

Ilość takowa stała, która służy do zamienienia logarytmów iednego układu na inny, zowie się *zamiennikiem* (Modulus).

§ III. Układ i użycie tablic zwyczajnych.

Lubo we wszystkich znaiomych tablicach, znajduie się na czele dzieła tłómaczenie, iakim sposobem te tablice są ułożone, i iak ich używać należy; iednakowoż nie będzie bez pożytku zastanowić się nad tą okolicznością.

Zakładamy że czytelnik ma pod ręką tablice Kalleta, ponieważ za pomocą tablic mniéy rozciągotych, nie można otrzymać wypadków dostatecznie dokładnych. Prawidła które wyłożymy, również się stosują do innych tablic logarytmowych.

215. Widzieliśmy (ustę: 208), że w układzie którego podstawą iest liczba 10, same tylko zupełne potęgi liczby 10, iakie są 100, 1000, 10000.... mogą mieć logarytmy spółmierne. Wszystkie inne liczby całkowite mają logarytmy nie spółmierne, a które można tylko otrzymać w pewnym stopniu przybliżone.

Tablice Kalleta zawierają te logarytmy wyrażone w ułómkach dziesiętnych, są zaś dokładne do 7még cyfry dziesiętnéy.

To założywszy, poznamy układ tablic pospolitych.

Czyniąc, w równaniu $10^x = y$;

$$x=0, 1, 2, 3, 4, 5... n-1, n,$$

wypadnie

$$x=1, 10, 100, 1000, 10000, 100000... 10^{n-1}, 10^n.$$

Czyniąc potem

$$x=0, -1, -2, -3, -4 \dots -(n-1), -n,$$

otrzymamy

$$y=1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{10^{n-1}}, \frac{1}{10^n}$$

Więc 1° Logarytmy wszystkie liczb większych od jedności są *dodatne*, i powiększają się od zera, aż do liczby nieskończonej, logarytmy ułamków są *odjemne*, lecz ich wartość bezwzględna, jest tym większa, im ułamek jest mniejszy, tak że gdy ułamek jest mniejszy od wszelkiej ilości naznaczonej, logarytm jego będzie liczbą *odjemną*: *nieskończenie wielką*, okoliczność ta skróconym sposobem wyraża się mówiąc, *logarytmem zera jest ilość odjemna nieskończenie wielka*, czyli $\log 0 = -\infty$.

2re Uważając liczbę całkowitą z iedną, z dwóch, z trzech w ogólności z n cyfr złożoną, ponieważ ta liczba jest zawarta pomiędzy 1 i 10, 10 i 100...., 100 i 1000, w ogólności pomiędzy 10^{n-1} i 10^n , więc część całkowita iędy logarytmu jest 0, 1, 2, 3... $n-1$, to jest: że ta część całkowita zawiera tyle iedności mniej iedną, ile jest cyfr w liczbie. I tak, liczba 3749, jest zawarta pomiędzy 1000 i 10000, czyli pomiędzy 10^3 i 10^4 , więc część całkowita logarytmu będzie 3; co do ułamku, ten iak powiedzieliśmy wyżej, pospolicie jest obrócony na dziesiątą.

Część całkowitą nazwano *cechą logarytmu*, dla tego, że na samo spojrzenie okazuje, z ilu cyfr składać się powinna liczba odpowiadająca logarytmowi.

I tak, jeżeli *cecha* jest 5, wniesć można, że liczba odpowiadająca zawarta jest pomiędzy 10^5 i 10^6 , czyli, że się składa z sześciu cyfr.

Cecha zawiera w sobie tyle iedności mniej iedną, ile cyfr zawiera liczba.

216. Dodawszy 1, 2, 3, do cechy danego logarytmu, otrzymamy logarytm liczby 10, 100, 1000..., razy większy. Jakoż, mamy $\log(a \times 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n$; co dowodzi, że dosyć dodać n iedności do logarytmu a , ażeby mieć logarytm liczby 10^n razy większy od a ; dodawanie to ściąga się tylko do samej cechy logarytmu.

I na odwrót, mamy (ustęp 211)

$$\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n = \log a - n,$$

a zatem, aby otrzymać logarytm liczby 10^n razy mniejszy od liczby a , dosyć iest od samej cechy logarytmu a , odjąć n iedności; takowe odejmowanie ściąga się tylko do samej cechy logarytmu. Z tego to względu, układ logarytmów mających za podstawę liczbę 10, iest dogodniejszy od innych układów. Ponieważ często wydarza się potrzeba rozmnożyć lub podzielić przez 10, 100, 1000, więc te działania zamieniają się na proste dodawanie lub odejmowanie iedności.

Logarytmy ułomków dziesiętnych będą te same, wzięwszy cechę, co liczb całych, iakie otrzymamy, odrzuciwszy przecinek.

Użycie Tablic.

Ponieważ nie można było umieścić w tablicach logarytmy wszystkich liczb, więc pomieszczono tylko logarytmy liczb całkowitych, począwszy od iedności, aż do pewnej granicy, (Tablice Kalleta rozciągają się aż do 108000), lecz chcąc odbyć rachunek liczebny za pomocą logarytmów, potrzeba umieć rozwiązać te dwa zagadnienia; 1^{sz}e mając daną liczbę wyznaczyć iey logarytm, 2^{ie} mając dany loga-

rytm wyznaczyć liczbę odpowiadającą temu logarytmowi.

Oto sposoby rozwiązania tych zagadnień.

217. *Mając daną liczbę znaleźć ię logarytm?*

Weźmy naprzód liczbę całkowitą.

Jeżeli liczba dana nie przechodzi 108000, szukamy téj liczby w kolumnie oznaczonej przez N, a obok nię znajdziemy logarytm szukany.

Weźmy teraz liczbę 34735879, która przewyższa granice tablic.

Ponieważ ta liczba składa się z ośmiu cyfr, a zatem cecha ię logarytmu jest 7, więc pozostaie znaleźć cyfry dziesiętne składające drugą część szukanego logarytmu.

Z tego cośmy powiedzieli w ustępie 216, wypada, że część dziesiętna jest ta sama co logarytmu 34735,879.

Przez takowe przygotowanie, które polega na oddzieleniu od prawej ręki tyle cyfr, iżby pozostałe cyfry po lewej ręce znajdowały się w tablicach, otrzymamy liczbę zawartą pomiędzy 34735 a 34736, a zatem ię logarytm równa się $\log 34735$, więcęj pewną częścią różnicy zachodzącej pomiędzy $\log 34735$, i $\log 34736$.

Jest zaś podług tablic $\log 34735 = 5407673$ nie zważając na cechę.

Z tychże tablic otrzymamy różnicę pomiędzy $\log 34736$ i $\log 34735$, równą 125 iedności rzędu 7mę cyfry dziesiętne.

To założywszy, aby otrzymać część téj różnicy, która dodana do 5407673, da $\log 34735,879$, ułoży-

my takową proporcją: kiedy jedność iako różnica pomiędzy dwiema liczbami 34736 i 34735 daie na różnicę pomiędzy ich logarytmami 125 dziesięciomilionowych, iaka dla 0,879 iako różnicy pomiędzy 34735,879 a 34735, będzie różnica pomiędzy logarytmami? to iest:

$$1:125=0,879:x, \text{ i wypadnie}$$

$$x=125 \times 0,879=109,875;$$

i iloczyn 109,875 czyli blisko 110 dziesięcio milionowych oznacza ilość, którą dodać potrzeba do 5407673: i otrzymamy 5407783. A zatem logarytm liczby danej iest 7,5407783.

W praktyce tak się odbywa działanie:

Liczba dana, 34735879;

oddzieliwszy 3 znaki od prawej

ręki 34735,879

logarytm, 34735 = 5407673.

różnica pomiędzy dwoma nastę-

pniemi logarytmami 125

Różnica liczb 0,879

Iloczyn 109,875

dodać do logarytmu liczby 34735 110

Summa=5407783;

więc $\log 34735879 = 7,5407783$.

Weźmy na drugi przykład

liczbę 7054039;

oddzielając tylko dwa znaki . . 70540,39,

logarytm 70540 = 8484355;

różnica wzięta z tablic 62

różnica liczb 0,39

Iloczyn 24,18

dodać do $\log 70540$ 24

Summa = 8484379.

A że liczba dana zawiera 7 znaków,

więc $\log 7054039 = 6,8484379$.

Podobnież znaleźlibyśmy $\log 70004739 = 7,8451274$.

Uwaga. Aby rozwiązać poprzedzające zagadnienia, ułożyliśmy proporcją pomiędzy różnicami liczb, a różnicami ich logarytmów. Okażemy (ust: 233), że ta proporcja nie jest dokładna, lecz o tyle się zbliża do dokładnej, o ile liczby, dla których ułożono tę proporcję są wielkie. Zobaczymy, że używając tablic Kallęta, błąd zachodzi aż w 7ej cyfrze dziesiętnej, biorąc liczby większe od 10000

Dla tego to gdy liczba przewyższa granice tablic, trzeba iak można najmniey cyfr odcinać od prawej ręki.

Daymy na to że liczba jest ułomkowa.

Gdy liczba składa się z całkowitej i z ułamku, trzeba przyłączyć całość do ułamku, potem odjąć logarytm mianownika od logarytmu licznika.

I tak:

$$\log 359 \frac{27}{43} = \log \frac{15464}{43} = 4,1893218 - 1,6334685 = 2,5558533.$$

Gdy liczba jest ułamkiem, iéy logarytm będzie odjemny, i otrzymamy go odeymuiąc logarytm licznika od logarytmu mianownika, a przed wypadkiem dając znak—.

$$\text{I tak } \log \frac{7}{9} = -(\log 9 - \log 7) = -0,10914447.$$

Gdy liczba jest ułamkiem dziesiętnym, naprzód, opuszcza się przecinek, potem otrzymawszy logarytm nowéy liczby, odeymuie się od cechy logarytmu tyle iedności, ile jest cyfr dziesiętnych w ułamku danym.

Przykłady.

$$\begin{aligned} \log 75,47325 &= \log 7547325 - 5 = 1,8777931; \\ \log 0,0739 &= \log 739 - 4 = -(4 - \log 739) = -1,1313556; \\ \log 0,004734 &= \log 4734 - 6 = -(6 - \log 4734) = -2,3247717. \end{aligned}$$

Gdy liczba jest ułamkiem dziesiętnym peryo-dycznym, naprzód, potrzeba zamienić go na ułomek zwyczajny, a potem działać tak, iak powyżéy; i tak:

$$\log 37,375375... = \log 37 \frac{375}{999} = 1,5725856.$$

Podobnie,

$$\log 3,1430783078... = \log \frac{3142764}{999900} = 0,4973551.$$

218. Maiąc dany logarytm znaleźć liczbę od powiadaiącą temu logarytmowi?

Tu mogą być dwa przypadki, albo logarytm dany jest *dodatny*, albo *odjemny*.

Co do *pierwszego*, gdy jest dodatny a jego cecha jest 4 największą w tablicach, poszukamy tego logarytmu po między logarytmami liczb zawierających 5 cyfr, i może się zdarzyć, że ten logarytm znajdzie się w tablicach, w tym zaś razie znajdziemy obok, liczbę odpowiadającą temu logarytmowi.

Albo się ten logarytm znajdować będzie pomiędzy dwoma następnymi logarytmami, i w tym razie szukana liczba równa się liczbie mniejszej z tych dwóch, które odpowiadają tym logarytmom, więcej pewnym ułamkiem, który trzeba wyznaczyć przy najmniej przez *przybliżenie*.

Oznaczmy przez L logarytm dany, przez $\log N$ mniejszy z dwóch logarytmów po sobie następujących, i zawierających dany. Niech δ oznacza różnicę (wziętą z tablic) pomiędzy dwoma następnymi logarytmami, zaś δ' różnicę pomiędzy L i $\log N$: dla otrzymania szukanego ułamku ułożymy następującą proporcję.

Jeżeli dla δ , różnicy pomiędzy dwoma następującymi logarytmami, $\log N$ i $\log(N+1)$, mamy jedność na różnicę pomiędzy liczbami, iakoż dla δ' , różnicy pomiędzy L i $\log N$; będzie różnica pomiędzy liczbami,

$$\text{czyli} \quad \delta : 1 = \delta' : x = \frac{\delta'}{\delta};$$

a ważność wyrazu czwartego dodawszy do N , otrzymamy liczbę szukaną.

Okażemy później, że błąd *popelniony*, trzymając się téj proporcji nie wpływa nawet na *dziesięciomilio-*

nowe, liczby danéy, gdy ta jest większa od 10,000.

Przykłady. Niech będzie dany loga: 4,7325679, znajdziemy w tablicach mnięjszy z dwóch logarytmów, między któremi jest zawarty dany

logarytm 7325626

Różnica 53.

Liczba odpowiadająca logarytmowi 7325626 jest 54021, różnica pomiędzy $\log 54022$ i $\log 54021$ jest

81. Proporcya $81:1=53:x=\frac{53}{81}=0,65$ zbliżony o 0,01,

wiec $4,7325679 = \log 54021,65$.

Podobnie, znajdziemy $4,0794685 = \log 12007,94$
zblizony o 0,01.

Naprzód. Jeżeli logarytm jest dodatny, a jego cecha mniejsza od 4, trzeba naprzód przekonać się, czy znajduje się w tablicach, bo w tym razie zaraz mielibyśmy liczbę odpowiadającą temu logarytmowi.

Jeżeli się nie znajduie całkowicie, uczynimy na-
przód cechę równą 4, dodawszy stosowną liczbę
jedności (ażeby można było ułożyć proporcją, któ-
ra, jak powiedzieliśmy wyżej, w tenczas tylko
może być uważana za dokładną, gdy liczby są wię-
ksze od 10000): poszukamy liczby która odpowia-
da temu nowemu logarytmowi, a tę liczbę podzie-
limy przez 10, 100, 1000 ... podług dodania iedney
z liczb 1, 2, 3 ... do cechy.

I tak, niech będzie logarytm 2,4567398. Ten logarytm nie znajduje się całkowicie w tablicach, lecz do cechy jego dodawszy dwie jedności, otrzymamy $4,4567398 = \log 28624,63$ zbliżony o 0,01 więc (ustęp 216) . . . $2,4567398 = \log 286,2463$.

Podobnie znajdziemy $0,3472586 = \log 2,224634$, wypadek ten jest zbliżony 0,000001.

Jeżeli cecha danego logarytmu, przewyższa 4, natenczas przez odjęcie stosownej liczby iedności, uczynimy tę cechę równą cztery, i wyznaczymy liczbę odpowiadającą temu nowemu logarytmowi, rozmnożemy ją potem przez 10, 100, 1000 . . . jeżeliśmy odjęli 1, 2, 3, . . . iedności od cechy.

I tak, niech będzie dany logarytm 7,6840567. Odiąwszy od cechy trzy iedności, otrzymamy

$$4,6840567 = \log 48312,19; \text{ więc } \dots\dots\dots$$

$7,6840567 = \log 48312190$ zbliżony o iedność, (większego stopnia przybliżenia nie mogą dać tablice).

Niech będzie jeszcze 13,7412769 mamy $4,7412769 = \log 55115900000000$, zbliżony o iedną milionową.

Powtórę. Gdy logarytm dany jest odjemny, liczba odpowiadająca temu logarytmowi będzie ułomkiem, który możemy otrzymać bardzo przybliżony.

Niech będzie np. logarytm dany — 2,4537875, z samego weyrzenia na ten logarytm wnieść możemy, że liczba szukana jest zawarta pomiędzy 0,01 i 0,001 (zobacz ustęp 215).

Aby otrzymać ten ułomek dodamy 7 iedności do tego logarytmu to jest: odeymyśmy od 7,0000000 (celem tego przygotowania jest, aby cechę uczynić równą 4) otrzymamy

$$+ 7 - 2,4537875 = 4,5462125 = \log 35173,25;$$

lecz dodawszy 7 do cechy, rozmnożyliśmy liczbę przez 10000000, więc ażeby otrzymać prawdziwą wartość liczby szukanej, trzeba posunąć przecinek od prawej ku lewej ręce o 7 cyfr, i otrzymamy

$-2,4537875 = \log 0,003517325$ zbliżony o 0,000000001.

Uwaga. Częstość szukając liczby odpowiadającej logarytmowi odjemnemu, nie potrzeba układać proporcji, ponieważ liczba całkowita otrzymana według tablic, już jest w żądanym stopniu przybliżona.

Podług tych prawideł otrzymamy

$$-0,9817496 = \log 0,1042918,$$

$$-3,2781036 = \log 0,00052710.$$

Jest jeszcze inny sposób wyznaczenia liczby odpowiadającej logarytmowi odjemnemu, lecz ten sposób prowadzi do wypadku mniej dokładnego, iak poprzedzający.

Weźmy logarytm, $-2,4537875$, który na iedno wychodzi co $\log 1 - 2,4537875$, (ponieważ logarytm $1 = 0$).

Nazwawszy przez x , liczbę odpowiadającą tej $2,4537875$, otrzymamy $\log 1 - 2,4537875 =$

$$\log 1 - \log x = \log \left(\frac{1}{x} \right),$$

skąd wypada, że aby otrzymać żadaną liczbę, dosyć jest *podzielić iedność przez liczbę odpowiadającą logarytmowi, bez względu na iego znak*. A ponieważ x tylko w pewnym, a często w bardzo ograniczonem przybliżeniu może być wyznaczone; przeto także i iloraz z iedności przez tę liczbę częstość jest mało przybliżony; oprócz tego nie można z dokładnością wyznaczyć tego stopnia przybliżenia; ponieważ mianownik ułamku $\frac{1}{x}$ nie jest liczbą skończoną: iednakowoż używają niekiedy tego sposobu; zwłaszcza w zadaniach, które niewymagają wielkiej ścisłości, ponieważ jest naydogodniejszy.

219. *O dopełnieniach Arytmetycznych.*

Zdarza się w zastosowaniach logarytmów potrzeba znalezienia wypadku dodania i odjęcia kilku logarytmów. Ten wypadek można otrzymać przez samo dodawanie, a to sposobem dopełnień arytmetycznych.

Nazywamy *dopełnieniem arytmetycznem* logarytmu, liczbę, którą dodawszy do logarytmu, wypadnie 10, czyli różnicę między danym logarytmem i liczbą 10.

I tak dopełn: $3,4725843 = 10 - 3,4725843 = 6,5274157$, dopełnienie $2,7325490 = 10 - 2,7325490 = 7,2674510$.

Otrzymuje się dopełnienie, odejmując cyfrę pierwszą po prawej ręce od 10, a inne od 9.

Dopełnienie więc może być otrzymane, z samego weyrzenia na logarytm, lub za jego poddyktowaniem.

To założywszy, poznamy użytek dopełnień arytmetycznych.

Gdybyśmy mieli otrzymać wypadek liczebny wyrażenia $l - l' + l'' - l''' - l^{IV} + l^V -$ i t. d. w którym l, l', l'', \dots są logarytmy mające się dodać i odjąć między sobą.

Uważalibyśmy, że to wyrażenie może być tak napisane:

$$l + l'' + l^V + \overline{10 - l'} + \overline{10 - l'''} + \overline{10 - l^{IV}} - 30,$$

lub też

$$l + l'' + l^V + \text{dopeł: } l' + \text{dop: } l''' + \text{dop: } l^{IV} - 30$$

to jest, ażeby otrzymać wypadek szukany, *potrzeba uczynić sumę logarytmów dodatnich, i dopełnień*

logarytmów odjemnych, potem od téj summy odjąć tyle razy 10, ile było wziętych dopełnień.

Zwyczajnym sposobem potrzebaby uczynić sumę wyrazów dodatnich, i sumę wyrazów odjemnych, potem odjąć sumę mniejszą od większą, co by wymagało dwóch dodawań, i jednego odęymowania, gdy tymczasem za pomocą dopełnień, mamy tylko jedno dodawanie do wykonania, wyiawszy te działania, przez które biorą się dopełnienia, a które bez żadnég odbywają się trudności.

220. Użycie dopełnień daie początek pewnym logarytmom, które są bardzo wygodne w zastosowaniach.

Znajdźmy logarytm ułamku $\frac{7}{15}$.

$$\text{Mamy } \log \frac{7}{15} = \log 7 - \log 15 = \log 7 +$$

$$\text{dop: } \log 15 - 10,$$

$$\log 7 = 0,84509804$$

$$\text{dop: } \log 15 = 8,82390874$$

$$9,66900678$$

odjąwszy 10; będzie — 0,33099322

lub..... — 1.66900678.

Wypadek z dodania dopełni: $\log 15$ i $\log 7$ iest 9,66900678, od tego potrzeba odjąć 10, to uskutecznić można dwoma sposobami, albo ten wypadek odeymując od 10, i biorąc resztę ze znakiem mniej, albo odeymując tylko 10 od cechy 9, nie naruszając części dziesiętnéj, co da — 1.66900678, to iest, *logarytm którego cecha iest odjemna, a część dziesiętna dodatna.*

Aby takowy logarytm rozróżnić od logarytmu całkowicie odjemnego, kładzie się kropka w miejsce przecinka. Możeby było stósowniemy napisać tak.... — $1 + 0,66900678$, byłoby to albowiem prawdziwe wypadku znaczenie, lecz tamten sposób jest krótszy.

Otrzymujemy jeszcze takowe logarytmy, szukając logarytmu ułamku dziesiętnego.

Naprzykład, otrzymalibyśmy że $\log 0,00534 = 534 - 5 = 2,72754126 - 5 = -3.72754126$.

W krótkce zobaczymy, że użycie takowych logarytmów jest niekiedy korzystniejsze, a niżeli logarytmów całkowicie odjemnych.

A teraz nadtem tylko się zastanowimy:

1o. Że gdybyśmy mieli wyznaczyć liczbę odpowiadającą takowemu logarytmowi, proste dodanie, stósownej liczby jedności do cechy, byłoby dostateczne dla usposobienia logarytmu.

Niech będzie np. — 3.4720563 logarytm dany, dodawszy 7 jedności do cechy, otrzymamy $4,4720563$ logarytm cały dodatny, zaś liczbę odpowiadającą otrzymalibyśmy podług tego co było powiedziane pod ustę: 218. dzieląc ją przez 10000000 czyli przez 10^7 .

2re. Mając rozmnóżyc logarytm — 3.4720563 ,
 np: przez liczbę 8 8
 otrzymamy zaraz na część dziesiętną $3,7764504$
 a na cechę — 24
 wypadek zatem będzie — 21.7764504 .

3ie. Mając podzielić tenże logarytm przez 8. potrzeba, naprzód dodać do cechy tyle jedności odjemnych, ażeby można było wiać zupełnie 8mą część wy-

padku: a tak logarytmowi — 3.4720563 nadamy postać liczby — $8 + 5,4720563$, której część ósma jest $= 1.6840070$. W dalszym ciągu poznamy użycie tych działań.

§ IV. Zastosowanie Teoryi Logarytmów.

221. *Mnożenie i dzielenie.* Jaka jest ważność przybliżona iloczynu $\frac{31}{75} \times \frac{13}{12} \times \frac{47}{48}$.

iloczyn ten nazwiemy x , mamy (ustęp 211)

$$\log x = \log 31 - \log 75 + \log 13 - \log 12 + \log 47 - \log 48$$

$$\log 31 = 1,49136169,$$

$$\log 13 = 1,11394335,$$

$$\log 47 = 1,67209786,$$

$$\text{dop: } \log 75 = 8,12493874,$$

$$\text{dop: } \log 12 = 8,92081875,$$

$$\text{dop: } \log 48 = 8,31875876,$$

$$\text{— } 1.64191915 = 29,64191915 \text{ — } 30,$$

dodawszy . . 5

otrzymamy . . 4,6419191

$$4,6419102 = \log 43844.$$

$$\begin{array}{l} \text{Różnica . . .} \\ \text{Różnica z tablic} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 89 \\ 99 \end{array} \right\} \frac{89}{99} = 0,90.$$

więc iloczyn szukany jest 0,4384490, zbliżony o 0,0000001.

Tworzenie