

§. III. Zagadnienia prowadzące do wypadków odjemnych.

Teorya ilości odjemnych.

58. Użycie znaków algebraicznych do rozwiązywania zagadnień prowadzi często do wypadków których z razu nie umiemy sobie wytłómaczyć: lecz zastanawiając się nad niemi, odkrywamy ich znaczenie i nawet tę z nich odnosimy korzyść, że tém więcéy uogólniamy ięzyk algebraiczny.

Weźmy to pierwsze zadanie. *Znaleźć liczbę która dodana do liczby b , uczyni sumę równą a .*

Rozwiązanie. Niech x oznacza liczbę szukaną, a zatem będzie równanie,

$$b + x = a: \text{ skąd } x = a - b$$

To wyrażenie czyli ta *formuła* da ważność dla x we wszystkich szczególnych przypadkach danego zagadnienia.

Niech będzie $a=47$, $b=29$: a zatem $x=47-29=18$:
 jeżeli $a=24$, $b=31$: a zatem $x=24-31$.

ponieważ 31 równa się $24+7$, a zatem ważność dla x może być wyrażona tak $x=24-24-7$, czyli przywiodłszy $x=-7$.

Ważność ta otrzymana dla x jest odjemna. Lecz iak ją wytłómaczyć? Jeżeli się zwrócimy do brzmienia zadania, postrzeżemy, że jest rzeczą niepodobną, ażeby 31 powiększone pewną liczbą, uczyniło sumę 24; albowiem iuż samo 31 jest większe od 24, a zatem żadna liczba w tym przypadku nie może zadość uczynić zadaniu. Lecz jeżeli w równaniu $31+x=24$ zamiast wyrazu $+x$ położymy ważność jego odjemną -7 ; otrzymamy $31-7=24$, równa-

nie prawdziwe, które oznaczają, że liczba 31 zmniejszona 7, da na różnicę 24. *Wypadek odjemny* $x = -7$ oznacza, że zagadnienie według swego brzmienia nie może być sprawdzone: lecz uważając go bez względu na znak, to jest, biorąc $x = 7$; sprawdźmy takowa ważność zagadnienia, lecz wysłowione w ten sposób: *Znaleźć liczbę która odjęta od 31 da różnicę 24*, które to brzmienie tém się różni od podanego z razu, że tu zamiast *dodana* wchodzi *odjęta*, zamiast *summę* wchodzi *różnicę*. Aby więc rozwiązać nowe zagadnienie, dosyć będzie napisać

$$31 - x = 24: \text{ skąd } 31 - 24 = x \text{ czyli } x = 7.$$

Weźmy inne zadanie. *Ojciec ma lat a, syn ięgo lat b. Pytanie za ile lat wiek syna równać się będzie $\frac{1}{4}$ wieku oycy?*

Rozwiązanie.

Oznaczmy liczbę lat szukanych przez x a zatem $a+x$ i $b+x$ oznaczać będą wiek oycy i syna, po upływie lat oznaczonych przez x ; a zatem będzie równanie $b+x = \frac{a+x}{4}$ skąd $x = \frac{a-4b}{3}$.

$$\text{Uczyńmy } a=54; b=9, \text{ a zatem } x = \frac{54-36}{3} = 6.$$

Jakoż, jeżeli ojciec ma lat 54, a syn 9 lat, po 6 latach ojciec będzie miał 60, a syn 15 lat; to jest, czwartą część 60, a zatem $x=6$ sprawdza zagadnienie.

Uczyńmy $a=45, b=15$ otrzymamy $x = \frac{45-60}{3}$ to jest $x = -5$ (ustęp 25). Lecz iak wytłómaczyć *wypadek odjemny* $x = -5$?

Zwróćmy się do równania powyższego, które w tym szczególnym przypadku jest

$$15 + x = \frac{45 + x}{4}$$

Równanie to zawiera oczywistą sprzeczność, albowiem drugą stronę wyraziwszy przez $\frac{45}{4} + \frac{x}{4}$, widzimy, że każda z dwóch części pierwszej strony, jest większa od każdej z dwóch części drugiej strony. Lecz jeżeli w tém równaniu zamiast x wstawimy -5 , otrzymamy $15 - 5 = \frac{45 - 5}{4}$ czyli $10 = 10$,

równanie dokładne, jeżeli w miejsce dodania pewnej liczby lat, do wieku oycy i syna, odejmiemy 5 lat.

A zatem wypadek, któryśmy otrzymali nie uważając na jego znak sprawdzi następujące zadanie; *Oyciec ma lat 45, syn 15. Pytanie w jakim czasie wiek syna będzie $\frac{1}{4}$ wieku oycy?*

Równanie podług tego nowego brzmienia będzie:

$$15 - x = \frac{45 - x}{4}, \text{ stąd } 60 - 4x = 45 - x \text{ a zatem } x = 5.$$

Jakoż, zastanowiwszy się nad brzmieniem tego zagadnienia, widzimy, że stósunek wieku syna do

wieku oycy jest $\frac{15}{45}$ czyli $\frac{1}{3}$, więc wiek syna nie mo-

że już więcej stać się $\frac{1}{4}$ wieku oycy. Lecz było tak pierwéj, ponieważ okazaliśmy już (pod ustęp: 6) sposobem ogólnym, że dodając do licznika i mianownika tę samą liczbę; ważność ułamku zawsze się powiększa. Przeciwnie zmniejsza się ta ważność,

jeżeli tak od licznika iak od mianownika odeymie-
my tę samą liczbę.

59. Według tego możemy ustanowić następującą
zasadę:

1°. Każda ważność odienna wywiedziona dla
niewiadomey z zagadnienia stopnia pierwszego,
oznacza, że iego warunki niedokładnie były wysto-
wione, albo przynajmniej, że nie są wszystkie obię-
te równaniem, które iest algebraiczném tłómacze-
niem podania. 2°. Ta ważność, bez względu na
iay znak, może być uważana za odpowiedź na in-
ne zagadnienie, którego brzmienie różni się od
brzmienia zagadnienia danego, tylko tém, że nie-
które ilości z dodatnych przeszły na odienne i od-
wrotnie.

Dowodzenie. Pierwszą część téy zasady łatwo
okazać. Jakoż, jeżeli otrzymamy dla x ważność od-
ienną, to koniecznie stąd wypłynie, że przez naturę
równania musimy odeymować liczbę większą od mniey-
szey: działanie niepodobne do uskutecznienia. Tak
na przykład $x = -7$; $x = -5$ otrzymaliśmy z ró-

wnań $x = 24 - 31$; $x = \frac{45 - 60}{3}$.

Lecz jeżeli wszelka liczba bezwzględna (*) poło-
żona zamiast x , nie może sprawdzić równania, do
któregośmy przysli wykonywając na równaniu zaga-
dnienia, skazane przekształcenia (ustęp 43....45);
naówczas to pierwsze równanie niesprawdzi się w tém
znaczeniu, w iakiém było utworzone; bo pewnoś
tych przekształceń służy dla każdego równania mo-

(*) Przez liczbę bezwzględną (nombre absolu) rozumie się
tu liczba taka, iaka zwyczajnie uważa się w Arytmetyce.

gącego być sprawdzoném *liczbą bezwzględną*, którą byśmy położyli w miejsce niewiadomej ilości.

Często niemożność rozwiązania podania, lub równania, w znaczeniu w iakiém było ułożone, da się postrzegać na samo weyrzenie, czyli to z brzmienia podania, czy też z równania. Dwa poprzedzające zagadnienia są na to przykładami. W innych razach takowa niemożność iest trudna do odkrycia, lecz koniec działania wykrywa ją.

Przejdźmy do drugiey części zasady.

Uważmy naprzód, iż jeżeli w równaniu w miejsce x położymy $-x$; wszystkie wyrazy zawierające x jeżeli były dodatne, staną się odjemnemi; i odwrotnie: albowiem jeżeli mamy np: wyraz $+ax$; kładąc $-x$ zamiast x , otrzymamy $+a \times -x$ czyli $-ax$; podobnie jeżeli mamy $-bx$, otrzymamy $-b \times -x$, czyli $+bx$. A zatem wyrażając w języku pospolitym nowe równanie, potrzeba aby było odmienne brzmienie, które różnić się nie będzie od pierwszego tylko w tém, że pewne ilości które były dodatnemi, staną się odjemnemi, i odwrotnie.

Pozostaie okazać, że wstawiając x zamiast $-x$ w równanie; otrzymamy wypadek $x=p$, jeżeliśmy pierwéy otrzymali $x=-p$ (tu p iest liczbą bezwzględną).

Jakiegokolwiek byłoby równanie pierwotne zagadnienia, można zawsze za pomocą wiadomych przekształceń sprowadzić ie do postaci $ax=-b$, (a i b są tu liczby bezwzględne).

Z tego równania otrzymamy $x = \frac{-b}{a}$ czyli $x = \frac{-b}{a}$

czyli nakoniec $x = -p$, (tu p oznacza liczbę bezwzględną $\frac{b}{a}$) lecz jeżeli zamiast x , położymy w rów-

wnaniu pierwszym $-x$, i odbędziemy z tém równaniem te same działania iak pierwéy, otrzymamy równanie:

$$-ax = -b \text{ skąd } x = \frac{-b}{-a} \text{ czyli } x = \frac{b}{a},$$

czyli nakoniec $x = p$.

Stąd widzimy, iak należy tłómaczyć wypadki odjemne rozwiązania. Mogą one być uważane, bez względu na ich znak, za odpowiedzi nie na te pytania które były uczynione, lecz na pytania téy saméy natury, których pewne warunki zostały zamienione: i aby otrzymać nowe brzmienie, nayspewniejszy sposób iest, zwrócić się do równania zagadnienia i w niem zamienić x na $-x$, potem tłómaczyć pospolitym językiem nowe równanie. (Zobacz pod ustępem 70. okazanie tego prawidła w równaniach pierwszego stopnia z kilku niewiadomemi).

60. Tu mieysce poczynić następujące uwagi.

1° W algiebrze wyraz *dodać*, i wyraz *summa* nie zawsze tak iak w Arytmetyce znaczą powiększenie, albowiem wypadek wynikły z dodania ilości $-b$ do ilości a , to iest $a-b$, iest właściwie mówiąc różnicą pomiędzy liczbą iedności wyrażonych przez a , a liczbą iedności wyrażonych przez b , a zatem ten wypadek iest mniejszy od ilości a . Ażeby rozróżnić takową summę od summy arytmetycznéy, dano iéy nazwisko *summy algiebraicznéy*. A zatem wielomian taki, $2a^3 - 3a^2b + 3b^2c - 2a^2c$ iest *summą algiebraiczną*, uważając go za wypadek połączenia iednomianów

$$2a^3, -3a^2b, +3b^2c, -2a^2c,$$

z ich znakami, właściwie zaś oznacza różnicę arytmetyczną, między summą iedności zawartych w wy-

razach dodatnych, a summą iedności zawartych w wyrazach odjemnych.

Stąd wynika, że summa algebriczna w zastosowaniu liczebném, może stać się liczbą *odjemną* czyli mającą znak —.

2° Wyraz *odjąć* i wyraz *różnica*, nie zawsze oznaczają zmniejszenie pewnéj ilości, bo różnica między $+a$ i $-b$, która jest $a+b$, przewyższa ilość a ; i jest tylko różnicą algebriczną $a-(-b)$, a rzeczywiście summą $a+b$.

W tym sposobie wyrażania, ważności odjemne mogą być uważane za odpowiedź na zagadnienia, np: w równaniu $31+x=24$ wypadek $x=-7$ oznacza, że potrzeba dodać -7 do 31, aby otrzymać 24; iakoż $31+(-7)$ albo $31-7$ równa się 24.

Podobnież w równaniu $15+x=\frac{45+x}{4}$, wypadek $x=-5$, oznacza, że potrzeba dodać -5 do obu wieków, ażeby wiek syna był $\frac{3}{4}$ wieku oycy iakoż

$$15+(-5) \text{ czyli } 15-5=10,$$

$$45+(-5) \text{ czyli } 45-5=40.$$

61. Potrzeba używania wyrażen odjemnych w rachunku algebricznym i odbywania z niemi działań iak z ilościami bezwzględными, doprowadziła Algiebraistów do dwóch innych podań, które w dalszym ciągu bardzo często będą wchodziły. Oto ich brzmienie: *wszelka ilość odjemna $-a$, jest mniejsza od zero, a z dwóch ilości odjemnych ta jest mniejsza, której wartość liczebna czyli bezwzględna jest większa.*

A zatem będzie $-a < 0$ i $-a < -b$, ieżeli a liczebnie jest większe od b .

Dowodzenie. Aby dowieść tych dwóch podań, uważamy, że w ogólności, gdy od téj saméj liczby

odeymuią się następnie liczby coraz większe, reszty coraz stają się mniejsze. To założywszy weźmy liczbę 6 i od téj odeymuemy następnie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, będzie pisać różnicę w iednym wierszu;

6—1, 6—2, 6—3, 6—4, 6—5, 6—6, 6—7, 6—8, 6—9,
czyli po przywiedzeniu
5, 4, 3, 2, 1, 0, —1, —2, —3,

Stąd widzimy, że —1 należy uważyć za mniejsze niż 0, ponieważ 0 oznacza różnicę pomiędzy 6 i tą samą liczbą, gdy tymczasem —1 oznacza różnicę między 6 i liczbą 7 większą od 6.

Dla teyże przyczyny —1 jest większe od —2; —3 jest większe od —4, chociaż ważności liczebne pierwszych są mniejsze, od ważności liczebnych liczb ostatnich.

Inne dowodzenie. Skoro dla wytłómaczenia wszelkich wypadków, iakie otrzymujemy rozwiązując algebricznie zagadnienia, zgodzono się uważać *wyrażenia odjemne* za ilości, więc poddając je pod te same działania, co liczby bezwzględne, muszą być wypadki dokładne. A że można uważać za *pewnik* to podanie, że gdy liczba a jest większa od b , tedy dodawszy tak do a iak do b , téż samę ilość d , będzie wypadek $a+d$ także większe od $b+d$; więc założywszy że $0 > -a$ i $\dots -a > -(a+m)$, (gdzie a i m są liczbami bezwzględnymi); jeżeli dodamy $a+m$ po obu stronach każdego z tych wyrażeń; otrzymamy $a+m > m$ i $m > 0$ iak jest w istocie. Przeciwnie jeżeli założymy $0 < -a$ tudzież $-a < -(a+m)$, wypadnie $a+m < m$ tudzież $m < 0$, co być nie może.

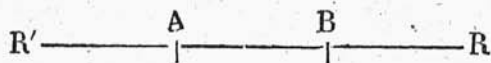
W ogólności należy przyjąć dwa podania poprzedzające za pewne, chcąc odbywać działania na *wyrażeniach odjemnych*, tak iak na ilościach bezwzględnych. Te podania są wreszcie nieiako sposobem

mówienia algebraicznym, podobnym do tego którego używamy w mowie pospolitej. Mówimy o osobie że ma mniej aniżeli nic, chcąc wyrazić że więcej winna niż ma, o dwóch zaś osobach które mają równe majątki, lecz są winne więcej niż posiadają, że ta jest bogatsza, która mniej winna.

Rozbiór zagadnień pierwszego stopnia z dwiema lub kilku niewiadomymi.

62. Po ogólném rozwiązaniu zagadnienia, to jest, gdy wyrażamy ilości przez głoski, można dochodzić czém się staną ważności niewiadomych, gdy nadawać będziemy szczególne ważności dla ilości w zadanie wchodzących. Wyznaczenie tych różnych ważności, i wytłómaczenie szczególnych wypadków jakie otrzymamy, składa to, co nazywają *roztrząśnieniem zagadnienia*.

Oto jest podanie, którego roztrząśnienie przedstawi nam prawie wszystkie okoliczności, jakie trafić się mogą w zagadnieniach pierwszego stopnia.



Czternaste zagadnienie. Dway gońcy wyjeżdżają w iednym czasie z dwóch różnych punktów A i B linii prostej AB i iadą w iedną stronę, goniec który wyjeżdża z punktu A, uieżdża na godzinę mil m, goniec który wyjeżdża z punktu B, uieżdża na godzinę mil n. Pytanie, w iakięj odległości od punktów A i B dway gońcy spotkaią się?

Rozwiązanie. Niech R będzie punktem spotkania się: nazwiemy x i y niewiadome odległości AR i BR wyrażone w milach: niech a oznacza odległość

AB która oddziela dwóch gońców w chwili ich wyjazdu. A zatem pierwsze równanie jest

$$x - y = a \dots \dots \dots (1)$$

Ponieważ m i n oznaczają liczbę mil w iednój godzinie odbytą, (to jest prędkości dwóch gońców) więc czasy użyte na przebieżenie odległości x i y

oznaczymy przez $\frac{x}{m}$ i $\frac{y}{n}$, a że te czasy są równe, więc drugie równanie jest

$$nx - my = 0 \dots \dots \dots (2).$$

Rozwiązawszy dwa równania (1) i (2), podług wiadomego sposobu rugowania; otrzymamy dwie wartości

$$x = \frac{am}{m-a}, \quad y = \frac{an}{m-n},$$

które łatwo sprawdzić.

Rozstrząśnienie. Gdy $m > n$, skąd $m - n > 0$ czyli $m - n$ dodatne, dwie wartości dla x i dla y będą dodatne, i zagadnienie będzie rozwiązane w właściwem znaczeniu s-ego brzmienia.

Jakoż, założywszy że goniec A odbywa podróż z większą prędkością niż B, więc w każdej chwili większą ubieży drogę niż drugi; przestrzeń która ich w początku rozdzielała, coraz bardziej się zmniejsza, aż w końcu zniknie zupełnie; i natenczas dwaj gońcy mają się znajdować na iednym punkcie linii którą przebiegaia.

Lecz przypuściwszy $m < n$, skąd $m - n < 0$ czyli $m - n$ odjemne; obie wartości będą odjemne to jest

$$x = -\frac{am}{n-m}; \quad y = -\frac{an}{n-m}.$$

Aby wytlómaczyć te wypadki, zważmy, że rzeczą jest niepodobną, ażeby dwaj gońcy spotkali się iadąc w iednym kierunku AB, albowiem goniec B. iadąc z większą prędkością; dla tego, że $n > m$ będzie w każdej chwili większy odległości od pierwszego. Lecz założywszy, że iadą nie w kierunku AB, lecz przeciwnie w kierunku BA, to jest od punktu B, ku A; naówczas okoliczności będąc takie same iak w przypadku $m > n$; zatem dwaj gońcy spotkają się w punkcie R' na przedłużeniu linii BA. Jakoż tę okoliczność skazuje prawidło wyłożone (poć ustępem 59.)

Według tego prawidła zmieniwszy znaki przy x i y w dwóch równaniach, otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} -x + y &= a \\ -\frac{x}{m} &= -\frac{y}{n} \end{aligned} \right\} \text{stad} \left\{ \begin{aligned} y - x &= a, \\ \frac{x}{m} &= \frac{y}{n}, \end{aligned} \right.$$

rozwiązawszy te równania; otrzymamy

$$x = \frac{am}{n-m}, \quad y = \frac{an}{n-m}.$$

Te ważności sprawdzą nowe brzmienie zadania, w którym zakładamy, że dwaj gońcy odbywają drogę w kierunku BA, to jest ku R'.

Uczyńmy $m = n$, skąd $m - n = 0$; ważności dla x i y zamieniają się na

$$x = \frac{am}{0}, \quad y = \frac{an}{0}.$$

Jak wytłómaczyć te nowe wypadki?

Zwracając się naprzód do brzmienia zadania, widzimy, że jest niepodobieństwo uczynić mu zadosyć, to jest, że w iakimkolwiek kierunku linii AB dwaj

gońcy drogę odprawiać będą, nigdy się nie zjadą, albowiem obadwa będąc w odległości a od siebie, i postępując z równą prędkością muszą, zawsze zachować tę samą między sobą odległość.

Można zatem uważać wypadek $\frac{am}{o}$ iako nowy znak niepodobieństwa. Jakoż jeżeli weźmiemy oba równania tego zagadnienia, otrzymamy w tym przypadku gdy $m=n$.

$$\left. \begin{array}{l} x-y=a \\ \frac{x}{m} = \frac{y}{n} \end{array} \right\} \text{skąd} \begin{cases} x-y=a, \\ x-y=o, \end{cases}$$

równania te widocznie są sprzeczne.

Jednakże Algiebraiści uważają wypadki,

$$x = \frac{am}{o}, \quad y = \frac{an}{o},$$

za nowy gatunek ważności, który daią nazwisko *ważności nieskończoney*.

Oto przyczyna tego nazwiska: Jeżeli różnica $m-n$ nie jest o , lecz jest bardzo mała, dwa wypadki,

$$\frac{am}{m-n}, \quad \frac{an}{m-n},$$

będą bardzo wielkie.

I tak niech będzie, $m-n=0,01$, $m=3$: stąd wypadnie $n=3-0,01=2,99$. A zatem

$$\frac{am}{m-n} = \frac{3a}{0,01} = 300a, \quad \frac{an}{m-n} = 299a$$

Tym samym sposobem uczyniwszy $m-n=0,0001$, $m=3$, znajdziemy

$$n=2,9999, \quad \frac{am}{m-n} = 30,000a, \quad \frac{an}{m-n} = 29999a.$$

Słowem, skoro różnica dwóch prędkości nie jest 0, dwaj gońcy spotkają się, lecz odległość punktu spotkania się od dwóch punktów ich wyjazdu, będzie coraz większą w miarę zmniejszania się różnicy między ich prędkościami. A zatem gdy przypuścimy że ta różnica jest mniejszą od wszelkiej ilości naznaczoney; naówczas odległości $\frac{am}{m-n}$, $\frac{an}{m-n}$ będą większe od wszelkiej ilości daney, czyli będą nieskończone.

A tak gdy $m-n=0$ wypadnie $x=\frac{am}{0}$, $y=\frac{an}{0}$, ważności nieskończone.

Ponieważ 0 jest mniejsze, iak wszelka ilość bezwzględna, więc można wziąć zero za znak *ostatniego stanu* wielkości, która może się zmniejszać bez końca. Podobnie ponieważ liczba ułomkowa tym jest większa im iey licznik jest większy względem swego mianownika, więc wyrażenie $\frac{A}{0}$ (A iest liczba iakakolwiek bezwzględna) iest stósownę do oznaczenia ilości nieskończoney, to iest większēy od wszelkiej ilości naznaczoney.

Nieskończoność oznacza się ieszcze przez ósemkę przewróconą ∞ , a zatem wszelka ilość mniejsza od wszelkiej daney to iest zero, może być wyrażona

przez $\frac{A}{\infty}$: albowiem ułomek tym iest mniejszy im mianownik iest większy względem swego licznika.

A zatem 0 i $\frac{A}{\infty}$ są znaki to samo oznaczające: to samo ze znakami $\frac{A}{0}$ i ∞ .

Zatrzymaliśmy się nad temi ostatniemi wyobrażeniami, ponieważ znajduią się zagadnienia na które nieskończoność może być uważana za prawdziwą odpowiedź. Są częste na to przykłady w zastosowaniu Algiebry do podań Jeometrycznych.

Zebrawszy w krótkości to, cośmy powiedzieli na przypadek $m=n$; widzimy że właściwie nie ma zagadnienie rozwiązania *w ilościach skończonych i oznaczonych*, lecz ma je tylko w ilościach nieskończonych.

Jeżeli do przypuszczenia $m=n$, przypadamy jeszcze $a=0$, otrzymamy dwie ważności $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$.

Jakież znaczenie przywiązać należy do tego nowego wypadku?

Wróćmy się do zagadnienia, i uważmy, że jeżeli obadwa gońce odbywają drogę; z równą prędkością, i wyjeżdżają z iednego punktu; będą ze sobą zawsze razem, i przeto spotykać się będą we wszystkich punktach drogi którą przebywają. Jakoż po takowém podwóyném przypuszczeniu $m=n$, i $a=0$, równania powyższe zamieniają się na

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ \frac{x}{m} - \frac{y}{m} = 0 \end{array} \right\} \text{skąd} \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0, \\ x - y = 0, \end{array} \right.$$

równania te nie różnią się od siebie. A zatem równanie jest niewyznaczone, albowiem mamy w istocie iedno tylko równanie z dwiema niewiadomemi.

Wyrażenie $\frac{0}{0}$ jest więc w tym przypadku *znakiem że zagadnienie jest niewyznaczone*.

Gdy dway gońcy nie z równą prędkością od-

prawuiał drogę: to iest gdy $m >$ lub $< n$, lecz $a = 0$; naówczas będzie $x = 0$, $y = 0$.

Jakoż dway gońcy wyiechawszy z iednego punktu z różnemi prędkościami, niemogą być razem wyiawszy w tym punkcie, z którego wyiechali.

Przypuszczenia poprzedzające są iedyne, które prowadzą do wypadków zasługujących na uwagę. Są one dostateczne do okazania, iakim sposobem Algiebra odpowiada na wszystkie okoliczności zagadnienia.

W krótcie uogólnimy to roztrząśnienie, lecz pierwéy uczynimy uwagę bardzo ważną, w zastosowaniach algiebraicznych.

63. Gdy zagadnienie będzie rozwiązane ogólnie, można za pomocą formuł, czyli ważności dla niewiadomych, otrzymać przez proste przemienienie znaków, ważności, któreby były właściwe nowym zagadnieniom ogólnym, lecz takim, aby ich wysłowienia nie różniły się od wysłowienia zagadnienia danego, wyiawszy w tém, że pewne ilości, które były dodatne, stałyby się odjemnemi i nawzajem.

Weźmy za przykład zagadnienie o naiemniku, rozwiązane pod (ust: 47.). Założywszy, że robotnik po obrachunku odbiera sumę c ; otrzymamy równania.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = a \\ ax - by = c \end{array} \right\} \text{ skąd } x = \frac{bn + c}{a + b}, \quad y = \frac{an - c}{a + b}.$$

Lecz gdy założymy przeciwnie, że po odbytych obrachunku, robotnik zamiast odebrać, iest winien sumę c ; otrzymamy równania

$$\left. \begin{array}{l} x + y = n \\ by - ax = c \end{array} \right\} \text{ skąd } \begin{array}{l} x + y = n \\ ax - by = -c. \end{array}$$

(zmieniwszy znaki w drugim równaniu)

Lecz

Lecz rzecz widoczna, że nie rozwiązując na nowo tych równań, można odrazu otrzymać wartości dla x i dla y , zmieniając po prostu znak przy c w wartościach poprzedzających; otrzymamy

$$x = \frac{bn - c}{a + b}; \quad y = \frac{an + c}{a + b}$$

Aby tego ściśle dowieść, oznaczmy na chwilę $-c$ przez d ; równania będą $\begin{cases} x + y = n \\ ax - by = d \end{cases}$, i te różnią się od równań pierwszego wystowienia, tylko w tém, że c zamienione jest na d ; a tak otrzymamy

$$x = \frac{bn + d}{a + b}; \quad y = \frac{an - d}{a + b}.$$

Gdy teraz zamiast d wstawimy wartość $-c$; otrzymamy

$$x = \frac{bn + (-c)}{a + b}; \quad y = \frac{an - (-c)}{a + b},$$

czyli stosując pravidła wyłożone pod odejmowaniem algebriczném będzie $x = \frac{bn - c}{a + b}; \quad y = \frac{an + c}{a + b}$, co było do okazania.

Pod temi samemi formułami można objąć wypadki, które sprawdzą dwa wystowienia, pisząc je tak,

$$x = \frac{bn \pm c}{a + b}, \quad y = \frac{an \mp c}{a + b}.$$

(Podwójny znak \pm wymawia się *więcey lub mnięy*; znaki górne, odpowiadają przypadkowi, w którym naiemnik odbiera, a znaki niższe odpo-

wiadaia temu, w którym naiemnik iest winien sumę c).

Formuły te, zawieraią ieszcze przypadek, w którym po uczynionym obrachunku, naiemnik i osoba, która go najmowała, nie sobie nie zostaią winni. W tym razie, dosyć będzie uczynić $c=0$, a otrzymamy

$$x = \frac{bn}{a+b}; \quad y = \frac{an}{a+b}.$$

Weźmy ieszcze ogólne dwa równania $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+fy=g, \end{cases}$

pochodzące z wyrażenia algiebraicznego iakiegokolwiek zagadnienia.

Rozmnożywszy wyrazy pierwszego przez f , drugiego przez b , i odiąwszy drugie od pierwszego, otrzymamy

$$(af-bd)x = cf-bg, \text{ skąd } x = \frac{cf-bg}{af-bd}.$$

$$\text{Podobnież znajdziemy } y = \frac{ag-cd}{af-bd}.$$

To założywszy, aby otrzymać formuły,

1° te, które odpowiedzą równaniom $\begin{cases} ax-by=c \\ dx+fy=g, \end{cases}$

dosyć będzie zamienić b na $-b$, z tego otrzymamy

$$x = \frac{cf+bg}{af+bd}; \quad y = \frac{ag-cd}{af+bd};$$

2° aby otrzymać ważności odpowiadaiące równaniom

$\begin{cases} ax-by=c \\ dx-fy=g \end{cases}$ dosyć będzie zamienić b na $-b$,

i f na $-f$; otrzymamy

$$x = \frac{-cf + bg}{-af + bd} = \frac{bg - cf}{bd - af}; \quad y = \frac{ag - cd}{bd - af}.$$

Dowodzenie takie samo iak w przykładzie poprzedzającym.

§. IV. *Ogólne roztrząśnienie zagadnień i równań stopnia pierwszego.*

64. Ażeby uogólnić roztrząśnienie zagadnień stopnia pierwszego, z iedną lub kilką niewiadomemi, założymy sobie wyprowadzić formuły, któreby wyrażały ważność niewiadomych w iakimkolwiek układzie równań z liczbą niewiadomych ilości, równą liczbie równań.

Naprzód, każde równanie stopnia pierwszego z iedną niewiadomą, może być za pomocą zwyczajnych przerobień przywiedzione do postaci $ax = b$, w którój a , oznacza *summę algiebraiczną* ilości mnożących niewiadomą, b zaś *summę algiebraiczną* wszystkich wiadomych wyrazów.

Z tego równania wyprowadzimy $x = \frac{b}{a}$.

Uważmy powtórę, że każde równanie pierwszego stopnia, z dwiema niewiadomemi może bydz przywiedzione do postaci $ax + by = c$.

Jakoż, jeżeli równanie dane zawiera mianowniki; te naprzód można znieść (ust. 44), przeniósłszy zaś wszystkie wyrazy mające x , i wszystkie wyrazy mające y , na pierwszą, a wiadome na drugą stronę równania, można oznaczyć *summę algiebraiczną* pierwszych przez ax , *summę algiebraiczną* drugich przez by , a *summę algiebraiczną* ostatnich przez c : w tém miejscu a , b , c , są ilości całkowite z iakiemikolwiek znakami.