

ROZDZIAŁ IV.

Równania niewyznaczone pierwszego i drugiego stopnia.

Wstęp. Gdy brzmienie zagadnienia podaie mniey równań, niż jest ilości niewiadomych, naówczas zagadnienie takowe zowie się *niewyznaczonym*, w tém znaczeniu że (Ust: 55.) iego równania, mogą być sprawdzone, przez nieskończenie wiele składów ważności, iakiebyśmy nadawali dla niewiadomych. Lecz często sama natura zagadnienia wymaga, ażeby ważności dla niewiadomych były wyrażone w *ilościach całkowitych*: w tym przypadku jedna z niewiadomych, dla której z razu można było nadawać ważności zupełnie dowolne, musi mieć same ważności całkowite, i takie, ażeby ważność odpowiadająca drugiey niewiadomey, czyli każdej innéy niewiadomey, była także wyrażona w liczbach całkowitych. Lecz ten warunek ogranicza liczbę rozwiązań, zwłaszcza, gdy zechcemy zatrzymać same *bezpośrednie rozwiązania*, to jest tylko te, które wypadną w liczbach całkowitych i dodatnych dla wszystkich niewiadomych.

Przedmiotem zagadnień niewyznaczonych pierwszego stopnia, jest rozwiązać je w liczbach całkowitych i dodatnych. Późniéy poznamy zamiar zagadnień niewyznaczonych drugiego stopnia.

§. 1. *Równania i zagadnienia pierwszego Stopnia z dwiema niewiadomymi ilościami.*

118. Każde równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, może (Ust: 64.) być sprowadzone do postaci $ax + by = c$, tu a, b, c , oznaczają liczby całkowite dodatne lub ujemne.

Uważamy naprzód, że jeżeli współczynniki a i b mają wspólny czynnik, który nie podzieli drugiej strony równania c ; natenczas równanie nie może być sprawdzone przez liczby całkowite.

Albowiem gdy $a = ha'$; $b = hb'$, równanie dane zamieni się w następujące,

$$ha'x + hb'y = c \text{ skąd } a'x + b'y = \frac{c}{h}; \text{ równanie}$$

to nie może być sprawdzone przez żaden układ wartości całkowitych dla x i y , dopóki c nie będzie podzielne przez h .

Założymy w tym wszystkiem co nastąpi, że a i b są liczby pierwsze pomiędzy sobą, albowiem gdyby miały wspólny czynnik, musiałoby c zawierać ten sam czynnik, w którym to przypadku możnaby go upuścić w równaniu.

119. Dla większej jasności okażmy rzecz na równaniach szczególnych, a potem ją uogólnimy.

Zadanie pierwsze. *Podzielić 159. na dwie części tak, ażeby jedna z tych części była podzielna przez 8, a druga przez 13.*

Oznaczmy przez x i y , ilorazy wypadające z podzielenia dwóch części szukanych, przez liczby szczególne 8 i 13, a zatem $8x$ i $13y$, oznaczać będą te dwie części, i mamy równanie

$$8x + 13y = 159 \dots (1),$$

które podług wystowienia powinno być rozwiązane

w liczbach całkowitych i dodatnych będących ważnościami dla x i y .

Z równania tego otrzymamy $\dots x = \frac{159 - 13y}{8}$,
wykonawszy dzielenie o ile można, będzie
 $x = 19 - y + \frac{7 - 5y}{8}$.

Uważamy teraz, że ważność dla x będzie liczbą całkowitą, jeżeli dla y nadamy ważność taką, ażeby $\frac{7 - 5y}{8}$ było liczbą całkowitą, iakoż oprócz tego z samego wysłowienia ten warunek jest potrzebny, zaś aby to nastąpiło *potrzeba*, ażeby $\frac{7 - 5y}{8}$ było liczbą iakąkolwiek całkowitą.

Niech t , będzie tą liczbą całkowitą (t jest ilością niewyznaczoną,) z tego przypuszczenia wypada, $\frac{7 - 5y}{8} = t$, a zatem $5y + 8t = 7 \dots (2)$ ważność dla x zamieni się na $x = 19 - y + t$. Wszelka ważność całkowita dla t , która ustawiona w równanie (2) da podobne równanie dla y sprawdzi ten warunek, aby $\frac{7 - 5y}{8}$ było liczbą całkowitą.

A zatem dwie ważności dla x i y odpowiadające, będą liczbami całkowitemi i sprawdzą opócz tego równanie (1), które widocznie wypada z wyrugowania

ilości t , z tych dwóch równań $\frac{7 - 5y}{8} = t$;

$x=19-y+t$. Trzeba więc teraz rozwiązać równanie (2) w liczbach całkowitych, którego współczynniki są mniejsze od współczynników równania

(1). Z równania (2) otrzymamy $y = \frac{7-8t}{5}$,

czyli odbywszy dzielenie częściowe, $y = 1 - t + \frac{2-3t}{5}$.

Wszelka wartość dla t , która ilość $2-3t$ uczyni wielokrotnością liczby 5, da także dla y liczbę całkowitą, a następnie będzie liczbą odpowiadającą zadaniu.

Uczynimy $\frac{2-3t}{5} = t'$, gdzie t' jest nową niewyznaczoną; otrzymamy $3t + 5t' = 2 \dots (3)$
a zatem $y = 1 - t + t'$.

(Równanie (2) oprócz tego wypada z wyrugowania ilości t' z tych dwóch równań.)

Trzeba teraz rozwiązać równanie (3) w liczbach całkowitych; wyprowadzimy z niego

$$t = \frac{2-5t'}{3} = -t' + \frac{2-2t'}{3};$$

uczyniwszy $\frac{2-2t'}{3} = t''$, będzie $2t' + 3t'' = 2 \dots (4)$,

i $t = -t' + t''$.

Zrównania (4) wyprowad: $t' = \frac{2-3t''}{2} = 1 - t'' - \frac{t''}{2}$.

Nakoniec $\frac{t''}{2} = t'''$; wypad: $t'' = 2t''' \dots (5)$,

i $t = 1 - t'' - t'''$.

Ponieważ w równaniu (5) współczynnik przy ilości t'' równa się *jedności*, więc wszelka ważność całkowita, nadana ilości t''' , da ważność całkowitą dla t'' . Oprócz tego dwie niewiadome główne x i y , i niewiadome pośrednie t , t' , t'' , t''' , są połączone z sobą przez te pięć równań:

$$\begin{aligned} x &= 19 - y + t. \\ y &= 1 - t + t', \\ t &= -t' + t'', \\ t' &= 1 - t'' - t''', \\ t'' &= 2t'''. \end{aligned}$$

A zatem, dając dla t''' iakąkolwiek ważność całkowitą, i postępując do ostatniego z tych równań do dwóch pierwszych, otrzymamy dla x i y odpowiadające ważności w liczbach całkowitych, które koniecznie sprawdzą równanie dane; albowiem, na mocy rozumowań powyższych, równanie to wypada z wyrugowania ilości t , t' , t'' , t''' , z pięciu równań, otrzymanych.

Lecz ażeby ilość t''' miała tylko takie ważności, któreby odpowiadały ważnościom w liczbach całkowitych dla x i y , trzeba te dwie niewiadome x i y wyrażać w *bezpośredniéj funkcyi* (immédiate)(*) ilości niewiadomej pośredniéj t''' za pomocą pięciu powyższych równań.

Wstawwszy w wyrażenie dla t' , ważność ilości t'' , zawierającą t''' ; otrzymamy

$$t' = 1 - 2t''' - t'''; \text{ czyli } t' = 1 - 3t''';$$

W wyrażenie zaś $t = -t' + t''$, wstawwszy wa-

(*) Zowiemy *funkcyą* pewnéj głoski uważaney za *zmienną*, wszelkie wyrażenie zawierające tę głoskę połączoną z ilościami wiadomemi.

żność ilości t' , otrzymamy $t = -t' + t'' = -1 + 3t''' + 2t''$:

Skąd $t = -1 + 5t'''$,

Podobnie znajdy: $y = -1(-1 + 5t''') + 1 - 3t'''$,

Skąd $y = 3 - 8t'''$.

Nakoniec $x = 19 - (3 - 8t''') + (-1 + 5t''')$, czyli
 $x = 15 + 13t'''$.

Łatwo sprawdzić, że z tych dwóch ostatnich równań wyrugowawszy t''' , otrzymamy równanie dane. Jakoż rozmnóżwszy wyrazy pierwszego równania przez 13, drugiego przez 8, i wypadki otrzymane dodawszy, będzie

$$13y + 8x = 159.$$

Czyniąc następnie $t''' = 0, 1, 2, 3 \dots$, albo $t = -1, -2, -3, \dots$ wyprowadzimy z formuł poprzedzających wszystkie wartości dla x i y , w liczbach całkowitych, bądź dodatnich, bądź ujemnych, które sprawdzą założenie: lecz jeżeli, w myśl brzmienia zadania, mamy zatrzymać same rozwiązania dające wartości, w liczbach całkowitych i dodatnich, w tym razie, t''' powinno przyjąć takie tylko wartości, któreby $3 - 8t'''$ i $15 + 13t'''$ uczyniły dodatnemi.

Lecz widocznie w ten czas tylko, gdy $t''' = 0$ i $t''' = 1$, warunek ten będzie dopełniony; albowiem wszelka wartość dodatnia dla t''' uczyni y ujemną, każda zaś wartość ujemna, liczebnie większa od 1, uczyni x ujemną.

Czyniąc więc następnie $t''' = 0, t''' = -1$,

$$\begin{cases} y = 3, & y = 11, \\ x = 15, & x = 2. \end{cases}$$

A zatem dwa tylko składy

$x = 15, y = 3, x = 2$ i $y = 11$, sprawdzą równanie
 $8x + 13y = 159$.

Co do zadania, którego to równanie jest tłumaczeniem algebricznym, ponieważ $8x$ i $13y$ oznaczają dwie części szukane, a zatem wypada, że 8×15 czyli 120, i 13×3 czyli 39, dają *pierwsze rozwiązanie*, tudzież że 8×2 czyli 16, i 13×11 , czyli 143, dają *drugie rozwiązanie*, a zatem liczba 159. może być podzielona, czy to na $120 + 39$, czy też na $16 + 143$.

120. Na drugi przykład weźmy równanie

$$17x - 49y = -8 \dots (1).$$

z tego zaraz otrzymamy $x = \frac{49y - 8}{17} = 2y + \frac{15y - 8}{17}$.

Ażeby więc ważność w liczbie całkowitej dla y , odpowiadała ważności także całkowitej dla x , *dosyć będzie* aby $15y - 8$ było wielokrotnością téj ważności dla x , przez 17.

Uczyńmy $\frac{15y - 8}{17} = t$, t jest niewiadomą niewyznaczoną pośrednią; (intermédiaire), z tego naznaczenia wypada $15y - 17t = 8 \dots (2)$,

i $x = 2y + t$.

(Wyrugowanie ilości t z tych dwóch równań, przywróciłoby równanie (1). Z równania (2) wyprowa-

dzimy $y = \frac{8 + 17t}{15} = t + \frac{8 + 2t}{15}$;

nowe to wyrażenie $\frac{8 + 2t}{15}$ powinno być liczbą całkowitą.

Uczyniwszy $\frac{8+2t}{15} = t'$; wypadnie

$$2t - 15t' = -8 \dots (3),$$

i $y = t + t'.$

Równanie zaś (3) da, $t = \frac{15t' - 8}{2} = 7t' - 4 + \frac{t'}{2}.$

A zatem $\frac{t'}{2}$ powinno być liczbą całkowitą. Uczyńmy

nakoniec $\frac{t'}{2} = t''$; otrzymamy $t' = 2t''$

i $t = 7t' - 4 + t'.$

Teraz, aby x i y , wyrazić w funkcji ilości niewyznaczonej t'' zbliżmy cztery równania

$$\begin{aligned} x &= 2y + t, \\ y &= t + t', \\ t &= 7t' - 4 + t'', \\ t &= 2t''. \end{aligned}$$

W równaniu 3ciem zamiast t' , połączmy iego wartość, będzie $t = 7 \times 2t'' - 4 + t''$, skąd $t = 15t'' - 4$, zamiast t i t' , połączmy ich wartości w równaniu drugim, będzie $y = 15t'' - 4 + 2t''$, czyli $y = 17t'' - 4$, nakoniec równanie pierwsze zamieni się na

$$x = 2(17t'' - 4) + 15t'' - 4, \text{ czyli } x = 49t'' - 12.$$

Z tych dwóch formuł wyrugowawszy t'' , otrzymamy równanie dane, albowiem jeżeli pierwsze pomnożymy przez 49, drugie przez 17, i odejmiemy dwa wypadki od siebie, otrzymamy

$$17x - 49y = -204 + 196 = -8.$$

Oprócz

Oprócz tego widzimy, że nadając dla b'' iakie-
kolwiek ważności dodatne; otrzymamy dla x i y ,
ważności podobnież dodatne, lecz nie można przy-
puścić aby t'' było odjemne.

Niech będzie $t'' = 1, 2, 3, 4, \dots$

Otrzymamy $y = 13, 30, 47, 64, \dots$

$x = 37, 86, 135, 184, \dots$

Liczba więc rozwiązań w ilościach całkowitych
i dodatnych danego równania, jest nieskończona,
a najmniejsze ważności są $x = 37, y = 13$.

Ważności te sprawdzą równanie, albowiem

$$17 \times 37 - 49 \times 13 = 629 - 637 = -8.$$

Nie należy w tym przykładzie opuszczać tych ro-
zumowań, iakie uczyniliśmy w pierwszym przykła-
dzie, aby usprawiedliwić wszystkie działania. Lecz
łatwo jest dla uczących się uczynić ie, przechodząc
w porządku z iednéj przemiany do drugiéj.

121. Można poprzedzający sposób postępowania
zamknąć w następujący treści.

Niech będzie $ax + by = c$ (1) równanie które
mamy rozwiązać. Aby to rozwiązanie skutecznić:
potrzeba wyciągnąć z tego równania ważność dla
niewiadomej, która ma najmniejszy współczynnik
np dla x, wykonać dzielenie o ile można, a tym
sposobem otrzymamy wyrażenie dla x, zawierające
w sobie y, złożone, z iednéj części całkowitéj, i
z iedney części ułomkowéj, które to wyrażenie na-
leży uczynić całkowitem. Tę drugą stronę uczy-
nić równą pierwszemu nie wyznaczonemu t, skąd wy-
padnie nowe równanie, zawierające w sobie y i t,
które można nazwać równaniem (2) a którego współ-
czynniki będą mniejsze od współczynników równania
(1); oprócz tego, ważność dla x wypadnie w fun-

kcyi całkowitey tych dwóch ilości y i t , równanie zaś dane wróci się, po wyrugowaniu ilości t z równania (2), i z równania, które daie ważność x w funkcyi y i t .

Z równania (2) wyprowadzić ważność dla y , i uskutecznić dzielenie o ile można; część ułomkową uczynić równą drugiey niewyznaczoney t' , a wypadnie równanie (3), zawierające t i t' , które będzie prościwsze od równań (1) i (2).

Ważność dla y , będzie więc wyrażona w funkcyi całkowitey zawierającej t i t' , równanie zaś dane wróci się po wyrugowaniu ilości t i t' , z równania (3) i dwóch równań które daia x w funkcyi całkowitey zawierającej y i t , a zaś y w funkcyi całkowitey zawierającej t i t' .

Postąpić z równaniem (3) tak, iak z równaniami (1) i (2) i dalej tak działać, dopóki się nieprzyjdzie do takiego równania, któreby zawierało dwie niewyznaczone, iedna zaś z nich miałaby spółczynnik iedność.

Wracać potem od tego ostatniego równania do poprzedzających, i szukać przez następne wstawiania ważności, wyrażenia dla x i y w funkcyi ostatniey niewyznaczoney.

Otrzymamy zatem dwie formuły, za pomocą których naznaczając dla pozostałej niewyznaczoney, ważności dowolne, otrzymamy wszystkie składy ważności w liczbach całkowitych, tak dodatnych, iak odjemnych, które sprawdzą równanie dane $ax + by = c$.

Jeżeli zażądamy samych całkowitych i dodatnych ważności dla x i y , naówczas dwie formuły przez swój skład skazaą, iakie ważności trzeba będzie nadać dla ostatniey niewyznaczoney, aby ten warunek był dopełniony.

Uwagi. 1a Sposób któryśmy okazali, powinien

zawsze doprowadzić do ostatniego równania, w którymby współczynnik jednej z niewyznaczonych był *jednością*.

Jakoż, w działaniu pierwszym, przychodzimy do podzielenia współczynnika większego, dwóch niewiadomych, przez współczynnik mniejszy, w działaniu drugim, dzielimy współczynnik mniejszy, przez resztę wypadłą z ich dzielenia, w trzecim, dzielimy pierwszą resztę przez drugą, i tak następnie; to jest: stosujemy sposób znalezienia dzielnika wspólnego do tych dwóch współczynników. A zatem, ponieważ według założenia obadwa współczynniki są liczbami pierwszymi między sobą (ust: 118.) w końcu przyjdziemy do reszty $= 1$, która będzie współczynnikiem jednej z niewyznaczonych wprowadzonych w rachunek.

2a Stosując ten sposób do równania, w którym współczynniki dwóch niewiadomych zawierają czynnik wspólny, nieznamydujący się w drugi stronie równania, a z razu niedostrzeżony; naówczas ciąg działania da poznać, że *nie można rozwiązać zadania w liczbach całkowitych*. Weźmy na przykład równanie $49x - 35y = 11$.

(Tu 7 jest wspólnym czynnikiem współczynników ilości x i y , lecz nie wchodzi w drugą stronę równania).

$$\text{Wyprowadzimy } y = \frac{49x - 11}{35} = x + \frac{14x - 11}{35}.$$

$$\text{Uczyniwszy } \frac{14x - 11}{35} = t, \text{ skąd } y = x + t;$$

$$\text{będzie } x = \frac{35t + 11}{14} = 2t + \frac{7t + 11}{14}.$$

$$\text{Uczyniwszy } \frac{7x + 11}{14} = t' \text{ skąd } x = 2t + t',$$

będzie
$$t = \frac{14t' - 11}{7} = 2t' - 1 - \frac{4}{7}.$$

To ostatnie równanie *nie może być rozwiązane w liczbach całkowitych dla t i t', ponieważ $\frac{4}{7}$ jest ułamkiem*, a zatem, także nie można wyprowadzić z równania danego dwóch wartości dla x i y, w liczbach całkowitych.

122. W sposobie powyższym można użyć *skrótów*, iak to zaraz poznamy.

Weźmy równanie już rozwiązane $17x - 49y = -8$;

Daie ono
$$x = \frac{49y - 8}{17}.$$

Ponieważ $49 = 17 \times 2 + 15 = 17 \times 3 - 2$;

więc $\frac{49y}{17} = 3y - \frac{2y}{17}$ i wartość dla x będzie

$$x = 3y - \frac{(2y + 8)}{17};$$

idzie teraz o to, aby znaleźć dla y taką liczbę całkowitą, któraby wyrażenie $\frac{2y + 8}{17}$ uczyniła także ilością całkowitą. Wyrażenie to można napisać tak:

$2 \frac{(y + 4)}{17}$; a że dwie liczby 17. i 2, są między sobą

pierwszemi, więc ażeby $\frac{2(y + 4)}{17}$ było liczbą całkowitą,

potrzeba aby $(y + 4)$ było podzielne przez 17.

Uczyńmy więc $\frac{y+4}{17}=t$, gdzie t jest liczbą całkowitą zupełnie dowolną: wypadnie

$$y=17t-4,$$

i ważność dla x zamieni się na

$$x=3y-2t,$$

wstawiwszy zamiast y , iego ważność zawierająca w sobie t , otrzymamy $x=49t-12$.

Te formuły dadzą same całkowite rozwiązania założonego równania, bo z nich wyrugowawszy t , otrzymamy równanie dane $17x-49y=-8$. Czyniąc $t=1, 2, 3, 4, \dots$ otrzymamy dla x i y ważności całkowite i dodatne, lecz nie można uczynić $t=0$, ani brać dla t ważności odjemney. Stąd widzimy, iak są ważne takowe skrócenia, przez nie bowiem, wprowadziliśmy tylko *iedną niewyznaczoną* do rachunku.

Takowe uproszczenia mają miejsce prawie we wszystkich przykładach, lecz używać ich można tylko w równaniach szczególnych, iak to ieszcze poznamy z następującego zagadnienia,

123. *Drugie zagadnienie. Zapłacić 78. groszy pięciogroszówkami i trzygroszówkami, nie używając innéy monety?*

Niechay x oznacza liczbę pięciogroszówek, y liczbę trzygroszówek, równanie

$$5x+3y=78.$$

da dla x, y , same ważności całkowite i dodatne podług brzmienia zadania. Rozwiązawszy to równanie względem y , będzie

$$y=\frac{78-5x}{3}$$

wykonawszy zaś dzielenie iest

$$y = 26 - x - \frac{2x}{3},$$

czyli $y = 26 - 2x + \frac{x}{3}.$

Uważając pierwszą postać ważności dla y widzimy, że ta odpowiadając ważności także całkowitej dla x , nie może być sama całkowitą iak tylko

w ten czas, gdy $\frac{2x}{3}$ będzie liczbą całkowitą: a że 2 i

3 są liczby pierwsze między sobą, więc x musi być podzielne przez 3. niech więc będzie $x = 3t$,
stad wypadnie $y = 26 - x - 2t$,
czyli $y = 26 - 5t$.

Uważając drugą ważność widzimy od razu, że x powinno być wielokrotnością liczby 3, a zatem

$$x = 3t,$$

skąd ieszcze wypada $y = 26 - 2x + t$, czyli $y = 26 - 5t$.

Te dwie formuły okazują, że t powinno być dodatne, i nie może mieć większej ważności iak

$$\frac{26}{5} \text{ czyli } 5 \frac{1}{5}.$$

Uczyńmy więc $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$;

a wypadnie $x = 0, 3, 6, 9, 12, 15$,

$$y = 26, 21, 16, 11, 6, 1.$$

A tak, można zadosyc uczynić zadaniu sześcióróżnemi sposobami, to iest, albo dać 26. trzygrozowych, a żadney pięciogroszówki; albo 21. trzygrozówek a 3. pięciogroszówek; albo 16. trzygrozówek, a 6. pięciogroszówek; i tak następnie.

Trzecie zagadnienie. Zależć liczbę, którą podzieliwszy przez 39, otrzymamy resztę 16; podzieliwszy zaś przez 56, otrzymamy resztę 27?

Niech x oznacza iloraz całkowity z podzielenia liczby szukaney przez 39, a zatem pierwsze wyrażenie tej liczby będzie $39x + 16$, niech y oznacza całkowity iloraz z podzielenia tejże liczby szukaney, przez 56, a zatem $56y + 27$, jest drugim wyrażeniem liczby szukaney;

Otrzymamy więc równanie

$$39x + 16 = 56y + 27,$$

czyli skróciwszy

$$39x - 56y = 11 \dots \dots \dots (1).$$

skąd,
$$x = \frac{56y + 11}{39} = y + \frac{17y + 11}{39},$$

czyli

$$x = 2y - \frac{(22y - 11)}{39} = 2y - \frac{11(2y - 1)}{39}.$$

Ponieważ w wyrażeniu $\frac{11(2y - 1)}{39}$, czynnik 11 i 39,

są liczby pomiędzy sobą pierwsze, aby więc to wyrażenie było podzielne przez 39, potrzeba, aby $2y - 1$ było podzielne przez 39.

Uczyńmy przeto
$$\frac{2y - 1}{39} = t,$$

skąd
$$2y - 39t = 1, \dots \dots \dots (2),$$

a następnie
$$x = 2y - 11t.$$

Z równania (2) wypada

$$y = \frac{39t + 1}{2} = 19t + \frac{t + 1}{2};$$

uczyniwszy $\frac{t+1}{2}=t'$, otrzyma: równanie $t=2t'-1$,

a następnie..... $y=19t+t'$.

Jeżeli w tém ostatniém równaniu zamiast t , położymy jego wartość zawierającą t' , równanie to zamieni się na następujące:

$$y=19(2t'-1)+t' \text{ skąd } y=39t'-19;$$

zamiast y i t , położywszy ich wartość w równaniu oznaczającym wartość dla x , otrzymamy:

$$x=56t'-27.$$

Według tych dwóch formuł widzimy, że t' może mieć iakąkolwiek wartość dodatnią,

Niech będzie $t'=1$, skąd $y=39-19=20$;

$$x=56-27=29.$$

wartość tę zamiast x wstawiając w wyrażenie $39x+16$, otrzymamy $39 \times 29+16$ czyli 1147 najmniejszą liczbę, która odpowie warunkom zadania.

Uczyniwszy $t'=2$, otrzymamy $x=56 \times 2-27=85$; a zatem $39x+16=39 \times 85+16=3331$ i tak następnie:

Można jeszcze sprawdzić wystowienie na dwóch dopiero otrzymanych liczbach.

Zważywszy formuły, za pomocą których otrzymaliśmy wszystkie składy wartości dla niewiadomych x i y w różnych zagadnieniach: dotąd rozwiązanych pod względem równania tychże zagadnień; poznamy, iż mają następującą własność.

Spółczynniki ilości niewyznaczonej wchodzącej w te formuły, są te same (oprócz znaku przy jednym z dwóch) co spółczynniki ilości x i y , w danem równaniu to jest; w wartości dla x , spółczynnik ilości niewyznaczonej, równa się spółczynnikowi ilości y w równaniu danem; a w wartości dla y , spół-

czynnik niewyznaczony, równa się współczynnikowi ilości x w równaniu daném, wziętemu ze znakiem przeciwnym, lub na odwrot, (co się tyczy znaków dwóch współczynników).

Aby okazać tę własność, weźmy równanie ogólne

$$ax + by = c, \dots\dots\dots (1),$$

i daymy na to, że zastosowawszy sposób podany, otrzymaliśmy dwie formuły

$$x = mt + A \dots\dots\dots (2),$$

$$y = nt + B \dots\dots\dots (3).$$

Uważamy na przód, że w tych formułach współczynniki m i n , powinny być liczbami pierwszymi pomiędzy sobą, albowiem jeżeliby miały czynnik wspólny np,

$$m = m'k, \quad n = n'k,$$

formuły te zamieniłyby się na

$$x = m'kt + A,$$

$$y = n'kt + B,$$

uczyniwszy $t = \frac{t'}{k}$ otrzymalibyśmy:

$$x = m't' + A, \quad y = n't' + B,$$

a z tego wypadłoby, że wartości ułamkowej dla t to jest $\frac{t'}{k}$, odpowiadałyby wartości całkowite dla

x i y , co byłoby przeciwne postępowaniu, według którego wszystkie ilości niewyznaczone, wprowadzone w ciąg działania, powinny być całkowite.

To założywszy, widzieliśmy poprzedniczo, że po wyrugowaniu ilości t , z równań (2) i (3), powinniśmy otrzymać równanie (1).

Lecz, aby wykonać takowe rugowanie, dosyć będzie rozmnożyć równanie (2) przez n , a równanie (3) przez m , potem odjąć iedno od drugiego, a otrzymamy.

$$nx - my = nA - mB,$$

równanie to powinno być to samo, co równanie

$$ax + by = c,$$

a zatem iest

$$n = a; m = -b.$$

Ponieważ na równaniach (1) i (2), można wykonać odejmowanie w porządku odwrotnym, więc otrzymamy ieszcze równanie

$$my - nx = mB - nA;$$

które porównawszy z równaniem (1), wypadnie,

$$n = -a; m = b,$$

co było do okazania.

Inaczéy. Ponieważ ważności (2) i (3) powinny sprawdzić równanie (1), iakakolwiek będzie ważność dla t , a zatem

$$a(mt + A) + b(nt + B) = c,$$

rozwinąwszy i uporządkowawszy podług t , otrzymamy;

$$(am + bn)t + aA + bB = c.$$

Aże uczyniwszy $t = 0$ w formułach (2) i (3), otrzymamy $x = A$ i $y = B$, i te ważności powinny czyścić ieden skład, więc oddzielnie będzie

$$aA + bB = c;$$

i wypadek poprzedzający zamieni się na

$$(am + bn)t = 0.$$

Lecz aby się ta równość sprowadziła, gdy iakąkolwiek ważność całkowitą nadamy dla t , potrzeba aby było

$$am + bn = 0; \text{ skąd } \frac{n}{m} = -\frac{a}{b};$$

a ponieważ widzieliśmy już że m i n , również iak a i b , są pomiędzy sobą pierwsze, więc powinno być

$$\begin{aligned} m &= -b, \quad n = a; \\ m &= b', \quad n = -a, \end{aligned}$$

125. Z resztą można téj własności dać dowodzenie ogólniejsze, które jest następujące.

Weźmy jeszcze równanie

$$ax + by = c \dots (1);$$

i załóżmy że iakim bądź sposobem otrzymaliśmy

$$x = \alpha \text{ i } y = \beta,$$

na pierwsze rozwiązanie w liczbach całkowitych; (dodatnych lub ujemnych); mamy dowieść, że wszystkie inne rozwiązania są zawarte w tych dwóch formułach

$$\left. \begin{aligned} y &= \beta + at \\ x &= \alpha - bt \end{aligned} \right\} \text{ lub też } \left\{ \begin{aligned} y &= \beta - at, \\ x &= \alpha + bt; \end{aligned} \right.$$

t oznacza liczbę całkowitą zupełnie dowolną.

Jakoż ponieważ α i β , czynią pierwszy skład ważności dla x i y , w liczbach całkowitych, więc

$$a\alpha + b\beta = c \dots (2).$$

Wyrazy tego równania odiawszy od odpowiediających wyrazów równania (1), otrzymamy następujące

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0 \dots (3),$$

które można wziąć za równanie dane.

Ażé równanie (3) może być wyrażone w postaci

$$x - \alpha = - \frac{b(y - \beta)}{a};$$

więc, aby ważność dla x , odpowiadająca ważności całkowitej dla y , sama była całkowitą, musi $b(y - \beta)$ być podzielne przez a ; lecz wiadomo (ustę: 118) że współczynniki a i b , są pierwsze między sobą; bo inaczej równanie nie mogłoby być rozwiązane w liczbach całkowitych, a zatem potrzeba, żeby $y - \beta$, było wielokrotnością ilości a .

Uczynimy więc $y - \beta = at$,

skąd $x - \alpha = -bt$;

i będzie

$$y = \beta + at,$$

$$x = \alpha - bt.$$

z równania zaś (3) wyprowadzimy

$$y - \beta = - \frac{a(x - \alpha)}{b},$$

więc założywszy $x - \alpha = bt$,

wypadnie $y - \beta = -at$;

a stąd

$$x = \alpha + bt,$$

$$y = \beta - at$$

Łatwo się przekonać, że bez względu na ważność dla t , ważności $y = \beta + at$, $x = \alpha - bt$, zadosyć uczynią zagadnieniu.

Jakoż, jeżeli te ważności wstawimy w równanie dane, otrzymamy $a(\alpha - bt) + b(\beta + at) = c$, czyli skróciwszy, $a\alpha + b\beta = c$,

równość zupełna, ponieważ α i β , podług przypuszczenia, rozwiązują zadanie.

126. *Wnioski.* Gdy w formułach

$$y = \beta + at,$$

$$x = \alpha - bt,$$

uczynimy następnie

$t = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ i $t = -1, -2, -3 \dots$;

te formuły zamieniają się na

$$\left. \begin{aligned} y &= \beta, \beta + a, \beta + 2a, \beta + 3a, \dots \\ x &= \alpha, \alpha - b, \alpha - 2b, \alpha - 3b, \dots \end{aligned} \right\} \text{ i } \left\{ \begin{aligned} y &= \beta - a, \beta - 2a, \beta - 3a, \dots \\ x &= \alpha + b, \alpha + 2b, \alpha + 3b, \dots \end{aligned} \right.$$

Skąd widzimy, że wszystkie rozwiązania danego zagadnienia w liczbach całkowitych, dodatnich lub odjemnych, tworzą dwa postępy arytmetyczne, których stosunkiem dla ważności x , jest współczynnik ilości y w równaniu danem, zaś dla ważności y' , jest współczynnik ilości x , także w równaniu danem.

127. *Inny sposób.* Wypada z rozbioru pod (ustę: 124.), że wszelka trudność w rozwiązaniu zupełnym równania $ax + by = c$, na tem polega, aby otrzymać pierwsze rozwiązanie; ponieważ potem można otrzymać wszystkie inne rozwiązania za pomocą formuł

$$x = \alpha - bt, \quad y = \beta + at.$$

Ta uwaga poda nam drugi sposób rozwiązania zagadnień niewyznaczonych.

Polega on na głównych własnościach ułamków ciągłych.

Weźmy na pierwszy przykład równanie już (pod ustę: 120) rozwiązane

$$17x - 49y = -8.$$

Zamieniwszy $\frac{17}{49}$ na ułomek ciągły i obliczywszy ułamki przywiedzione, te będą.

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{8}{23}, \frac{17}{49}.$$

Lecz wiadomo z Arytmetyki, że licznik różnicy między dwoma następującymi po sobie, przywiedzionymi ułomkami równa się $a + 1$; jeżeli ułomek przywiedziony, od którego odeymnie się inny, jest rzędu parzystego, zaś, $a - 1$, jeżeli ułomek przywiedziony jest rzędu nieparzystego.

Ponieważ więc $\frac{17}{49}$ jest rzędu nieparzystego, a zatem powinno być

$$\frac{17}{49} - \frac{8}{23} = \frac{-1}{49 \times 23}, \text{ skąd } 17 \times 23 - 49 \times 8 = -1.$$

(równość tę sprawdzić można odbywszy rachunek).

To założywszy, wyrazy tego sprawdzonego równania rozmnóżmy przez 8, to jest: przez drugą stronę, wziętą ze znakiem przeciwnym, danego równania, a otrzymamy:

$$17 \times 23 \times 8 - 49 \times 8 \times 8 = -8,$$

$$\text{czyli } 17 \times 184 - 49 \times 64 = -8,$$

równość jest oczywista, różniąca się od danego równania tylko w tém, że w miejsce x wchodzi 184, w miejsce y wchodzi 64; skąd widzimy; że

$$x = 184, \text{ i } y = 64,$$

rozwiązuia dane równanie.

Otrzymawszy to pierwsze rozwiązanie, mamy (ustę: 125), na wyznaczenie innych, formuły

$$x = 184 + 49t, y = 64 + 17t.$$

Jeżeli chcemy otrzymać wartości tylko w liczbach całkowitych, i dodatnie, potrzeba uczynić t dodatnim, albo $= 0, -1, -2, -3$. Przypuściwszy że $t = -3$, otrzymamy $x = 37, y = 13$; jest to skład najmniejszych wartości dla x i y otrzymanych (pod ustę: 120) które zadosyć uczynić mogą warunkom zagadnienia.

128. Aby tę rzecz uogólnić, weźmy równanie

$$ax - by = c \dots (1).$$

gdzie a i b są liczby bezwzględne, lecz c może być dodatnie lub odjemne.

Zamieńmy $\frac{a}{b}$ na ułomek ciągły, który według swojej własności, powinien być nieprzywiedlny (irréductible) (ustęp 118), zrobmy ułamki przywiedzione następne, i niech ostatni będzie $\frac{a}{b}$ przedostatni $\frac{m}{m'}$. Będzie, $a \times m' - b \times m = \pm 1$; to jest: $+1$, jeżeli ułomek przywiedziony $\frac{a}{b}$ jest rzędu parzystego, zaś -1 , ie-

żeli jest rzędu nieparzystego.

Przypuśćmy na chwilę, że jest rzędu parzystego, mamy w tym razie $\dots a \times m' - b \times m = +1$; rozmnożywszy obie strony przez c

będzie $\dots a \times m'c - b \times mc = c$,

wypadek który różni się od równania $ax - by = c$,

tylko tém, że zamiast x i y jest $m'c$ i mc ; a zatem $x = m'c$ i $y = mc$ dają rozwiązanie równania.

Jeżeli ułamek $\frac{a}{b}$ jest rzędu nieparzystego, mamy

$$a \times m' - b \times m = -1; \text{ rozmnożywszy przez } -c, \\ \text{bądźcie } \dots \dots \dots a \times -m'c - b \times -mc = c.$$

Porównyując to równanie sprawdzone, z równaniem $ax - by = c$; rozwiązane będzie $x = -m'c$, $y = -mc$.

Jeżeli rozwiązanie jest postaci $\dots ax + by = c$, to jest, jeżeli dwa współczynniki a i b są z temi samemi znakami, można to równanie uprościć pisząc je tak: $\dots \dots \dots ax - b \times -y = c$,

Tworząc dopiero iak wyżéy

$$\text{warunek } \dots \dots \dots a \times m'c - b \times mc = c,$$

$$\text{albo też } \dots \dots \dots a \times -m'c - b \times -mc = c,$$

wniesiemy, że $x = m'c$, $y = -mc$, ważności $x = -m'c$, $y = -mc$, rozwiążą równanie. A tak, gdy iakiekolwiek będzie równanie dane, można zawsze sposobem ułamków ciągłych, otrzymać pierwsze rozwiązanie równania; zaś formuły $x = \alpha - bt$, $y = \beta + at$, dadzą wszystkie inne ważności.

129. Zastosujemy ten sposób do nowego przykładu. Weźmy do rozwiązania równanie

$$29x + 17y = 250.$$

Ułamek $\frac{29}{17}$ zamieniony na ułamek ciągły, da ułamki przywiedzione następne, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{29}{17}$.

Skąd wypada sprawdzenie $29 \times 7 - 17 \times 12 = -1$,
(tu ułamek $\frac{29}{17}$ jest rzędu nieparzystego).

Mnóż-

Mnożmy obie strony tego równania przez -250 , a otrzymamy $29 \times -1750 - 17 \times -3000 = 250$; a że równanie dane może być tak napisane:

$$29 \times x - 17 \times -y = 250;$$

więc ważność $x = -1750$, $y = 3000$, rozwiązuje równanie.

Formuły przeto zamieniają się na $\begin{cases} x = -1750 + 17t, \\ y = 3000 - 29t. \end{cases}$

Zatrzymując rozwiązanie tylko w liczbach całkowitych i dodatnich, potrzeba uczynić t odjemnym, zmieniając znak przy ilości t , skąd wypada, $x = -1750 + 17t$, $y = 3000 - 29t$, a zatem jest rzeczą widoczną, że ważności dla x i y będą dodatnie tylko w ten czas, gdy będzie

$$\left. \begin{array}{l} 17t > 1750, \\ 29t < 3000, \end{array} \right\} \text{ skąd } \begin{cases} t > \frac{1750}{17}, \\ t < \frac{3000}{29}, \end{cases}$$

czyli wykonawszy dzielenie, $t > 102 \frac{16}{17}$, lecz $t < 130 \frac{13}{29}$.

A zatem $t = 103$ jest jedną tylko ważnością dla ilości niewyznaczonej, która uczyni x i y dodatnimi.

Jeżeli więc $t = 103$, będzie $x = 1$, $y = 13$, a te ważności wstawione w równanie, dadzą

$$29 \times 1 + 17 \times 13 = 29 + 221 = 250.$$

Widzimy z jaką ścisłością sposób poprzedzający dał wszystkie rozwiązania równań.

130. Są przypadki, w których pierwsze rozwiązanie może być otrzymane, nie zamieniając $\frac{a}{b}$ na ułamek ciągły:

12. Jeżeli jeden ze współczynników a i b , jest liczbą zupełnie ilorazową ilości wiadomej c ; równanie od razu da pierwsze rozwiązanie.

Weźmy na przykład równanie $5x + 3y = 78$, współczynnik 3, dzieli 78, i daie na iloraz 26.

A zatem, uczyniwszy $x = 0$, $y = 26$, równanie będzie sprawdzone,

albowiem $5 \times 0 + 3 \times 26 = 78$;

inne rozwiązania znajdziemy za pomocą formuł

$$x = 3t$$

$$y = 26 - 5t.$$

Weźmy jeszcze równanie $12x + 35y = 156$.

156 jest podzielne przez 12, i daie na iloraz 13; a zatem, $x = 13$, $y = 0$, czynią pierwszy skład wartości: na inne rozwiązania mamy $x = 13 - 35t$, $y = 12t$.

22. Ile razy summa albo różnica współczynników a i b , rozmnożona względnie przez dwie liczby, da liczbę ilorazową drugiej strony równania; można otrzymać pierwsze rozwiązanie.

Weźmy na przykład równanie $25x - 16y = 12$.

Ponieważ czyniąc $x = 2$, $y = 3$,

otrzymamy $25 \times 2 - 16 \times 3 = 12$,

więc rozmnożywszy obie strony tego równania przez 6, to jest: przez iloraz z podzielenia 12 przez 2, wypadnie $25 \times 12 - 16 \times 18 = 12$. Skąd wniesiemy, że $x = 12$, $y = 18$, sprawdzają dane równanie.

Weźmy jeszcze równanie $13x - 47y = 0$.

Równanie to widocznie się sprawdza przez $x = 0$, $y = 0$.

A zatem formuły ogólne są $x = 47t$, $y = 13t$.

Zresztą, te sposoby otrzymania pierwszych wartości, są szczególnemi tylko dla pewnych równań; gdy tymczasem zamiana na ułamek ciągły, jest sposobem zawsze pewnym, do otrzymania wartości szukanych prowadzącym.

131. Można, z samego weyrzenia na znaki równania $ax + by = c$ poznać, czyli liczba rozwiązań w liczbach całkowitych i dodatnich jest ograniczona; czy też nieskończona.

1^a. Ile razy b jest dodatnie, (bo a można zawsze uważać za takie), tyle razy liczba rozwiązań jest ograniczona.

Jakoż wyprowadzimy z równania danego

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

To uczyniwszy, jeżeli c jest odjemne, iakąkolwiek wartość nadamy dla y , wartość odpowiadająca dla x , będzie odjemną, a zatem w tym przypadku równanie nie przyymie żadnego rozwiązania.

Jeżeli c jest dodatnie, nie można dla y nadawać wartości dodatnich większych iak $\frac{c}{b}$, inaczey x będzie odjemne, a zatem i t. d.

2^a. Ile razy b jest odjemne, iakikolwiek będzie znak przy ilości c , liczba rozwiązań jest nieograniczona.

Iakoż formuły $x = a - bt$, $y = \beta + at$, jeżeli znak przy b uczynimy widocznym, zamienia się

$$\text{na } \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} x = a + bt, \\ y = \beta + at. \end{array} \right.$$

Lecz, biorąc przypadek nayniedogodniejszy, to jest ten, w którym α i β są liczbami odjemnemi, chcąc aby x i y były dodatne, potrzeba nadawać dla t ważności liczebne większe od $\frac{\alpha}{b}$ i $\frac{\beta}{a}$. A zatem

można nadać dla t ważności całkowite iakiegokolwiek większe od tych ilorazów.

W przypadku w którym liczba rozwiązań jest ograniczona, można zawsze oznaczyć granice między którymi powinny być zawarte ważności ilości niewyznaczonej t , uważając dwie formuły, które

w tym przypadku są
$$\begin{cases} x = \alpha - bt, \\ y = \beta + at. \end{cases}$$

W tym razie dosyć jest naznaczyć . . .
$$\begin{cases} \alpha - bt > 0, \\ \beta + at > 0, \end{cases}$$

i z tych nierówności wyprowadzić za pomocą przekształceń wyłożonych (ustę; 101) dwa inne wyrażenia nierówności, którychby pierwsze strony zawierały tylko ilość t . Tym sposobem otrzymamy zupełną liczbę rozwiązań danego zagadnienia.

§ II. Równania i zagadnienia z trzema lub większą liczbą niewiadomych.

132. Nayprzód poznamy przypadek dwóch równań z trzema niewiadomymi.

Weźmy na pierwszy przykład, dwa równania

$$5x + 4y + z = 272 \dots (1),$$

$$8x + 9y + 3z = 656 \dots (2).$$