

Tym sposobem otrzymamy  $\sqrt[6]{23} = 1,68$  zbliżony o 0,01.

Dla wprawy podaia się następujące przykłady:

$$\sqrt[3]{473} \text{ zbliżony o } \frac{1}{20} = \frac{155}{20};$$

$$\sqrt[3]{79} \text{ zbliżony o } 0,0001 = 4,2908.$$

$$\sqrt[6]{13} \text{ zbliżony o } 0,01 = 1,53.$$

$$\sqrt[3]{3,00415} \text{ zbliżony } 0,0001 = 1,4429.$$

$$\sqrt[3]{0,00101} \text{ zbliżony } 0,01 = 0,10.$$

$$\sqrt[2]{\frac{14}{25}} \text{ zbliżony } 0,001 = 0,824.$$

### § III. Formowanie potęg i wyciąganie pierwiastków z ilości algebraicznych.

#### *Rachunek ilości pierwiastkowych.*

Uważamy naprzód ilości iednomianowe.

163. Aby  $2a^3b^2$  podnieść do piątej potęgi (mamy ust:2)  
 $(2a^3b^2)^5 = 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2.$

Skąd widzimy naprzód: że spółczynnik dwa, 4 razy powinien być mnożony przez siebie, czyli ma być podniesiony do 5ej potęgi.

2re. Każdy z wykładników głosek powinien być powtórzony razy 5, czyli rozmnożony przez 5.

A zatem  $(2a^3b^2)^5 = 2^5 \cdot a^{3 \times 5} b^{2 \times 5} = 32a^{15}b^{10}.$

Podobnie  $(8a^2b^3c)^3 = 8^3 \cdot a^{2 \times 3} b^{3 \times 3} c^3 = 512a^6b^9c^3.$

A tak, aby iednomian podnieść do potęgi naznaczoney, potrzeba podnieść spółczynnik do téżże potęgi, potem mnożyć każdy z wykładników głosek przez wykładnik potęgi.

I na odwrót, aby wyciągnąć pierwiastek iakiegokolwiek stopnia z iednomianu, potrzeba 1<sup>o</sup> od spółczynnika wyciągnąć pierwiastek, 2<sup>re</sup> podzielić wykładnik każdej głoski przez liczbę oznaczającą stopień pierwiastku żadanego. A zatém

$\sqrt[3]{64a^9b^3c^0} = 4a^3bc^3$ ;  $\sqrt[4]{16a^8b^{12}c^4} = 2a^2b^3c$ . Z tego prawidła wypada, że aby iednomian z którego mamy wyciągnąć pierwiastek był zupełną potęgą, potrzeba aby iego spółczynnik był zupełną potęgą i aby wykładniki głosek były podzielne przez wykładnik czyli stopień pierwiastku mającego się wyciągać. Późniéy zobaczymy iak się prościéy wyraża pierwiastek téy ilości, która nie iest zupełną potęgą.

164. Dotąd nie dawaliśmy bacžności na znak iednomianu, lecz uważając, że gdy iakikolwiek będzie znak przed iednomianem, kwadrat z tego iednomianu iest zawsze dodatny, i że wszelka potęga stopnia parzystego  $2n$ , może być uważana iako równa ntéy potędze kwadratu, to iest  $a^{2n} = (a^2)^n$ ; wnieśliemy, że wszelka potęga stopnia parzystego, czy to z ilości dodatnéy, czy z odjemnéy, iest koniecznie dodatną.

A zatém,  $(\pm 2a^2b^3c)^4 = +16a^8b^{12}c^4$ .

Ponieważ oprócz tego, potęga stopnia nieparzystego  $2n+1$ , iest to iloczyn z potęgi stopnia parzystego  $2n$  przez pierwszą potęgę, a zatém wszelka potęga stopnia nieparzystego z iednomianu, ma tenże sam znak, iaki był przy iednomianie: I tak

$$(+4a^2b)^3 = 64a^6b^3; (-4a^2b)^3 = -64a^6b^3.$$

Stąd wypada, *1o* że wszelki pierwiastek stopnia nieparzystego z iednomianu, ma ten sam znak co iednomian; i tak

$$\sqrt[3]{+8a^3} = +2a; \sqrt[3]{-8a^3} = -2a;$$

$$\sqrt[5]{-32a^4b^5} = -2a^2b.$$

*2re* wszelki pierwiastek stopnia parzystego, z iednomianu dodatniego, powinien mieć przed sobą znak  $+$  i znak  $-$ , a zatem

$$\sqrt[4]{81a^4b^{12}} = \pm 3ab^3; \sqrt[6]{64a^{18}} = \pm 2a^3$$

*3cie* Wszelki pierwiastek stopnia parzystego z iednomianu odjemnego, jest pierwiastkiem uroionym; albowiem nie masz takiej ilości, któraby podniesiona do potęgi parzystej, dała wypadek odjemny. A

zatem  $\sqrt[4]{-a}$ ,  $\sqrt[6]{-b}$ ,  $\sqrt[8]{-c}$ , są to znaki działań niepodobnych do wykonania, są to wyrażenia równie uroione iak  $\sqrt{-a}$ ;  $\sqrt{-b}$  (zobacz ustęp 81).

Przejdźmy teraz do wielomianów.

165. Widzieliśmy już iakim sposobem dwumian  $a+b$  podnosi się do iakiękółwiek potęgi, lecz zdarzyć się może, że wyrazy dwumianu mają spółczynniki i wykładniki.

Mamy naprzykład rozwinąć  $(2a^2+3ab)^3$ . Uczyńmy na chwilę  $2a^2=x$ ;  $3ab=y$ ; otrzymamy

$$(2a^2+3ab)^3 = (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Zamiast  $y$  i  $x$  przywróciwszy ich ważności, otrzymamy:

$$(2a^2+3ab)^3 = (2a^2)^3 + 3(2a^2)^2 \cdot (3ab) + 3(2a^2) \cdot (3ab)^2 + (3ab)^3;$$

ezyli wykonawszy działanie podług prawideł (ust. 163) na mnożenie iednomianów, będzie

$$(2a^2+3ab)^3=8a^6+36a^5b+54a^4b^2+27a^3b^3.$$

podobnie otrzymamy

$$\begin{aligned}(4a^2b-3abc)^4 &= (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 \\ &\quad + 4xy^3 + y^4 \\ &= (4a^2b)^4 + 4(4a^2b)^3(-3abc) + 6(4a^2b)^2(-3abc)^2 \\ &\quad + 4(4a^2b)(-3abc)^3 + (-3abc)^4 \\ &= 256a^8b^4 - 768a^7b^4c + 864a^6b^4c^2 - 432a^5b^4c^3 \\ &\quad + 81a^4b^4c^4.\end{aligned}$$

(Znaki są naprzemian dodatne i odjemne)

Rozwińmy teraz  $(x+y+z)^3$ . Uczyniwszy na-przód  $x+y=u$  otrzymamy

$$(u+z)^3 = u^3 + 3zu^2 + 3z^2u + z^3,$$

zamiast  $u$  położywszy jego ważność  $x+y$ ; będzie

$$(x+y+z)^3 = (x+y)^3 + 3z(x+y)^2 + 3z^2(x+y) + z^3;$$

wykonawszy skazane działanie otrzymamy,

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3x^2z + 6xyz \\ &\quad + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + z^3.\end{aligned}$$

Wyrażenie to składa się z sześciannów z trzech wyrazów, więcéy potrójnemi kwadratami z kaźde-gowyrazu, przez pierwsze potęgi, dwóch innych; więcéy sześć razy wziętym iloczynem z trzech wy-razów. Prawo to łatwo sprawdzić dla iakiego-kolwiek wielomianu.

Aby formułę poprzedzającą zastósować do roz-winięcia trójmianu którego wyrazy miałyby spół czynniki i wykładniki, potrzebaby podobnie iak w dwumianie oznaczyć kaźdy wyraz przez iedną głoskę, rozwinąć, potem w mieysce wprowadzo-

*ných głosek położyć ich ważności i wykonać skazane działania.*

Tym sposobem odbywszy wszystkie działania, otrzymamy:

$$(2a^2 - 4ab + 3b^2)^3 = 8a^6 - 48a^5b + 132a^4b^2 - 208a^3b^3 + 198a^2b^4 - 108ab^5 + 27b^6.$$

Podobnym sposobem rozwinięlibyśmy potęgę 4, 5, i t. d. iakiegokolwiek wielomianu.

166. Co do wyciągania pierwiastków z wielomianu, w tém działaniu postępować będziemy podobnie, iakieśmy powiedzieli wyżej, trzymając się formuły Newtona, które to zastosowanie okażemy w rozwinięciu téżże formuły przez Dubourgueta w rozdziale ostatnim, tu tylko podamy kilka przykładów i wzór działania na dwóch szczególnych przykładach.

Przykłady

1szy.  $25a^4 - 40b^2a^2 + 16b^4 \mid 5a^2 - 4b^2$

$25a^4 - 40b^2a^2 + 16b^4 \mid 10a^2$

a zatem pierwiastek jest  $5a^2 - 4b^2$

2gi.  $8x^3 - 36bx^2 + 54b^2x - 27b^3,$

pierwiastek 3go stopnia jest  $2x - 3b.$

3ci.  $x^3 + 3(y+z)x^2 + 3(y^2 + 2zy + z^2)x + (y^3 + 3zy^2 + 3z^2y + z^3),$

pierwiastek 3go stopnia  $x + y + z.$

4ty.  $a^4 + 8ba^3 + 24b^2a^2 + 32b^3a + 16b^4.$

Pierwiastek 4go stopnia będzie  $2a + 2b.$

5ty. Wyciągnąć pierwiastek szóstego stopnia z ilości następującej:

$64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12}$ $- 20,000a^9x^9 + 37500a^{12}x^6$ $- 37,500a^{15}x^3 + 15625a^{18}$	$\mid 2x^3 - 5a^3$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $192x^{16}$
Reszta $- 960a^3x^{15} +$ i t. d.	

*Rachunek ilości pierwiastkowych.*

167. Gdy iednomian albo wielomian z którego chcemy wyciągnąć pierwiastek pewnego stopnia, nie jest zupełną potęgą; naówczas skazujemy tylko działanie, biorąc ilość daną pod znak  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ , a w roztwartości tego znaku kładąc liczbę oznaczającą stopień pierwiastku mającego się wyciągnąć.

Liczba takowa zowie się *skaznikiem* (indice).

Częstokroć można w wyrażeniu pierwiastkowém czynić uproszczenia oparte na zasadzie podobnój do tój, którąśmy wyłożyli w ustępie 80: ta zaś iest, że pierwiastek *nty* z iloczynu, równa się iloczynowi pierwiastków *nty*ch to iest po algebracznemu:

$$\sqrt[n]{abcd\dots} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \times \sqrt[n]{d} \dots$$

Jakoż, podnioswszy każde z tych dwóch wyrażeń do potęgi *nty*; otrzymamy dla pierwszego wyrażenia

$$(\sqrt[n]{abcd\dots})^n = abcd\dots,$$

dla drugiego

$$(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \dots)^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n \cdot (\sqrt[n]{c})^n \dots = abcd\dots$$

A tak ponieważ *nte* potęgi tych wyrażeń są równe, więc i same wyrażenia są równe.

To założywszy, niech będzie wyrażenie  $\sqrt[3]{54a^4b^3c^2}$ , którego nie można zamienić na iednomian spółmier-ny, ponieważ 54 nie iest zupełnym sześcianiem, i oprócz tego wykładniki ilości *a* i *c* nie są podzielne przez 3; mamy

$$\sqrt[3]{34a^4b^3c^2} = \sqrt[3]{27a^3b^3} \cdot \sqrt[3]{2ac^2} = 3ab\sqrt[3]{2ac^2}.$$

$$\text{Podobnież } \sqrt[3]{8a^2} = 2\sqrt[3]{a^2}; \sqrt[4]{48a^5b^3c^6} = 2ab^2c\sqrt[4]{3ac^2};$$

$$\sqrt[6]{192a^7bc^{12}} = \sqrt[6]{64a^6b^{12}} \times \sqrt[6]{3ab} = 2ac^2\sqrt[6]{3ab}.$$

W wyrażeniach,  $3ab\sqrt[3]{2ac^2}$ ,  $2\sqrt[3]{a^2}$ ,  $2ab^2c\sqrt[4]{3ac^2}$ , czynniki położone przed znakiem pierwiastkowym, nazywają się *spółczynnikami* ilości pierwiastkowych.

168. Prawidło dowiedzione w ustępie 157, prowadzi do innego uproszczenia.

I tak weźmy wyrażenie pierwiastkowe  $\sqrt[6]{4a^2}$ .

Ponieważ na mocy tego prawidła jest  $\sqrt[6]{4a^2} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{4a^2}}$ ,

a ilość pod znakiem  $\sqrt[2]{}$ , jest zupełnym kwadratem, więc można uskutecznić wyciąganie pierwiastku kwadratowego, i otrzymamy

$$\sqrt[6]{4a^2} = \sqrt[2]{2a}.$$

$$\text{Podobnież } \sqrt[4]{36a^2b^2} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{36a^2b^2}} = \sqrt[2]{6ab}.$$

W ogólności,  $\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}} = \sqrt[m]{a}$ ; to jest, jeżeli

skażnik pierwiastku jest wielokrotnością pewny liczbę  $n$ , a ilość pod znakiem pierwiastkowym jest potęgą  $n^{\text{ta}}$  zupełną; można nie naruszając ważności i tak ma ilość pierwiastkowa, podzielić skażnik przez  $n$ , i wyciągnąć pierwiastek  $n^{\text{tego}}$  stopnia z ilości będącý pod znakiem.

Własność ta jest odwrotna, względny inną, niemniej ważną, która zasadza się na tem, że można rozmnożyć skażnik pierwiastku, przez pewną liczbę, byleby ilość pod znakiem pierwiastku była podniesiona do potęgi oznaczonej tą liczbą.

I tak  $\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$ . Jakoż  $a$  jest to samo co  $\sqrt[n]{a^n}$ ;

więc 
$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}} = \sqrt[mn]{a^n}.$$

To ostatnie prawidło służy do przywiedzenia kilku ilości pierwiastkowych do jednakowego skażnika czego często zachodzi potrzeba.

Niech będą np. dwie ilości pierwiastkowe

$\sqrt[3]{2a}$  i  $\sqrt[4]{(a+b)}$ ; które chcemy przywieść do jednakowego skażnika. Rozmnożymy skażnik pierwszy przez 4, to jest przez skażnik drugi, i podnioszący  $2a$  do potęgi 4tę; skażnik zaś drugi rozmnożymy przez 3, a ilość  $(a+b)$  podnioszący do sześciastu, nie zmienimy ważności iakie miały dwa dane, i otrzymamy.

$$\sqrt[3]{2a} = \sqrt[12]{2^4 a^4} = \sqrt[12]{16a^4}; \sqrt[4]{a+b} = \sqrt[12]{(a+b)^3}.$$

Prawidło ogólne. Aby dwie lub kilka ilości pierwiastkowe przywieść do jednakowego skażnika, potrzebarozmnożyć skażnik każdą, przez iloczyn ze wszystkich innych skażników, a ilość pod znakiem pierwiastkowym podnieść do potęgi oznaczonej przez tenże iloczyn.

Prawidło to mające wiele podobieństwa z przywodem ułomków do spólnego mianownika,



przyjmuje podobne iak tamto skrócenia.

Niech będą np. ilości pierwiastkowe  $\sqrt[4]{a}$  i  $\sqrt[6]{5b}$ ;  $\sqrt[3]{a^2+b^2}$ ; które mamy przywieść do iednakowego skaźnika.

Ponieważ liczby 4, 6, 8, mają spólne czynniki, a 24 jest nayprostszą wielokrotnością tych trzech liczb, więc dosyć będzie pierwszą rozmnóżyć przez 6, drugą przez 4, trzecią przez 3, byleby ilości pod znakiem pierwiastkowym były podniesione do potęg oznaczonych liczbami 6, 4, 3, otrzymamy

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt[24]{a^6}; \sqrt[6]{5b} = \sqrt[24]{5^4b^4}; \sqrt[3]{a^2+b^2} = \sqrt[24]{(a^2+b^2)^8}.$$

To założywszy zobaczymy iak się wykonywają działania arytmetyczne na ilościach pierwiastkowych. Działan tych jest sześć, obeymując między niemi podnoszenie do potęg i wyciąganie pierwiastków.

169, *Dodawanie i odejmowanie ilości pierwiastkowych.*

Nazywają się *podobnemi* dwie ilości pierwiastkowe, gdy mają ten sam skaźnik, i tę samą ilość pod znakiem pierwiastku. To założywszy, aby dwie ilości pierwiastkowe podobne dodać lub odjąć, *potrzeba dodać albo odjąć ich spółczynniki, a wynikłą sumnę lub różnicę, napisać iako spółczynnik przed spólną ilością pierwiastkową.*

$$\text{Itak } 3\sqrt[3]{b} + 2\sqrt[3]{b} = 5\sqrt[3]{b}; 3\sqrt[3]{b} - 2\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{b};$$

$$3a\sqrt[4]{b} \pm 2c\sqrt[4]{b} = (3a \pm 2c)\sqrt[4]{b}.$$

Często dwie ilości pierwiastkowe nie są podobne, zaraz przeto z początku trzeba ie uczynić po-

dobnemi, za pomocą uproszczeń pod ust: 167 i 168 *np.*

$$\sqrt[3]{48ab^2} + b\sqrt[2]{75a} = 4b\sqrt[2]{3a} + 5b\sqrt[2]{3a} = 9b\sqrt[2]{3a}$$

$$\sqrt[3]{8a^3b + 16a^4} - \sqrt[3]{b^4 + 2ab^3} = 2a\sqrt[3]{b + 2a}$$

$$-b\sqrt[3]{b + 2a} = (2a - b)\sqrt[3]{b + 2a}.$$

$$3\sqrt[6]{4a^2} + 2\sqrt[3]{2a} = 3\sqrt[3]{2a} + 2\sqrt[3]{2a} = 5\sqrt[3]{2a}.$$

Gdy ilości pierwiastkowe nie są podobne, nie można inaczej wykonać dodawania lub odejmowania, iak tylko przez położenie między niemi znaku  $+$  lub  $-$ .

170. *Mnożenie i dzielenie.* Uważamy przypadek w którym ilości pierwiastkowe mają ten sam skażnik.

Niechby było trzeba  $\sqrt[n]{a}$  rozmnożyć lub podzielić przez  $\sqrt[n]{b}$ .

Mówię że

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \text{ i } \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Jakoż gdy  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ , i  $\sqrt[n]{ab}$ , podniesiemy do potęgi  $n$ tej, otrzymamy w obu razach na wypadek  $ab$  a zatem te dwa wyrażenia są sobie równe.

Podobnie  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  i  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  podniesione do  $n$ tej potęgi dają  $\frac{a}{b}$ , a zatem te dwa wyrażania są sobie równe.

Stąd widzimy, że aby rozmnóżyc lub podzielić przez siebie dwie ilości pierwiastkowe z temi samemi skaźnikami, potrzeba rozmnóżyc albo podzielić przez siebie ilości pod znakami pierwiastkowemi, i ten iloczyn lub iloraz napisać pod tym samym znakiem pierwiastkowym. Jeżeli znajdować się będą spółczynniki, potrzeba je wprzód rozmnóżyc lub podzielić przez siebie, podług tego iakie odbywamy działanie.

I tak

$$2a\sqrt[3]{\frac{a^3+b^2}{c}} \times -3a\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)}{d}} = -6a^2\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)^3}{cd}};$$

$$\text{czyli skróciwszy} = \frac{-6a^2(a^2+b^2)}{\sqrt[3]{cd}}.$$

$$3a\sqrt[4]{8a^2} \times 2b\sqrt[4]{4a^2c} = 6ab\sqrt[4]{32a^4c} = 12a^2b\sqrt[4]{2c}.$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2b^2+b^4}}{\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{8b}}} = \sqrt[3]{\frac{8b(a^2b^2+b^4)}{a^2-b^2}} = 2b\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}.$$

Jeżeli ilości pierwiastkowe nie mają spólnego skaźnika, potrzeba je przywieśdź do takiego, podług

ustępu 168, a potem postąpić, iak powiedzieliśmy wyżej.

Naprzykład

$$3a\sqrt[6]{b} \times 5b\sqrt[8]{2c} = 15ab\sqrt[24]{8b^4c^3}.$$

### 171. Formowanie potęg i wyciąganie pierwiastków.

Mamy  $\sqrt[m]{a}$  podnieść do potęgi  $n$ tej. Podług prawa podanego na mnożenie, mamy

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \dots = \sqrt[m]{a^n}.$$

A zatem, ażeby ilość pierwiastkową podnieść do daney potęgi, potrzeba podnieść ilość pod znakiem pierwiastkowym do téj potęgi; a wypadek otrzymany napisać pod znakiem pierwiastkowym, ze swym początkowym skaźnikiem. Jeżeliby się znajdował spółczynnik, należy go także oddzielnie podnieść do daney potęgi.

I tak

$$(\sqrt[4]{4a^3})^2 = \sqrt[4]{(4a^3)^2} = \sqrt[4]{16a^6} = 2a\sqrt[4]{a^2}.$$

$$(3\sqrt[3]{2a})^5 = 3^5 \cdot \sqrt[3]{(2a)^5} = 243\sqrt[3]{32a^5} = 486a\sqrt[3]{4a^2}.$$

Gdy skaźnik pierwiastka jest wielokrotnością wykładnika potęgi, którą chcemy utworzyć; można

w tym razie skrócić działanie. Mamy np.  $\sqrt[4]{2a}$  podnieść do kwadratu, uważmy, że (ust: 157.)

$\sqrt[4]{2a} = \sqrt{\sqrt{2a}}$ . Lecz aby tę ilość podnieść do kwadratu, dosyć będzie opuścić pierwszy znak pierwiastko-

wiastkowy, a zatem otrzymamy  $(\sqrt[4]{2a})^2 = \sqrt{2a}$ .

Mamy jeszcze  $\sqrt[6]{3b}$  podnieść do kwadratu. To wyrażenie zamieni się na  $\sqrt{\sqrt[3]{3b}}$ , więc  $(\sqrt[6]{3b})^2$

$= \sqrt[13]{3b}$  to jest: jeżeli skażnik pierwiastku jest podzielny przez wykładnik potęgi, można wykonać to dzielenie zostawiając ilość pod znakiem pierwiastkowym w niczem niezmienną.

Co do wyciągania pierwiastków, potrzeba rozmnożyć skażnik pierwiastku danego, przez skażnik pierwiastku, który mamy wyciągnąć; i zostawić ilość będącą pod znakiem pierwiastkowym, w niczem niezmienną.

$$\text{I tak } \sqrt[3]{\sqrt[4]{3c}} = \sqrt[12]{3c} \text{ i } \sqrt[5]{\sqrt[3]{5c}} = \sqrt[15]{5c}.$$

To prawidło wychodzi na iedno z prawidłem (ust. 157.) i tylko, brzmieniem różni się od tamtego:

Jeżeli ilość pod znakiem pierwiastkowym jest zupełną potęgą, tego samego stopnia co pierwiastek mający być wyciągnięty, naówczas można skrócić

działanie. I tak  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8a^3}}$  będąc równe  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{8a^3}}$

zamieni się na  $\sqrt[4]{2a}$ . Podobnież  $\sqrt[5]{\sqrt[3]{9a^2}}$

$$= \sqrt[5]{\sqrt[2]{9a^2}} = \sqrt[5]{3a}, \text{ oprócz tego } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

$= \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ , bo każde z tych wyrażeń iest (ust: 157.)

równe  $\sqrt[nm]{a}$ .

Dopiero wyłożone prawidła rachunku ilości pierwiastkowych, opierają się na téj zasadzie, że pierwiastek *ntéj* potęgi iloczynu z kilku czynników, równa się iloczynowi pierwiastków *ntych* z tych różnych czynników; a dowodzenie tey zasady, polega (ust: 167.) na tém, że *gdy potęgi iednego stopnia dwóch wyrażeń są równe, wyrażenia są także równe między sobą*. Lecz to ostatnie prawidło iest zawsze prawdziwe tylko dla liczb bezwzględnych, a niekiedy dla wyrażeń do iakich może doprowadzić Algiebra.

Aby przekonać się o pewności tego twierdzenia, okażemy, że ta sama liczba, może *algiebraicznie* mieć kilka pierwiastków *kwadratowych*, kilka pierwiastków *sześciennych*, kilka *czwartéj* potęgi, i t. d.

Jakoż oznaczymy przez  $x$  wyrażenie ogólne pierwiastku kwadratowego liczby  $a$ , zaś przez  $p$  *ważność liczebną*, czyli *arytmetyczną* tegoż pierwiastku; otrzymamy równanie  $x^2 = a$  czyli  $x^2 = p^2$ , a zatem  $x = \pm p$ . Skąd widzimy, że iakikolwiek znak damy przed *ważnością* arytmetyczną  $p$  pierwiastku kwadratowego z  $a$ ; kwadrat z niéy będzie zawsze  $a$ , zgodnie z tém, cośmy powiedzieli w ustępie 81.

Niech  $x$ , oznacza ogólne wyrażenie pierwiastku sześciennego z  $a$ ,  $p$  *ważność liczebną* tego pierwiastku, otrzymamy równanie  $x^3 = a$  czyli  $x^3 = p^3$ . Równanie to sprawdzi się naprzód przez  $x = p$ .

Uważamy teraz, że równanie  $x^3 = p^3$  może być tak wyrażone  $x^3 - p^3 = 0$ .

Lecz widzieliśmy (w ust: 31.) że wyrażenie  $x^3 - p^3$  jest podzielne przez  $x - p$ , i dale iloraz zupełny  $x^2 + px + p^2$ ; równanie więc powyższe może być wyrażone tak  $(x - p)(x^2 + px + p^2) = 0$ , równanie to sprawdzi się, czy to uczyniwszy  $x - p = 0$  skąd  $x = p$ , czy też uczyniwszy  $x^2 + px + p^2 = 0$ ,

$$\text{skąd} \quad x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2} \sqrt{-3}.$$

$$\text{czyli} \dots\dots\dots x = p \left( \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \right).$$

Widziemy przeto, że ilość  $a$ , ma trzy różne pierwiastki sześciennie to jest:

$$p, p \left( \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right), \text{ i } p \left( \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right).$$

Weźmy jeszcze do rozwiązania równanie  $x^4 = p^4$ , ( $p$  oznacza ważność liczebną  $\sqrt[4]{a}$ ). Równanie to może być wyrażone w postaci  $x^4 - p^4 = 0$ . Aże  $x^4 - p^4 = (x^2 - p^2)(x^2 + p^2)$  (ust: 19.) więc równanie dane przejdzie na  $(x^2 - p^2)(x^2 + p^2) = 0$  i sprawdzi się, czy to uczyniwszy  $x^2 - p^2 = 0$  skąd  $x = \pm p$ , czy uczyniwszy  $x^2 + p^2 = 0$  skąd

$$x = \pm \sqrt{-p^2} = \pm p \sqrt{-1},$$

a tak mamy cztery wyrażenia algebraiczne różne, pierwiastku czwartego stopnia z liczby  $a$ .

Weźmy do rozwiązania nowe równanie  $x^6 = p^6$  które tak może być wyrażone  $x^6 - p^6 = 0$ .

Ponieważ  $x^6 - p^6 = (x^3 - p^3)(x^3 + p^3)$ , (ust: 19) więc równanie dane przejdzie na

$$(x^3 - p^3)(x^3 + p^3) = 0, \text{ z równania } x^3 - p^3 = 0$$

rozwiązanego powyżéy, otrzymaliśmy

$$x=p \text{ i } x=p \left( \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \right).$$

Uważmy teraz równanie  $x^3 + p^3 = 0$ , wstawia-  
wszy w nie  $-p'$  zamiast  $p$ , zamienimy je na

$$x^3 - p'^3 = 0 \text{ skąd } x=p' \text{ i } x=p' \left( \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \right),$$

czyli, przywróciwszy zamiast  $p'$  iego. ważność  $-p$ ,

$$x=-p, \text{ i } x=-p \left( \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \right).$$

A tak równanie  $x^6 - p^6 = 0$ , i tém samém pier-  
piastek szóstego stopnia z ilości  $a$ , przyymie sześć  
ważności  $p, ap, a'p, -p, -ap, -a'p$ , biorąc dla

$$\text{skrócenia } \alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \alpha' = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Można więc wnieść (co w dalszym ciągu będzie  
z większą dokładnością dowiedzione,) że wszelkie  
równanie postaci  $x^m - a = 0$ , czyli  $x^m - p^m = 0$ ,  
ma  $m$  różnych pierwiastków.

173. Gdy w równaniach poprzedzających i w wy-  
padkach im odpowiadających uczynimy  $a=1$ , skąd  
 $p=1$ ; otrzymamy pierwiastki kwadratowe, sześcienn-  
ne, 4go stopnia i t. d. z iedności. I tak  $+1$  i  $-1$   
są dwa pierwiastki kwadratowe z iedności, albo-  
wiem równanie  $x^2 = 1$  daie  $x = \pm 1$ .

$$\text{Podobnie } +1, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2};$$

są trzy pierwiastki sześcienne z iedności, czyli pier-  
wiastki równania  $x^3 - 1 = 0$ .



A zaś  $+1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ , są cztery pierwiastki czwartego stopnia z jedności, czyli pierwiastki równania  $x^4 - 1 = 0$ .

174. Z rozbioru poprzedzającego wypada, że prawidła na działania z ilościami pierwiastkowemi, które są dokładne, o tyle, o ile działamy na liczbach bezwzględnych, prowadzą do niektórych skrótów, gdy działamy na wyrażeniach istotnie algebracyjnych; skrócenia te są potrzebne szczególnie dla ilości urojonych.

Aby np: otrzymać iloczyn z  $\sqrt{-a}$  przez  $\sqrt{-a}$  na mocy prawidła pod (ust: 170.) będzie:

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{+a^2}.$$

Aże  $\sqrt{a^2}$  równa się  $\pm a$  (ust: 172.), więc tu zachodzi wątpliwość, jaki powinien być znak przed ilością  $a$ , aby rozwiązać zadanie. Lecz prawdziwe rozwiązanie jest  $-a$ , dla tego, że w ogólności, aby podnieść  $\sqrt{m}$  do kwadratu, dosyć jest opuścić znak pierwiastkowy, a zatem,  $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$  zamieni się na  $(\sqrt{-a})^2$  to jest na  $-a$ .

Weźmy inny przykład. Aby otrzymać iloczyn z  $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ ; podług prawidła (ust: 170.) będzie  $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{+ab}$ . Aże  $\sqrt{ab} = \pm p$ , (ust: 172.) gdzie  $p$ , oznacza wartość arytmetyczną pierwiastku kwadratowego z  $ab$ ; więc prawdziwy wypadek powinien być  $-p$  czyli  $-\sqrt{ab}$ , w tym razie, w którym uważamy dwie ilości pierwiastkowe  $\sqrt{-a}$  i  $\sqrt{-b}$  jako poprzedzone znakami  $+$ .

Jakóż mamy

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \text{ i } \sqrt{-b} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1};$$

więc

$$\begin{aligned}\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1} \\ &= \sqrt{ab} \cdot (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

Podług tych prawideł otrzymamy na różne potęgi z  $\sqrt{-1}$ , następujące wypadki:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}, (\sqrt{-1})^2 = -1,$$

$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1},$$

$$\text{i } (\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 = -1 \times -1 = +1.$$

Ponieważ cztery potęgi daléy następujące otrzymalibyśmy mnożąc potęgę czwartą  $+1$ , przez pierwszą, przez drugą, przez trzecią i czwartą; więc otrzymalibyśmy na cztery nowe potęgi,  $+\sqrt{-1}$ ,  $-1$ ,  $-\sqrt{-1}$ ,  $+1$ ; a zatém, w ogólności wszelkie potęgi z  $\sqrt{-1}$  biorąc ich po cztery na ieden odział, dawać będą *peryodycznie* te cztery wartości  $\sqrt{-1}$ ,  $-1$ ,  $-\sqrt{-1}$ ,  $+1$ .

Znajdźmy ieszcze iloczyn z  $\sqrt[4]{-a}$  przez  $\sqrt[4]{-b}$ .

Ten podług prawidła będzie,  $\sqrt[4]{+ab}$ , a tém samém

$$(\text{ustę:172}) \sqrt[4]{+ab}, -\sqrt[4]{ab}, \sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt{-1}, -\sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt{-1}.$$

Aby oznaczyć prawdziwy iloczyn uważmy, że

$$\sqrt[4]{-a} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{-1}; \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt{-1};$$

$$\text{a że } \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{\sqrt{-1}})^2 = \sqrt{-1};$$

$$\text{więc } \sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt{-1}.$$

Zastósujemy powyższe rachunki do sprawdzenia

ilości  $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ , iako pierwiastku równania

$x^3 - 1 = 0$ , czyli pierwiastku sześciennego z 1. (us: 173).

Podług formuły,  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ,

$$\begin{aligned} \text{mamy} \quad & \left( \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{(-1)^3 + 3(-1)^2 \cdot \sqrt{-3} + 3(-1) \cdot (\sqrt{-3})^2}{8} \\ &+ \frac{(\sqrt{-3})^3}{8} = \frac{-1 + 3\sqrt{-3} - 3 \times -3 - 3\sqrt{-3}}{8} = \frac{8}{8} = 1. \end{aligned}$$

Podobnież sprawdzilibyśmy drugą ważność,

$$\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

#### § IV. Teorya wykładników. Wiadomości ogólne o szeregach.

175. Tu miéysce dać poznać dwie nowe notacye, których użytek bardzo iest dogodny w rachunkach algebranych. Są to *wykładniki ułomkowe* i *wykładniki odjemne*, które wypływają z prawideł wyciągania pierwiastków, i dzielenia iednomianów.

Niechby trzeba było wyciągnąć pierwiastek *n*-go stopnia z ilości takiéy iak  $a^m$ . Widzieliśmy (us: 163) że, gdy  $m$  iest wielokrotnością liczby  $n$ , potrzeba podzielić wykładnik  $m$ , przez skaźnik  $n$  pierwiastku.