

padku: a tak logarytmowi — 3.4720563 nadamy postać liczby — $8 + 5,4720563$, której część ósma jest $= 1.6840070$. W dalszym ciągu poznamy użycie tych działań.

§ IV. Zastosowanie Teoryi Logarytmów.

221. *Mnożenie i dzielenie.* Jaka jest ważność przybliżona iloczynu $\frac{31}{75} \times \frac{13}{12} \times \frac{47}{48}$.

iloczyn ten nazwiemy x , mamy (ustęp 211)

$$\log x = \log 31 - \log 75 + \log 13 - \log 12 + \log 47 - \log 48$$

$$\log 31 = 1,49136169,$$

$$\log 13 = 1,11394335,$$

$$\log 47 = 1,67209786,$$

$$\text{dop: } \log 75 = 8,12493874,$$

$$\text{dop: } \log 12 = 8,92081875,$$

$$\text{dop: } \log 48 = 8,31875876,$$

$$\text{— } 1.64191915 = 29,64191915 \text{ — } 30;$$

dodawszy . . 5

otrzymamy . . 4,6419191

$$4,6419102 = \log 43844.$$

$$\begin{array}{l} \text{Różnica . . .} \\ \text{Różnica z tablic} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 89 \\ 99 \end{array} \right\} \frac{89}{99} = 0,90.$$

więc iloczyn szukany jest 0,4384490, zbliżony o 0,0000001.

Tworzenie

Tworzenie potęg. Ponieważ dla otrzymania wypadku podniesienia do potęgi, trzeba rozmnożyć logarytm liczby przez wykładnik potęgi, więc weźmiemy logarytm liczby daney, z więcej niż 7 cyframi dziesiętnymi; jeżeli zechcemy mieć iloczyn dokładny, włącznie aż do 7 cyfr. Znajdziemy zaś w dziele Kalleta po tablicach zwyczajnych jeszcze tablice, dające logarytmy z 20 znakami dziesiętnymi, a zatem można zawsze z tych tablic wziąć logarytmy mające dwie, lub trzy, więcej cyfry dziesiętne, niż w tablicach zwyczajnych.

To założywszy znajdziemy 5tą potęgę liczby 29.

$$\text{Jest } \log(29)^5 = 5 \log 29,$$

$$\log 29 = 1,462397998,$$

$$5 \log 29 = 7,311989990;$$

opuszczając 3 cyfry od prawej ręki otrzymamy

$$4,3119868 = \log 20511.$$

$$\text{Różnica} \dots\dots\dots 32 \overline{) 32} = 0,15;$$

$$\text{różnica z tablic} \dots\dots\dots 212 \overline{) 212}$$

więc 20511150 jest liczba szukana, zbliżona o jedność, bo $(29)^5 = 20511149$.

Znajdziemy jeszcze wartość $(2)^{64}$.

$$\text{Jest} \qquad \log 2 = 0,3010299956.$$

$$\text{A zatem} \qquad 64 \log 2 = 19,2650197184.$$

$$\text{Odeymuiąc 15,} \qquad 4,2659197$$

$$4,2659022 = \log 18446$$

$$\text{Różnica} \dots\dots\dots 175 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \frac{175}{235} = 0,74.$$

$$\text{różnica tablic} \dots\dots\dots 235 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \frac{235}{235}$$

$$\text{A zatem } 4,2659197 = \log 18446,74.$$

Więc liczba szukana jest 18.446.740.000.000.000.000, zbliżona o sto tysięcy milionów, to iest: trzynaście ostatnich cyfr nie mogą być wyznaczone za pomocą tablic: lecz tu idzie tylko o zbliżenie się do prawdziwej liczby, które tak szybko otrzymujemy.

Znajdźmy jeszcze ważność dla $\left(\frac{2}{3}\right)^{11}$. Oto

wzór rachunku używając, i nieużywając dopełnień.

Przez dopełnienia.	Bez dopełnień.
$\log 2 = 0,3010299956$	$\log 3 = 0,4771212547$
$\text{dop:} \log 3 = 9,5228787453$	$\log 2 = 0,3010299956$
$\log \frac{2}{3} = -1,8239087409$	$\log \frac{2}{3} = -0,1760912591$
$11 \log \frac{2}{3} = -2,0629961499$	$11 \log \frac{2}{3} = -1,9370038501$
dodawszy 6	oddawszy +6
wypadnie 4,0629961	wypadnie 4,0629961
Liczba odpowiadająca temu logarytmowi; iest 11561,02; więc 0,01156102, będzie liczbą szukaną zbliżoną o 0,00000001.	Reszta rachunku iest ta sama iak obok.

Wyciąganie pierwiastków. W działaniach tego zadania dość będzie brać logarytmy z 7miu cyframi dziesiętnymi.

Jaki jest pierwiastek 7go stopnia liczby 1162049?

Mamy (ustęp 212) $\log \sqrt[7]{1162049} = \frac{1}{7} \log 1162049$,

	$\log 11620 = 0652061$	Różnica tablic
$\log 11620,49 - \log 11620 =$	183	Różnica liczb
	<hr/>	
	$\log 11620,49 = 0652244$	
więc	$\log 1162049 = 6,0652244$	
	$\frac{1}{7} \log 1162049 = 0,8664606$	
dodawszy 4,	4,8664606	

$$4,8664587 = \log 73529$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Różnica} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19 \\ \text{Różnica z tablic} \quad . \quad . \quad 59 \end{array} \right\} \frac{19}{59} = 0,32;$$

więc $4,8664606 = \log 73529,32$

zatem 7,352932 jest żądanym pierwiastkiem zbliżonym o 0,000001.

Znajdźmy wartość dla $\sqrt[11]{\frac{13}{27}}$

mamy $\therefore \sqrt[11]{\frac{13}{27}} = \frac{1}{11} (\log 13 - \log 27)$

Przez dopełnienia.

$$\log 13 = 1,11394335.$$

$$\text{dop:} \log 27 = 8,56863624$$

$$\log \frac{13}{27} = -1,68257959 = -11 + 10,68257959$$

$$\frac{1}{11} \log \frac{13}{27} = -1,97114360.$$

$$\text{dodawszy} \quad 5$$

$$\text{wypadnie} \quad 4,97114360 = \log 93571,49.$$

A zatem pierwiastek żądany jest 0,9357149, zbliżony o 0,0000001.

Podobnie otrzymamy

$$\sqrt[7]{\left(\frac{11}{9}\right)^5} = 1,154118; \cdot (73)^7 = 1104739000000$$

$$(0,0457)^{12} = 0,000000000000000082984.$$

222. *Rachunek wyrażeń algebracyjnych przez logarytmy.*

Daymy na to, żeśmy znaleźli na ważność nie-

$$\text{wiadom\kern 0.08em\char"22 zadania wyrażenie } x = \frac{\sqrt[3]{(a^2 - b^2) \cdot 3a}}{\sqrt{(a+b)} \cdot \sqrt{cd}},$$

i że nadając ważności szczególne głoskom a, b, c, d ; chcemy utrzymać ważność liczebną, odpowiadającą, tego wyrażenia. Za pomocą logarytmów można sprowadzić rozwiązanie tego zadania, do prostego dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia.

Jakoż na mocy własności (ustępów 211 i 212) mamy

$$l.x = l.\sqrt[3]{(a^2 - b^2).3a} - l.\sqrt{(a+b).Vcd}.$$

$$\text{Aż} e\ l.\sqrt[3]{(a^2 - b^2).3a} = \frac{1}{3}\{l.(a+b) + l.(a-b) + l.3 + l.a\};$$

$$\text{i}\ l.\sqrt{(a+b)Vcd} = \frac{1}{2}\{l.(a+b) + \frac{1}{2}l.c + \frac{1}{2}l.d\};$$

$$\text{więc}\ \log x = \frac{1}{3}\{l.(a+b) + l.(a-b) + l.3 + l.a\}$$

$$- \frac{1}{2}\{l.(a+b) + \frac{1}{2}l.c + \frac{1}{2}l.d\},$$

tak, iż teraz pozostaną do wykonania, proste dodawanie, odejmowanie, mnożenie, i dzielenie, skoro ilości a, b, c, d będą dane liczebnie.

Weźmy np. $a=60, b=15, c=16, d=9$, wyrażenie powyższe przejdzie na

$$l.x = \frac{1}{3}(l.75 + l.45 + l.3 + l.60) - \frac{1}{2}(l.75 + \frac{1}{2}l.16 + \frac{1}{2}l.9);$$

obliczywszy dwie summy między nawiasami, i odia-
wszy połowę drugiey od $\frac{1}{3}$ pierwszey summy.

$$\text{wypadnie}\quad l.x = 1,92784875 - 1,47712125,$$

$$\text{czyli}\quad l.x = 0,4507275;$$

$$\text{więc}\quad x = 2,823108.$$

$$\text{Weźmy jeszcze wyrażenie}\ x = \frac{a^3 - 3a^2b + 46^2c}{2a^4 - 3ab^3 + b^4}.$$

Przejdzie ono na mocy zamiany na takowe

$$x = \frac{a^2 \left(a - 3b + \frac{4b^3 c}{a^2} \right)}{a^3 \left(2a - \frac{3b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} \right)} = \frac{a - 3b + \frac{4b^2 c}{a^2}}{a \left(2a - \frac{3b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} \right)}$$

Potém uczyniwszy $m = \frac{4b^2 c}{a^2}$; $n = \frac{3b^3}{a^2}$; $p = \frac{b^4}{a^3}$;

$$x = \frac{a - 3b + m}{a(2a - n + p)}, \text{ wzięwszy logarytmy}$$

$$\text{będzie } l x = l(a - 3b + m) - \{ l.a + l.(2a - n + p) \}.$$

Wyrażenie to będzie łatwe do obliczenia, skoro znajdziemy ważność dla m , n , p . Równania zaś

$$m = \frac{4b^2 c}{a^2}, \quad n = \frac{3b^3}{a^2}, \quad p = \frac{b^4}{a^3};$$

$$\text{dają } l.m = l.4 + 2l.b + l.c - 2l.a, \quad l.n = l.3 + 3l.b - 2l.a,$$

$$l.p = 4l.b - 3l.a.$$

Sztuka takowych przekształceń, polega na obróceniu wyrażenia ułamkowego na inne, którego by wszystkie wyrazy były liniowe, czyli pierwszego stopnia: a to, obliczając oddzielnie inne wyrażenia, które prowadzą tylko do mnożenia, dzielenia i twórczenia potęg.

Podobnie otrzymamy

$$l. \frac{a^2 - b^2}{bd} = l.(a + b) + l.(a - b) + \text{dop} : l.b + \text{dop} : l.d - 20,$$

$$l. \frac{a^3 - 2ba^2 + bc^2}{a^2 - ba + 4cd} =$$

$$l.a + l.(a - 2b + h) + \text{dop} : l.(a - b + h') - 10,$$

gdzie h i h' mają być obliczone za pomocą formuł

$$1.h = 1.b + 2 \ 1.c - 2 \ 1.a,$$

$$1.h' = 1.a + 1.c + 1.d - 1.a.$$

223. *Równania wykładnicze.* W ustępie 205 wyłożyliśmy sposób na rozwiązanie równania $a^x = b$, i wyprowadziliśmy z niego teorię logarytmów. Teraz mając tablice ułożone, nie przeszkadza użyć ich do rozwiązania tego rodzaju równań.

Biorąc logarytmy stron równania $a^x = b$, otrzymamy (ustę: 212), $x \times 1.a = 1.b$, skąd $x = \frac{1.b}{1.a}$.

Weźmy np. równanie $3^x = 15$, z którego sposobem ustępu 205, wyprowadziliśmy $x = 2,465$ ważność zbliżoną o 0,001.

Teraz, używając logarytmów mamy

$$x = \frac{1.15}{1.3} = \frac{1,17609126}{0,47712125} = 2,465 \dots$$

Równanie $a^x = b$, zowie się *wykładnicze pierwszego rzędu*, lecz mogą być równania postaci

$a^{b^x} = c$; $a^{b^{c^x}} = d$, takowe zowią się *równaniami wykładniczymi drugiego, trzeciego, rzędu*.

Wyrażenie a^{b^x} oznacza, że b jest podniesione do potęgi x , i że a jest potem podniesione do potęgi który stopień jest b^x .

Podobnie $a^{b^{c^x}}$ oznacza, że podniósłszy c do potęgi x , podnieśliśmy b do potęgi który stopień jest c^x i,

nakoniec a do potęgi oznaczony przez b^{c^x} .

Na mocy takowych wiadomości, weźmy logarytmy wyrazów równania $a^{b^x} = c$; otrzymamy $b^x \times 1.a = 1.c$, skąd $b^x = \frac{1.c}{1.a}$; biorąc znowu logarytmy, będzie $x \times 1.b = 1. \frac{1.c}{1.a} = 1.1.c - 1.1.a$; więc

$$x = \frac{1.1.c - 1.1.a}{1.b}.$$

(Ponieważ logarytm c jest ułamkiem dziesiętnym, więc można oznaczyć jego logarytm za pomocą tablic, tak, jak oznaczyliśmy logarytm wszelkiej innej liczby.)

Rozwiążmy jeszcze równanie $a^{b^{c^x}} = d$.

Biorąc logarytmy, otrzymamy $b^{c^x} \times \log a = 1.d$.

Skąd $b^{c^x} = \frac{1.d}{1.a}$, biorąc znowu logarytmy będzie $c^x = \frac{1.1.d - 1.1.a}{1.b}$, postępując z tym równaniem jak z poprzedzającymi będzie

$$x \times 1.c = 1. \frac{1.1.d - 1.1.a}{1.b} = 1.(1.1.d - 1.1.a) - 1.1.b.$$

$$\text{więc } x = \frac{1.(1.1.d - 1.1.a) - 1.1.b}{1.c}.$$

Podobnym sposobem rozwiązalibyśmy równania

wykładnicze rzędów wyższych. Uważane *algiebraicznie* lubo są prawdziwe te formuły, w zastosowaniach iednak dają ważności liczebne mało przybliżone, ani można ocenić stopnia ich przybliżenia.

224. Zdarzyć się może, że w rachunku wyrażeń *algiebraicznych* brać potrzeba logarytm liczby odjemnéy.

Niechby np. było potrzeba obliczyć wyrażenie

$$x = \frac{a^2 - b^2}{c}; \text{ mamy } l.x = l.(a+b) + l.(a-b) - l.c.$$

Jeżeli $a < b$; $l.(a-b)$ zamieni się na $l.(-m)$. Jak wytłómaczyć ten wypadek?

Uważmy naprzód, że we wszelkim układzie logarytmów, *liczby odjemne nie mają logarytmów*. Jakoż gdy podstawa iest dodatną, nie masz (ustę: 209.) żadnéy potęgi z téy podstawy, któraby dała liczbę odjemną: nie można także brać podstawy odjemnéy, albowiem ilość ta podnoszona do rozmaitych potęg, dawałaby liczby iedne dodatne drugie odjemne, *własnością zaś podstawy iest*, aby podnoszona do potęg rosnących, mogła wydać wszystkie liczby po sobie następujące.

A tak, logarytm liczby odjemnéy na iedno wychodzi, co iéy pierwiastek kwadratowy, czwartéy potęgi, to iest: $l.(-m)$ iest wyrażenie *uroione*.

Napróżno usiłowalibyśmy osłabić takowe założenie, następującém rozumowaniem: Wiadomo, że $(-m)^2 = m^2$, więc biorąc logarytmy obu stron będzie $2l.(-m) = 2l.m$, skąd $l.(-m) = l.m$.

Rozumowanie to w tém iest błędne, żeśmy założyli $l.(-m)^2 = 2l.(-m)$ na mocy własności ustępu

212: lecz ta własność pociąga za sobą wniosek, że może być równanie $-m = a^x$; gdzie a jest dodatnie, co być nie może.

Powróćmy do naszego przedmiotu.

Mogą tu zachodzić dwie okoliczności,

Albo używamy logarytmów jako sposobu prostszego do otrzymania ważności liczebnej z wyrażenia danego, to jest: że w tym przypadku rachunek przez logarytmy jest tylko *pomocniczym*, i niekoniecznie potrzebnym. Do tego przypadku należy wy-

rażenie $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$, które może być wprost obliczo-

ne bez pomocy logarytmów. Jest ono odjemne, ponieważ przypuściliśmy, że $a < b$, lecz jeżeli koniecznie chcemy obliczyć ważność dla x przez logarytmy, potrzeba naprzód zmienić znaki i otrzymamy

$$\frac{b^2 - a^2}{c} : \text{skąd l. } \frac{(b^2 - a^2)}{c} \\ = \text{l.}(b + a) + \text{l.}(b - a) - \text{l.}c.$$

Wyrażenie to zawiera tylko logarytmy liczb bezwzględnych, otrzymawszy zaś ważność liczebną dla $\frac{b^2 - a^2}{c}$, dosyć będzie wziąć wypadek ze znakiem —.

Albo też użycie logarytmów jest konieczne: aby otrzymać ważność dla niewiadomej, i naówczas $\text{l.}(-m)$ jest znakiem niemożności rozwiązania zadania.

Niech będzie np: równanie $3^x = -9$. Wziąwszy logarytmy otrzymamy $x \cdot \text{l.}3 = \text{l.}-9$, równanie

uroione: iakoż w istocie do iakiéykolwiek potęgi podniesiemy 3, nie otrzymamy iloczynu—9.

A tak: ile razy, używając logarytmów, zakładamy sobie łatwiej i króćey otrzymać ważność liczebną wyrażenia, a otrzymujemy l. (— m); będzie to znakiem, że należy iedną albo więcéy uczynić przemian w znakach tych ilości, które wchodzą do wyrażenia, nim zastosujemy rachunek logarytmów.

Lecz ieżeli dla rozwiązania równania potrzeba się udać koniecznie do logarytmów; a otrzymamy l. (— m); wyrażenie to oznacza. taką samą sprzeczność, iak pierwiastki stopnia parzystego ilości odjemnych.

225. *Proporcye i postępy Geometryczne.*

Niech będzie proporcya $a:b=c:x$; skąd $x=\frac{bc}{a}$:

zastosowawszy logarytmy, będzie l. $x=l.b+l.c-l.a$, czyli l. $a-l.b=l.c-l.x$; to okazuje, że ieżeli cztery liczby czynią proporcya geometryczną; ich logarytmy uczynią proporcya arytmetyczną.

Weźmy teraz postępy geometryczny

$$a:b:c:d:e:f:g:h:.....,$$

podług definicyi podanéy w ustępie 195, postępy ten tak można napisać:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\frac{e}{f}=\frac{f}{g}$$

biorąc logarytmy obu stron będzie

$$l.\frac{a}{b}=l.\frac{b}{c}=l.\frac{c}{d}=l.\frac{d}{e}=l.\frac{e}{f}=l.\frac{f}{g}.....,$$

czyli

$$l.a - l.b = l.b - l.c = l.c - l.d = l.d - l.e = l.e - l.f = l.f - l.g$$

czyli na koniec $\div l.a - l.b - l.c - l.d - l.e - l.f \dots$

A zatem, jeżeli liczby a, b, c, d, \dots czynią postęp geometryczny, ich logarytmy uczynią postęp arytmetyczny i odwrotnie. Założenie to potwierdza definicyą algebriczną logarytmów (ustę: 210) i czyni ją zupełnie taką, jaką dajemy w arytmetyce, że logarytmy, są to liczby w postępie arytmetycznym, odpowiadające odpowiadającym liczbom, w postępie geometrycznym. Użycie logarytmów do rozwiązania zagadnień dotyczących się postępów geometrycznych jest szczególnie przydatne.

Iod Oznaczywszy przez u ostatni wyraz postępu geometrycznego, mamy (ustę: 196)

$$u = aq^{n-1}: \text{skąd } l.u = l.a + (n-1) l.q.$$

I tak znajdziemy 20ty wyraz postępu $1 : \frac{3}{2} : \frac{9}{4} : \frac{27}{8} : \dots$

Podług formuły

$l.u = l.1 + 19(l.3 - l.2) = 19(l.3 - l.2)$, (albowiem logarytm $1 = 0$); otrzymamy naprzód

$$l.u = 3,3457339 = l.2216,84;$$

skąd $u = 2216,84$ zbliżenie o 0,01.

2re Chcąc pomiędzy dwie liczby dane a i b , wtrącić m średnich proporcjonalnych, (ustę: 202): weźmiemy na oznaczenie wykładnika postępu formułę

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} \text{ skąd } l.q = \frac{l.b - l.a}{m+1}.$$

Niech będzie $a=2, b=15, m=50$: otrzymamy

$$l.q = \frac{l.15 - l.2}{51}; \text{ obliczywszy będzie}$$

$$l.q = 0,0171581 = l.1,040299. \text{ więc } q = 1,040299.$$

Chcąc wprost znaleźć 20ty *średnio proporcjonalny*, który właściwie będzie 21ym wyrazem postępu,

$$\text{mamy } x = 2 \left(\sqrt[51]{\frac{15}{2}} \right)^{20};$$

$$\text{skąd } \log x = l.2 + \frac{20(l.15 - l.2)}{51},$$

czyli obliczywszy, $l.x = 0,6441913 = l.4,407489$, a zatem 20ty *średnio proporcjonalny* wyraz, jest 4,407489.

3cie Otrzymaliśmy w ustępie 197, wyrażenie na summę wyrazów:

$$S = \frac{l.q - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1};$$

$$\text{stad } \dots \dots l.S = l.a + l.(q^n - 1) - l.(q - 1).$$

Widzimy według téj formuły, że potrzeba na-przód obliczyć wyrażenie q^n , biorąc $l.q^n = n.l.q$ skąd otrzymamy ważność dla $q^n - 1$, a następnie, $l.(q^n - 1)$.

W krótkce mieć będziemy zastosowanie téj for-muły.

4te Mając wiadome a, q , i u w formule $u = aq^{n-1}$ możemy otrzymać ważność dla n . Jakoż

$$l.u = l.a + (n-1).l.q; \text{ skąd } n = 1 + \frac{l.u - l.a}{l.q}.$$

Znajdźmy liczbę wyrazów w postępie, którego

pierwszy wyraz jest 3, wykładnik 2, a wyraz ostatni 6144. Mamy

$$n = 1 + \frac{L.6144 - L.3}{L.2} = 1 + \frac{3,31132995}{0,30102999} = 1 + 11 = 12.$$

(iloraz $\frac{331132995}{30102999}$ równa się $11 + \frac{6}{30102999}$; lecz

zaniedbuje się ułomek, iako pochodzący z użycia logarytmów).

226. *Zagadnienia ściągające się do procentów składanych.*

Jedno z najważniejszych zastosowań logarytmów jest w zagadnieniach procentu składanego.

Pierwsze zagadnienie ogólne.

Umieściwszy pewną sumę na pewny czas, na procent oznaczony składany, to jest; założywszy że procent z każdego roku przyłącza się do kapitału roku poprzedzającego, iaki będzie kapitał po upływie danego czasu?

Oznaczmy sumę umieszczoną przez a , liczbę lat przez n , procent od iednego złotego przez r .

Ponieważ procent roczny od iednego złotego jest r , więc od kapitału a , na końcu pierwszego roku będzie ar , a zatem kapitał z procentem na końcu 1go roku będzie $a + ar$, czyli $a(1+r)$.

Niech będzie $a(1+r) = a'$; kapitał ten zamieni się w ciągu roku drugiego na $a'(1+r)$: więc kapitał pierwiastkowy, to jest a , na końcu roku drugiego wraz z procentem będzie $a'(1+r)$, czyli $a(1+r)^2$.

Podobnie będzie na końcu roku 3° $a(1+r)^3$; i w ogóle na końcu roku n go $a(1+r)^n$.

Ważność tę oznaczywszy przez A , mamy równanie:

$$A = a(1+r)^n; \text{ skąd } l. A = l. a + n \times l. (1+r).$$

Zastosujemy tę formułę. Kapitał 30,000 Złt: dany na procent 5 od sta składany na lat 30; iakim będzie na końcu ostatniego roku?

Aby to zagadnienie rozwiązać, uczynimy w poprzedzającej formule

$$a = 30,000, n = 30, r = \frac{5}{100} = 0,05,$$

$$\text{otrzymamy } l. A = l. 30,000 \times 30 l. (1,05),$$

$$\begin{array}{r} l. 1,05 = 0,021189299 \\ 30 l. 1,05 = 0,63567897 \end{array},$$

$$l. 30,000 = 4,47712125,$$

$$l. A = 5,11280022 = l. 129658,27,$$

$$\text{więc } \dots \dots \dots A = 129658,27.$$

Formuła $A = a(1+r)^n$ zawiera w sobie cztery ilości, A , r , n , a ; możemy więc rozwiązać cztery zagadnienia odmienne:

1od. Wyznaczyć A , mając wiadome a , r , i n : jest to zadanie któreśmy rozwiązali.

2re. Wyznaczyć sumę iaką potrzeba dać na procent składany, po r od iednego złotego, chcąc aby ta po latach n , uczyniła sumę A ?

Z równania $A = a(1+r)^n$, wyprowadzimy $l. a = l. A - n l. (1+r)$, skąd wyprowadzimy ważność dla a .

To drugie podanie stanowi regułę odtrącania złożonego: tu bowiem idzie o znalezienie dzisiejszej wartości summy A , która ma być wypłacona po latach n ; mając wzgląd na procent od summy, i na procenta od procentów.

3cie. Wyznaczyć procent na jaki dać potrzeba sumę a , aby po latach n , biorąc procent składany, mieć sumę A ?

Do tego posłuży formuła $1+r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$,

skąd $1.(1+r) = \frac{1.A - 1.a}{n}$. Wyznaczywszy $1+r$

łatwo otrzymamy r , a następnie procent mający być pobierany od 100 Złt.

4te. Nakoniec wyznaczyć czas, przez jaki powinna summa a , być dana na procent składany r od 1 Złt, aby uczyniła sumę A ?

Tu posłuży formuła $n = \frac{1.A - 1.a}{1.(1+r)}$.

Gdybyśmy chcieli aby summa A , była podwójną, potrójną, poczwórną względem a ; formuła byłaby prościejszą.

Jakoż niech będzie $A = k.a$, formuła $A = a(1+r)^n$, zamieni się na $ka = a(1+r)^n$: skąd $n = \frac{1.k}{1.(1+r)}$, to jest wartość dla n , nie zależy od kapitału pierwotnego.

Drugie zagadnienie ogólne:

Wyznaczyć jaką sumę dziś umieścić potrzeba, chcąc

chcąc odbierać na końcu każdego roku sumę oznaczoną przez b , tak, aby po latach n , cały kapitał wraz z procentem od niego, i z procentami od procentów, licząc po r od 1 Złt: został wybrany.

Niech a będzie sumą szukaną: kapitał ten po latach n , zamieniłby się na $a(1+r)^n$.

To jest: ważność summ mających się pobierać co rok, ma po latach n być $a(1+r)^n$; a że summa b , dana na końcu roku pierwszego, albo na początku roku drugiego zamieni się na końcu roku n go, na $b(1+r)^{n-1}$: podobnie b , dana na końcu roku drugiego, albo na początku trzeciego, zamieni się na końcu roku n go na $b(1+r)^{n-2}$: i

podobnie $b(1+r)^{n-3}$, $b(1+r)^{n-4}$.., $b(1+r)$, b , będą ważnościami iakie przybiorą inne summy b , na końcu roku n go; więc mamy równanie $a(1+r)^n = b(1+r)^{n-1} + b(1+r)^{n-2} + b(1+r)^{n-3} + \dots + b(1+r) + b$,

uważając stronę drugą tego równania, i biorąc wyraz ostatni za pierwszy, widzimy, że wyrazy téj strony stanowią postęp geometryczny, którego pierwszy wyraz jest b , wykładnik $1+r$ liczba wyrazów n .

A zatem wyrażenie téj summy (Ustę: 197) jest

$$\frac{b(1+r)^n - b}{1+r-1} \text{ czyli } \frac{b\{(1+r)^n - 1\}}{r};$$

i mamy

$$a(1+r)^n = \frac{b\{(1+r)^n - 1\}}{r},$$

$$\text{stad } a = \frac{b\{(1+r)^n - 1\}}{r(1+r)^n}$$

biorąc logarytmy będzie

$$l.a = l.b + l.\{(1+r)^n - 1\} - l.r - n l.(1+r).$$

Ta nowa formuła zawiera cztery ilości a, b, r, n , a zatem mogą mieć miéysce cztery odmienne zagadnienia.

Oto kilka zagadnień które się łączą z poprzedzającymi.

Na ile lat dać potrzeba sumę a , na procent składany, po 5% lub po 10% aby otrzymać sumę dwa razy większą od a ?

(Odpowiedź po 5%, na lat 14 miesięcy: 2
zaś po 10%, na lat 7 miesięcy: 3)

Jaką sumę dziś dać potrzeba na procent składany po Złt. $7\frac{1}{2}$ od sta, chcąc pobierać co rok przez 12 lat następnych po Złt. 1500, tak iż po dwunastu latach cała ta summa wraz z procentami zupełnie byłaby wypłacona.

(Odpowiedź: Złt: 11602 + $\frac{2}{3}\%$.)

Kupiono dobra za 100,000 Złt. która to summa ma być wypłacona w równych 15 ratach, licząc procent od procentu po 5%. Po ile na każdą ratę wypadnie zapłacić?

Odpowiedź 9634,22.

Pewnéy włości ludność wynosi osób a , ludność ta co rok powiększa się o setną część téy, iaka była w roku poprzedzającym, ileż potrzeba lat, aby ta okolica stała się dziesięć razy liczniejszą?

(Odpowiedź blisko 231 lat).

Z owestu mającego 100 garcy wina, utaczają co dzień po jednym garcu, a w miéysce wina dolewa-

ią za garniec wina, garniec wody; znaleźć łód ile wina pozostanie w okefcie po utoczeniu 50go garca; 2re w ilu dniach znajdować się będzie wina połowa, trzecia część, albo 4ta?

{ Odpowiedź co do pierwszego, zostanie wina $60\frac{1}{2}$ }
 { garcy. }
 { Co do drugiego: dla połowy okefetu 69 dni, dla }
 { trzeciéy części 109 dni, dla 4tęy 138 dni. }

§ V. Szeregi logarytmowe i wykładnicze.

Wyłożony w ustępie 205 sposób na rozwiązanie równania $a^x = b$, był dostateczny, aby dać wyobrażenie ułożenia tablic logarytmowych: lecz ten sposób jest bardzo pracowity, a nawet wykonać się nie da, chcąc wyznaczyć ważność dla x w znacznym stopniu przybliżoną. Są tedy odkryte sposoby daleko dogodniejsze, tak do ułożenia nowych tablic, iak do sprawdzenia tych, które dziś mamy.

Sposoby te polegają na rozwinięciu logarytmu na szereg.

227. Niech będzie liczba y , której logarytm trzeba rozwinąć na szereg: zastosujemy sposób spółczynników nie wyznaczonych (ustę: 185.)

Nie można założyć

$$1. y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{i t. d.}$$

bo uczyniwszy $y = 0$, pierwsza strona zamieni się (ustę: 215:) na ilość nieskończenie wielką odjemną lub dodatną, podług tego, iak podstawa logarytmów będzie większa lub mniejsza od 1, gdy tymczasem druga strona stanie się równa ilości A , która przeto powinna być téy saméy natury co strona pierwsza.