

kwadratów danych, którą można rozłożyć na sumę pierwiastków kwadratowych, rozmnożoną przez ich różnicę.

*O dzieleniu Algebraiczném.*

22. Przedmiotem dzielenia algebraicznego, tak iak arytmetycznego jest: *maiąc iloczyn i ieden z dwóch czynników znaleźć drugi czynnik.*

Uważamy naprzód przypadek dwóch iednomianów. Gdy mamy podzielić  $72a^5$  przez  $8a^3$ , co wyrazimy tak:  $\frac{72a^5}{8a^3}$ ; szukamy trzeciéy ilości iednowyrazowéy któraby, rozmnożona przez drugą, dała na iloczyn pierwszą. A zatém podług prawideł wyłożonych na mnożenie iednomianów, ilość szukana powinna być taka, ażeby iéy spółczynnik rozmnożony przez 8, dał na iloczyn 72; nadto ażeby wykładnik głoski  $a$  w téy szukanéy ilości, dodany do wykładnika 3 głoski  $a$  będącéy w dzielniku, uczynił wykładnik 5, iak jest w dzielnéy: Otrzymamy zaś tę ilość dzieląc 72 przez 8, odeymuiąc wykładnik 3 od wykładnika 5, to iest:  $\frac{72a^5}{8a^3} = 9a^2$ . Jakoż

$$9a^2 \times 8a^3 = 72a^5.$$

Podobnym sposobem znajdziemy

$$\frac{35a^3b^2c}{7ab} = 5a^{3-1}b^{2-1}c = 5a^2bc. \text{ Jakoż}$$

$$5a^2bc \times 7ab = 35a^3b^2c.$$

A zatém aby podzielić dwa iednomiany przez siebie potrzeba 1° *Podzielić spółczynnik ieden przez drugi, 2° głoski spółne w dzielniku i dzielnéy na-*

pisać po spółczynniku, dając każdy wykładnik równy różnicy między wykładnikami w dzielnicy, a wykładnikami w dzielniku, 3° przepisać głoski ze swemi wykładnikami, które wchodziły tylko do saméj dzielnicy.

Na mocy tych prawideł otrzymamy:

$$\frac{48a^3b^3c^2d}{12ab^2c} = 4a^2bcd; \frac{150a^5b^3cd^3}{30a^3b^5d^2} = 5a^2b^3cd$$

23. Wypada z powyższego prawidła, że nie można wykonać dzielenia na iednomianach, *naprzód*, jeżeli spółczynniki nie są podzielne przez siebie: *potwóre*, jeżeli niektóre wykładniki są większe w dzielniku, a niżeli w dzielnicy; *potrzecie*, jeżeli dzielnik zamyka iedną, albo więcej głosek, które się nieznaydują w dzielnicy.

W którymkolwiek z tych trzech przypadków iloraz zatrzymuje postać ułamku, który często można uprościć.

Niech będzie np.  $12a^4b^2cd$  do podzielenia przez  $8a^2bc^2$ , iloraz nie może być ilością iednowyrazową całkowitą, to jest: ilością do którejby nie wchodził znak dzielenia, ponieważ 12 nie jest podzielne przez 8, a wykładnik głoski  $c$  w dzielnicy, jest mniejszy od wykładnika tejże głoski w dzielniku. Lecz ilorazowi  $\frac{12a^4b^2cd}{8a^2bc^2}$

można nadać prostszą postać, uważając, że czynniki 4,  $a^2$ ,  $b$ , i  $c$  znaydują się tak w liczniku iak w mianowniku, i że przeto można je opuścić: tym sposobem otrzymamy wypadek  $\frac{3a^2bd}{2c}$ .

W ogólności aby uprościć wyrażenie ułamkowe, którego licznik i mianownik są iednomianami potrzeba: 1° znieść *na największy czynnik spólny* dwom

spółczynnikom, 2° odjąć mniejszy z dwóch wykładników tej samej głoski od większego, a głosce przypisać wykładnik równy różnicy tych wykładników, w tym wyrazie ułamku w którym wykładnik był większy, 3° resztę innych głosek wraz ze swemi wykładnikami zostawić we właściwych wyrazach ułamku.

Według tego pravidła otrzymamy:

$$\frac{48a^3b^2cd^3}{36a^2b^3c^2de} = \frac{4ad^2}{3bce}; \frac{37ab^3c^5d}{6a^3bc^4d^2} = \frac{37b^2c}{6a^2d}; \frac{7a^2b}{14a^3b^2} = \frac{1}{2ab}$$

W ostatnim przykładzie ponieważ wszystkie czynniki dzielnéy, znajdują się w dzielniku, przeto licznik ilorazu będzie *jednością*, albowiem dzielenie w tym razie zależy na podzieleniu obu wyrazów ułamku przez licznik.

24. Często się wydarza, że wykładniki niektórych głosek są te same w dzielnéy co i w dzielniku. Niech np. będzie do podzielenia  $24a^3b^2$  przez  $8a^2b^2$ : ponieważ tu głoska  $b$  ma ten sam wykładnik, więc iloraz niepowinien iéy zawierać, i będzie  $\frac{24a^3b^2}{8a^2b^2} = 3a$ . Lecz wypadek  $3a$  może być wyrażony w postaci w której zatrzyma głoskę  $b$  chociaż ta niknie przez przywiedzenie.

Jakoż zastosowawszy do wyrażenia  $\frac{b^2}{b^2}$  pravidło na wykładniki (pod ustęp: 22); otrzymamy  $\frac{b^2}{b^2} = b^0$  a zatem  $3a = 3ab^0$ . To wyrażenie  $b^0$ , którego wartość jest 1, ponieważ  $\frac{b^2}{b^2} = 1$ , okazuje, że ilość  $b$  wchodziła do dzielnéy i do dzielnika, i że tylko przez przywiedzenie wyrazów, zniknęła z zadania.

Podobnie  $\frac{15a^2b^3c^3}{3a^2bc^2} = 5a^0b^2c^1 = 5b^2.$

W ogólności *wszelka ilość mająca za wykładnik 0, oznacza jedność*: i tak  $a^0 = 1$ .

Jakoż to wyrażenie pochodzi stąd, że ilość  $a$  ten sam wykładnik miała w dzielnym i w dzielniku skazanego dzielenia. A zatem  $a^0 = \frac{a^m}{a^m}$  gdzie  $m$  oznacza liczbę całkowitą będącą wykładnikiem ilości  $a$ . A że iloraz z ilości podzielony przez samą siebie równa się zawsze 1; więc  $\frac{a^m}{a^m} = 1$ , czyli  $a^0 = 1$ .

Powtarzamy, że wyrażenie  $a^0$  bywa używane w rachunku dla okazania śladu bytności głośki, która wchodziła w brzmienie podania, lecz która powinna zniknąć po wykonaniu dzielenia, potrzeba zaś często zachować ten ślad.

Wyprowadzimy teraz prawidło na znaki w dzieleniu. Jak w mnożeniu iloczyn dwóch wyrazów ze znakami równymi jest dodatny, a iloczyn dwóch wyrazów ze znakami różnymi jest odjemny; tak też w dzieleniu, 1° jeżeli dzielna i dzielnik mają znaki  $+$  iloraz ma znak  $+$  2° jeżeli dzielna ma znak  $+$  a dzielnik znak  $-$ ; iloraz powinien mieć znak  $-$ ; albowiem sam tylko znak  $-$  połączony przez mnożenie ze znakiem  $-$  dzielnika, może dać znak  $+$  w dzielnym; 3° jeżeli wyraz dzielny ma znak  $-$ , a wyraz dzielnika ma znak  $+$ , iloraz powinien mieć znak  $-$ . 4° jeżeli tak dzielnik jak dzielna mają znaki  $-$ ; iloraz powinien mieć znak  $+$ . Powyższe prawidło na znaki w ten sposób okazaniem być może.

Iloraz i dzielnik są dwiema częściami z których przez mnożenie powstać powinna podzielna; znaki więc ilorazu tak powinny odpowiadać znakom dziel-

nika, ażeby z nich w mnożeniu wypadły konieczne znaki podzielonej.

I tak mamy podzielić  $ab$  przez  $b$ , ponieważ dzielna  $ab$  ma znak dodatni, który niemógł powstać tylko zę znaków tychże samych, a zatem iloraz powinien mieć tenże sam znak iaki ma dzielnik, a zatem  $\frac{ab}{b} = a$  czyli ilość dodatnia podzielona przez dodatnią daie na iloraz ilość dodatnią.

Dla teyże samęj przyczyny dzieląc  $ab$  przez  $-b$ ; iloraz wypaść powinien  $-a$ .

Jeżeli zaś mamy  $-ab$  dzielić przez  $b$ , ponieważ  $-ab$  niemogło w mnożeniu powstać, tylko zę znaków przeciwnych, więc iloraz mieć powinien znak przeciwny znakowi będącemu przy dzielniku, a zatem:

$\frac{-ab}{b} = -a$ , to iest ilości zę znakami różnemi dzielone przez siebie daią iloraz zę znakiem odiebnym.

Nakoniec mając dzielić  $-ab$  przez  $-b$ , oczywiście podług dowodu powyższego, iloraz nie może mieć innego znaku iak  $+$  to iest  $\frac{-ab}{-b} = a$  (\*)

Owo zgoła: jeżeli dzielna i dzielnik, mają znaki równe, iloraz mieć będzie znak  $+$ , jeżeli zaś mają znaki różne, iloraz mieć będzie znak  $-$ . Mówi się ieszcze przez skrócenie;  $+$  podzielone przez  $+$ , i  $-$  podzielone przez  $-$  daią  $+$ ,  $-$  podzielone przez  $+$ , i  $+$  podzielone przez  $-$  daią  $-$ .

---

(\*) Tym sposobem Jan Sniadecki okazuje prawidło na znaki w dzieleniu algiebraiczném.

## POZNAJMY DZIELENIE DWÓCH WIELOMIANÓW.

25. Mamy do podzielenia  $51a^2b^2+10a^4-48a^3b-15b^4+4ab^3$  przez  $4ab-5a^2+3b^2$ .

To działanie wykonamy w następującym rozkładzie:

$$\begin{array}{r}
 51a^2b^2+10a^4-48a^3b-15b^4 \\
 +4ab^3 \\
 -8a^3b+10a^4-6a^2b^2 \\
 \hline
 57a^2b^2-40a^3b-15b^4+4ab^3 \\
 32a^2b^2-40a^3b+24ab^3 \\
 \hline
 25a^2b^2-15b^4-20ab^3 \\
 -20ab^3+25a^2b^2-15b^4 \\
 \hline
 0.
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4ab-5a^2+3b^2 \\ -2a^2+8ab-5b^2 \end{array}$$

(\*) Zamiarem tego działania iak powiedzieliśmy wyżej (ustęp 22) iest znaleźć trzeci wielomian, który rozmnożony przez drugi, da na iloczyn, wielomian pierwszy.

Z tego założenia i z prawidła (pod ustę: 17) na mnożenie wielomianów wypada: że *dzielną iest zebraniem przez dodawanie i przez przywiedzenie iloczynów cząstkowych z każdego wyrazu dzielnika przez każdy wyraz szukanego ilorazu*. Gdybyśmy zatem mogli odkryć w dzielny wyraz któryby pochodził (bez przywiedzenia) z rozmnożenia iednego z wyrazów dzielnika przez ieden z wyrazów ilorazu; natenczas dzieląc takowy wyraz dzielny przez takowy wyraz dzielnika, otrzymalibyśmy ieden wyraz ilorazu szukanego.

Lecz podług trzecięj uwagi (pod ustę: 18) wyraz  $10a^4$  mający głoskę  $a$  z największym wykładni-

---

(\*) W pisaniu iak czyni Burdon niegodzi się pisać fałszywych, za prawdziwe znaki. Otoż piszmy prawdziwe znaki, a tylko w myśli, według prawidła odejmowania zamieniamy znaki wyrazów odciąganych na przeciwnie.

kiem, pochodzi bez przywiedzenia, z rozmnożenia dwóch wyrazów dzielnika i ilorazu, mających największy wykładnik przy tężże głosce—. A zatem dzieląc  $10a^4$  przez wyraz  $-5a^2$  dzielnika, otrzymamy jeden wyraz ilorazu szukanego.

Ponieważ wyrazy  $10a^4$  i  $-5a^2$  mają znaki przeciwne, więc iloraz powinien mieć znak—; prócz tego  $10a^4$  podzielone przez  $5a^2$  daje  $2a^2$  (ustęp 22), a zatem  $-2a^2$ , jest wyrazem ilorazu szukanego—. Napisawszy więc go pod dzielnikiem, mnoży się każdy wyraz dzielnika, przez ten wyraz, potem odciaga się iloczyn  $-8a^3b + 10a^4 - 6a^2b^2$  od dzielny; to jest: przywodzą się wyrazy, a po tém pierwszym działaniu otrzymamy resztę

$$57a^2b^2 - 40a^3b - 15b^4 + 4ab^3.$$

Wypadek ten składa się z cząstkowych iloczynów, każdego wyrazu dzielnika, przez każdy mający być wyznaczonym wyraz ilorazu.

Można więc ten wypadek uważać za nową dzielną, i czynić rozumowanie nad nim, takie samo, iak nad dzielną. A zatem potrzeba w tym otrzymanym wypadku, wziąć wyraz  $-40a^3b$ , w którym ilość  $a$  ma największy wykładnik, i dzielić go przez wyraz dzielnika  $-5a^2$ . Lecz na mocy zasad poprzedzających  $-40a^3b$ , podzielone przez  $-5a^2$ , da iloraz  $+8ab$ , ten nowy wyraz pisze się po prawej stronie pierwszego, mnożąc każdy z wyrazów dzielnika przez ten wyraz, pisząc te iloczyny ze znakami właściwymi pod wyrazami dzielny drugi, potem przywiodłszy wyrazy, otrzymamy po tem drugim działaniu wypadek

$$25a^2b^2 - 15b^4 - 20ab^3;$$

dzieląc jeszcze  $25a^2b^2$  przez  $-5a^2$ , otrzymamy na iloraz  $-5b^2$ , wyraz ten będzie trzecim wyrazem ilo-

razu szukanego. Mnożąc wyrazy dzielnika przez ten wyraz znaleziony, napisawszy wyrazy iloczynu ze znakami właściwemi pod wyrazami dzielnicy, i przywiodłszy otrzymany 0 na wypadek. A zatem  $-2a^2 + 8ab - 5b^2$ , albo  $8ab - 2a^2 - 5b^2$ , jest szukanym ilorazem. Można to sprawdzić mnożąc dzielnik przez otrzymany iloraz, iloczyn powinien być równy podzielnicy.

Zastanawiając się nad poprzedzającym rozumowaniem, widzimy, że w każdym działaniu częściowym potrzeba szukać wyrazu mającego największy wykładnik przy iednocy głosce, i dzielić go przez wyraz dzielnika, w którym ta sama głoska ma największy wykładnik: unikniemy tego szukania, jeżeli zaraz z początku napiszemy wyrazy dzielnika i dzielnicy od lewicy ręki, w tym porządku, w jakim wykładniki teyże samey głoski maleją. Takowe napisanie zowie się uporządkowaniem dzielnicy i dzielnika, podług iednocy głoski. Po takowem przygotowaniu, pierwszy wyraz po lewicy ręce dzielnicy, dzieli się przez pierwszy wyraz po lewicy ręce dzielnika, aby otrzymać ieden z wyrazów ilorazu: podobnież pierwsze wyrazy zawsze się będą dzielić w następnych działaniach, ponieważ ilorazy częściowe, i iloczyny dzielnika przez te ilorazy, są ciągle porządkowane.

Oto wzór działania na przykładzie poprzedzającym, po uporządkowaniu obu wielomianów.

$$\begin{array}{r}
 10a^4 - 48a^3b + 51a^2b^2 + 4ab^3 - 15b^4 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} -5a^2 + 4ab + 3b^2 \\ -2a^2 + 8ab - 5b^2 \end{array} \\
 10a^4 - 8a^3b - 6a^2b^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \\
 \hline
 -40a^3b + 57a^2b^2 + 4ab^3 - 15b^4 \\
 -40a^3b + 32a^2b^2 + 24ab^3 \\
 \hline
 25a^2b^2 - 20ab^3 - 15b^4 \\
 25a^2b^2 - 20ab^3 - 15b^4 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$



26. Stąd wyprowadzimy następujące prawidło na dzielenie dwóch wielomianów.

Uporządkowawszy dzielną i dzielnik, podług iednégłoski, dziel pierwszy wyraz od lewéj ręki dzielnéj, przez pierwszy wyraz od lewéj ręki dzielnika, a otrzymasz pierwszy wyraz ilorazu: daléj mnoż dzielnik, przez ten otrzymamy wyraz ilorazu, a iloczyn wynikły odeymiy od dzielnéj danéj. Następnie dziel pierwszy wyraz reszty, przez pierwszy wyraz dzielnika, a otrzymasz drugi wyraz ilorazu: mnoż dzielnik przez ten drugi wyraz ilorazu, i odeymiy ten iloczyn od wypadku piérwszego działania. Tak postępuy daléj, póki nie otrzymasz na wypadek 0: co zawsze nastąpi, ieżeli wielomian dany iest podzielny przez drugi dany.

Gdy piérwszy wyraz dzielnéj uporządkowanéj nie iest zupełnie podzielny przez piérwszy wyraz dzielnika także uporządkowanego, iest to znakiem, że dzielenie zupełne nie może być wykonane, to iest: że nie masz wielomianu, któryby rozmnożony przez dzielnik, dał na iloczyn dzielną.

W ogólności, ieżeli piérwszy wyraz, którégokolwiek z dzielnych cząstkowych, nie iest podzielny przez piérwszy wyraz dzielnika, dzielenie zupełne nie może być wykonane.

27. Uważaymy w tém miejscu, że ieżeli iakie między dzieleniem arytmetyczném a dzieleniem algebraczném zachodzi podobieństwo, pod względem na sposób, iakim wykonywają się rachunki, to zarazem w tém różnią się istotnie, że w dzieleniu arytmetyczném cyfry ilorazu otrzymuią się nieiako przez próbowanie, gdy tymczasem w dzieleniu algebraczném, iloraz, który otrzymuiemy, dzieląc piérwszy wyraz dzielnéj cząstkowéj, przez piérwszy wyraz dzielnika, iest zawsze iednym z wyrazów ilorazu szukanego. Jeżeli te dwa wyrazy nie są podzielne przez

siebie; można zaraz wnieść, że dzielenia zupełnego wykonać nie można. Pod tém względem dzielenie algebraiczne jest prościejsze, aniżeli dzielenie arytmetyczne.

Nadto, nic nieprzeszkadza rozpocząć działanie od prawej ręki, zamiast od lewej, albowiem w tym razie działać będziemy z wyrazami, mającemi najmniejszy wykładnik przy téj głosce, podług którego uporządkowano wyrazy dzielny i dzielnika. W dzieleniu zaś arytmetycznem nie można otrzymać ilorazu, tylko zaezynaiać działanie od lewej ręki.

Nakoniec taka jest niezależność działań cząstkowych, iakie przedstawia sposób postępowania, że po odjęciu iloczynu z dzielnika przez pierwszy znaleziony wyraz ilorazu, od całkowitej dzielny; można w drugiem działaniu, dzielić przez siebie dwa wyrazy nowój dzielny i dzielnika, mające największy wykładnik przy głosce różnej od téj, którą z początku uważano, a wypadnie jeszcze jeden z wyrazów ilorazu, które zostają do wyznaczenia. Jeżeli zatrzymujemy tę samą głoskę, to dla tego, że nie masz przyczyny ją odmienić, i, że uporządkowawszy dwa wielomiany, podług pierwszój głoski, pierwsze wyrazy po lewej ręce w dzielniku i dzielny, są naydogodniejsze do dania wyrazu ilorazu; gdy tymczasem, odmieniając głoskę, potrzebaby znowu szukać wyrazów, mających największy wykładnik przy téj nowój głosce.

### *Drugi przykład.*

#### 28. Podzielić

$$\begin{array}{l} 21x^3y^2 + 25x^2y^3 + 68xy^4 - 40y^5 - 56x^5 - 18x^4y, \\ \text{przez } 5y^2 - 8x^2 - 6xy. \end{array}$$

Oto wzór działania, uporządkowawszy wyrazy względem  $y$ .

$$\begin{array}{r}
 -40y^5 + 68xy^4 + 25x^2y^3 \\
 + 21x^3y^2 - 18x^4y - 56x^5 \\
 -40y^5 + 48xy^4 + 64x^2y^3 \\
 \hline
 1^a \text{ reszta } 20xy^4 - 39x^2y^3 + 21x^3y^2 - 18x^4y - 56x^5 \\
 \quad 20xy^4 - 24x^2y^3 - 32x^3y^2 \\
 \hline
 2^a \text{ reszta } \dots -15x^2y^3 + 53x^3y^2 - 18x^4y - 56x^5 \\
 \quad -15x^2y^3 + 18x^3y^2 + 24x^4y \\
 \hline
 3^a \text{ reszta } \dots\dots\dots 35x^3y^2 - 42x^4y - 56x^5 \\
 \quad 35x^3y^2 - 42x^4y - 56x^5 \\
 \hline
 \text{reszta końcowa } \dots \quad 0
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} 5y^2 - 6xy - 8x^2 \\ -8y^3 + 4xy^2 - 3x^2y + 7x^3 \end{array} \right.$$

Ponieważ ważną jest rzeczą obeznać się z działaniami algebricznymi, a nadewszystko nabyć wprawy w szybkie działanie; rozbierzmy jeszcze ten ostatni przykład, i skażemy uproszczenia, które wypadnie uczynić.

$$\begin{array}{r}
 -40y^5 + 68xy^4 + 25x^2y^3 + 21x^3y^2 \\
 -18x^4y - 56x^5 \\
 \hline
 1^a \text{ reszta } 20xy^4 - 39x^2y^3 - 21x^3y^2 \\
 \quad 20xy^4 - 15x^2y^3 + 53x^3y^2 - 18x^4y \\
 \hline
 2^a \text{ reszta } \dots -15x^2y^3 + 53x^3y^2 - 18x^4y \\
 \quad -15x^2y^3 + 18x^3y^2 + 24x^4y \\
 \hline
 3^a \text{ reszta } \dots \quad 35x^3y^2 - 42x^4y - 56x^5 \\
 \quad 35x^3y^2 - 42x^4y - 56x^5 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} 5y^2 - 6xy - 8x^2 \\ -8y^3 + 4xy^2 - 3x^2y + 7x^3 \end{array} \right.$$

Naprzód dzieląc  $-40y^5$  przez  $5y^2$ , otrzymujemy na iloraz  $-8y^3$ . Mnożąc  $5y^2$  przez  $-8y^3$  mamy  $-40y^5$ , odmienić znak, będzie  $+40y^5$ , wyraz ten niszczy pierwszy wyraz dzielny.

Podobnie  $-6xy \times -8y^3$  czyni  $+48xy^4$  a dla odjęcia  $-48xy^4$ , to odjęte od  $68xy^4$  da resztę  $20xy^4$ .

Nakoniec  $-8x^2 \times -8y^3$  uczyni  $+64x^2y^3$  a dla odjęcia  $-64x^2y^3$ , to z wyrazem  $+25x^2y^3$  da  $-39x^2y^3$ .

Wypadek zatem pierwszego działania jest  $20xy^4 - 39x^2y^3$  więcéy następniemi wyrazami dzielnéy, które się nie przywiodły z wyrazami iloczynu częściowego już otrzymanemi. Z resztą będzie dosyć dla drugiego działania, napisać obok reszty  $20xy^4 - 39x^2y^3$  ten wyraz dzielnéy, który tuż następuje, oddzielając linijką tę nową dzielną od dzielnéy pierwszéy. Póśtępuje się z tą nową dzielną, tak iak z dzielną pierwszą, i tak następnie,

*Trzeci przykład.*

$$\begin{array}{r}
 \text{Mamy podzielić } 95a - 73a^2 + 56a^4 - 25 - 59a^3 \\
 \text{przez} \quad \quad \quad -3a^2 + 5 - 11a + 7a^3 \\
 \hline
 56a^4 - 59a^3 - 73a^2 + 95a - 25 \quad 7a^3 - 3a^2 - 11a + 5 \\
 \hline
 \text{1a reszta } -35a^3 + 15a^2 + 55a - 25 \quad 8a - 5 \\
 \hline
 \text{2a reszta} \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

29. Zdarzyć się może, że ieden z wielomianów, albo obadwa, zamykają kilka wyrazów, z tą samą potęgą głoski, względem której chcemy uporządkować wielomiany. Jak w tym przypadku urządzić wielomiany, i iak wykonać dzielenie?

Mamy podzielić

$$\begin{array}{r}
 11a^2b - 19abc + 10a^3 - 15a^2c + 3ab^2 + 15bc^2 - 5b^2c \\
 \text{przez} \dots\dots\dots 5a^2 + 3ab - 5bc.
 \end{array}$$

Widzimy, że dwa wyrazy  $11a^2b - 15a^2c$  mogą być wyrażone w postaci  $(11b - 15c)a^2$  albo

pisząc raz ieden potęgę  $a^2$ , i umieszczając po lewéy ręce w iednym rzędzie pionowym ilości, które mnożą tę potęgę, wielomian mnożnik nazywa się w tym razie spółczynnikiem potęgi  $a^2$ .

(Ten drugi sposób łączenia wyrazów, mających tę samą potęgę, jest lepszy od pierwszego. Że dwóch względów, 1° ponieważ; jeżeli znajduje się wiele wyrazów w dzielnicy i w dzielniku, trudno jest wszystkie umieścić na jednej linii poziomej. 2° Ponieważ współczynnik każdej potęgi, powinien być uporządkowany podług drugiej głoski, zatem trzeba, jeżeli pierwszy wyraz jest odjemny, sprawić jakąś zmianę między wyrazami, która może wprowadzić w błąd, używając pierwszego sposobu.

Niech będzie np: wyrażenie  $-15b^2a^2 + 7bca^2 - 8c^2a^2$ , skrócenie tu polega na wyrażeniu tego wielomianu w postaci  $-(15b-7bc+8c^2)a^2$  (ust: 15), w miejsce takiego wyrażenia, używając sposobu drugiego, napiszemy tak:  $-15b^2 \left| a^2 \right.$ , a tak w tym spo-

$$\begin{array}{r} +7bc \\ -8c^2 \end{array} \left| \right.$$

sobie możemy zachować znaki te same jakie miały wprzód te wyrazy.)

Również  $-19abc+3ab^2$  napisze się  $+3b^2 \left| a. \right.$   
 $-19bc \left| \right.$

To uczyniwszy, tak wykonamy działanie:

$$\begin{array}{r} 10a^3 + 11b \left| a^2 + 3b^2 \right. \left| a - 5b^2c + 15bc^2 \right. \left. \begin{array}{l} 5a^2 + 3ba - 5bc \\ 2a + b - 3c \end{array} \right. \\ \quad -15c \quad -19bc \\ \hline 1a \text{ reszta } 5b \left| a^2 + 3b^2 \right. \left| a - 5b^2c + 15bc^2 \right. \\ \quad -15c \quad -9bc \\ \hline 2a \text{ reszta } \dots \quad 0. \end{array}$$

Dzieląc  $10a^3$  przez  $5a^2$  mamy na iloraz  $2a$

Odiawszy iloczyn z dzielnika przez  $2a$ , otrzymamy pierwszą resztę. Dzieląc część mającą  $a^2$  w téj reszcie przez  $5a^2$ , mamy na iloraz  $b-3c$ . Mnożąc następnie każdą część dzielnika przez  $b-3c$  i odey-

muiać każdy takowy iloczyn, mamy na wypadek 0. A zatem  $2a + b - 3c$  jest szukany ilorazem.

Aby sposobem ogólnym okazać postępowanie w przykładzie poprzedzającym dzielenia, który jest nayzawikławszy, oznaczmy dzielną przez  $Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E$ , dzielnik przez  $A'a^2 + B'a + C'$ .

(Jest to sposób używany w Algjebrze, kiedy w podanie wchodzi wielka liczba ilości, naprzód oznaczając pewną ich liczbę przez głoski różne, a potem, żeby nie powiększać liczby głosek, oznaczać inne ilości takimiż głoskami, lecz kreskowanemi. Kreski <sup>'''</sup>wymawiają się z iedną, z dwiema, z trzema kreskami.)

W obu tych wielomianach, każdy ze spółczynników  $A, B, C, D, E, A', B', C'$ , oznacza zbiór wielu wyrazów. I tak  $Aa^4$  oznacza całą część dzielną, w którą wchodzi  $a^4$ ; i to samo rozumie się o innych wyrazach.

To założywszy, ponieważ w dzielną największy wykładnik głoski  $a$  jest 4, a w dzielniku 2, a zatem w ilorazie będzie wykładnik 2; iloraz zaś mieć będzie postać  $A''a^2 + B''a + C''$ .

Aby oznaczyć część tego ilorazu mającą najwyższy wykładnik, uważać potrzeba, że iloczyn dwóch części  $A'a^2$  i  $A''a^2$  nie przyymie żadnego przywiedzenia, z innemi iloczynami z dzielnika przez iloraz, a tém samém iloczyn z  $A'a^2$  przez  $A''a^2$ , powinien być równy części dzielną  $Aa^4$ , iako mającący najwyższą potęgę.

Więc na odwrót: podzieliwszy  $Aa^4$  przez  $A'a^2$ , otrzymamy na iloraz  $A''a^2$ , a zatem dosyć będzie podzielić  $A$  przez  $A'$  albowiem  $a^4$  podzielone przez  $a^2$  daje na iloraz  $a^2$ . Jeżeli  $A$  i  $A'$  są także wielomianami, mającemi iedną albo więcej głosek, potrzeba z niemi postąpić tak, iak mówiliśmy wyżej, to jest:

uporządkować je podług iednój z głosek, które w nie wchodzą. Dla tego powiedzieliśmy wyżej, że pisząc w iednój kolumnie wyrazy z tą samą potęgą, należy je uporządkować względem drugiey głoski: a nawet uporządkowalibyśmy je względem trzeciey głoski, gdyby kilka wyrazów zawierało drugą głoskę z tym samym wykładnikiem. Otrzymawszy część  $A''a^2$ ; mnoży się każda część dzielnika przez  $A''a^2$ , i odejmują się iloczyny cząstkowe: wypadek da pierwszą resztę, z którą postąpić należy, iak z daną dzielną.

Oto dwa nowe przykłady przypadku, nad którym się zastanawiamy, (starano się tu połączyć dzielenia cząstkowe których wymaga działanie główne):

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
 1^o. 12b^2 & a^3 + 23b^3 & a^2 + 10b^4 & a & 3b | a + 2b \\
 - 29bc & - 31b^2c & - 6b^2c^2 & & - 5c \\
 + 15c^2 & - 9bc^2 & & & \hline
 & + 15c^3 & & & 4b | a^2 + 5b^2 | a \\
 & & & & - 3c | - 3c^2 |
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r|l|l|l}
 1^a. \text{ reszta } & + 15b^3 & a^2 + 10b^4 & a \\
 & - 25b^2c & - 6b^2c^2 & \\
 & - 9bc^2 & & \\
 & + 15c^3 & &
 \end{array}$$


---

2<sup>a</sup>. reszta ... 0

*Pierwsze dzielenie cząstkowe.*

$$\begin{array}{r}
 12b^2 - 29bc + 15c^2 \quad \left. \begin{array}{l} 3b - 5c \\ - 9bc + 15c^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4b - 3c \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

*Drugie dzielenie cząstkowe.*

$$\begin{array}{r}
 15b^3 - 25b^2c - 9bc^2 + 15c^3 \quad \left. \begin{array}{l} 3b - 5c \\ - 9bc^2 + 15c^3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5b^2 - 3c^2 \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 2^\circ. 6b \overline{) a^4 - 7b^2} & a^3 - 3b^3 \\
 -10 \overline{) +23b} & +22b^2 \\
 & -20 \\
 & -31b \\
 & +5b \\
 & -5
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 3b \overline{) a + b^2 - 2b} \\
 -5 \overline{) 2a^3 - 3b \overline{) a^2 + 4b \overline{) a + 1}}}
 \end{array}
 \right.$$

$$\begin{array}{r|l}
 1^a \text{ reszta } -9b^2 & a^3 \\
 +27b & \\
 -20 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 2^ga \text{ reszta } & +12b^2 \overline{) a^2} \\
 & -23b \\
 & +5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 3^cia \text{ reszta } \dots & +3b \overline{) a + b - 2b} \\
 & -5
 \end{array}$$

$$4^ta \text{ reszta } \dots \dots \dots 0$$

Pierwsze dzielenie cząstkowe.

$$\begin{array}{r|l}
 6b - 10 \overline{) 3b - 5} \\
 0 & 2
 \end{array}$$

Drugie dzielenie cząstkowe.

$$\begin{array}{r|l}
 -9b^2 + 27b - 20 \overline{) 3b - 5} \\
 +12b - 20 \overline{) -3b + 4} \\
 0
 \end{array}$$

Trzecie dzielenie cząstkowe.

$$\begin{array}{r|l}
 12b^2 - 23b + 5 \overline{) 3b - 5} \\
 -3b + 5 \overline{) 4b - 1} \\
 0
 \end{array}$$

Czwarte dzielenie cząstkowe.

$$\begin{array}{r|l}
 3b - 5 \overline{) 3b - 5} \\
 1
 \end{array}$$



30. Jest jeszcze jeden bardzo ważny przypadek w dzieleniu algebricznym: *a ten jest, kiedy wielomian dzielny zamyka iedną albo więcéy głosek, które się nie znajduią w dzielniku.* — W tym przypadku, możnaby uporządkować dwa wielomiany względem iednéy z głosek, która się znajduje w obu wielomianach, i wykonać dzielenie, iak się wyżej namieniło. Lecz jest sposób daleko prostszy, otrzymania ilorazu. I tak, niech dzielna zawiera różne potęgi głoski *a*, która nie wchodzi do dzielnika (mówi się w takim razie, że *nie zależy* od téy głoski) uporządkowawszy dzielną względem *a*, można ją przyprowadzić do postaci  $Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E$ , gdzie przypuszczamy, że 4 jest największy wykładnik głoski *a* w tym wielomianie; a zaś *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, są iednomiany, albo wielomiany, które nie zawierają w sobie *a*. Niech znowu będzie dzielnikiem wielomian *M*, do którego nie wchodzi głoska *a*. W tym razie dzielnik powinien być wielomianem, mającym głoskę *a* z temi samemi potęgami, z iakimi też głoska *a* znajduje się w dzielnej. A zatem ten dzielnik może być wyrażony w postaci.

$A'a^4 + B'a^3 + C'a^2 + D'a + E'$ . Jeżeli zaś przypuścimy, że ten iloraz jest znaleziony, i rozmnóżywszy wszystkie wyrazy dzielnika przez każdą z tych części ilorazu  $A'a^4 + B'a^3 + C'a^2 + \dots$  otrzymamy iloczyn  $A'Ma^4 + B'Ma^3 + C'Ma^2 + \dots$  a że te nie mogą być przywiedzione, ponieważ głoska *a*, ma różne wykładniki, więc powinny być równe wyrazom  $Aa^4, Ba^3, Ca^2, Da, \dots$  A tak otrzymamy

$$A'M = A, \text{ stąd } A' = \frac{A}{M}$$

$$B'M = B, \text{ stąd } B' = \frac{B}{M}$$

$$C'M = C, \text{ stąd } C' = \frac{C}{M} \text{ i tak następnie}$$

Z tego wyprowadzimy to ogólne podanie.

Aby wielomian uporządkowany względem pewnej głoski, był zupełnie podzielny przez wielomian NIEZALEŻĄCY od tej głoski, potrzeba, ażeby każdy ze współczynników potęg pierwszego wielomianu, był zupełnie podzielny, przez odpowiadający współczynnik drugiego wielomianu.

Spółczynniki różnych potęg głoski w ilorazie, są to ilorazy wynikłe z podzielenia współczynników dzielnej, przez współczynniki dzielnika.

Niech będzie do podzielenia wielomian:

$$3a^2b^3 - 3abc^3 - 2b^3c^2 + b^5 - 3a^2bc^2 + 3ab^3c - a^2c^3 + bc^4 - a^2b^2c; \text{ przez } b^2 - c^2:$$

dzielną uporządkowaną względem  $a$  może być wyrażona w tej postaci.

$$(3b^3 + b^2c - 3bc^2 - c^3)a^2 + (3b^3c - 3bc^3)a + b^5 - 2b^3c^2 + bc^4$$

uskuteczniwszy trzy dzielenia cząstkowe oznaczone przez

$$\frac{3b^3 + b^2c - 3bc^2 - c^3}{b^2 - c^2}, \frac{3b^3c - 3bc^3}{b^2 - c^2}; \frac{b^5 - 2b^3c^2 + bc^4}{b^2 - c^2}$$

otrzymamy trzy ilorazy  $3b+c$ ;  $3bc$ ;  $b^3-bc^2$ ; a zatem cały iloraz będzie,  $(3b+c)a^2 + 3bca + b^3 - bc^2$

Dwa ostatnie ilorazy mogą się łatwiejszym sposobem otrzymać, uważając 1° że  $3b^3c - 3bc^3$  jest to samo co (ust: 21)  $3bc(b^2 - c^2)$ , powtóre, że  $b^5 - 2b^3c^2 + bc^4$  jest to samo co  $b(b^4 - 2b^2c^2 + c^4)$ , albo  $b(b^2 - c^2)^2$ , (pod ust: 19)

Uważamy, że lubo są prawidła ogólne, na uskuteczniienie działań, lecz te prawidła często mogą być uproszczone, nie zaniedbuemy zaś tych uproszczeń, skoro je można wprowadzić, bo właśnie wymaga ich duch języka algebraicznego.

31. Pomiedzy różnemi przykładami dzielenia algebraicznego, ieden dla swoich przystosowań zasługuje na szczególną uwagę. Przytrafia się on tak często w rozwiązywaniu zagadnień, że Algebraiści uczynili z niego nieiako twierdzenie.

Widzieliśmy (pod ust: 5 i 19) że  $(a+b)(a-b)$  daie na iloczyn  $a^2 - b^2$ ; i nawzajem  $a^2 - b^2$  podzielone przez  $a-b$ , daie na iloraz  $a+b$

Również dzieląc  $a^3 - b^3$  przez  $a-b$  otrzymamy iloraz zupełny  $a^2 + ab + b^2$ . Podobnież  $a^4 - b^4$  podzielone przez  $a-b$ , da na iloraz  $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ . Wypadki takowe otrzymamy wykonawszy dzielenie, podług zwyczajnego prawidła na dzielenie ilości algebraicznych. Porównyując takowe wypadki, można uczynić ten wniosek: że gdyby iakkolwiek wielki wykładnik miały głoski  $a$  i  $b$ ; możnaby zupełnie wykonać dzielenie; lecz podobieństwo do prawdy nie jest ścisłą pewnością.

Aby się więc dokładnie o tém przekonać, oznaczmy przez  $m$  wykładnik, i wykonamy dzielenie na ilości  $a^m - b^m$  dzieląc ją przez  $a-b$ .

$$\begin{array}{r} a^m - b^m \\ \hline 1sza\ reszta.... + a^m - {}^1b - bm \end{array} \Bigg\} \frac{a-b}{a^m - {}^1}$$

czyli  $b(a^m - {}^1 - b^m - {}^1)$  Jakoż dzieląc  $a^m$  przez  $a$ , otrzymamy na iloraz podług prawideł na wykładniki (ust: 22)  $a^{m-1}$ . Iloczyn z  $a-b$  przez  $a^{m-1}$  odiawszy od dzielney, otrzymamy na pierwszą resztę  $a^{m-1}b - bm$ , wyrażeniu temu można nadać kształt  $b(a^{m-1} - b^{m-1})$ . Stąd widzimy, że jeżeli  $a^{m-1} - b^{m-1}$  zupełnie jest podzielne przez  $a-b$  podobnież  $a^m - b^m$  będzie zupełnie podzielne.

To jest: jeżeli różnica potęg podobnych pewnego stopnia między dwiema ilościami, jest zupełnie podzielna przez różnicę samychże ilości; różnica tak-

że potęg o jeden stopień wyższych będzie także podzielna.

Jakoż  $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$  daie zupełny iloraz  $a + b$ , a zatem i

$\frac{a^3 - b^3}{a - b}$  daie na całkowity iloraz  $a^2 + b \frac{(a^2 - b^2)}{a - b}$  czyli

$a^2 + b(a + b)$  czyli  $a^2 + ab + b^2$ .

Podobnież  $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$  da na iloraz

$a^3 + b \frac{(a^3 - b^3)}{a - b}$  czyli  $a^3 + b(a^2 + ab + b^2)$  czyli

$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ .

W ogólności  $\frac{a^m - b^m}{a - b}$  da na iloraz całkowity i zupełny

$a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}$

Pewność tego twierdzenia gruntuie się na wiadomościach powyższych. Wykonawszy mnożenie

$(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1})(a - b)$

zobaczymy, że tylko same wyrazy  $a^m$  i  $-b^m$  nie zginą w przywiedzeniu. I tak mnożąc  $a^{m-2}b$  przez  $a$ , otrzymamy na iloczyn  $a^{m-1}b$ , lecz mnożąc  $a^{m-1}$  przez  $-b$ , otrzymamy na iloczyn  $-a^{m-1}b$ , wyraz ten zniszczy poprzedzający, gdyż są ze znakami przeciwnymi. To samo się stanie i z innymi wyrazami.

32. (Pod ustęp: 23, 26) podaliśmy główne cechy po których poznać się, że dzielenie jednomianów, lub wielomianów nie może się zupełnie uskutecznić, to iest: skazaliśmy przypadki, w których, nie znay-

duie się trzecia ilość algebriczna całkowita, któraby rozmnożona przez drugą dała na iloczyn pierwszą.

Podamy jeszcze, że co do wielomianów, można często z samego weyrzenia poznać, że niemogą być zupełnie podzielne przez siebie.

Gdy te dwa wielomiany zamykają dwie albo więcej głosek, potrzeba przed ich uporządkowaniem względem iednéj z dwóch głosek rzucić okiem na dwa wyrazy, dzielnéj i dzielnika, mające największe wykładniki przy każdéj głosce.

Jeżeli, co się tyczy iednéj z tych głosek, wyrazy mające największy wykładnik nie są podzielne przez siebie, można wnieść zaraz, że dzielenie zupełne nastąpić nie może. Uwagę tę przy każdym działaniu przypominać sobie należy.

Niech będzie  $12a^3 - 5a^2b + 7ab^2 - 11b^3$  do podzielenia przez  $4a^2 - 8ab + 3b^2$ . Mając wzgląd na głoskę  $a$ , zdawałoby się, że dzielenie da się wykonać lecz mając wzgląd na głoskę  $b$ , widzimy, że dzielenie nie da się wykonać, ponieważ  $11b^3$  nie jest podzielne przez  $3b^2$ .

Zakończymy tę rzecz następującemi uwagami:

1°. Wielomian nie może być nigdy podzielny przez wielomian drugi, zawierający w sobie głoskę, która się nie znayduje w dzielnéj: albowiem być nie może, ażeby trzecia ilość rozmnożona przez drugą, zależącą od pewnéj głoski, dała iloczyn niezależący od tejże głoski.

2°. Jednomian nie może być podzielny przez wielomian: ponieważ (ust: 18) każdy wielomian, mnożony przez drugi, daje na iloczyn przynajmniej dwa wyrazy, które nie mogą być przywiedzione do iednego.

3°. Wielomian może być podzielny przez jednomian tylko w ten czas, kiedy ten ostatni dzieli zupeł-

nie każdy wyraz pierwszego, a iloraz otrzymuje się, wykrywając czynnik spólny wszystkim wyrazom.

*O ułamkach algebraicznych*

*i o największym spólnym dzielniku.*

33. Takie samo należy mieć wyobrażenie o ułamku algebraicznym, iakie mamy o ułamkach arytmetycznych np:  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{11}{12}$ ....., to jest: że całość uważa się

za podzielną na tyle równych części, ile jest jedności w mianowniku, (Mianownik może być wielomianem, albo wielomianem), i że się bierze tyle tych jedności, ile ich licznik skazuje. A zatem prawidła dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia ułamków w Arytmetyce wyłożone, służą także dla ułamków algebraicznych. Zawsze jednak w zastosowaniu tych prawideł, pamiętać należy o sposobach odbywania działań z ilościami algebraicznymi całkowitemi, czy to jednowyrazowemi, czy też wielomianami. A zatem byłoby rzeczą zbyteczną zastanawiać się tu nad działaniami ze samymi ułamkami algebraicznymi, zwłaszcza, że w dalszym ciągu mieć będziemy dosyć sposobności, obeznania się z działaniami tego rodzaju.

*Przywodzenie ułamków algebraicznych, dla krótszego ich wyrażenia, zasługuje na szczególną uwagę.*

Jeżeli dzielenia jednomianu lub wielomianu nie można zupełnie, to jest, bez reszty skutecznie, wówczas skazujemy je znakiem wiadomym, i iloraz wyraża się w postaci ułamku, który nauczyliśmy się (pod ust: 23) skracać. Co do wyrażen wielomianów ułamkowych, przytoczymy niektóre przypadki, w których łatwe skrócenie da się wykonać.

Niech