

ROZDZIAŁ TRZECI.

Rozwiązanie zagadnień i równań stopnia drugiego.

78. **W**STEP. Gdy brzmienie zagadnienia prowadzi do równania w postaci $ax^2=b$, w którym niewiadoma jest rozmnożona przez siebie samą, takie równanie jest *stopnia drugiego*. Wiadomości poprzedzających rozdziałów nie są dostateczne, do rozwiązania takowych równań: lecz podzieliwszy

obie strony tego równania przez a , skąd $x^2=\frac{b}{a}$;

widzimy, że w tém podaniu idzie oto, *aby znaleźć liczbę, któraby rozmnożona sama przez siebie dała*

na iloczyn $\frac{b}{a}$; co właśnie jest przedmiotem wyciągania pierwiastku kwadratowego.

W arytmetyce podane są we wszelkich przypadkach sposoby wyciągania pierwiastku kwadratowego, tak z liczb całkowitych, iak ułamkowych, tu więc tylko pokażemy sposób wyciągania pierwiastku kwadratowego z ilości algebraicznych.

§. I. *Formowanie kwadratu i wyciąganie pierwiastku kwadratowego z ilości algebraicznych.*

79. Weźmy iednomian, i uważajmy iak się z niego tworzy kwadrat.

Podług prawideł namnożenia iednomianów otrzymamy,

$$(5a^2b^3c)^2 = 5a^2b^3c \times 5a^2b^3 = 25a^4b^6c^2,$$

więc aby iednomian podnieść do kwadratu, potrzeba współczynnik tej ilości podnieść do kwadratu, i podwoić wykładnik każdej głoski. A zatem, aby napowrót otrzymać pierwiastek z takowego kwadratu, potrzeba łód wyciągnąć pierwiastek kwadratowy ze współczynnika, podług prawideł podanych w Arytmetyce, 2^{re} każdej głosce dać wykładnik dwa razy mniejszy.

I tak: $\sqrt{64a^6b^4} = 8a^3b^2$, iakoż

$$(8a^3b^2)^2 = 8a^3b^2 \times 8a^3b^2 = 64a^6b^4.$$

Podobnie $\sqrt{625a^2b^3c^6} = 25ab^4c^3$ albowiem
 $(25ab^4c^3)^2 = 625a^2b^3c^6$.

Z poprzedzającego prawidła wypada, że aby iednomian był kwadratem z iednomianu potrzeba, aby współczynnik iego był zupełnym kwadratem, i wszystkie wykładniki były parzyste. A zatem $98ab^4$ nie iest zupełnym kwadratem, gdyż 98. nie iest zupełnym kwadratem, nadto a ma wykładnik nieparzysty.

W tym przypadku pisze się nad ilością znak $\sqrt{\quad}$, to iest $\sqrt{98ab^4}$ i takie ilości zowią się niespółmier-
nemi w ogólności, a pierwiastkowemi stopnia dru-
 giego w szczególności.

80. Można niekiedy uprościć wyrażenie pod znakiem pierwiastkowym na tej zasadzie, że pierwiastek kwadratowy iloczynu dwóch lub więcej czyn-

ników, równa się iloczynowi pierwiastków kwadratowych z tychże czynników, to jest:

$$\sqrt{abcd\dots} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{d}\dots$$

Dla udowodnienia tej zasady uważamy że,

$$(\sqrt{abcd\dots})^2 = abcd\dots$$

nadto

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}\dots)^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 \cdot (\sqrt{c})^2 \dots \\ = abc\dots$$

azatem, skoro kwadraty z \sqrt{abcd} , i $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{d}\dots$, są równe, więc same te ilości są między sobą także równe.

Według tego można wyrażenie powyższe $\sqrt{98ab^4}$ zamienić na $\sqrt{49b^4} \times \sqrt{2a} = \sqrt{49b^4} \times \sqrt{2a}$; a że

$$\sqrt{49b^4} = 7b^2; \text{ więc, } \sqrt{98ab^4} = 7b^2 \cdot \sqrt{2a}.$$

Podobnież

$$\sqrt{45a^2b^3c^2d} = \sqrt{9a^2b^2c^2 \times 5bd} = 3abc \cdot \sqrt{5bd},$$

$$\sqrt{864a^2b^5c^3} = \sqrt{144a^2b^4c^2 \times 6bc} = 12ab^2c^2 \sqrt{6bc}$$

W ogólności, aby uprościć iednomian niespółmierny, trzeba odłączyć wszystkie czynniki, które są zupełnemi kwadratami, wyciągnąć z nich pierwiastek (79), potem iloczyn z tych pierwiastków umieścić przed znakiem pierwiastkowym, pod którym zostały wszystkie czynniki nie będące zupełnemi kwadratami.

W wyrażeniach $7b^2 \sqrt{2a}$, $3abc \sqrt{5bd}$, i $12ab^2c^2 \sqrt{6bc}$, ilości te, $7b^2$, $3abc$, $12ab^2c^2$ zowią się spółczynnikami ilości pierwiastkowych.

81. Dotąd nie mieliśmy względu na znak znajdujący się przed iednomianem: a że w rozwiązy-

waniu zagadnień przychodzi się do ilości ze znakiem $+$ lub $-$; zastanówmy się przeto, nad tą okolicznością.

Ponieważ kwadrat z iednomianu, jest to iloczyn wypadający z rozmnożenia iednomianu samego przez się; więc gdy iakikolwiek będzie znak przed iednomianem, kwadrat z niego będzie dodatny: i tak kwadrat z $+5a^2b^3$ albo z $-5a^2b^3 = +25a^4b^6$.

Stąd także wypływa, że chociaż kwadrat ma znak dodatny; iego pierwiastek powinien mieć przed sobą znak $+$ lub $-$: i tak $\sqrt{9a^4} = \pm 3a^2$, bo $+3a^2$ albo $-3a^2$ podniesione do kwadratu uczyni $+9a^4$.

Podwójny znak \pm przed pierwiastkiem wymawia się *więcący lub mniący*.

Jeżeli dany iednomian jest *odiemny*, wyciąganie pierwiastku nie może być wykonane, bo widzieliśmy, że kwadrat z każdej ilości, czyli dodatney, czy odiemney, jest zawsze dodatny.

Więc $\sqrt{-9}$; $\sqrt{-4a^2}$; $\sqrt{-5}$, są to znaki algebiczne skazujące nam działania niepodobne do skuteczenia: nazywamy je *ilościami uroionemi*, iako znaki sprzeczności z prawdą, na które natrafiamy w rozwiązywaniu równań stopnia 2go, gdy te rzeczywiście nie mają pierwiastków.

Można częstokroć prościęcy wyrazić ilości uroione: i tak $\sqrt{-9}$ (podług ust. 80) zamieni się na

$\sqrt{9} \times \sqrt{-1}$ albo $3\sqrt{-1}$, podobnie

$\sqrt{-4a^2} = \sqrt{4a^2} \times \sqrt{-1} = 2a\sqrt{-1}$;

$\sqrt{-8a^2b} = \sqrt{4a^2} \times \sqrt{-2b} = 2a\sqrt{-2b} = 2a\sqrt{2b}\sqrt{-1}$.

82. Staraymy się teraz odkryć prawo formowania kwadratu z iakiegokolwiek wielomianu, a z tego prawa wywieść sposób wyciągania pierwiastku kwadratowego.

Widzieliśmy już (w ustępie 19), że kwadrat z dwumianu $a+b$, jest $a^2 + 2ab + b^2$. Dajmy na to, że potrzeba zrobić kwadrat z trójmianu $a+b+c$. Oznaczmy na chwilę $a+b$ przez iedną głoskę s : będzie

$$(a+b+c)^2 = (s+c)^2 = s^2 + 2sc + c^2:$$

a że,

$s^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $2sc = 2(a+b)c = 2ac + 2bc$; więc zamiast s przywróciwszy ważność, otrzymamy:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.$$

to jest, kwadrat z trójmianu, składa się z summy kwadratów z trzech wyrazów, i z podwoynych iloczynów z tychże wyrazów, to jest, pierwszego przez drugi, drugiego przez trzeci, i pierwszego przez trzeci.

To prawo składu służy dla wszelkiego wielomianu. Jakoż, przypuściwszy żeśmy ie sprawdzili na wielomianie o iluikolwiek wyrazach, zobaczymy czyli służyć będzie dla innego wielomianu, mającego ieden wyraz więcej.

Aby to okazać, niech będzie wielomian

$$a+b+c+d+\dots+i+k,$$

złożony z wyrazów $m+1$, oznaczmy summę wyrazów m przez: s to jest, niech będzie $a+b+c+d+\dots+i = s+k$, a zatem $(s+k)^2 = s^2 + 2sk + k^2$, w tym wyrażeniu zamiast s położywszy ważność, otrzymamy:

$$(s+k)^2 = (a+b+c+d+\dots+i)^2 + 2(a+b+c+d+\dots+i)k + k^2,$$

a ponieważ, według tego cośmy wyżey widzieli; pierwsza część tego wyrażenia składa się: z kwadratów ze wszystkich wyrazów, i z podwoynego iloczynu wszystkich wyrazów po dwa łączonych; druga część z podwoynych iloczynów, z wyrazów pierwszego

wielomianu, przez nowo przybrany wyraz k ; a trzecia część jest kwadratem z ilości przybraney k , więc prawo powyższe służy także wielomianowi nowemu, to jest, mającemu jeden wyraz więcej niż pierwszy wielomian.

Widzieliśmy, że to prawo służyło dla wielomianu o trzech wyrazach, więc także służy dla wielomianu o czterech, dla pięciu i tak następnie.

Prawo formowania kwadratu może być tak wysłowione:

Kwadrat z wielomianu, składa się z kwadratu z pierwszego wyrazu, więcej podwójnym iloczynem wyrazu pierwszego przez drugi, więcej kwadratem z drugiego wyrazu, więcej dwoma iloczynami, z dwóch pierwszych wyrazów przez trzeci, więcej kwadratem z wyrazu trzeciego, więcej podwójnym iloczynem każdego z trzech pierwszych wyrazów, przez wyraz czwarty, i t. d.

To prawo doprowadzi nas do wyciągania pierwiastku kwadratowego z wielomianu.

Podług tego prawa będzie:

$$\begin{aligned}(5a^3 - 4ab^2)^2 &= 25a^6 - 40a^4b^2 + 16a^2b^4, \\ (3a^2 - 2ab + 4b^2)^2 &= 9a^4 - 12a^3b + 4a^2b^2 + 24a^2b^2 \\ &\quad - 16ab^3 + 16b^4, \\ \text{czyli} &= 9a^4 - 12a^3b + 28a^2b^2 - 16ab^3 + 16b^4, \\ (5a^2b - 4abc + 6bc^2 - 3a^2c)^2 &= 25a^4b^2 - 40a^3b^2c \\ &\quad + 76a^2b^2c^2 - 48ab^2c^3 + 36b^2c^4 - 30a^4bc + 24a^3bc^2 \\ &\quad - 36a^2bc^3 + 9a^4c^2.\end{aligned}$$

Przejdźmy do wyciągania pierwiastku kwadratowego.

83. Oznaczmy przez N wielomian, z którego mamy wyciągnąć pierwiastek; przez R pierwiastek, który zrazu uważamy za znaleziony; uporządkujemy wyrazy wielomianu podług iednéj z iego głósek, np: podług głóski a .

W tak uporządkowanym wielomianie, postrzegam, że dwa pierwsze wyrazy mogą od razu dać pierwszy i drugi wyraz pierwiastku R. Jakoż podług prawa formowania kwadratu. *Pod kwadrat z pierwszego wyrazu pierwiastku R, zamyka wykładnik głoski a większy od któregokolwiek wykładnika w innych wyrazach kwadratu z R. 2re podwójny iloczyn pierwszego wyrazu pierwiastku R, przez drugi, zawiera wykładnik większy, niżeli następne kwadratu części.* Więc te dwie części są istotnie dwiema częściami wielomianu N, z których pierwsza ma największy wykładnik przy a, druga bezpośrednio mniejszy. Jeżeli więc wielomian N, jest zupełnym kwadratem; *Pod jego pierwszy wyraz powinien być kwadratem zupełnym, zaś jego pierwiastek wyciągniony podług sposobu (ust: 79), jest pierwszym wyrazem pierwiastku R, 2re jego drugi wyraz powinien być podzielny, przez podwójny wyraz, pierwszy pierwiastku R, i uskuteczniwszy takowe dzielenie, iloraz będzie drugim wyrazem pierwiastku R.*

Ażeby otrzymać dalsze wyrazy pierwiastku R, uczynimy kwadrat z dwumianu już wynalezionego, odejmiemy go od wielomianu N, a resztę oznaczwszy przez N' , ta reszta zamykać ieszcze będzie podwójne iloczyny, to jest: z pierwszego wyrazu pierwiastku R, przez wyraz trzeci, i z drugiego wyrazu pierwiastku R, przez wyraz trzeci, więcéy następnymi częściami. Lecz *podwójny iloczyn pierwszego wyrazu przez trzeci, powinien zamykać ilość a z wykładnikiem większym, iak inné następne części.* Ten podwójny iloczyn jest pierwszym wyrazem wielomianu N' , a zatem, powinien być podzielny przez podwójny wyraz pierwszy, wzięty z pierwiastku R, wykonawszy to dzielenie, iloraz będzie trzecim wyrazem pierwiastku R.

kwadrat od danego wielomianu, pozostałéj reszty pierwszym wyrazem będzie $40a^2b^2$, dzieląc ten wyraz, przez wyraz pierwszy $5a^2$ dwa razy wzięty, to jest przez $10a^2$; iloraz będzie $+4b^2$ i to jest trzeci wyraz pierwiastku, który piszę przy dwóch pierwszych pierwiastku. Zrobiwszy podwójny iloczyn z $5a^2 - 3ab$ przez $4b^2$, i kwadrat z $4b^2$, otrzymamy

$$40a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4.$$

Wielomian ten odjęty od pierwszéj reszty da na przypadek 0. A zatém, $5a^2 - 3ab + 4b^2$, jest pierwiastkiem szukany.

Uczniowie mogą się ćwiczyć na przykładach pod (liczbą 82).

84. Jeżeli wielomian dany zamyka kilka wyrazów z tym samym wykładnikiem głównéj głoski, potrzeba ułożyć wielomian iak się mówiło. w dzieleniu (ust. 29.) i zastosować sposób powyższy, uważając za jedną i tę samą część sumę algebraniczną wyrazów z tym samym wykładnikiem, i zastępując, w *wysłowieniu* *upr awidła*, te słowa *pierwszy wyraz wielomianu pierwszy wyraz reszty, pierwszy drugi... wyraz pierwiastku*; słowami, *pierwsza część wielomianu, lub część z największym wykładnikiem, pierwsza część reszty; 1a, 2ga, 3a,...* część pierwiastku.

Lecz rzadko natrafiamy na takie przykłady.

85. Ukończymy rzecz następującemi uwagami:

1^{sz}e Dwumian nie może być nigdy kwadratem zupełnym, ponieważ kwadrat z wielomianu najprostszego, to jest z dwumianu, składa się z trzech różnych części, które się nie dadzą przywieść do mniejszéj liczby wyrazów. I tak wyrażenie $a^2 + b^2$ nie jest kwadratem, braknie mu bowiem wyrazu $\pm 2ab$, aby był kwadratem z $a \pm b$.

2^{te} Ażeby tróymian był zupełnym kwadratem, dwa

iego wyrazy muszą być kwadratami, wyraz zaś trzeci podwójnym iloczynem pierwiastków z tychże kwadratów. Więc pierwiastek tróymianu może się wprost otrzymać przez sam rzut oka na wyrazy.

Oto prawidło. *Wyciągnąć pierwiastki z dwóch wyrazów które są zupełnemi kwadratami, i dać obu pierwiastkom albo te same znaki, albo znaki przeciwne, podług tego, czy trzeci wyraz jest dodatny, czy ujemny, następnie przekonać się, czy podwójny iloczyn z tych dwóch pierwiastków da trzeci wyraz tróymianu.*

I tak $9a^6 - 48a^4b^2 + 64a^2b^4$ jest kwadratem z $3a^3 - 8ab^2$ albowiem $3a^3 \times -16ab^2 = -48a^4b^2$

Zaś $4a^2 + 12ab - 9b^2$ nie jest zupełnym kwadratem, chociaż $4a^2$ i $9b^2$, są zupełnemi kwadratami z $2a$ i $3b$, i chociaż $12ab = 2a \times 6b$: albowiem $-9b^2$ nie jest kwadratem.

3cie Gdy w ciągu działania skazanego ogólnym sposobem, pierwszy wyraz reszty, nie jest zupełnie podzielny, przez podwójny pierwszy wyraz pierwiastku, można być pewnym, że wielomian dany nie jest zupełnym kwadratem. Jest to wniosek oczywisty sam przez się, według wyrozumowanego sposobu postępowania.

4te Nakoniec można zastosować do pierwiastków kwadratowych z wielomianów, które nie są zupełnemi kwadratami, uproszczenia ustępu 80.

Niech będzie np. wyrażenie $\sqrt{a^3b + 4a^2b^2 + 4ab^3}$

Jłość pod znakiem pierwiastku nie jest zupełnym kwadratem, lecz może być wyrażona w tej postaci:

$$ab(a^2 + 4ab + 4b^2)$$

tu widzimy, że czynnik w nawiasie jest kwadratem

z $a + 2b$: więc $\sqrt{a^3b + 4a^2b^2 + 4ab^3} = (a + 2b)\sqrt{ab}$

86. *Rachunek ilości pierwiastkowych drugiego stopnia.* Wyciąganie pierwiastku kwadratowego daje nowe wyrażenia algebriczne, np: \sqrt{a} , $3\sqrt{b}$, $7\sqrt{2}$, znane pod nazwiskiem *ilości pierwiastkowych drugiego stopnia*: mamy poznać prawidła odbywania czterech głównych działań z takowemi wyrażeniami.

Opisanie. Ilości pierwiastkowe zowiemy *podobnemi*, gdy mają tę samą ilość pod znakiem pierwiastku. I tak $3a\sqrt{b}$ i $5c\sqrt{b}$, tudzież $9\sqrt{2}$ i $7\sqrt{2}$ są ilości pierwiastkowe podobne.

Dodawanie i odejmowanie. Aby dodać lub odjąć od siebie ilości pierwiastkowe podobne, potrzeba dodać albo odjąć dwa współczynniki, a takowemu summie lub różnicy dać za spólny mnożnik ilość pierwiastkową.

$$\text{I tak } 3a\sqrt{b} + 5c\sqrt{b} = (3a + 5c)\sqrt{b},$$

$$\text{lub } 3a\sqrt{b} - 5c\sqrt{b} = (3a - 5c)\sqrt{b};$$

podobnie

$$7\sqrt{2a} + 3\sqrt{2a} = 10\sqrt{2a}; \quad 7\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 4\sqrt{2a}.$$

Mogą na pierwsze weyrzenie dwie ilości pierwiastkowe być nie podobne, lecz za pomocą uproszczenia (ustęp 80) można je uczynić podobnemi np:

$$\sqrt{48ab^2} + b\sqrt{75a} = 4b\sqrt{3a} + 5b\sqrt{3a} = 9b\sqrt{3a},$$

$$2\sqrt{45} - 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

Jeżeli ilości pierwiastkowe są niepodobne na ten czas tylko skazuje się dodawanie lub odejmowanie: i tak, aby dodać $3\sqrt{b}$ do $5\sqrt{a}$, dosyć jest napisać: $5\sqrt{a} + 3\sqrt{b}$.

Mnożenie. Aby rozmnożyć ilość pierwiastkową jedną przez drugą, mnożą się ilości pod znakiem pierwiastku przez siebie, a iloczyn wynikły pisze się pod znakiem pierwiastku np: $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

Jeżeli przy tém są spółczynniki, natenczas takowe mnożą się przez siebie, a iloczyn wynikły pisze się przed znakiem pierwiastku.

Dzielenie. Aby podzielić dwie ilości pierwiastkowe przez siebie; trzeba podzielić przez siebie dwie ilości pod znakiem pierwiastku będące, a iloraz napisać pod znakiem pierwiastku: podług tego

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}. \text{ Jakoż ponieważ kwadrat tak z pier-}$$

wszego iak z drugiego wyrażenia iest $\frac{a}{b}$; więc i te wyrażenia są równe. Jeżeli znajduią się ieszcze spółczynniki, potrzeba iloraz z nich dopisać iako spółczynnik ilości pierwiastkowej:

$$\text{I tak} \dots\dots 5a\sqrt{b} : 2b\sqrt{c} = \frac{5a}{5b}\sqrt{\frac{b}{c}};$$

$$12ac\sqrt{6bc} : 4c\sqrt{2b} = 3a\sqrt{\frac{6bc}{2b}} = 3a\sqrt{3c}$$

87. Są dwa przekształcenia używane w obliczaniu ilości pierwiastkowych.

Pierwsze polega na przeniesieniu spółczynnika ilości pierwiastkowej pod znak pierwiastku. I tak wyrażenie $3a\sqrt{5b}$, można zamienić na $\sqrt{9a^2} \times \sqrt{5b}$, czyli $\sqrt{9a^2 \times 5b} = \sqrt{45a^2b}$ bacząc na prawidło mnożenia ilości pierwiastkowych.

A tak, aby spółczynnik ilości pierwiastkowej przenieść pod znak pierwiastku, potrzeba ten spółczynnik podnieść do kwadratu, i napisać go pod znakiem.

Zastósowanie tego przekształcenia zachodzi w ten czas, kiedy potrzeba wyciągnąć pierwiastek przybli-

zony którego część całkowita, od razu znaleziona, byłaby dokładna.

I tak w wyrażeniu $6\sqrt{13}$; 13 nie jest zupełnym kwadratem, a pierwiastek z téj liczby jest 3 więcej iakiś ułomek, iloczyn zaś z tego pierwiastku rozmnożonego przez 6 jest 18 i pewny ułomek: aże część całkowita może być większa niż 18, więc sposób wyznaczenia dokładnie téj części całkowitej polega na tém, aby $6\sqrt{13}$ przywieść do postaci: $\sqrt{6^2 \cdot 13} = \sqrt{36 \times 13} = \sqrt{468}$: i teraz wyciągnąwszy pierwiastek z 468, otrzymamy 21, na całkowitą część pierwiastku, więc $6\sqrt{13} = 21$ więcej pewny ułomek. Podobnież znajdziemy że $12\sqrt{7} = 31$ więcej pewny ułomek.

Drugiego przekształcenia, zamiarem jest uczynić spółmiernymi mianowniki wyrażeń takich iak,

$$\frac{a}{p+\sqrt{q}}, \frac{a}{p-\sqrt{q}}; \text{ w których } a, p, \text{ są liczby cał-}$$

kowite iakiekolwiek, równie iak q które nie jest zupełnym kwadratem. Często się natrafia na takie wyrażenia w rozwiązywaniu zagadnień stopnia drugiego.

Dójdziemy do żądanego celu rozmnożywszy dwa wyrazy ułomku przez $p-\sqrt{q}$: ieżeli mianownik jest $p+\sqrt{q}$: rozmnożywszy zaś przez $p+\sqrt{q}$, ieżeli mianownik będzie $p-\sqrt{q}$.

I tak pamiętając, że summa dwóch ilości rozmnożona przez ich różnicę, daie na iloczyn różnicę kwadratów, otrzymamy w obecnym razie

$$\begin{aligned} \frac{a}{p+\sqrt{q}} &= \frac{a(p-\sqrt{q})}{(p+\sqrt{q})(p-\sqrt{q})} = \frac{a(p-\sqrt{q})}{p^2-q} = \frac{ap-a\sqrt{q}}{p^2-q}, \\ \frac{a}{p-\sqrt{q}} &= \frac{a(p+\sqrt{q})}{(p-\sqrt{q})(p+\sqrt{q})} = \frac{a(p+\sqrt{q})}{p^2-q} = \frac{ap+a\sqrt{q}}{p^2-q}. \end{aligned}$$

i teraz mianownik jest ilością spółmierną.

Aby dać wyobrażenie o korzyści z takowego przekształcenia, daymy na to, że trzeba znaleźć wa-

żność przybliżoną wyrażenia $\frac{7}{3-\sqrt{5}}$.

Wyrażenie to odmieni się, mnożąc licznik i mianownik przez $3+\sqrt{5}$, na $7\frac{(3+\sqrt{5})}{9-5}$ czyli na

$$\frac{21+7\sqrt{5}}{4}; \text{ a że } 7\sqrt{5} \text{ jest to samo co } \sqrt{49 \times 5},$$

albo $\sqrt{245}$, ilość, której wartość 15. jest dokładna po iedność.

A tak

$$\frac{7}{3-\sqrt{5}} = \frac{21+15+\text{ pewny ułomek}}{4} = \frac{36}{4} = 9;$$

wartość zbliżona do prawdziwej po $\frac{1}{4}$.

Jeżeliby potrzeba było mieć wartość więcej przybliżoną, dosyćby było obliczyć $\sqrt{245}$, po pewny stopień dokładności, dodać 21. do pierwiastku otrzymanego, potem podzielić wypadek przez 4. czyli wziąć jego czwartą część.

Weźmy na drugi przykład wyrażenie $\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$ i obliczmy jego wartość zbliżoną do prawdziwej po 0,01.

Będzie

$$\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{5}(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{11-3} = \frac{7\sqrt{55}-7\sqrt{15}}{8}$$

lecz

$$7\sqrt{55} = \sqrt{55 \times 49} = \sqrt{2695} = 51,91 \text{ blisko } 0,01$$

$$7\sqrt{15} = \sqrt{15 \times 49} = \sqrt{735} = 27,11 \dots, \text{ stąd}$$

$$\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11} + \sqrt{3}} = \frac{51,91 - 27,11}{8} = \frac{24,80}{8} = 3,10.$$

Wypadek żądany jest zatem 3,10, i zbliżony do do dokładnego po $\frac{1}{800}$, iak o tém łatwo się przekonać.

Podobnie postępując znaleźlibyśmy, że

$$\frac{3 + 2\sqrt{7}}{5\sqrt{12} - 6\sqrt{5}} = 2,123 \text{ wypadek do dokładnego zbliżo-}$$

ny po 0,001.

§. II. Zagadnienia i Równania drugiego stopnia.

88. Rozdzielamy równania stopnia drugiego na dwa gatunki, ieden równań z dwoma wyrazami, czyli nie zupełnych, drugi, równań z trzema wyrazami, czyli zupełnych.

Pierwszego gatunku są te równania, które zawierają wyrazy z ilością niewiadomą w stopniu drugim, i wyrazy wiadome, iako to:

$$3x^2 = 5 \text{ i } 4x^2 - 7 = 3x^2 + 9; \frac{1}{3}x^2 - 3 + \frac{5}{12}x^2 = \frac{7}{24} - x^2 + \frac{299}{24}$$

w ogólności zaś $ax^2 = b$. Jakoż uważając 3cie równanie które ma najwięcej wyrazów, zobaczymy, że zniósłszy mianowniki otrzymamy,

$$8x^2 - 72 + 10x^2 = 7 - 24x^2 + 299.$$

przeniósłszy zaś wyrazy niewiadome na jedną, a