

ROZDZIAŁ VI.

Teorya Postępów i Logarytmów.§ 1. *O postępach Arytmetycznych i Geometrycznych.**Postępy Arytmetyczne.*

189. Nazywamy *postępem Arytmetycznym* szereg wyrazów, z których każdy przewyższa poprzedzający, albo jest przewyższony od poprzedzającego, ilością zawsze stałą, którą nazywamy *wykładnikiem*. Niech będą dwa szeregi.

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25.....

60, 56, 52, 48, 44, 40, 36, 32, 28.....

Pierwszy nazywa się *postępem rosnącym*, i jego *wykładnikiem* jest 3, drugi *postępem malejącym*, a jego *wykładnikiem* jest 4.

W ogólności oznaczmy przez a, b, c, d, e, f, \dots , wyrazy postępu arytmetycznego: zgodzono się wyrażać go tak: $\div a. b. c. d. e. f. g. h. i. k \dots \div$, (niektórzy między wyrazami dają znak —) a czytać tym sposobem: *tak się ma a do b, iak b do c, iak c do d, iak d do e....* albo dla skrócenia, *a do b do c, iak d, do e, do f....* Jest to szereg *proporcji arytmetycznych ciągłych*, w którym każdy wyraz jest zarazem *następnikiem* i *poprzednikiem*, wyjąwszy wyraz pierwszy, który jest tylko *poprzednikiem* i wyraz ostatni, który jest tylko *następnikiem*.

190. Oznaczmy przez r *wykładnik* postępu, uważanego za rosnący. Jeżeli postępek będzie malejący, dosyć będzie r zamienić w wypadkach otrzymanych na $-r$. To założywszy, będzie,

$$b=a+r; c=b+r=a+2r; d=c+r=a+3r \dots;$$

W ogólności, którykolwiek wyraz postępu, *rowna się pierwszemu, powiększonemu wykładnikiem postępu tyle razy wziętym, ile go wyrazów poprzedza*. A zatem nazwawszy wyraz ostatni postępu przez l , liczbę wszystkich wyrazów przez n ; będzie wyraz ostatni $l=a+(n-1)r$.

Jakoż uczyniwszy następnie $n = 1, 2, 3, 4 \dots$, znajdziemy pierwszy, drugi, trzeci, . . . wyraz postępu.

Jeżeliby był postępek malejący, mielibyśmy przeciwnie $l=a-(n-1)r$.

Formuła $l=a+(n-1)r$, służy do wyrażenia iakiegokolwiek wyrazu w postępie; bez niej musielibyśmy oznaczyć wszystkie następne wyrazy, poprzedzające wyraz szukany.

I tak gdyby potrzeba było znaleźć wyraz 50ty postępu $\div 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. \dots$

Otrzymalibyśmy go, uczyniwszy $n=50, a=1, r=3$
 $l=1+49 \times 3=148$.

191. Maiąc dany postępek różnicowy, załóżmy sobie znaleźć *summę pewnej liczby wyrazów tego postępu*.

Niech będzie postępek $\div a. b. c. d. e. f. \dots i. k. l$, przedłużony bez przerwy aż do wyrazu l , niech będzie n liczba wyrazów, r wykładnik. Uważamy, że jeżeli x oznaczać będzie wyraz, przed którym znajduje się wyrazów p , zaś y wyraz, po którym

następnie wyrazów p , wypadnie z tego cośmy powiedzieli wyżej, że

$$x = a + p \times r;$$

$$y = l - p \times r;$$

dodawszy strony odpowiadające tych równań, będzie

$$x + y = a + l.$$

Ten wypadek oznacza, że w każdym postępie arytmetycznym *summa dwóch iakichkolwiek wyrazów, wziętych w równych odległościach od dwóch skrajnych, równa się summie wyrazów skrajnych*: czyli, dwa wyrazy skrajne, i dwa wyrazy wzięte w równy odległości od tych skrajnych, czynią proporcją arytmetyczną (w tym porządku, w jakim są napisane).

To okazawszy, napiszmy ten sam postęp dwarazy, raz w swoim właściwym, drugi raz w odwrotnym porządku, tak iak następuje:

$$\div a . b . c . d . e . f i . k . l ,$$

$$\div l . k . i c . b . a ,$$

i nazwiemy summę wyrazów pierwszego postępu przez S , a zatém $2S$ będzie summą wyrazów obu postępów, łącząc wyrazy w rzędach pionowych odpowiadające, będzie,

$$2S = (a + l) + (b + k) + (c + i) + \dots + (i + c) \\ + (k + b) + (l + a);$$

a ponieważ wszystkie części $(a + l)$, $(b + k)$, $(c + i)$, są równe, a ich liczba jest n ; więc $2S = (a + l)n$,

$$\text{skąd } S = \frac{(a + l)n}{2}.$$

To jest: *summa wyrazów składających postęp arytmetyczny, równa się iloczynowi z summy*

dwóch skrajnych wyrazów, i z połowy liczby wyrazów.

Gdy w téj formule zamiast l , położymy jego wartość $a+(n-1)r$, otrzymamy

$$S = \left\{ \frac{2a + (n-1)r}{2} \right\} n;$$

lecz pierwsza formuła naywięcéy jest używana.

Zastosowania. Jaka jest summa piędziesięciu wyrazów pierwszych postępu 2, 9, 16, 23, 30.....?

Naprzód wyraz 50ty jest $l = 2 + 49 \times 7 = 345$,
a zatem $S = \frac{(2+345)50}{2} = 347 \times 25 = 8675$.

Podobnież znajdziemy wyraz 100ny
 $l = 2 + 99 \times 7 = 695$. Summa zaś 100tu pierwszych
wyrazów $S = \frac{(2+695)100}{2} = 34850$.

192. Formuły: $l = a + (n-1)r$; $S = \frac{(a+l)n}{2}$;

zawierają pięć ilości, a , r , n , l , S , a zatem prowadzą do rozwiązania tego ogólnego zagadnienia: *Mając dane trzy ilości którekolwiek z tych pięciu, wyznaczyć dwie inne.*

Zagadnienie to dzieli się na tyle zagadnień szczególnych, ile można z pięcioma literami uczynić kombinacyi, biorąc po trzy, albo po dwie litery. Otrzymaliśmy (ustęp 146) liczbę kombinacyi bio-

rac po 2, i po 3 litery na iedną kombinacyą, $m \frac{(m-1)}{2}$
i $\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$; uczyniwszy w tych formułach

$m=5$, otrzymamy $\frac{5 \times 4}{2}$ czyli 10 i $\frac{5 \times 4 \times 3}{2 \cdot 3}$ czyli 10,

skąd widzimy, że 5 głosek kombinowanych po 3, daią tyleż kombinacyi, ile głosek 5, kombinowanych po 2.

Widzimy przeto że zagadnienie powyższe dzieli się na 10 zagadnień szczególnych, a te są następujące:

Mając dane 1°. a, r, n , znaleźć l i S ;

2°. $a, r, l, \dots n$ i S ;

3°. $a, r, S, \dots n$ i l ;

4°. $a, n, l, \dots r$ i S ;

5°. $a, n, S, \dots r$ i l ;

6°. $a, l, S, \dots r$ i n ;

7°. $r, n, l, \dots a$ i S ;

8°. $r, n, S, \dots a$ i l ;

9°. $r, l, S, \dots a$ i n ;

10°. $n, l, S, \dots a$ i r ;

Pierwsze zagadnienie jest już rozwiązane, ponieważ dwie formuły daią bezpośrednio l i S w funkcyy a, r, n . Co się tyczy innych zagadnień; ich rozwiązanie nie przedstawia żadney trudności, lecz dla poczynających korzystną będzie rzeczą rozwiązywać je następnie, dla nabycia wprawy w rozwiązywanie równań pierwszego i drugiego stopnia; albowiem, chociaż ilości a, r, n, l, S są w stopniu pierwszym w dwóch formułach; iednak w rozwiązywaniu przyydzimy do równania stopnia drugiego, gdy a i n lub l i n będą niewiadomemi, ponieważ a i n , tudzież l i n , wchodzą razem w obadwa równania, i są mnożone pomiędzy sobą w drugim.

193. Poprzestaniemy na rozwiązaniu czwartego zagadnienia, to jest: przypadku w którym, mając wiadome a , n , l , trzeba znaleźć r i S .

Formuła $l = a + (n-1)r$ daje $r = \frac{l-a}{n-1}$; for-

muła zaś $S = \frac{(a+l)n}{2}$ daje bezpośrednio wartość

dla S . Za pomocą pierwszego wyrażenia, $r = \frac{l-a}{n-1}$,

rozwiążemy to zadanie; wtroczyć pomiędzy liczby dane a i b średnich arytmetycznie proporcjonalnych m .

Aby rozwiązać to zadanie, dosyć będzie oznaczyć

stosunek postępu. Jakoż w téj formule $r = \frac{l-a}{n-1}$

położywszy zamiast l ilość b , $m+2$ zamiast n , gdzie $m+2$ oznacza liczbę wyrazów; otrzymamy

$r = \frac{b-a}{m+2-1}$ czyli $r = \frac{b-a}{m+1}$; to jest: stosunek

postępu Arytmetycznego otrzymuje się, dzieląc różnicę dwóch liczb danych a i b , przez liczbę wyrazów mających być wtąconemi, powiększoną o jedność.

Znalazwszy stosunek, utworzymy drugi wyraz postępu, czyli pierwszy średnio arytmetycznie propor-

cyonalny, dodając r czyli $\frac{b-a}{m+1}$ do pierwszego

wyrazu a : drugi średni wyraz otrzymamy, powiększwszy tamten ilością r , i tak następnie.

Niech-

Niechby np , potrzeba było wtrącić 12 wyrazów średnio arytmetycznie proporcjonalnych, pomiędzy liczby 12 i 77. Mamy $r = \frac{77-12}{13}$

$= \frac{65}{13} = 5$, a zatem postęp jest $\div 12. 17. 22. 27. 32.$

$37. \dots 72. 77.$

Wniosek. Jeżeli pomiędzy wszystkie wyrazy postępu brane następnie po dwa, wtrącimy taką samą liczbę średnich arytmetycznie proporcjonalnych, wyrazy dane i wtrącone, uczynią ieden i ten sam postęp.

Jakoż, niech będzie $\div a.b.c.d.e.f \dots$ dany postęp, niech m oznacza liczbę średnich mających być wtrąconemi pomiędzy a i b , pomiędzy b i c , pomiędzy c i d

Stosunek każdego postępu częściowego, podług tego cośmy powiedzieli wyżej, wyrazi się przez

$\frac{b-a}{m+1}, \frac{c-b}{m+1}, \frac{d-c}{m+1} \dots$; ilości wszystkie równe,

ponieważ wyrazy $a, b, c \dots$ stanowią postęp, a zatem stosunek będzie ten sam w każdym postępie częściowym, a ponieważ ostatni wyraz pierwszego postępu, jest pierwszym wyrazem drugiego częściowego; i tak następnie, zatem wszystkie postępy częściowe, składają ieden tylko postęp.

194. Oto niektóre zagadnienia:

Zagadnienie pierwsze. Oznaczyć pierwszy wyraz i liczbę wyrazów postępu arytmetycznego, którego stosunek jest 6, wyraz ostatni 185, a suma 2945?

(Odpowiedź. Pierwszy wyraz 5, liczba wyrazów $= 31$).

Zagadnienie drugie. Wtrącić pomiędzy wszystkie wyrazy postępu $\div 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \dots$ dziewięć wyrazów średnio arytmetycznie proporcjonalnych?

(Odpowiedź. stosunek postępu, to jest $r = 0,3$).

Zagadnienie trzecie. Znaleźć liczbę ludzi zapelniających trójkąt, tak, iż w pierwszym szeregu jest jeden człowiek, w drugim dwóch, w trzecim trzech, w n tym szeregu ludzi n ?

Czyli inaczej, znaleźć wyrażenie summy liczb naturalnych 1, 2, 3..., od 1^o aż do n ?

(Odpowiedź. $S = \frac{n(n+1)}{2}$).

Zagadnienie czwarte. Znaleźć summe wyrazów n , postępu liczb nieparzystych 1, 3, 5, 7, 9, ...

(Odpowiedź. $S = n^2$ czyli kwadratowi z liczby wyrazów.

Zagadnienie piąte. Pagorek piasku jest odległy od drogi o 40 sążni, aby ta droga była usypana, potrzeba zwieść 100 fur piasku, zesypując je co 6 sążni odległo od siebie. Pytanie jaką drogę człowiek wożący piasek uiedzie, gdy pierwsza fura będzie złożona o 40 sążni od miejsca, z którego się bierze piasek, a w końcu wóz ma powrócić w toż miejsce?

(Odpowiedź. 67400 sążni).

Zagadnienie szóste. Dwoch podróżnych wyieżdżają z jednego miejsca w jednym czasie. Pierw-

szy uieżdża na dzień mil 10, drugi zaś pierwszego dnia mil 3, drugiego 5, i t. d., co dzień dwie mile więcej iak w dniu poprzedzającym. Za ile dni spotkają się, i ile każdy uieździe mil?
(Liczba dni 8, druga = 80 mil).

O postępach geometrycznych.

195. Nazywamy postępem geometrycznym szereg wyrazów, z których każdy równa się iloczynowi z wyrazu poprzedzającego, przez liczbę stałą, zwaną wykładnikiem postępu, i tak dwa szeregi

$$3, 6, 12, 24, 48, 96 \dots$$

$$64, 16, 4, 2, \frac{1}{4}, \frac{1}{16} \dots$$

z których pierwszy iest taki, że każdy wyraz zawiera dwa razy wyraz poprzedzający, czyli równa się podwójnemu wyrazowi poprzedzającemu; w drugim zaś, każdy wyraz mieści się w wyrazie poprzedzającym razy cztery, czyli równa się czwartęj części tego wyrazu, który go poprzedza, zowią się geometryczne, wykładnikiem czyli stosunkiem pierwszego szeregu iest 2, drugiego zaś $\frac{1}{4}$.

Niech $a, b, c, d, e, f \dots$ będą liczby w postępie geometrycznym, postęp ten pisze się tak:

$$\therefore a : b : c : d : e : f : g \dots,$$

czyta się zaś tak, iak postęp arytmetyczny, chociaż ieden iest ciągiem równych różnic, drugi iest ciągiem równych ilorazów, czyli stosunków, w których każdy wyraz iest zarazem poprzednikiem i następnikiem, wyjąwszy pierwszy, który iest tylko poprzednikiem, i ostatni, który iest tylko następnikiem.

196. Oznaczmy przez q wykładnik postępu.....
 $\div a : b : c : d \dots$, $q > 1$, gdy postęp jest ro-
 snący; a zaś $q < 1$, gdy postęp jest malejący.

Wyprowadzimy z samej definicji postępu nastę-
 pujące równania

$a = aq$, $c = bq = aq^2$; $d = cq = aq^3$; $e = dq = aq^4 \dots$,
 a w ogólności, wyraz iakiegokolwiek rzędu n , to jest:
 który ma przed sobą wyrazów $n-1$, może być wy-
 rażony przez aq^{n-1} .

Oznaczmy ten wyraz przez l , otrzymamy formułę
 $l = aq^{n-1}$, za pomocą której można otrzymać wa-
 żność iakiegokolwiek wyrazu, nieprzechodząc wszy-
 stkich poprzedzających. Naprzykład 8my wyraz po-
 stępu $\div 2 : 6 : 18 : 54 : \dots$, równa się $2 \times 3^7 =$
 $2 \times 2187 = 4374$.

Podobnież wyraz 12ty postępu

$\div 64 : 16 : 4 : 1 : \frac{1}{4}$ równa się

$$64 \left(\frac{1}{4} \right)^{11} = \frac{4^3}{4^{11}} = \frac{1}{4^8} = \frac{1}{65536}.$$

197. Daymy na to, że mamy oznaczyć sumę
 n pierwszych wyrazów postępu . . .

$\div a : b : c : d : e : f : \dots : i : k : l$,
 l oznacza wyraz n ty .

Mamy (ustę: 195) równania

$$b = aq, c = bq, d = cq, e = dq \dots k = iq, l = k \times q,$$

dodawszy strony odpowiadające tych równań, otrzymamy,

$$b+c+d+e+\dots+k+l=(a+b+c+d+\dots+i+k)q,$$

czyli oznaczywszy szukaną sumę przez S , będzie,

$$S-a=(S-l)q=Sq-lq.$$

czyli $Sq-S=lq-a$; więc $S=\frac{lq-a}{q-1}$;

To jest, aby otrzymać sumę pewnej liczby wyrazów postępu geometrycznego, potrzeba wyraz ostatni rozmnóżć przez wykładnik postępu, od tego iloczynu odjąć wyraz pierwszy, a różnicę podzielić przez wykładnik zmniejszony jednością.

Jeżeli jest postęp malejący, mamy $q < 1$; $l < a$, w tym razie będzie dogodniej wyrazić powyższą formułę w postaci $S=\frac{a-lq}{1-q}$, a to dla tego, aby

obadwa wyrazy ułamku były dodatnimi.

Dwa te wyrażenia dla S , po wstawieniu, zamiast l , wartości aq^n-i , zamieniają się na

$$S=\frac{aq^n-a}{q-1}, \text{ i } S=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

Otrzymamy za pomocą formuł poprzedzających,

104. Sumę 8 pierwszych wyrazów postępu

$$\div 2 : 6 : 18 : 54 : \dots : 2 \times 3^7 \text{ czyli } 4374.$$

$$S=\frac{lq-a}{q-1}=\frac{13122-2}{2}=6560.$$

2re. Summę 12 pierwszych wyrazów postępu
 $\div 64 : 16 : 4 : 1 : \frac{1}{4} : \dots : 64 \left(\frac{1}{4}\right)^{11}$ czyli $\frac{1}{65536}$,

$$S = \frac{a-lq}{1-q} = \frac{64 - \frac{1}{65536} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{256 - \frac{1}{65536}}{\frac{1}{4}} = 85 + \frac{65535}{196608}.$$

Widzimy, że cała trudność polega na wyznaczeniu wartości liczebnej dla ostatniego wyrazu, na działaniu dość pracowitem, zwłaszcza, gdy jest wielka liczba wyrazów

198. Uwaga. Formuła $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$. Uczyni-
 niwszy $q=1$, zamieni się na $S = \frac{0}{0}$.

Wypadek ten, który niekiedy jest znakiem niewyznaczenia, pochodzi także często (ustęp 68) z przyczyny bytności wspólnego czynnika, który staie się zerem na mocy szczególnych wartości nadawanych ilościom zagadnienia. To właśnie zachodzi w obecnym okoliczności: albowiem wiadomo (ustęp 31) że wyrażenie $q^n - 1$ jest podzielne przez $q - 1$, wykonawszy zaś te działania, otrzymamy iloraz....

$q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q + 1$, i wartość dla S przybierze postać

$$S = aq^{n-1} + aq^{n-2} + aq^{n-3} + \dots + aq + a.$$

Uczynimy teraz $q=1$, wypadnie

$$S = a + a + a \dots + a = na.$$

Można przyyść do tego wypadku, zwracając się do postępu danego $\div a: b: c: \dots : l$, który w przypuszczeniu $q=1$, zamieni się na

$\div a: a: a: \dots : a$, a summa tego postępu równa się, na .

Wypadek więc $\frac{0}{0}$ wyżej otrzymany mógłby ie-

szcze oznaczać *nieдостateczność* téy formuły do otrzymania summy wyrazów, w tym szczególnym przypadku. Jakóż, ponieważ postęp składa się z wyrazów wszystkich równych pomiędzy sobą, więc nie jest postępem bardziéy geometrycznym niż arytmetycznym, a tem samém szukając summy pewnéy liczby

wyrazów, nie można ani formuły $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$, uży-

wać ani formuły $S = \frac{(a + l)n}{2}$ z których ostatnia

jest dla postępu arytmetycznego.

199. *O postęпах nieskończonych geometrycznych.*

Niech będzie postęp malejący $\div a: b: c: d: e: f: \dots$ złożony z liczby nieoznaczoney wyrazów. Uważając

formułę $S = \frac{a - aq^{n-1}}{1 - q}$, która daie summę liczby n

wyrazów, ta może bydź tak wyrażona

$$S = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}$$

A ponieważ postęp jest malejący, zatem q jest ułom-

kiem, i tém samym q^n będzie także ułamkiem, który tym mniejszy będzie, im n stanie się większą liczbą, to jest: im więcej weźmiemy wyrazów postępu: tym

$\frac{a}{1-q} \times q^n$ stanie się mniejszą liczbą, i tém samym

tym więcej summa cząstkowa tych wyrazów, zbliży się do równości z pierwszą częścią S : to jest, do $\frac{a}{1-q}$.

Nakoniec wzięwszy na ważność dla n liczbę większą od wszelkiej naznaczonej, uczyniwszy $n = \infty$;

ilość $\frac{a}{1-q} \times q^n$, będzie mniejsza od wszelkiej liczby

daney, czyli stanie się równa 0, a wyrażenie $\frac{a}{1-q}$

oznaczać będzie ważność całego szeregu.

Skąd wniesiemy, że dla summy wyrazów postępu nieskończenie malejącego, jest wyrażenie

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Jest to, właściwie mówiąc, *granica*, do której dążą bez przestanku wszystkie summy cząstkowe, które otrzymujemy, biorąc coraz większą liczbę wyrazów.

Różnica pomiędzy temi summami, i $\frac{a}{1-q}$, może stać się tak małą jak chcemy, lecz nie stanie się zupełnie zerem, chyba wtenczas, kiedy weźmiemy nieskończoną liczbę wyrazów.

Zastosowanie. Niech będzie postęp malejący nieskończony $1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81} : \dots$. Summa jego wyrazów jest $S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

Błąd popełniony, biorąc to wyrażenie za ważność summy n pierwszych wyrazów, oznaczony być może przez $\frac{a}{1-q} q^n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

I tak, gdy n będzie równe 5; otrzymamy

$$\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{2 \cdot 3^4} = \frac{1}{162}.$$

Gdy $n=6$, otrzymamy

$$\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{162} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{486}.$$

Stąd widzimy, że błąd popełniony, gdy weźmiemy $\frac{3}{2}$ za summe pewnej liczby wyrazów, tém będzie mniejszy, im liczba wyrazów będzie większa.

Weźmy jeszcze postęp $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \dots$,

$$\text{otrzymamy } S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Wyrażenie $S = \frac{a}{1-q}$ może być wprost otrzymane z postępu $a : b : c : d : e : g : \dots$

Weźmy równania $b=aq$, $c=bq$, $d=cq$, $e=dq$...
których liczba jest nieskończona, i dodajmy ich strony odpowiadające: otrzymamy

$$b+c+d+e+\dots = (a+b+c+d+\dots)q.$$

Ponieważ pierwsza strona, jest to szereg dany zmniejszany wyrazem pierwszym; więc wychodzi na $S-a$; druga strona równa się wykładnikowi q rozmnożonemu przez całkowity szereg, a że ten szereg nie ma ostatniego wyrazu, czyli ponieważ ten ostatni wyraz jest zerem, zatem wyrażeniem drugiey strony

będzie Sq , przeto $S-a=qS$, skąd $S=\frac{a}{1-q}$.

Jakoż rozwinąwszy $\frac{a}{1-q}$ przez dzielenie na szereg, otrzymamy na wypadek, $a+aq+aq^2+aq^3+\dots$; który jest widocznie szeregiem danym, gdy tylko zamiast aq , aq^2 ,... wstawimy wartości b , c , d ,...

Jeszcze inaczej. Niech będzie postęp

$$\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \dots$$

Uczyńmy $S=a+aq+aq^2+aq^3+aq^4+aq^5+\dots$,
rozmnożywszy obie strony przez q , otrzymamy

$$qS=aq+aq^2+aq^3+aq^4+aq^5+\dots$$

Odiąwszy strony odpowiadające tych dwóch równań, otrzymamy $S-qS=a$, a stąd $S=\frac{a}{1-q}$.

200. Gdy szereg jest rosnący; wyrażenie $S=\frac{a}{1-q}$ nie może już być uważane za granicę sumy częst-

kowych; bo ponieważ summa pewney liczby wyrazów jest (ustę: 197.) $S = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$, więc druga część $\frac{aq^n}{1-q}$ powiększać się będzie liczebnie w miarę powiększania się liczby n ; to jest: im więcej weźmiemy wyrazów, tym więcej summa tych wyrazów różnić się będzie liczebnie od $\frac{a}{1-q}$.

W tym razie, formuła $S = \frac{a}{1-q}$ jest tylko wyrażeniem algebricznym, którego rozwinięcie daie szereg $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$.

Ale tu, zachodzi okoliczność, na pierwszy rzutek bardzo osobliwa, ponieważ ułamek $\frac{a}{1-q}$ tworzy szereg, o którym mówimy, więc powinno być

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

Lecz tu uczyniwszy $a=1, q=2$; otrzymamy

$$\frac{1}{1-2} \text{ czyli } -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots,$$

równanie, którego pierwsza strona jest odiemna, druga jest dodatna, i tym większa, im q jest większą liczbą.

Aby wytłómaczyć ten wypadek, uważamy, że ie-

żeli w równaniu $\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \dots$, zatrzymamy się na pewnym wyrażeniu szeregu, naówczas, aby równość pozostała potrzeba, dopełnić ilorazu. Tak na przykład, zatrzymując się na czwartym wyrażeniu, aq^3 ,

a	$ 1 - q$	
1sza reszta $+ aq$		
2ga $\dots + aq^2$		$a + aq + aq^2 + aq^3 + \frac{aq^4}{1-q}$
3cia $\dots + aq^3$		
4ta $\dots + aq^4$		

Potrzeba do ilorazu otrzymanego dodać wyrażenie

ułamkowe $\frac{aq^n}{1-q}$, zatem otrzymamy istotnie

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \frac{aq^4}{1-q}.$$

Jeżeli teraz w tym dokładnem równaniu, uczynimy, $a=1$, $q=2$, otrzymamy

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \frac{16}{-1} = 1 + 2 + 4 + 8 - 16,$$

równanie które widocznie samo przez się sprawdza się.

W ogólności; gdy wyrażenie zawierające x , które oznaczymy przez $f(x)$, a wymówimy *funkcja* x , jest rozwinięte na szereg w postaci

$a + bx + cx^2 + dx^3 \dots$, naówczas tylko wtenczas mamy $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$, gdy zatrzymując się na pewnym wyrażeniu szeregu, dopełnimy go pewnem wyrażeniem zawierającym x .

Gdy w zastosowaniach szczególnych szereg będzie *malejący*, naówczas wyrażenie dopełniające szereg może być uważane za tak małe, iak tylko ze-

chcemy, a to gdy przyzwolicie przedłużyć szereg. Lecz rzecz się ma przeciwnie, gdy szereg jest *rosnący*, bo w tym razie nie można zaniedbywać owego dopełniającego dodatku. Dla tego to szeregi *rosnące* nie mogą służyć do wyznaczenia przybliżonych ważności liczb. Dla tego to także Algiebraiści zowią szeregami *schodzącymi się* (*convergentes*) te, których wyrazy maleją, a *rozchodzącymi się* (*divergentes*) te, których wyrazy rosną. W pierwszych, im więcej weźmiemy wyrazów; tym bardziej ich summa zbliży się liczebnie do wyrażenia, którego rozwinięciem jest szereg; gdy przeciwnie w drugich, im więcej weźmiemy wyrazów, tym bardziej summa ich różni się będzie od ważności liczebnej wyrażenia rozwiniętego na szereg.

201. *Uwaga.* Zakończymy wykład zasad postępów nieskończonych, następującem postrzeżeniem. Wypada z definicyi postępów geometrycznych (ustęp 195), że można je uważać za szeregi zwrotne pierwszego rzędu, których wykładnikiem zwrotu, jest wykładnik postępu. To zbliżenie daje poznać początek postępów przedłużonych do nieskończoności. Winny one swój początek, równie iak szeregi zwrotne rozwinięciu ułamka algebraicznego na szereg. Podaliśmy sposoby (ustęp 198. 199.) *znalezienia tego ułamku tworzącego*, dla postępów w szczególności. W obszerniejszym wykładzie algebry podają się sposoby, rozwiązania tego zagadnienia dla wszystkich szeregów zwrotnych.

202. Uważanie pięciu ilości a, q, l, n, S , wchodzących w dwie formuły $l = aq^{n-1}$, $S = \frac{lq - a}{q - 1}$ otrzymane, pod ustęp 296 i 197, podaje dziesięć szcze-

gólnych zagadnień, których wystowienie różni się od wystowienia odpowiadających zagadnień w postępkach arytmetycznych (ustęp 192.) tylko w tém, że zamiast głoski *r* iest położona głoska *q*. Lecz my założymy sobie, tak iak w postępkach arytmetycznych tylko wyznaczenie ilości *q* i *S* mając *a*, *l*, *n*. Pierwsza formuła daie $q^{n-1} = \frac{l}{a}$,

skąd $q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$; wstawivszy tę ważność w formułę drugą, otrzymalibyśmy ważność dla *S*.

Wyrażenie $q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$, prowadzi do rozwiązania następującego zagadnienia; *Wtrącić pomiędzy dwie dane liczby a i b, liczbę m średnich proporcjonalnych, któreby tworzyły z liczbami a i b uważanemi za skrajne, postęp geometryczny.*

Do tego dosyć będzie poznać wykładnik postępu, a że liczba wyrazow wtrącić się mających iest *m*, więc całkowita liczba wyrazów iest *m+2*: mamy oprócz tego $l=b$, a zatem ważność dla *q* zamieni

się na $q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$; to iest: aby otrzymać wykładnik

postępu potrzeba, podzielić liczbę daną *b* przez *a*, z tego ilorazu wyciągnąć pierwiastek stopnia równego liczbie wyrazów wtrącić się mających, powiększoney iednością. Otrzymamy więc postęp

$$\div a : a \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} : a \sqrt[m+1]{\frac{b^2}{a^2}} : a \sqrt[m+1]{\frac{b^3}{a^3}} : \dots, b.$$

I tak niechby trzeba było wtrącić sześć średnich proporcjonalnych pomiędzy liczby 3 i 384.

$$\text{Mamy } m=6, \text{ skąd } q = \sqrt[7]{\frac{384}{3}} = \sqrt[7]{128} = 2;$$

i otrzymamy postęp

$$\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384.$$

Wkrótce podamy sposoby dogodniejsze w zastosowaniach liczebnich, do oznaczenia liczby wyrażonéj

$$\text{przez } q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

Nie będziemy się zatrzymywać nad dowodzeniem téj prawdy, że gdy pomiędzy wszystkie wyrazy następnie po dwa brane postępu geometrycznego, wtrącimy tę samą liczbę średnich proporcjonalnych, wszystkie postępy tak otrzymane stanowić będą jeden tylko postęp. Dowodzenie jest zupełnie podobne jak było pod (ustęp 193).

203. Z dziesięciu głównych zagadnień, które można uczynić w postęпах, cztery łatwe do rozwiązania, są następujące:

1wsze. Mając dane a, q, n , znaleźć l i S ?

$$l = aq^{n-1}; S = \frac{lq - a}{q - 1}$$

2re. mając dane a, n, l , znaleźć q i S ?

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}; S = \frac{\sqrt[n-1]{l^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l} - \sqrt[n-1]{a}}$$

3cie. Maiąc q, l, n , znaleźć a i S ?

$$a = \frac{l}{q^{n-1}}; S = \frac{l(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)}.$$

4te. Maiąc q, n, S , znaleźć a i l ?

$$a = \frac{S(q-1)}{q^n - 1}; l = \frac{Sq^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}.$$

Dwa inne zagadnienia zależą od rozwiązania równań stopnia wyższego nad drugi: takimi są te zagadnienia, w których niewiadomymi ilościami są a, q ; albo l i q .

Jakóż, z formuły drugiej wyprowadzimy $a = lq - Sq + S$: tę ważność wstawiając zamiast a w formułę pierwszą $l = aq^{n-1}$; otrzymamy $l = (lq - Sq + S)q^{n-1}$

czyli $(S - l)q^n - Sq^{n-1} + l = 0$,

równanie to jest stopnia n , którego nie nauczyliśmy się jeszcze rozwiązać.

Podobnieżby było, gdybyśmy chcieli oznaczyć l i q : albowiem otrzymalibyśmy równanie $aq^n - Sq + S - a = 0$.

204. Nakoniec, cztery inne zagadnienia prowadzą do rozwiązania, szczególniejszej natury równań, takimi są zagadnienia, w których n jest niewiadomą, tak, iak iedna z czterech innych ilości.

Formuła druga łatwo daie ważność dla iedney z ilości a, q, l, S , w funkcyi trzech innych, a zatém wszystko teraz przywodzi się do wyznaczenia n , za pomocą formuły $l = aq^{n-1}$.

To zaś równanie zamieni się na $q^n = \frac{lq}{a}$ i ma kształt równania $a^x = b$, w którym a i b są ilości wiadome.

wiadome. Tego gatunku równania zowią się równaniami *wykładniczymi* (*exponentielles*), dla rozróżnienia ich od równań dotąd uważanych, w których wiadoma zawsze była podniesiona do potęgi oznaczony przez liczby wiadome.

Zaymiemy się więc rozwiązaniem tych równań, z którymi ma związek iedna z najważniejszych teoryy, to jest teorya Logarytmów.

§ II. Teorya ilości wykładniczych i Logarytmów.

205. Rozwiązanie równania $a_x = b$.

To zadanie polega na tém, ażeby znaleźć wykładnik potęgi, do której potrzeba podnieść daną liczbę a , aby otrzymać liczbę daną b .

Uważmy naprzód szczególne przypadki, iakoto: rozwiązać równanie $2^x = 64$. Liczbę 2 podnosząc do rozmaitych potęg, przekonamy się, że $2^6 = 64$. Więc $x = 6$ zadosyć czyni zadaniu.

Weźmy iészczę równanie $3^x = 243$.

Otrzymamy na rozwiązanie $x = 5$.

Wógólności, skoro druga strona b , będzie zupełną potęgą liczby a , naówczas x będzie liczbą całkowitą, którą otrzymamy podnosząc a , do potęg następujących 0, 1, 2, 3,

Rozwiążmy teraz $2^x = 6$. Czyniąc $x = 2$, i $x = 3$, otrzymamy $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, skąd widzimy, że ważność dla x iest zawarta po między 2 i 3.

Uczyńmy zatem $x = 2 + \frac{1}{x'} \dots$ (x' iest > 1),

ważność tę wstawiwszy w dane równanie, otrzymamy