

Zastósujemy powyższe rachunki do sprawdzenia

ilości  $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ , iako pierwiastku równania

$x^3 - 1 = 0$ , czyli pierwiastku sześciennego z 1. (us: 173).

Podług formuły,  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ,

$$\begin{aligned} \text{mamy} \quad & \left( \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{(-1)^3 + 3(-1)^2 \cdot \sqrt{-3} + 3(-1) \cdot (\sqrt{-3})^2}{8} \\ &+ \frac{(\sqrt{-3})^3}{8} = \frac{-1 + 3\sqrt{-3} - 3 \times -3 - 3\sqrt{-3}}{8} = \frac{8}{8} = 1. \end{aligned}$$

Podobnież sprawdzilibyśmy drugą ważność,

$$\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

#### § IV. Teorya wykładników. Wiadomości ogólne o szeregach.

175. Tu miéysce dać poznać dwie nowe notacye, których użytek bardzo iest dogodny w rachunkach algebranych. Są to *wykładniki ułomkowe* i *wykładniki odjemne*, które wypływają z prawideł wyciągania pierwiastków, i dzielenia iednomianów.

Niechby trzeba było wyciągnąć pierwiastek *n*-go stopnia z ilości takiéy iak  $a^m$ . Widzieliśmy (us: 163) że, gdy  $m$  iest wielokrotnością liczby  $n$ , potrzeba podzielić wykładnik  $m$ , przez skaźnik  $n$  pierwiastku.

Lecz gdy  $m$  nie jest podzielne przez  $n$ , w którym to razie nie można algebraicznie wyciągnąć pierwiastku, na ówczas można skazać takowe działanie, dzieleniem wykładników przez siebie.

$$\text{I tak } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; \text{ np. } \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}; \sqrt[4]{a^7} = a^{\frac{7}{4}}.$$

Podobnie aby podzielić  $a^m$  przez  $a^n$ , (ustę: 23) potrzeba odjąć wykładnik dzielnika od wykładnika

dzielny, skoro będzie  $m > n$ ; i otrzymamy  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ .

Lecz jeżeli  $m < n$ , w którym to razie nie można algebraicznie wykonać dzielenia, na ówczas trzeba tylko skazać to dzielenie odejmując zawsze wykładnik dzielnika od wykładnika dzielny.

Niech  $p$  oznacza różnicę bezwzględną pomiędzy  $n$  i  $m$ ; będzie wówczas  $n = m + p$ , skąd  $\frac{a^m}{a^{m+p}} = a^{-p}$ ; nadto  $\frac{a^m}{a^{m+p}}$  zamieni się na  $\frac{1}{a^p}$  opuszczając czynnik  $a^m$  spólny licznikowi i mianownikowi. Wzięc  $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ .

Wyrażenie  $a^{-p}$  jest więc znakiem niemogącego się wykonać dzielenia; a prawdziwą ważnością tego wyrażenia jest iloraz z jedności, podzielony przez tę samą głośkę  $a$ , z wykładnikiem  $p$  wziętym do-

$$\text{datnie. I tak } a^{-3} = \frac{1}{a^3}; a^{-5} = \frac{1}{a^5}.$$

Użycie wykładnika odjemnego ma tę korzyść, że daje postać ilości całkowitej wyrażeniu ułomko-

wemu. Z połączenia tych dwóch okoliczności, to jest: wyciągania pierwiastku i dzielenia, gdy tych działań na ilościach iednomianowych nie można wykonać, wypada inna notacyia, a tą jest, *wykładnik ułomkowy odjemny*.

Niechby trzeba było wyciągnąć pierwiastek *n*tego stopnia z  $\frac{1}{a^m}$ : naprzód mamy  $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ ; więc

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}} \text{ kładąc w miejsce zwy-}$$

klęgo znaku pierwiastkowego wykładnik ułomkowy.

Wyrażenia  $a^{\frac{m}{n}}$ ,  $a^{-p}$ ,  $a^{-\frac{m}{n}}$  są notacyie przyjęte, oparte na *prawidłach poprzedzających*, znaczące

to samo co wyrażenia  $\sqrt[n]{a^m}$ ;  $\frac{1}{a^p}$ ;  $\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$ . A za-

tém w miarę potrzeby, można używać iednych zamiast drugich, i na odwrot. Jak zwykle,  $a^p$  wymawia się *a do potęgi p*, *p* jest liczbą całkowitą do-

datną, tak podobnież,  $a^{\frac{m}{n}}$ ,  $a^{-\frac{m}{n}}$ ;  $a^{-p}$ , wymawiają

się *a do potęgi  $\frac{m}{n}$* , *a do potęgi  $-\frac{m}{n}$* , *a do po-*

tęgi  $-p$ : to było powodem, że algiebraiści uogólnili ten wyraz potęga, lecz byłoby może stosowniey,

używać nazwisk; *a* z wykładnikiem  $\frac{m}{n}$ , z wykładni-

kiem  $-\frac{m}{n}$ , z wykładnikiem  $-p$ ; zatrzymując na-

zwanie potęgi tylko dla iloczynu z liczby rozmnożony ilekolewkie razy przez siebie (zobacz ustęę 2).

176 Załóżywszy takowe wiadomości o początku i znaczeniu ilości mających iakiekolwiek wykładniki, zobaczmy, iak z takimi ilościami odbywają się działania arytmetyczne; zaczynając od mnożenia.

*Mnożenie.* Ażeby  $a^{\frac{3}{5}}$  rozmnożyć przez  $a^{\frac{2}{3}}$ , dosyć będzie dodać dwa wykładniki i otrzymamy

$$a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{5} + \frac{2}{3}} = a^{\frac{17}{15}}.$$

Jakoż widzieliśmy (ustęę 175) że

$$a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}; \quad a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2};$$

więc 
$$a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[5]{a^3} \times \sqrt[3]{a^2};$$

czyli wykonawszy mnożenie podług prawidła (ustęę 170) otrzymamy,

$$a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[15]{a^{17}} = a^{\frac{17}{15}}.$$

Rozmnóżywszy ieszcze  $a^{-\frac{3}{4}}$  przez  $a^{\frac{5}{6}}$ ; będzie

$$a^{-\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{6}} = a^{-\frac{3}{4} + \frac{5}{6}} = a^{-\frac{9}{12} + \frac{10}{12}} = a^{\frac{1}{12}}$$

Jakoż  $a^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{a^3}}; \quad a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5};$  wiec

$$a^{-\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[4]{\frac{1}{a^3}} \times \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{\frac{1}{a^3}} \times \sqrt[12]{a^{10}}$$

$$= \sqrt[12]{\frac{a^{10}}{a^3}} = \sqrt[12]{a^7} = a^{\frac{7}{12}}.$$

Weźmy przykład ogólny:  $a^{-\frac{m}{n}}$  rozmnożyć przez  $a^{\frac{p}{q}}$ , będzie

$$a^{-\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{np - mq}{nq}};$$

albowiem  $a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$ ,  $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ ; więc

$$a^{-\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} \times \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{\frac{a^{np}}{a^m}} = \sqrt[nq]{a^{np - mq}} = a^{\frac{np - mq}{nq}}$$

A tak prawidło ogólne: aby dwie ilości iednomianowe, z iakiemikolwiek wykładnikami rozmnożyć przez siebie, potrzeba dodać dwa wykładniki téżę głoski; prawidło to już było wyłożone pod (ustę: 16.) na ilości mające wykładniki całkowite.

Podług tego prawidła otrzymamy:

$$a^{\frac{3}{4}} b^{-\frac{1}{2}} c^{-1} \times a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} c^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{11}{4}} b^{\frac{1}{6}} c^{-\frac{2}{5}}$$

$$3a^{-2} b^{\frac{2}{3}} \times 2a^{-\frac{4}{5}} b^{\frac{1}{2}} c^2 = 6a^{-\frac{14}{5}} b^{\frac{7}{6}} c^2$$

*Dzielenie.* Aby podzielić przez siebie dwie ilości iednomianowe, z iakiemikolwiek wykładnikami, potrzeba postąpić podług prawidła wyłożonego w ustępie 22. na ilości mające wykładniki dodatne i całkowite; to jest: potrzeba wykładnik dzielnika odjąć od wykładnika podzielny. Jakoż, wykładnik każdéy głoski w ilorazie powinien być taki, aby dodawszy go do wykładnika téżę głoski w dzielniku, summa była równa wykładnikowi dzielny, więc wykładnik ilorazu jest różnicą pomiędzy wykładnikiem dzielny, a wykładnikiem dzielnika.

Podług tego prawidła otrzymamy:

$$a^{\frac{2}{3}} : a^{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{3} - (-\frac{3}{4})} = a^{\frac{17}{12}};$$

$$a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{3}{4} - \frac{4}{5}} = a^{-\frac{1}{20}}; a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}};$$

$$a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{3}{4}} : a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{7}{8}} = a^{\frac{9}{10}} b^{-\frac{1}{8}}.$$

*Formowanie potęg.* Aby podnieść ilość iednomianową mającą iakikolwiek wykładnik do potęgi *mtéy*, potrzeba stósownie do prawidła ustępu 163. *mnożyć wykładnik każdéy głoski, przez wykładnik m potęgi*: albowiem podnieść ilość do *mtéy* potęgi, iest to mnożyć ią *m* razy przez siebie, a zatém podług prawidła na mnożenie, potrzeba, wykładnik każdéy głoski dodać do siebie *m* razy, to iest powtórzyć go razy *m*, czyli rozmnożyć przez *m*.

I tak

$$\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^5 = a^{\frac{15}{4}}, \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^{\frac{6}{3}} = a^2;$$

$$\left(2a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}\right)^6 = 64a^{-3}b^{\frac{9}{2}}; \left(a^{-\frac{5}{6}}\right)^{12} = a^{-10}$$

*Wyciąganie pierwiastków.* Aby wyciągnąć pierwiastek *ngo* stopnia, z iednomianu, potrzeba postępując podług prawidła ustępu 163. *podzielić wykładnik każdéy głoski przez liczbę n, oznaczając iakiego stopnia mamy wyciągnąć pierwiastek.*

Jakoż wykładnik każdéy głoski w wypadku powinien być taki, aby rozmnożony przez skażnik *n* żadanego pierwiastku, dał wykładnik tenże sam iaki się znajduje przy głosce iednomianu danego: a zatém wykładniki w otrzymanym wypadku powinny względnie być równe ilorazom otrzymanym, z podzielenia wykładników głosek, danego iednomianu,

przez skażnik  $n$  pierwiastku.

A zatem

$$\sqrt[3]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{9}}; \sqrt[4]{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{3}{16}}; \sqrt[5]{a^{-\frac{3}{5}}} = a^{-\frac{3}{25}}$$

$$\sqrt[3]{a^{\frac{3}{5}} b^{-2}} = a^{\frac{1}{5}} b^{-\frac{2}{3}} \dots \dots \dots$$

Zakończymy tę materję okazaniem działania zawierającego razem dwa poprzedzające.

Podnieśmy  $a^{\frac{m}{n}}$  po potęgę  $\frac{r}{s}$ : trzeba okazać że

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n} \times \frac{r}{s}} = a^{\frac{mr}{ns}}$$

Jakoż jeżeli zwrócimy uwagę na początek takowej notacyy; postrzeżemy że

$$\begin{aligned} \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} &= \sqrt[s]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r} = \sqrt[s]{\frac{1}{\sqrt[n]{(a^m)^r}}} = \sqrt[s]{\frac{1}{\sqrt[n]{a^{mr}}}} \\ &= \sqrt[s]{\sqrt[n]{\frac{1}{a^{mr}}}} = \sqrt[ns]{a^{-mr}} = a^{-\frac{mr}{ns}} \end{aligned}$$

Korzyść z używania wykładników iakiéykolwiek natury, polega na tém, że rachunek takowych wyrażeń; nie wymaga innych prawideł iak tylko tych,

które zostały ustanowione na rachunek ilości mających wykładniki całkowite: oprócz tego, te działania wychodzą na działania z ułomkami, już poprzednio poznane.

177. Że te same prawidła służą na przypadek wykładników niespółmiernych, można okazać następującym sposobem

Naprzód co do mnożenia. Niech  $x, y$ , będą dwie liczby niespółmierne: mówię że  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ .

Gdyby nie było  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ , gdyby naprzykład wykładnik  $x+y$  był za mały; powiększylibyśmy go go pewną liczbą  $i$ , i mielibyśmy

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y+i}.$$

Rozbierzmy  $i$ , na dwie części  $h$  i  $k$ : tak, iż  $i = h + k$ : a zatem

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y+h+k}$$

Niech  $\frac{m}{n}$  oznacza liczbę spółmierną zawartą między  $x$  i  $x+h$ : to jest, niech będzie  $x < \frac{m}{n}$ ,  $x+h > \frac{m}{n}$ . Niech  $\frac{p}{q}$  oznacza inną liczbę spółmierną zawartą między  $y$  i  $y+h$ : to jest, niech będzie  $y < \frac{p}{q}$ ,  $y+h > \frac{p}{q}$ .

W tym razie  $a^x \cdot a^y < a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}}$



czyli

$$a^{x+y+h+k} < a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$$

skądby wypadło, że  $x+y+h+k < \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ ,

a że rzeczywiście  $x+y+h+k > \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ ; więc

nie może być  $a^x \cdot a^y = a^{x+y+i}$ .

Przez takie samo rozumowanie dowiedlibyśmy, że nie może być  $a^x \cdot a^y = a^{x+y-i}$  więc

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$

gdy wykładniki  $x, y$ , są niespółmierne. Gdy  $\frac{m}{n}$

jest liczbą spółmierną,  $x$  niespółmierną; dowiedli-

byśmy tym samym sposobem, że  $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^x = a^{\frac{m}{n} + x}$ .

Powtóre co do dzielenia. Ponieważ  $a^x \cdot a^{-y} \cdot a^y = a^{x-y+y}$ , gdy wykładniki  $x-y$ , i  $y$  są niespółmierne

więc

$$a^{x-y} = \frac{a^{x-y+y}}{a^y},$$

czyli

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

a tak przypadek dzielenia potęg z wykładnikami niespółmiernymi  $\alpha$ ,  $\gamma$ , jest wnioskiem dowiedzionego przypadku mnożenia.

Po trzecie: co do podwyższania do potęg. Niech  $\alpha$  oznacza ilość niespółmierną,  $\frac{m}{n}$  inną także niespół-

mierną: mówię że  $(a^\alpha)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m\alpha}{n}}$ .

Gdyby wykładnik  $\frac{m\alpha}{n}$  był za mały; mielibyśmy

$$(a^\alpha)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m\alpha}{n} + i}, \text{ czyli } = a^{\frac{m}{n} \left( \alpha + \frac{in}{m} \right)}$$

Niech będzie liczba spółmierna  $\frac{p}{q} < \alpha < \frac{p}{q} + \frac{in}{m}$ .

$$\text{W tym razie } (a^\alpha)^{\frac{m}{n}} < \left( a^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{m}{n}}$$

$$\text{czyli } a^{\frac{m}{n} \left( \alpha + \frac{in}{m} \right)} < a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}},$$

Skądby wypadło, że  $\alpha + \frac{in}{m} < \frac{p}{q}$ : co według przypuszczenia powyższego być nie może a zatem

$$\text{nie może być także } (a^\alpha)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m\alpha}{n} + i}.$$

Tym samym sposobem dowiedlibyśmy że nie może być

że być  $(a^x)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mx}{n} + i}$ ; więc  $(a^x)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mx}{n}}$

Nadto gdy  $\frac{m}{n}$  jest liczbą spółmierną,  $x$  niespół-

mierną; będzie także  $(a^{\frac{m}{n}})^x = a^{\frac{mx}{n}}$ ,

Założwszy bowiem iż

$$(a^{\frac{m}{n}})^x = a^{\frac{mx}{n} + i} = a^{\frac{m}{n}(x + \frac{in}{m})},$$

i wzięwszy liczbę spółmierną  $\frac{p}{q} > x$ ;  $\frac{p}{q} < x + \frac{in}{m}$ ;

dowiedlibyśmy, daléy iak w poprzedzającym razie, w którym, tak  $x$  iak  $\frac{m}{n}$  były niespółmierne, iż nie

może być  $(a^x)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mx}{n} + i}$ , ani  $(a^x)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mx}{n}}$ ;

że zatém  $(a^x)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mx}{n}}$

*Uwaga tłumacza.* A tak rachuba potęg, bez względu na naturę ich wykładników, to jest: czy te są całkowitemi, czy ułomkowemi, czy niespółmiernymi liczbami, polega na tych samych w każdym razie prawidłach. Dowodzenie przypadku wykładników niespółmiernych, na którym polega pewność matematyczna teoryi logarytmów; osądziłszy za potrzebny dodatek do textu oryginału.

To dowodzenie było nam udzielone, przez znanego

Autora kilku uczonych dzieł matematycznych Profesora Uniwersytetu Warszawskiego, Adryana Krzyżanowskiego, którego szczęśliwy wykład tę ma szczególną pomiędzy innemi zaletę, że naysubtelniejsze prawdy matematyczne nayprostszy, a zarazem naygruntowniejszym okazuje sposobem.

*Okazanie dwumianu Newtona, na przypadek iakiegokolwiek wykładnika.*

178. Podamy tu dowodzenie Eulera (nieco zmienione) formuły Newtona, do rozwinięcia potęgi dwumianu na szereg, gdy *wykładnik jest liczbą iakąkolwiek, spółmierną lub niespółmierną*. Pomnożywszy i podzieliwszy  $x + a$  przez  $x$ , będzie

$$x + a = x \left( 1 + \frac{a}{x} \right); \text{ a zatem}$$

$$(x + a)^m = x^m \left( 1 + \frac{a}{x} \right)^m = x^m (1 + z)^m,$$

$$\text{czyniąc } \frac{a}{x} = z.$$

Jeżeli więc dowiedzimy że

$$(1 + z)^m = 1 + mz + m \frac{m-1}{2} z^2 + m \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{2} z^3 + \text{i t. d.}$$

gdy  $m$  będzie iakąkolwiek liczbą; będzie także

$$(x + a)^m = x^m \left( 1 + m \frac{a}{x} + m \frac{m-1}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \text{i t. d.} \right),$$

czyli wykonawszy działanie skazane,

$$(x + a)^m = x^m + m a x^{m-1} + m \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + \dots$$

Gdy  $m$  jest liczbą całkowitą, widzieliśmy że

$$(1+z)^m = 1 + mz + m \frac{m-1}{2} z^2 + m \frac{m-1}{2} \frac{m-2}{3} z^3 + \dots$$

Lecz jeżeli  $m$  będzie liczbą ułomkową dodatnią  $\frac{p}{q}$ , na-

ówczas nie można wiedzieć jakiego wyrażenia będzie rozwinięciem wypadek

$$1 + mz + m \frac{m-1}{2} z^2 + m \frac{m-1}{2} \frac{m-2}{3} z^3 + \dots$$

To niewiadome wyrażenie oznaczmy przez  $y$ ; a zatem będzie równanie.

$$y = 1 + mz + m \frac{m-1}{2} z^2 + m \frac{m-1}{2} \frac{m-2}{3} z^3 + \text{it.d.} \quad (1).$$

Niech  $m'$  będzie inny wykładnik ułomkowy, będzie podobnie

$$y' = 1 + m'z + m' \frac{m'-1}{2} z^2 + m' \frac{m'-1}{2} \frac{m'-2}{3} z^3 + \dots \quad (2).$$

Rozmnożywszy przez siebie strony odpowiadające równań (1) i (2); otrzymamy naprzód z pierwszej strony  $y y'$ . Co do drugiej strony, trudno będzie otrzymać prawdziwą postać iloczynu podług pravidła zwyczajnego na mnożenie wielomianów. Lecz uważając, że postać iloczynu (ustęp 20) nie zależy bynajmniej od szczególnych ważności głosek, które wchodzi w dwa czynniki mnożenia, znajdziemy, że iloczyn powyższy powinien mieć tę samą postać, jaką ma w ten czas, kiedy  $m$  i  $m'$  są liczbami całkowitemi i dodatnimi. A że w tym razie jest

$$1 + mz + m \frac{m-1}{2} z^2 + m \frac{m-1}{2} \frac{m-2}{3} z^3 + \text{it.d.} = (1+z)^m,$$

$$1 + m'z + m' \frac{m'-1}{2} z^2 + m' \frac{m'-1}{2} \cdot \frac{m'-2}{3} z^3 +$$

$$\text{i t. d.} = (1+z)^{m'},$$

więc

$$(1+mz+m \frac{m-1}{2} z^2 + \dots)(1+m'z+m' \frac{m'-1}{2} z^2 + \dots) =$$

$$(1+z)^{m+m'} = 1 + (m+m')z + (m+m') \frac{(m+m'-1)}{2} z^2 + \dots$$

i przeto ten ostatni wypadek jest prawdziwy, gdy  $m, m'$  będzie jakiegokolwiek i mamy

$$yy' = 1 + (m+m')z + (m+m') \frac{(m+m'-1)}{2} z^2 + \dots (3).$$

Niech  $m''$  będzie trzecim wykładnikiem ułamkowym dodatnim, będzie

$$y'' = 1 + m''z = m'' \frac{m''-1}{2} z^2 + \dots$$

Strony odpowiadające tych równań mnożąc przez siebie, otrzymamy

$$yy'y'' = 1 + (m+m'+m'')z + (m+m'+m'') \frac{(m+m'+m''-1)}{2} z^2 + \dots$$

W ogólności niech będzie liczba  $q$  wykładników  $m, m', m'', m''' \dots$ ,  $q$  jest mianownikiem liczby

$$m = \frac{p}{q}; \text{ naznaczywszy}$$

$$m+m'+m''+\text{i t. d.} = r; \text{ otrzymamy}$$

$$yy'y''y''' \dots = 1 + rz + r \frac{r-1}{2} z^2 + r \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3} z^3 + \dots (4),$$

uczyniwszy  $m = m' = m'' = m''' \dots$ , będzie

$$r = m + m + m + m + \dots = mq;$$

równanie przeto (4) zamieni się na

$$y^q = 1 + mq \cdot z + mq \cdot \frac{mq-1}{2} z^2 + mq \cdot \frac{mq-1}{2} \cdot \frac{mq-2}{3} z^3 + \dots$$

aż  $m = \frac{p}{q}$ ; daie  $mq = p$ , więc

$$y^q = 1 + pz + p \frac{p-1}{2} z^2 + p \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} z^3 + \dots$$

nadto  $p$  jest liczbą całkowitą, zatem druga strona tego równania, jest rozwinięciem potęgi  $(1+z)^p$ ,

skąd wypada  $y^q = (1+z)^p$ , zatem

$$y = (1+z)^{\frac{p}{q}} = (1+z)^m, \quad \text{na koniec}$$

$$(1+z)^m = 1 + mz + m \frac{m-1}{2} z^2 + m \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} z^3 + \dots$$

$m$  jest liczbą iakąkolwiek ułomkową dodatną. Aby dowieść téj formuły na ten przypadek, gdy  $m$  jest odjemne, całkowite albo ułomkowe, dosyć będzie w równaniu (3) otrzymaném za pomocą równań (1) i (2) wziąć  $m' = -m$ , a że  $m + m' = 0$ , więc równanie (3) zamieni się na  $yy' = 1$  skąd  $y = \frac{1}{y'}$ .

Nadto podług przypuszczenia  $m$  jest odjemne, więc  $m'$  czyli  $-m$  jest koniecznie dodatne, i mamy

$y' = (1+z)^{m'}$ , więc  $y = \sqrt[m']{1+z} = (1+z)^{-m'}$   
 $= (1+z)^m$ , a następnie

$$(1+z)^m = 1 + mz + m \frac{m-1}{2} z^2 + \dots$$

179. Zastosowanie formuły dwumianu do wy-  
 ciągania pierwiastków przez przybliżenie.

Gdy w formule  $(x+a)^m =$

$$x^m \left( 1 + m \frac{a}{x} + m \frac{m-1}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + m \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{a^3}{x^3} + \dots \right),$$

uczynimy  $m = \frac{1}{n}$ , otrzymamy  $(x+a)^{\frac{1}{n}}$  czyli,

$$\sqrt[n]{x+a} = x^{\frac{1}{n}} \left( 1 + \frac{1}{n} \frac{a}{x} + \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n}-1}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n}-1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{n}-2}{3} \cdot \frac{a^3}{x^3} + \dots \right),$$

czyli skróciwszy  $\sqrt[n]{x+a} =$

$$= x^{\frac{1}{n}} \left( 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{a}{x} - \frac{1}{n} \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{n} \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{a^3}{x^3} + \dots \right).$$

(Gdybyśmy chcieli otrzymać nowy wyraz, dosyć-  
 by było wyraz czwarty rozmnożyć przez  $\frac{3n-1}{4n}$ , i



przez  $\frac{a}{x}$ , potem zmienić znak, i tak dalej).

To uczyniwszy, daymy na to, że mamy wyciągnąć pierwiastek sześcienny z 31. Największy sześciok z 31 jest 27, uczyniwszy więc w formule powyższej  $n=3$ ,  $x=27$ ,  $a=4$ , otrzymamy

$$\sqrt[3]{31} = \sqrt[3]{27+4} = 27^{\frac{1}{3}} \left( 1 + \frac{4}{27} \right)^{\frac{1}{3}};$$

otrzymamy więc  $\sqrt[3]{31} =$

$$3 \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{27} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{729} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{64}{19683} - \dots \text{ i t. d. } \right);$$

czyli wykonawszy działanie, otrzymamy

$$\sqrt[3]{31} = 3 + \frac{4}{27} - \frac{16}{2187} + \frac{320}{531441} - \dots$$

Wyraz następujący otrzymalibyśmy, podług tego, cośmy powiedzieli wyżej, mnożąc  $\frac{320}{531441}$  przez

$$\frac{3n-1}{4n} \text{ czyli przez } \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{27} \text{ i zmieniając znak, to jest}$$

$$\text{mielibyśmy } -\frac{2560}{43046721}.$$

Podobnie otrzymalibyśmy wyraz następujący,

$$+\frac{2560}{43046721} \times \frac{4n-1}{5n} \cdot \frac{a}{x} = \frac{2560}{43046721} \times \frac{11}{15} \times \frac{4}{27} = \frac{112640}{17433922005}$$

i tak dalej.

Lecz uważajmy tylko pięć pierwszych wyrazów szeregu, i obróćmy je na dziesiętne, otrzymamy na wyrazy

$$\text{dodatne } \left\{ \begin{array}{l} 3 = 3,00000, \\ \frac{4}{27} = 0,14815, \\ \frac{320}{5311441} = 0,00060, \end{array} \right\} = 3,14875,$$

a na sumę wyrazów odjemnych

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{16}{2187} = -0,00731 \\ -\frac{2560}{43046721} = -0,00006 \end{array} \right\} = -0,00737.$$

Więc

$$\sqrt[3]{31} = 3,14138;$$

180. Gdy liczba jest rozwinięta na szereg, którego wyrazy maleją, czyli na szereg malejący a właściwie schodzący się (convergente); wówczas, im więcej weźmiemy wyrazów szeregu, tym bardziej zbliżoną do dokładnej otrzymamy wartość. Jeżeli do tego wyrazy będą na przemian dodatnie i odjemne, na ówczas można, zatrzymując się na którymkolwiek, wyznaczyć stopień przybliżenia.

Jakoż niech  $x = a - b + c - d + e - f + \dots$  oznacza rozwinięcie liczby na szereg, którego wyrazy  $a, b, c, d, e$  następnie maleją.

Ponieważ szereg  $a - b + c - d + e - f + \dots$  jest nieskończony, więc gdy się zatrzymamy na wyrazie ze znakiem —; wartość szeregu będzie mniejsza od liczby  $x$ : gdy zaś się zatrzymamy na wyrazie ze

znakiem  $+$ ; ważność szeregu będzie większa od liczby  $x$ . Skąd wniesiemy, że różnica między temi dwiema ważnościami dwóch szeregów

$$a - b + c - d + e - f,$$

$$a - b + c - d + e - f +$$

to jest:  $g$ , będzie mniejsza od błędu jaki popełnimy, biorąc z nich którykolwiek za ważność liczby  $x$ , im większą liczbę wyrazów szeregu weźmiemy.

I tak w poprzedzającym przykładzie znaleźliśmy

$$\sqrt[3]{31} = 3 + \frac{4}{27} - \frac{16}{2187} + \frac{320}{531441} - \frac{2560}{43046721} + \frac{112640}{17433922005}$$

ważność więc  $\sqrt[3]{31} = 3,14138$ , różni się od dokładnej ilością mniejszą od  $\frac{112640}{17433922005}$ ; to jest: ilością

$\frac{1}{100000}$ , czyli 0,00001 ponieważ ta jest mniejsza

od ułamku tu uważanego; czyli iak się mówi ważność 3,14138 jest zbliżona do dokładnej o 0,00001.

181. Sposób więc wyciągania pierwiastku przybliżonego stopnia  $n$ , z liczby  $N$ , za pomocą szeregów jest następujący. Potrzeba liczbę  $N$  rozłożyć na

dwie części  $p^n + q$ ; ( $p$  jest pierwiastek z liczby  $N$ , zbliżo-

ny o jedność ustępl 56), i w rozwinięciu potęgi  $\sqrt[n]{x+a}$

(ustępl 179) uczynić  $x = p^n$ ,  $a = q$ , wykonać dzia-

łanie, zatrzymując się na wyrazie, po którym następujący byłby mniejszy o jedną dziesiątą rzędu, po jaki chcemy oznaczyć przybliżenie, następnie wszystkie wyrazy obliczone, zamienić na dziesiętne, i przywieść między sobą wyrazy dodatne i odjemne.

I tak znajdziemy;

$$\sqrt[5]{39} = \sqrt[5]{32 + 7} = 2,0807 \quad \text{zbliżony o } 0,0001;$$

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64 + 1} = 4,02073 \quad \text{o } 0,00001;$$

$$\sqrt[4]{260} = \sqrt[4]{256 + 4} = 4,01553 \quad \text{o } 0,00001;$$

$$\sqrt[7]{108} = \sqrt[7]{128 - 20} = 1,95204 \quad \text{o } 0,00001.$$

182. Formuła dwumianu służy także do rozwinięcia wyrażeń algebranych na szeregi.

Weźmy na pierwszy przykład wyrażenie  $\frac{1}{1-z}$ , mamy  $\frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}$ ; uczyniwszy w formu-  
le dwumianu  $m=-1$ ,  $\infty=1$ , i  $a=-z$ , otrzyma-

$$\text{my } (1-z)^{-1} = 1 - 1(-z) + 1 \cdot \frac{-1-1}{2} \cdot (-z)^2$$

$$- 1 \frac{-1-1}{2} \cdot \frac{-1-1}{3} \cdot (-z)^3 \dots$$

czyli, wykonawszy działanie i zważywszy, że każdy wyraz składa się z liczby parzystej czynników mających znak  $-$ , otrzymamy

$$(1-z)^{-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 \dots$$

Otrzymalibyśmy tenże sam wypadek zastosowawszy prawidło dzielenia algebraicznego (ustę: 26.)

Qto wzór działania

$$\begin{array}{l}
 1 \\
 1\text{sza reszta} \dots\dots\dots + z \\
 2 \dots\dots\dots + z^2 \\
 3 \dots\dots\dots + z^3 \\
 4 \dots\dots\dots + z^4 \\
 5 \dots\dots\dots + z^5 \\
 \dots\dots\dots + \dots
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 1 - z \\
 \hline
 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots
 \end{array} \right.$$

Weźmy jeszcze wyrażenie  $\frac{2}{(1-z)^3}$ , czyli  $2(1-z)^{-3}$ , mamy

$$2(1-z)^{-3} = 2\left\{1 - 3(-z) - 3 \cdot \frac{-3-1}{2}(-z)^2 - 3 \cdot \frac{-3-1}{2} \cdot \frac{-3-2}{3}(-z)^3 - \dots\right\};$$

wykonawszy działanie, będzie

$$2(1-z)^{-3} = 2(1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + 14z^4 + \dots).$$

Weźmy na trzeci przykład ilość  $\sqrt[3]{2z - z^2}$ , której można nadać postać  $\sqrt[3]{2z} \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Aże} \quad & \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \\
 & 1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{3}-1}{2} \cdot \left(-\frac{z}{2}\right) \dots\dots\dots = \\
 & 1 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{36}z^2 - \frac{5}{648}z^3 - \text{i t.d.};
 \end{aligned}$$

więc,

$$\sqrt[3]{2z - z^2} = \sqrt[3]{2z} \left(1 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{36}z^2 - \frac{5}{648}z^3 - \text{i t.d.}\right).$$