

Lecz, biorąc przypadek nayniedogodniejszy, to jest ten, w którym α i β są liczbami odjemnemi, chcąc aby x i y były dodatne, potrzeba nadawać dla t ważności liczebne większe od $\frac{\alpha}{b}$ i $\frac{\beta}{a}$. A zatém można nadać dla t ważności całkowite iakiegokolwiek większe od tych ilorazów.

W przypadku w którym liczba rozwiązań jest ograniczona, można zawsze oznaczyć granice między którymi powinny być zawarte ważności ilości niewyznaczonej t , uważając dwie formuły, które

w tym przypadku są
$$\begin{cases} x = \alpha - bt, \\ y = \beta + at. \end{cases}$$

W tym razie dosyć jest naznaczyć . . .
$$\begin{cases} \alpha - bt > 0, \\ \beta + at > 0, \end{cases}$$

i z tych nierówności wyprowadzić za pomocą przekształceń wyłożonych (ustę; 101) dwa inne wyrażenia nierówności, którychby pierwsze strony zawierały tylko ilość t . Tym sposobem otrzymamy zupełną liczbę rozwiązań danego zagadnienia.

§ II. Równania i zagadnienia z trzema lub większą liczbą niewiadomych.

132. Nayprzód poznamy przypadek dwóch równań z trzema niewiadomymi.

Weźmy na pierwszy przykład, dwa równania

$$5x + 4y + z = 272 \dots (1),$$

$$8x + 9y + 3z = 656 \dots (2).$$

Ponieważ tu współczynnik niewiadomę z w pierwszym równaniu, jest jednością; więc rozmnożywszy wyrazy pierwszego przez 3, i odiawszy od nich wyrazy drugiego, otrzymamy równanie

$$7x + 3y = 160 \dots (3),$$

które może być wzięte za równanie $\dots (2)$.

Zastosowawszy sposób pierwszy do równania $\dots (3)$

otrzymamy dwie formuły $\dots \dots \dots \begin{cases} x = 1 - 3t. \\ y = 51 + 7t, \end{cases}$

ważności te dla x i y ; wstawione w równanie pierwsze, dadzą.

$$5(1 - 3t) + 4(51 + 7t) + z = 272,$$

czyli po przywiedzeniu $\dots \dots \dots z = 63 - 13t$.

Teraz trzy niewiadome są wyrażone *w funkcji całkowitej*, ilości niewyznaczonej t .

Przeto nadając dla t iakiekolwiek ważności całkowite, otrzymamy dla x, y, z ; ważności całkowite, któremi się rozwiążą równania dane, albowiem. według powyższego, skład trzech formuł *znaczy to samo co dwa równania*.

Aby ważności dla x, y, z , były całkowite, i dodatne; na ówczas t nie może być dodatne, ponieważ x byłoby odjemne, lecz można założyć $t = 0, -1, -2, \dots$, aż do $t = -\frac{51}{7}$ czyli $t = -7\frac{2}{7}$.

Uczyniwszy $t = 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7$,

wypadnie $\begin{cases} x = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, \\ y = 51, 44, 37, 30, 23, 16, 9, 2; \\ z = 63, 76, 89, 102, 115, 128, 141, 154. \end{cases}$

skąd widzimy że zadanie przyymie *ośm różnych rozwiązań*.

Sprawdźmy tylko końcowe rozwiązania.

$$1^a, x=1, y=51, z=63, \text{ daia } \begin{cases} 5.1+4.51+1.63=272, \\ 8.1+9.51+3.63=656. \end{cases}$$

$$2^a, x=22, y=2, z=154 \text{ daia } \begin{cases} 5.22+4.2+1.154=272, \\ 8.22+9.2+3.154=656. \end{cases}$$

133. Weźmy jeszcze równania,

$$6x + 7y + 4z = 122 \dots (1),$$

$$11x + 8y + 6z = 145 \dots (2),$$

Aby wyrugować z , z tych dwóch równań, pomnożmy wyrazy pierwszego przez 3, a drugiego przez 2, i strony odpowiadające dodamy: będzie

$$40x + 37y = 656 \dots (3);$$

z tego równania podług sposobu pierwszego otrzy-

$$\text{mamy } \dots \dots \dots \begin{cases} x = 37t + 9, \\ y = 8 - 40t. \end{cases}$$

Ważności te zamiast x i y wstawivszy w równanie (1); otrzymamy

$$6(37t + 9) + 7(8 - 40t) + 4z = 122;$$

wykonawszy wskaza: dział: i skróci: będzie,

$$2z - 29t = 6 \dots (4).$$

Tu niewiadoma z , nie iest, iak dwie inne x i y , wyrażona w *funkcyi całkowitey* niewyznaczoney t , a zatem do formuły (4) potrzeba jeszcze zastosować jeden z wiadomych sposobów.

Mamy formuły odpowiadające temu równaniu,

$$t = 2t'$$

$$z = 29t' + 3.$$

Ponieważ wszelka ważność całkowita dla t , wstawiona w ważność dla x i y , nada dla tych niewiadomych równie całkowite ważności, zatem jeżeli zamiast $2t$ położymy t , w powyższych wyrażeniach

$$\text{dla } x \text{ i } y, \text{ otrzymamy } \dots \dots \dots \begin{cases} x = 74t' + 9, \\ y = 8 - 80t', \end{cases}$$

formuły te połączone z formułą $\dots z = 29t' + 3$, zawierać będą wszystkie składy ważności całkowitych dla x , y , z , odpowiadające dwóm równaniom danym.

Jeżeli chcemy otrzymać tylko rozwiązania bezpośrednie; naówczas t nie może być dodatnie, ponieważ y byłoby ujemne, a t nie może być ujemne, ponieważ z i x stałyby się ujemnymi.

Lecz przypuszczenie $t=0$, daie $x=9$, $y=8$, $z=3$; a zatem ten skład ważności jest iedyny, który zadość czyni dwóm równaniom.

Zebrawszy powyższy sposób postępowania, wyprowadzimy następujące ogólne prawidło: Jednę niewiadomę wyrugować z pomiędzy równań danych; dla równania ztąd wynikłego utworzyć dwie formuły, któreby dały dwie niewiadome (wchodzące do tego równania) w funkcyi całkowitej, ilości niewyznaczonej t . Ważności te wstawić w iedno z równań danych, a otrzymamy tym sposobem nowe równanie, w które wchodzić będą, tylko niewiadoma wprzód wyrugowana, i ilość t . Dla tak otrzymanego równania utworzyć dwie formuły, które daią wyrażenia dla dwóch niewiadomych, wchodzących w to równanie, w funkcyi całkowitej niewyznaczonej t . Nakoniec ważność dla t , wstawić w ważności dwóch pierwszych niewiadomych.

Tym sposobem będą wyrażone ważności dla trzech niewiadomych w funkcyi całkowitey ilości t' , poczem będzie tylko trzeba wyznaczyć dla t' granice, między które ni mają być wzięte te ważności, aby otrzymać dla niewiadomych głównych ważności całkowite i dodatne.

134. Oto sposób postępowania, jeżeli mamy trzy równania z czterema niewiadomymi:

wyrugowawszy iedną z niewiadomych, wyrazimy za pomocą dwóch równań wypadkowych, i za pomocą tego cośmy powiedzieli, trzy inne niewiadome w funkcyi całkowitey téy saméy niewyznaczonéy, i wstawimy te ważności w iedno z równań danych. Jeżeli w otrzymaném równaniu spółczynniki dwóch niewiadomych są różne od iedności, utworzymy dwie formuły, które dadzą te niewiadome, w funkcyi całkowitey, drugiey niewyznaczonéy; potém, ważność pierwszey niewyznaczonéy, wyrażoną w funkcyi drugiey niewyznaczonéy, wstawimy w wyrażenia trzech pierwszych niewiadomych, i otrzymamy cztery główne niewiadome w funkcyi całkowitey, drugiey ilości niewyznaczonéy.

Podobne rozumowanie dla czterech równań z pięciu niewiadomymi i t. d. Dla wyprawy podaiemy następujące zadania.

Trzecie zadanie. Znayduie się w Mennicy trojakiiego gatunku srebro. Pierwszy gatunek w 8 uncych, czyli iednéy grzywnie zawiera czystego srebra 7 uncyy; drugi gatunek zawiera 5 i $\frac{1}{2}$ uncyy; trzeci gatunek zawiera 4 i $\frac{1}{2}$ uncyy w grzywnie. Potrzeba uczynić mieszaninę ważącą 30 grzywień, któraby zawierała 6 uncyy czystego srebra w 8 uncych. Ileż (w liczbach całkowitych) potrzeba wziąć grzywien z każdego gatunku?

(Uncyy ośm czyli 16 łutów czynią iednę grzywnę).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Odpowiedź} \left\{ \begin{array}{l} x = 10, 12, 14, 16, 18, \\ y = 20, 15, 10, 5, 0, \\ z = 0, 3, 6, 9, 12, \end{array} \right. \\ \text{to test otrzymamy pięć różnych rozwiązań, bio-} \\ \text{rąc 0 za ważność dla } y \text{ i } z. \end{array} \right.$$

Czwarte zadanie. Znaleźć trzy liczby całkowite takie, ażeby summa ich iloczynów przez liczby względne, 3, 5, 7 czyniła 560, zaś summa ich iloczynów przez kwadraty 9, 25, 49 czyniła 2920?

$$\left\{ \text{Odpowiedź} \left\{ \begin{array}{l} x=15, 50 \\ y=82, 40 \\ z=15, 30 \end{array} \right. \right\} \text{to jest dwa rozwiązanie}$$

Piąte zadanie. Znaleźć liczbę N, która podzielona przez 11 daie resztę 3, podzielona przez 19 daie resztę 5, podzielona przez 29 daie resztę 10?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Odpowiedz, } N=4128 + 6061t; \text{ tak iż } 4128 \\ \text{jest liczbą najmniejszą, która uczyni zadosyć} \\ \text{brzmieniu zagadnienia.} \end{array} \right.$$

Szóste zadanie. Znaleźć dla x taką liczbę, ażeby wyrażenia $\frac{3x-10}{7}$, $\frac{11x+8}{17}$, $\frac{16x-1}{5}$ były liczbami całkowitemi?

$$\left(\text{Odpowiedź. } x=211 + 595t, t \text{ jest liczbą nie-} \right. \\ \left. \text{wyznaczoną.} \right)$$

135. Gdy w zadaniu szóstém oznaczymy przez y, z, v ilorazy $\frac{3x-10}{7}, \frac{11x+8}{17}, \frac{16x-1}{5}$ otrzymamy trzy równania zagadnienia; $3x-10=7y$; $11x+8=17z$; $16x-1=5v$; czyli $3x-7y=10$; $11x-17z=-8$; $16x-5v=1$.

Potrzebaby więc do tych równań zastosować sposób poprzedzającego ustępu, dla trzech równań z czterema niewiadomymi. Lecz znajdziemy sposób daleko prostszy otrzymania ważności dla x , która tu jest główną niewiadomą. Sposób ten oprócz tego może być zastosowany do wszystkich zagadnień tego rodzaju.

Naprzód, uważając równanie trzecie $\frac{16x-1}{5}$, to wychodzi na $3x + \frac{x-1}{5}$; a zatem, ażeby to wyrażenie było liczbą całkowitą, musi $x-1$ być wielokrotnością liczby 5.

Uczynimy więc $\frac{x-1}{5}=t$, wypadnie $x=1+5t$.

Wszelka ważność całkowita dla t , wstawiona w tę formułę, da dla x ważność, która czyni zadosyć trzeciemu warunkowi zagadnienia.

Ważność tę dla x wstawmy w pierwsze wyrażenie $\frac{3x-10}{7}$; otrzymamy $\frac{15t-7}{7}$ czyli $2t-1+\frac{t}{7}$;

widzimy tedy, że to nowe wyrażenie będzie liczbą całkowitą, jeżeli uczynimy $t=7t'$, oprócz tego warunek ten jest konieczny. A zatem, ażeby pierwsze

i trzecie wyrażenie było całkowite, musi być $x = 1 + 5t$, a że t jest $= 7t'$ więc $x = 1 + 35t'$.

Wstawmy tę nową ważność w wyrażenie drugie

$$\frac{11x + 8}{17}, \text{ otrzymamy } \frac{385t' + 19}{17} \text{ czyli } 23t' + 1 + \frac{2 - 6t'}{17};$$

ażé mamy $2 - 6t' = 2(1 - 3t')$ i oprócz tego 2 i 17 są pierwszymi między sobą, a zatém ażeby drugie wyrażenie było liczbą całkowitą, musi być $1 - 3t'$ podzielone przez 17.

$$\text{Uczyniwszy } \frac{1 - 3t'}{17} = t'' \text{ wypadnie } t' = \frac{1 - 17t''}{3}$$

czyli wykonawszy o ile można dzielenie, będzie

$$t' = -6t'' + \frac{t'' + 1}{3}. \text{ Niech będzie } \frac{t'' + 1}{3} = t''', \text{ otrzy-}$$

mamy $t' = 3t''' - 1$, skąd $t' = -6t'' + t'''$, czyli

$$t' = -17t'' + 6$$

wstawiwszy tę ważność w wyrażenie $x = 1 + 35t'$ i uczyniwszy skrócenie otrzymamy

$$x = 211 - 595t''.$$

Taka jest formuła za pomocą której otrzymamy wszystkie ważności dla x , czyniące zadosyć zagadnieniu. Niech będzie $t''' = 0$, otrzymamy $x = 211$, i to będzie najmniejsza ważność ze wszystkich szukanych. Nadając dla t''' iakiekolwiek ważności odjemne, otrzymalibyśmy inne rozwiązania.

Uwaga. Uważajmy że 595 spółczynnik ilości t''' w formule, jest iloczynem z $7 \times 17 \times 5$, to jest, iloczynem z mianowników trzech danych wyrażeń.

136. Pozostaie nam coś powiedzieć o zagadnie-

niach zwanych *więcej iak niewyznaczonemi*, to jest: o tych, których liczba równań *jest mniejsza dwoma lub trzema* i t. d. . . . od liczby ilości niewiadomych.

Weźmy najprzód równanie z 3ma niewiadomemi $ax + by + cz = d$. Przeniosłszy wyraz cz na drugą stronę; będzie:

$$ax + by = d - cz, \text{ czyli } ax + by = c',$$

(oznaczając przez c' ilość $d - cz$, którą na chwilę uważamy za wiadomą).

To uczyniwszy, szukać trzeba dla równania $ax + by = c'$, dwóch formuł; $x = \alpha - bt$; $y = \beta + at$. Potém, zamiast c' wstawić $d - cz$, w ważności dla α i β , a wówczas x i y , będą wyrażone w *funkcyi całkowitey, niewyznaczoney* t , i *trzecię niewiadomey* z .

Niechby np. było potrzeba zapłacić zł. 187 5cio złotówkami, 6cio złotówkami i 20to złotówkami, bez żadney innęy monety.

Oznaczmy przez x , y , z , trzy liczby sztuk, które potrzeba dać z każdego gatunku; otrzymamy równanie.

$$5x + 6y + 20z = 187,$$

$$\text{czyli} \dots \dots \dots 5x + 6y = 187 - 20z = c'.$$

$$\text{A zatem} \dots \dots \dots x = \frac{c' - 6y}{5},$$

$$\text{czyli} \dots \dots \dots x = -y + \frac{c' - y}{5},$$

$$\text{uczyniwszy } \frac{c' - y}{5} = t, \text{ wypadnie } y = c' - 5t,$$

$$\text{skąd} \dots \dots \dots x = -c' + 6t.$$

Te dwie formuły, gdy w nie zamiast c' wstawimy ważność $187 - 20z$, zamieniają się

$$\text{na} \quad \dots \quad \begin{cases} y = 187 - 20z - 5t, \\ x = -187 + 20z + 6t. \end{cases}$$

Dopóki dla x i y nadawać będziemy ważności całkowite, dodatne lub odjemne, dopóty dla z i t można będzie nadawać ważności zupełnie dowolne; lecz jeżelibyśmy chcieli wprost uczynić zadosyć brzmieniu zagadnienia, sama postać równania danego $5x + 6y + 20z = 187$ dowodzi że z nie może

mieć ważności większej od $\frac{187}{20}$ czyli $9\frac{7}{20}$, bo inaczej x lub y byłoby odjemne.

Uczyńmy więc następnie $z = 0, 1, 2, 3 \dots 8, 9$.
Wziąwszy $z = 0$, ważności dla x i y

$$\text{będą} \quad \dots \quad \begin{cases} x = -187 + 6t, \\ y = 187 - 5t, \end{cases}$$

formuły te dowodzą, że t powinno być $> \frac{187}{6}$, lecz

$< \frac{187}{5}$, czyli $> 31\frac{1}{6}$, lecz $< 37\frac{2}{5}$. A zatem t może

mieć te sześć ważności, 32, 33, 34, 35, 36, 37,

a zatem jeżeli $z = 0$, jest $\begin{cases} t = 32, 33, 34, 35, 36, 37, \\ x = 5, 11, 17, 23, 29, 35, \\ y = 27, 22, 17, 12, 7, 2. \end{cases}$

wziąwszy $z = 1$, formuły zamieniają się na

$$\begin{cases} x = -167 + 6t, \\ y = 167 - 5t, \end{cases}$$

skąd $t > \frac{167}{6}$ czyli $27\frac{5}{6}$, lecz $< \frac{167}{5}$ czyli $33\frac{2}{5}$,

co daie ieszcze sześć ważności 28, 29, 30, 31, 32 i 33.

A zatem uczyniwszy $z=1$

$$\text{mamy} \begin{cases} t=28, 29, 30, 31, 32, 33, \\ x=1, 7, 13, 19, 25, 31, \\ y=27, 22, 17, 12, 7, 2. \end{cases}$$

$$\text{Gdy } z=2; \text{ będzie...} \begin{cases} t=25, 26, 27, 28, 29, \\ x=3, 9, 15, 21, 27, \\ y=22, 17, 12, 7, 2. \end{cases}$$

$$\text{Gdy } z=3; \text{ będzie...} \begin{cases} t=22, 23, 24, 25, \\ x=5, 11, 17, 23, \\ y=17, 12, 7, 2, \end{cases}$$

.....
.....

$$\text{Gdy } z=8 \text{ otrzymamy formuły} \begin{cases} x=-27+6t, \\ y=27-5t; \end{cases}$$

skąd $t > \frac{27}{6}$ czyli $4\frac{1}{2}$, lecz $< \frac{27}{5}$ czyli $5\frac{2}{5}$. A zatem

t , może mieć tylko ważności $t=5$, skąd $x=3$, $y=2$.

Nakoniec przypuściwszy że $z=9$ nie otrzymamy żadnego rozwiązania, albowiem formuły zamieniają się na

$$x=-7+6t, y=7-5t,$$

skąd $t > \frac{7}{6}$ czyli $1\frac{1}{6}$, lecz $t < \frac{7}{5}$ czyli $1\frac{2}{5}$.

137. Widzimy dostatecznie, co potrzebaby uczynić mając dwa równania z czterema niewiadomemi, albo trzy równania z pięciu niewiadomemi.

Jednakże damy zupełne rozwiązanie tego gatunku

zagadnień, aby przekonać, iak za pomocą szczególnych spostrzeżeń, można często skrócić działanie.

Siódme zagadnienie. Pewien rzeźnik kupuje 100 sztuk bydła za 100 dukatów, to jest woły po 10 krowy po 5, cielęta po 2 dukaty a skopy po $\frac{1}{2}$ dukata. Ile kupił sztuk każdego gatunku?

Niech x , y , z , u oznaczają liczby szukane, a zatem mamy równania,

$$\left. \begin{aligned} x + y + z + u &= 100 \\ 10x + 5y + 2z + \frac{1}{2}u &= 100 \end{aligned} \right\} \text{czyli} \left\{ \begin{aligned} x + y + z + u &= 100 \\ 20x + 10y + 4z + u &= 200 \end{aligned} \right.$$

Odiawszy wyrazy równania pierwszego od drugiego będzie

$$19x + 9y + 3z = 100;$$

z równaniem tém postąpić należy, iak w ustępie poprzedzającym. Lecz przed wszystkiém uważmy że dogodnięć będzie wyrazić y i z w funkcyi całkowitej x , łód dla tego, że x nie powinno mieć wa-

żności większej od $\frac{100}{19}$ czyli $5\frac{5}{19}$ co łatwo postrzedz:

2re dla tego, że współczynniki przy x , y , z , mają spólny czynnik, co koniecznie pociągnie warunek potrzebny dla wyznaczenia właściwych ważności dla x .

Podług tych uwag przenieśmy wyraz $19x$ na drugą stronę; będzie

$$\begin{aligned} 9y + 3z &= 100 - 19x, \\ \text{czyli} \quad 3y + z &= \frac{100 - 19x}{3}. \end{aligned}$$

Aże dla x , y , z , są żądane ważności całkowite i dodatne, więc $\frac{100 - 19x}{3}$ powinno być całkowite i dodatne, lecz tylko $x=1$, i $x=4$, mogą

zadasyć uczynić temu podwóynemu warunkowi; a zatem x nie może mieć innych wartości iak $x=1$ i $x=4$.

Niech będzie $x=1$, skąd $3y+z=27$, czyli $z=27-3y$.

Ważności te dla x i z wstawivszy w równanie pierwsze, otrzymamy $u=72+2y$.

Pierwsza z tych formuł pokazuje, że y nie może być >9 ; a zatem jeżeli

$$x=1 \quad \begin{cases} y=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \\ z=27, 24, 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0, \\ \text{mamy} \quad u=72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, \end{cases}$$

Niech x będzie $=4$, otrzymamy $3y+z=8$,

$$\text{skąd} \quad \begin{aligned} z &= 8-3y, \\ u &= 88+2y. \end{aligned}$$

Wyrażenie dla z dowodzi, że y nie może być >2 ,

$$\text{a zatem gdy } x=4, \text{ otrzymamy} \quad \begin{cases} y=0, 1, 2, \\ z=8, 5, 2, \\ u=88, 90, 92. \end{cases}$$

Skąd widzimy, że zagadnienie dane przyymuie tylko trzynaście rozwiązań; a dziesięć, jeżeli odrzucimy rozwiązania 0.

§. III. Rozbiór równań niewyznaczonych drugiego stopnia.

138. W téy części zakładamy sobie, iak w rozbiórze równań niewyznaczonych pierwszego stopnia, rozwiązać w liczbach całkowitych takie zagadnienia, w którychby liczba równań była mnieysza od liczby niewiadomych. Aże w ogólności równanie drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi daje ważność dla iednéy z niewiadomych, w funkcyi niespółmiernej drugiey niewiadomey, więc zadanie takowe na

tém