn skrajnych równa się kwadratowi ze średniego i tak

$$a:b = b:c \text{ skąd } b^2 = ac.$$

I na odwrot gdy kwadrat jakowéy ilości równa się iloczynowi z dwóch innych, ilość ta jest *średnio geometrycznie proporcjonalną* między ilościami dwiema, z których powstał ten iloczyn: i tak, gdy $ac = b^2$, podzieliwszy obie strony przez bc , będzie

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \text{ to jest } a:b = b:c.$$

3cie Proporcją $a:b = c:d$ wyraziwszy w postaci

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ i rozmnożywszy tak licznik iak mianownik}$$

przez tę samą ilość, będzie

$$\frac{am}{bm} = \frac{cm}{dm}; \text{ czyli } am : bm = cm : dm.$$

to jest rozmnożywszy wszystkie wyrazy proporcji przez iednakową ilość, proporcya się nie zepsuie.

Gdy zaś tak liczniki iak mianowniki podzielimy przez m będzie

$$\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} = \frac{\frac{c}{m}}{\frac{d}{m}} \text{ czyli } \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{m} : \frac{d}{m},$$

to jest podzieliwszy wszystkie wyrazy proporcji przez iednakową ilość proporcya się nie zepsuie.

4te. Rozmnożywszy obie strony równania $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

przez n , będzie $\frac{an}{b} = \frac{cn}{d}$ czyli

$$an : b = cn : d \text{ to jest}$$

pomnożywszy następniiki przez iednakową ilość proporcya utrzyma się. To prawo służy i następnikom;

albowiem strony obiedwie równania $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ podzieliwszy przez n będzie

$$\frac{a}{bn} = \frac{c}{dn} \text{ czyli } a : bn = c : dn.$$

Podobniebyśmy okazali, że i w następniących ieszcze razach proporcya się utrzyma, to jest każdy poprzednik rozmnożywszy lub podzieliwszy przez iedną ilość, a każdy następnik przez drugą, albo poprzedniki

przedniki rozmnożywszy przez jedną ilość, a następniki podzieliwszy przez tę samą, lub inną ilość, zawsze otrzymane cztery wyrazy czynić będą proporcją.

5te Podzieliwszy obie strony równania $ad=cb$,

naprzód przez bd otrzymamy $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (1),

powtórze . . . cd $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (2),

potrzebie . . . ab $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (3),

poczwarte . . ac $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ (4).

Jeżeli jeszcze w równaniach . . . (1), (2), (3), (4), w miejsce strony pierwszey weźmiemy drugą, otrzymamy te cztery wypadki

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \quad (5)$$

$$\frac{b}{d} = \frac{a}{c} \quad (6)$$

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} \quad (7)$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (8)$$

- czyli
1. $a : b = c : d$ To jest można 8 razy
 2. $a : c = b : d$ odmienić wyrazy pro-
 3. $d : b = c : a$ porcyi.

$$4. d : c = b : a$$

$$5. c : d = a : b$$

$$6. b : d = a : c$$

$$7. c : a = d : b$$

$$8. b : a = d : c$$

6te. Niech będą dwie proporcye

$$a : b = c : d; m : p = q : r$$

skąd $ad = bc, mr = pq.$

Podzieliwszy strony pierwszego z tych równań przez odpowiadające strony równania drugiego, otrzy-

mamy $\frac{ad}{mr} = \frac{bc}{pq}$; teraz obie strony rozłożywszy na

czynniki, będzie

$$\frac{a}{m} \times \frac{d}{r} = \frac{b}{p} \times \frac{c}{q}$$

skąd $\frac{a}{m} : \frac{b}{p} = \frac{c}{q} : \frac{d}{r},$

to jest wyrazy iednéy proporcyi podzieliwszy przez wyrazy odpowiadające drugiey proporcyi, otrzymamy proporcya.

Nadto z proporcyy wyżej podanych wypadają następujące równania.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{m}{p} = \frac{q}{r}; \text{ strony odpowiadające tych równań}$$

rozmnóżywszy przez siebie, otrzymamy $\frac{am}{bp} = \frac{cq}{dr}$

skąd $am : bp = cq : dr$, to jest wyrazy iednéy proporcyi rozmnóżywszy przez odpowiadające wyra-

zy drugiéy proporcji, iloczyny składać będą proporcją więc w dwóch proporcjach

$$a:b=c:d; b:m=d:r \text{ będzie}$$

$$ab:mb=cd:dr;$$

Podzieliwszy wyrazy pierwszego stosunku przez b , drugiego przed d , otrzymamy $a:m=c:r$ to jest: w dwóch proporcjach wyrazy wspólne wypuściwszy; pozostałe uczynią proporcją.

7me Proporcją $a:b=c:d$ wyraziwszy tak

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; i w tém równaniu raz dodawszy po obu stronach lub odjąwszy po obu stronach, iakąkolwiek ilość m , skąd $\frac{a}{b} \pm m = \frac{c}{d} \pm m$, czyli przyłączając całość do ułamku,

$$\frac{a \pm bm}{b} = \frac{c \pm dm}{d}$$

będzie, gdy obie strony naprzód rozmnożymy przez b , potem podzieliwszy przez $c \pm dm$,

$$\frac{a \pm bm}{c \pm dm} = \frac{b}{d}. \text{ Ilość } m \text{ jest dowolna, uczyniwszy}$$

więc $m=1$, otrzymamy $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d}$, skąd wzięwszy osobno sumę, a osobno różnicę będzie

$$1^{\text{o}} \frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d},$$

$$2^{\text{re}} \frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d},$$

a że drugie strony są równe, nadto $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$

$$\text{więc 3cie } \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d},$$

$$\text{4te } \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c},$$

$$\text{5te } \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c},$$

$$\text{czyli (1) } a+b:c+d=b:d$$

$$(2) \quad a-b:c-d=b:d$$

$$(3) \quad a+b:c+d=a-b:c-d$$

$$(4) \quad a+b:c+d=a:c$$

$$(5) \quad a-b:c-d=a:c;$$

(1) i (4) porównywiąc ie z proporeyą $a:b=c:d$ wypada, że w každy proporeyi geometryczney summa dwóch pierwszych wyrazów, tak się ma do summy dwóch drugich wyrazów, iak następnik do następnika, lub iak poprzednik do poprzednika. Zaś z proporeyi (2) i (5) wypada, że różnica dwóch pierwszych wyrazów do różnicy dwóch dwóch drugich wyrazów iak poprzednik do poprzednika, lub iak następnik do następnika. Z proporeyi (3) wypada, że summa dwóch pierwszych wyrazów tak się ma do summy dwóch drugich wyrazów, iak różnica dwóch pierwszych, do różnicy dwóch drugich wyrazów.

8me W proporeyi $a:b=c:d$ odmieniwszy miéysce wyrażone, będzie $a:c=b:d$ czyli $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ w obu stronach tego równnania, raz dodawszy iakąkolwiek

ilość m , drugi raz odiawszy, i odbywszy działania iak powyżey, otrzymamy następujące proporeye

$$(1) \quad a+c:b+d=c:d$$

$$(2) \quad a-c:b-d=c:d$$

$$(3) \quad a+c:b+d=a-b:c-d$$

$$(4) \quad a+c:b+d=a:b$$

$$(5) \quad a-c:b-d=a:b$$

To iest: w każdéy proporcyi geometrycznéy

1od Summa poprzedników tak się ma do summy następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika.

2re Różnica poprzedników do różnicy następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika.

3cie Summa poprzedników, do summy następników, iak różnica poprzedników, do różnicy następników.

9te Weźmy trzy ułamki $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$ z tych

ułamków równych ułożymy proporeye

$$A:a=B:b$$

$$B:b=C:c$$

z pierwszéy, podług powyższego wypadu

$$A+B:a+b=Bb, \text{ a zatem}$$

$$\frac{A+B}{a+b} = \frac{B}{b}, \text{ a że } \frac{B}{b} = \frac{C}{c};$$

więc $\frac{A+B}{a+b} = \frac{C}{c}$; czyli

$A+B:a+b=C:c$ w proporcji téy wzięwszy sumę poprzedników i następników, będzie na mocy powyższego $A+B+C:a+b+c=C:c$

To iest: w trzech stosunkach równych, tak się ma summa poprzedników, do summy następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika. To samo twierdzenie tym samym sposobem dowodzi się dla większey liczby stosunków równych.

Okazemy ie ieszcze tym sposobem. Weźmy cztery stosunki równe.

$$\frac{A}{b} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d}$$

i ważność spólną każdego nazwiemy m , będzie

$$\frac{A}{a} = m, \frac{B}{b} = m, \frac{C}{c} = m, \frac{D}{d} = m.$$

W tych nowych równaniach zniosłszy mianowniki będzie

$$A=am, B=bm, C=cm, D=dm,$$

strony odpowiadające dodawszy do siebie będzie

$$A+B+C+D=am+bm+cm+dm$$

$$\text{czyli } A+B+C+D=m(a+b+c+d)$$

skąd $m = \frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}$; że zaś $\frac{A}{a} = m$ więc

$$\frac{A+B+C+D}{a+b+c+d} = \frac{A}{a}, \text{ a tém samém}$$

$$A+B+C+D:a+b+c+d=$$

$A:a$, co było do okazania.

10te Weźmy proporcya $a:b=c:d$ czyli $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,
 obie strony podniosłszy do 2giey, 3ciey, ntéy, potęgi

$$\text{będzie } \frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$$

$$\frac{a^3}{b^3}=\frac{c^3}{d^3}$$

$$\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$$

Stąd wypada, $a^2:b^2=c^2:d^2$

$$a^3:b^3=c^3:d^3$$

$$a^n:b^n=c^n:d^n$$

To iest: gdy cztery ilości czynią proporcya geometryczną, potęgi 2ie 3cie ... nte z tych ilości, czynić będą proporcya. I na odwrot gdy

$$a^2:b^2=c^2:d^2, \text{ czyli } \frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2};$$

będzie $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{c^2}{d^2}}$, to iest: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ czyli $a:b=c:d$,

to iest.....

Inne własności proporcji mogą być łatwo okazane za pomocą dwóch równań

$$ad=bc, \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ ułożonych według proporcji}$$

$a:b=c:d$, lecz w tém miejscu rozszerzać się dalej nie widzimy potrzeby.

Te same równania mogą służyć do znalezienia,

któregokolwiek wyrazu w proporcji tak zwyczajnéj iak ciągły, w ostatnim przypadku wyciągając pierwiastek kwadratowy.

§. III. Dopełnienie Teoryi o postępach.

Wyłożone wiadomości o postępach są dostateczne do rozwiązania wielu zagadnień, których gdy nasz Autor nie przytoczył, będzie właściwie tu, umieścić ich kilka.

Zadanie 1. Ile potrzeba wyrazów postępu liczb naturalnych, któreby uczyniły sumę 136?

Oznaczmy liczbę wyrazów przez n , a zatem S , to iest $136 = n \left(\frac{n+1}{2} \right)$.

Rozwiązawszy to równanie stopnia drugiego względem n otrzymamy $n=16$.

Zadanie 2. Ile trzeba wyrazów postępu liczb naturalnych, któreby uczyniły sumę 55. lub 171?

Odpowiedź 10 w pierwszym; 18 w drugim razie.

Zadanie 3. Dwie osoby wyjeżdżają razem na przeciwko siebie, jedną przed spotkaniem ujeżdża co dzień mil 10, druga zaś pierwszego dnia ujechała mil 5, drugiego 6. i t. d. codziennie jedną milą więcej, za ile dni ziada się? Szukane dni oznaczmy przez x , mile pierwszój osoby są $10x$, drugiej osoby są

$$5+6+7+8+\dots\dots 5+(x-1) = \left(\frac{9+x}{2} \right) x,$$

a zatem podług warunku będzie

$$\left(\frac{x+9}{2} \right) x = 10x; \text{ obie strony podzieliwszy przez } x,$$

będzie $\frac{x+9}{2}=10$, skąd $x=11$, to jest dnie szukane $=11$.

Droga pierwszój osoby $10x=110$.

Droga drugiej osoby $\left(\frac{x+9}{2}\right)x=110$.

Zagadnienie 3. Pierwsza osoba uieżdza co dzień po mil 8; druga pierwszego 6 mil, następnych co dzień iedną milę więcej, za ile dni spotkaią się?

(Odpowiedź: spotkaią się za dni 5).

Zagadnienie 4. Dwie osoby odległe o mil 164 iadą na przeciwko siebie, iedna uieżdza co dzień po 10 mil, druga pierwszego dnia uieżdza mil 7, drugiego 8, i tak dalej co dzień iedną milą więcej, kiedy się ziadą i po ile mil każda z tych osób uiedzie?

szukane dnie oznaczmy przez x ,

będzie droga pierwszój osoby $10x$.

Droga drugiej osoby

$$7 + 8 + 9 \dots 7 + (x-1) = \left(\frac{13+x}{2}\right)x.$$

A zatem przez obiedwie osoby droga uiechana będzie.

$$10x + \left(\frac{13+x}{2}\right)x,$$

i przeto $10x + \left(\frac{13+x}{2}\right)x = 164$, rozwiązawszy

takowe równanie będzie $x=8$.

(dni drogi $=8$),

Sprawdzenie. $x\left(\frac{13+x}{2}\right)+10x=80+84=164.$

Zagadnienie 5. Odległość dwóch osób jest 168 mil: pierwsza ujeżdża codzień 9 mil, druga dnia pierwszego mil 5, a dni następnych co dzień po 2 mil więcej. Za ile dni spotkają się, i jaką drogę każda z tych osób odbędzie?

Odpowiedź. dni 8.

Zagadnienie 6. Pewna osoba ma dochodu rocznego 100 dukatów, zamiast co by go miała łożyć na wydatki, oddaie na procent po 5%, za każdą razą, za którą go odbiera, i tak przymnaża co rok procentów, i te dukaty wbiia do kapitału. Za ile lat ta osoba przyidzie do kapitału 1225 dukatów?

Szukaną liczbę lat oznaczmy przez x , a zatem ta osoba odbierze 100 dukatów razy x , czyli $100x$.

Procent od summy odebraney na końcu roku pierwszego będzie za lat $x-1$, na końcu roku drugiego za lat $x-2$, więc summa będzie $x\left(\frac{x-1}{2}\right)$, a że procent po 5% więc podług warunków będzie $100x+5x\left(\frac{x-1}{2}\right)=1225$, rozwiązawszy będzie $x=10$.

Sprawdzenie. $100 \times 10 + \frac{50 \times 9}{2} = 1225.$

Zagadnienie 7. Dochód jest 300 dukatów procent 6%, którego rocznie przybywa iak wyżey, za ile lat osoba ta przyidzie do kapitału 2904?

Zadanie 8. Pewna osoba mająca 100,000 Złt. w dobrach, które ięy czynią tylko 4000, przypozyczka na początku każdego roku na różne wydatki po 6000. Złt. od których obowiąznie się płacić procentu po 10%.

Nie wypłaca ani kapitału, ani procentu co rok się pomnażającego, (iednakże nie płaci procentu od procentu) Za ile lat ta osoba będzie wyzuta z majątku? (Odpowiedz, za lat 10. miesięcy 6.)

Zadanie 9te. Majątek osoby iest 150000. z którego ma dochodu rocznego po 7000, wydaie zaś co rok po 12,000 zapożyczając się po 10%? za ile lat straci cały majątek.

§ IV Dowodzenie dwumianu Newtona

Lubo P: Burdon w swoiēy algiebrze dał dowodzenie dwumianu Newtona, iednakże okoliczność tak ważna zasługuie aby inne rozwinięcie, mające zaletę co do iasności i krótkości, podane w czwiczzeniach naukowych wraz z iego zastosowaniem przez tłumacza Statyki Monza, co dosłownie było tu umieszczone.

Dowód ogólny wzoru Newtona przez Dubourguet.

Wzór Newtona przez iednych Geometrów iest tylko szczególnie, przez drugich ogólnie dowiedziony: lecz pierwsi nie zaspakaiaią uczących się, drudzy przez subtelność rozumowań stają się dla nich albo trudni, albo nawet nieprzystępni. Mały krok w Matematyce wskazuje potrzebę użycia tego wzoru, kiedy upowszechnienia iego dówodu w głębszych ięy częściach szukać przychodzi. Aby więc przed stosowaniem tego wzoru mieć iego dowód ogólny, wyłożę ten