

Zadanie czwarte. Jakie są w liczbach całkowitych objętości równoległościanów prostokątnych, z podstawami kwadratowymi, gdy objętość którąkolwiek zawiera pięć razy tyle stóp sześciennych, ile jego powierzchnia zawiera stóp kwadratowych?

(Od: { Podstawa. $x=220, 120, 70, 60, 45, 40, 30, 28, 25, 24, 22, 21$
 { wysokość: $y = 11, 12, 14, 15, 18, 20, 30, 35, 50, 60, 110, 210$)

dwanaście rozwiązań.

ROZDZIAŁ V.

*Tworzenie potęg, i wyciąganie pierwiastków
 iakiegokolwiek stopnia.*

WSTEP. Aby rozwiązać równanie stopnia drugiego, potrzeba było umieć wyciągnąć pierwiastek kwadratowy; podobnież rozwiązanie równań trzeciego, czwartego stopnia, wymaga wiadomości wyciągania pierwiastku trzeciego, czwartego i t. d. potęgi, z ilości bądź liczebnej, bądź algebraicznej.

Podniesienie do potęg, wyciąganie pierwiastków, i działania z ilościami pierwiastkowymi, będą przedmiotem tego rozdziału, który z pierwszym, i częścią rozdziału trzeciego, składa całość działań na liczbach szczególnych, lub wyrażonych algebraicznie.

Chociaż wszelką potęgę liczby można otrzymać za pomocą prawideł mnożenia, czy to arytmetycznego, czy algebraicznego, jednak *skład* takowey potęgi podlega pewnemu *prawu*, które koniecznie znać należy, chcąc *znaleźć pierwiastek daney potęgi*. A iako prawo składania kwadratu, z ilości bądź liczebney, bądź algebraiczney, iest oparte (ust: 82) na wyrażeniu kwadratu z dwumianu, tak też prawo służące potędze iakiegokolwiek stopnia, sprowadza się do *wyrażenia potęgi tegoż stopnia z dwumianu*. Tę więc nową teorią zaczniemy od *rozwinięcia iakieykolwiek potęgi z dwumianu*.

§. I. Dwumian Newtona.

142. Gdy dwumian $x+a$ rozmnożymy ilekolek razy przez siebie, otrzymamy następujące wypadki:

$$(x+a)^1 = x + a,$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3,$$

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4,$$

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

Przypatrzwszy się z uwagą tém różném rozwinięciom; łatwo upatrzymy *prawo*, według iakiego tworzą się wykładniki ilości x i a , lecz go nie znajdziemy od razu dla spółczynników liczebnych. Ale Newton, sławny Jeometra Angielski odkrył prawo, mocą którego mając dany stopień potęgi, można utworzyć z dwumianu żadaną potęgę, nie tworząc poprzednio potęg niższych. Nie zostawił on rozumowania, które go doprowadziło do odkrycia tego prawa, lecz późniejsi Algiebraiści dali ścisłe jego dowodzenie.

Ze wszystkich wiadomych dowodzeń, najsna-
dniejsze jest to, które się zasadza na *teorii kombi-
nacyi*. Poznamy więc naprzód, co się rozumie
przez kombinacyie.

143. Wiemy z Arytmetyki, że iloczyn z czynni-
ków a, b, c, d, \dots , których liczbę oznaczamy przez
 n , nie zmienia się, gdy w jakimkolwiek porządku
uskutecznimy między niemi mnożenie.

Szukaymymy teraz *ilo różnemi sposobami* można
te głoski ułożyć obok siebie.

Takowe ułożenia głosek, zowią *przemianami*.
I tak dwie głoski a i b , dają tylko ieden iloczyn
 ab , lecz dwie *przemiany* ab i ba . Podobnie trzy
głoski a, b , i c , dają ieden tylko iloczyn abc , lecz
sześć *przemian* $abc, acb, cab, bac, bca, cba$.

Weźmy teraz liczbę m głosek, a, b, c, d, e, \dots ,
ułożywszy je obok siebie po 2, po 3, po 4, \dots iak
tylko można rozmaicie, byleby w każdym wypadku
liczba głosek była mniejsza od liczby głosek da-
nych, dochodźmy liczby wszystkich w każdym razie
wypadków. Takowe ułożenia liter nazywają się
waryacyami (*arrangemens*).

I tak, $ab, ac, ad, \dots ba, bc, bd, \dots ca, cb, cd$,
są waryacyami głosek m , układanych po dwie. Po-
dobnie $abc, abd, \dots bac, bad, \dots acb, acd$, są wa-
ryacye m głosek, układanych po trzy.

Lecz tak ułożywszy głoski obok siebie po 2, po
3, po 4, i t. d. można z gromadek te same głoski
zawierających brać tylko po iednę, i dochodzić liczb
tak wybrakowanych: otrzymane w tym razie
wypadki mają nazwisko *kombinacyi*. I tak ab ,
 ac, bc, \dots są *kombinacye* głosek po dwie branych,

tak że dwa którekolwiek wypadki różnią się od siebie przynajmniej jedną głoską. Podobnie abc , abd , acd , bcd , są kombinacye głosek po trzy branych.

Zachodzi więc istotna różnica pomiędzy przemianą, wariacyą i kombinacyą głosek.

Przemieniamy głoski, uważając je wszystkie razem i według wszelkiego następstwa i szyku napisane. Układamy wariacye z głosek m biorąc z nich po 2, 3, 4, ... n byleby było $n \leq m$, i robiąc wszystkie przemiany z każdej gromadki n głosek, tak iż gdy $n = m$: wariacye zamieniają się na przemiany. Nakoniec kombinujemy m głosek po n głosek, układając je w gromadki, tak, aby którakolwiek gromadka, nie zawierała wszystkich tych samych głosek, co którakolwiek inna.

W szczególności poznamy:

144. Naprzód. iak się znajduie liczba wszystkich przemian n głosek.

Dwie głoski a i b dają przemian dwie ab i ba , a zatem liczba przemian dwóch głosek iest 2, czyli 1×2 . Niech teraz będą 3. głoski, a , b , c . Uczyniwszy przemiany ab i ba z dwiema pierwszymi głoskami, trzecią zaś c napisawszy z brzega, we środku, na końcu, każdéy z dwóch przemian: otrzymamy wszystkich 2×3 czyli 6.

Podobnie gdyby danych głosek było 4, a , b , c , d ; uczynilibyśmy 6. przemian z trzech pierwszych a , b , c , napisalibyśmy czwartą d , z brzega, we środku dwa razy, i na końcu każdéy ze sześciu przemian, a otrzymalibyśmy wszystkich przemian 4×6 czyli $1 \times 2 \times 3 \times 4$.

W ogólności, aby z liczbą n głosek a, b, c, d, \dots uczynić wszystkie przemiany: trzeba naprzód mieć liczbę przemian $n - 1$ głosek, i dopisać na każdym miejscu tak skrajnym iak środkowym każdéj z przemian, braknącą głoskę, a liczba przemian głosek n będzie $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \dots \times n$.

Tak np. liczba przemian z sześciu głosek a, b, c, d, e, f , jest $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \dots$ to jest 720.

145. Powtóre, iak mając daną liczbę m głosek a, b, c, d , można znaleźć liczbę wszystkich wariacyi, biorąc n głosek na iedną wariacyią; w założeniu że m jest większe od n ?

Daymy na to, że mamy cztery głoski a, b, c, d . Aby z nich ułożyć wariacyie, biorąc po dwie głoski; połączmy każdą z czterech, z każdą z trzech innych, i przeto wariacyie będą

ab, ac, ad

ba, bc, bd

ca, cb, cd

da, db, dc

a ich liczba będzie 4×3 .

Gdybyśmy teraz do każdéj z tych 12, dwóiek, dopisali każdą z dwóch braknących głosek, pisząc ią z brzegu, we środku lub na końcu otrzymalibyśmy wariacyie z głoskami branemi po 3, a ich liczba, dla tego że każda dwóyka dałaby 2. tróyki, byłaby $4 \times 3 \times 2$.

Gdybyśmy nareszcie do każdéj z tak ułożonych tróiek dopisali czwartą braknącą głoskę, otrzymalibyśmy liczbę przemian 4 głosek a, b, c, d , tę samą, iaka była wariacyi tychże głosek branych po 3.

Tym samym sposobem okazalibyśmy, że gdyby liczba głosek była 5, liczba ich wariacyy po 2 będzie 5×4 , liczba zaś wariacyy po 3 głoski będzie $5 \times 4 \times 3$.

Gdyby liczba głosek była 8, liczba wariacyy tych głosek branych po 2, będzie 8×7 , branych po 3 będzie $8 \times 7 \times 6$; branych po 4 będzie $8 \times 7 \times 6 \times 5$ czyli

$$8(8-1)(8-2)(8-3).$$

W ogólności więc liczba wariacyy głosek m branych po n , gdy $n < m$, iest równa iloczynowi $m(m-1)(m-2)(m-3) \dots$ z tylu czynników $m, m-1, m-2, \dots$ ile iedności ma liczba n : najmniejszy zaś z tych czynników iest różnicą między n i $n-1$; a zatém $m-n+1$, i przeto ogólne wyrażenie liczby wariacyy głosek m , branych po n , iest

$$m(m-1)(m-2)(m-3) \dots (m-n+1).$$

Tak np. liczba wariacyy 90. głosek branych po 5, iest

$$90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86.$$

146. Potrzebie, iak mając daną liczbę m głosek $a, b, c, d \dots$ można znaleźć liczbę wszystkich kombinacyy, biorąc n głosek na iedną kombinacyą w założeniu że $m > n$.

Ponieważ, według tego, cośmy w poprzedzającym ustępie mogli byli postrzedz, ułożywszy wariacye z głosek m branych po n , każda gromadka tych samych n różnych głosek, iest powtórzona tyle razy, ile można uczynić przemian z temi n różnemi głoskami: tak iż liczba wariacyy głosek m branych po n iest

$$m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1).$$

liczba zaś przemian każdéj gromadki n różnych głosek iest

$$1. 2. 3. 4. \dots (n-1).n.$$

Kombinuujemy zaś m głosek po n ; układając ie w gromadki po n głosek, tak, aby którakolwiek gromadka nie zawierała wszystkich tych samych głosek co którakolwiek inna, czyli co na iedno wychodzi, biorąc z przemian $1. 2. 3. 4. 5 \dots n$ każdéj gromadki n różnych głosek, iedną tylko gromadkę; więc liczba kombinacyi m głosek branych po n , iest równa ilorazowi wypadającemu z podzielenia liczby waryacyi głosek m , przez liczbę przemian głosek n to iest:

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\dots(m-n+1)}{1.2.3.4.5\dots n-1.n}$$

Tak np: liczba kombinacyi 90 głosek branych po 5, iest

$$\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5},$$

$$\text{branych po 4 iest } \frac{90.89.88.87}{1.2.3.4},$$

$$\text{branych po 3 iest } \frac{90.89.88.87}{1.2.3},$$

$$\text{branych po 2 iest } \frac{90.89}{1.2}.$$

147. Dowodzenie formuły Newtona.

Aby odkryć prawo rozwiiania się potęgi m tey dwumianu $x+a$, uważaymy naprzód prawo iloczy-

nu kilku dwumianów $np: x+a, x+b, x+c, x+d, \dots$ w których to dwumianach pierwszy wyraz jest ten sam, a tylko drugie wyrazy są równe.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} x+a \\ x+b \\ \hline \end{array} \\
 \text{1szy iloczyn} \dots \begin{array}{r} x^2+a \\ +b \end{array} \bigg| x + ab \\
 \\
 \begin{array}{r} x+c \\ \hline \end{array} \\
 \text{2gi} \dots \dots \dots \begin{array}{r} x^3+a \\ +b \\ +c \end{array} \bigg| \begin{array}{r} x^2+ab \\ +ac \\ +bc \end{array} \bigg| x + abc \\
 \\
 \begin{array}{r} x+d \\ \hline \end{array} \\
 \text{3ci} \dots \dots \dots \begin{array}{r} x^4+a \\ +b \\ +c \\ +d \end{array} \bigg| \begin{array}{r} x^3+ab \\ +ac \\ +ad \\ +bc \\ +bd \\ +cd \end{array} \bigg| \begin{array}{r} x^2+abc \\ +abd \\ +acd \\ +bcd \end{array} \bigg| x + abcd
 \end{array}$$

Uskuteczniwszy te mnożenia podług prawideł zwyczajnych na mnożenie algebraiczne, postrzeżemy na trzech poprzedzających iloczynach, następujące prawo:

1^a Co do wykładników, wykładnik ilości x jest z razu równy liczbie dwumianów mnożonych.

W następujących zaś wyrazach zmniejsza się iednością aż do ostatniego wyrazu, w których równa się 0.

2^a Co do spółczynnیکów potęg rozmaitych ilości x , spółczynnik pierwszego wyrazu jest iedność, spółczynnik drugiego wyrazu równa się summie drugich części dwumianów, spółczynnik trzeciego wyrazu równa się summie iloczynów z tychże drugich

gich części kombinowanych po dwa; współczynnik czwartego wyrazu równa się summie iloczynów z tychże drugich części a, b, c, d , kombinowanych po trzy. Przez *podobieństwo* wniesć możemy, że współczynnik wyrazu, który innych ma przed sobą n , równa się summie n różnych iloczynów z drugich części, (dwumianów) kombinowanych po n . Nakoniec ostatni wyraz równa się iloczynowi z drugich części dwumianów.

Aby się przekonać czy to prawo składu współczynników iest ogólne; założmy że iest prawdziwe dla iloczynu z m dwumianów, i obaczmy, czy się utrzyma gdy wprowadzimy nowy czynnik w ten iloczyn.

Niech więc będzie,

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots Mx^{m-n+1} + Nx^{m-n} + \dots + U,$$

iest to iloczyn z czynników m dwumianowych, (Nx^{m-n}) oznacza wyraz, który ma przed sobą n wyrazów, zaś Mx^{m-n+1} który ich ma przed sobą $n-1$).

Niech $x + K$ będzie nowym czynnikiem wprowadzonym, otrzymamy iloczyn uporządkowany.

$$\begin{array}{ccccccc} x^{m+1} + A & | & x^m + B & | & x^{m-1} + C & | & x^{m-2} + \dots + N & | & x^{m-n+1} + \dots \\ + K & | & + AK & | & + BK & | & + MK & | & + UK. \end{array}$$

Co do wykładników widocznie służy to samo prawo.

Co do współczynników, 1°. Współczynnik pierwszego wyrazu iest *jedność*, 2°. $A + K$ czyli współczynnik ilości x^m iest także *summą drugich wyrazów z $m + 1$ dwumianów.*

3e. B podług założenia równa się summie iloczynów z a, b, c, d , kombinowanych po dwa; AK oznacza summe iloczynów z drugich części a, b, c, d dwumianów pierwszych m , rozmnożoną przez drugą część nowego dwumianu; więc $B + AK$ jest jeszcze summa iloczynów z drugich części, kombinowanych po dwa, $m + 1$ dwumianów.

Wogólności, ponieważ N. oznacza summe iloczynów części a, b, c, d , po n , kombinowanych, pierwszych m dwumianów, a zaś MK oznacza summe iloczynów z tychże części kombinowanych po $n - 1$, rozmnożoną przez nowy drugi wyraz K; więc $N + MK$ czyli spółczynnik który w wielomianie jest stopnia $m + 1$, ma wyrazów przed sobą n , równa się summie różnych iloczynów z drugich części (a, b, c, d kombinowanych po n) dwumianów, których jest $m + 1$. Ostatni wyraz $U \times K$ równa się iloczynowi z $m + 1$ drugich części dwumianów.

A zatem prawo składania, nie tylko jest prawdziwe dla iloczynu z liczby m dwumianów, lecz także i dla liczby dwumianów $m + 1$, a przeto jest ogólne.

Przypuśćmy teraz, że w iloczynie złożonym z m czynników dwumianowych, $x + a, x + b, x + c \dots$; jest $a = b = c = d \dots$, wyrażenie iloczynu

$$(x + a) (x + b) (x + c) \dots$$

zamieni się na $(x + a)^m$.

1e. Spółczynnik ilości x^{m-1} , to jest $a + b + c + d + \dots$, zamieni się na $a + a + a + a + \dots$ to jest na a powtórzone razy m , czyli na ma .

2e. Spółczynnik wyrazu x^{m-2} czyli $ab + ac + \dots$, zamieni się na $a^2 + a^2 + a^2 \dots$, to jest na a^2 po-

wtórzone tyle razy, ile można uczynić kombinacyi z głosek m , branych po 2 (ust 146) to jest zamieni się na $m \cdot \frac{m-1}{2} a^2$.

3.o. Spółczynnik wyrazu x^{m-3} zamieni się na iloczyn z a^3 , i z liczby kombinacyi z m głosek branych po 3, i będzie $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot a^3$ i tak na następne.

W ogólności, spółczynnik któregośkolwiek wyrazu potęgi $(x+a)^m$ mającego przed sobą wyrazów n , będzie (jak widzieliśmy w ustę 146).

$$m \frac{(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots (n-1) \cdot n} a^n.$$

Sam zaś wyraz jest

$$m \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots n},$$

a zatem

$$\begin{aligned} (x+a)^m &= x^m + m x^{m-1} + m \frac{(m-1)}{2} a^2 x^{m-2} \\ &+ m \frac{(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \\ &m \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 x^{m-4} + \dots \\ &+ m \frac{(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots n} a^n x^{m-n} + a^n. \end{aligned}$$

Taka jest formuła Newtona, potrzebna do rozwinięcia potęgi iakiegokolwiek stopnia dwumianu $x+a$.

Prawo iéy tworzenia możemy teraz bez trudności czytać w iéy składzie.

148. Daymy na to, że potrzeba rozwinąć $(x+a)^6$; otrzymamy podług formuły Newtona,

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.$$

Ułożywszy dwa pierwsze wyrazy za pomocą rzezonéy formuły, mnożyliśmy 6, spółczynnik drugiego wyrazu, przez 5, wykładnik ilości x tegoż wyrazu, a iloczyn podzieliwszy przez 2, otrzymaliśmy 15 spółczynnik wyrazu 3^o. Aby otrzymać wyraz 4, mnożyliśmy 15 przez 4, wykładnik ilości x w trzecim wyrazie, a iloczyn podzieliliśmy przez 3, to iest: przez liczbę wyrazów poprzedzających wyraz 4 i otrzymaliśmy 20 i tak następnie, dla wszystkich wyrazów.

Podobnie otrzymalibyśmy.

$$(x+a)^{10} = x^{10} + 10ax^9 + 45a^2x^8 + 120a^3x^7 + 210a^4x^6 + 252a^5x^5 + 210a^6x^4 + 120a^7x^3 + 45a^8x^2 + 10a^9x + a^{10}.$$

Późniéy zastanowimy się nad sposobem rozwiania potęg z ilości algiebraicznych.

*Wnioski wypadające z formuły Newtona
i z teoryy kombinacyy.*

149. *Wniosek pierwszy.* Ponieważ wyrażenie $(x+a)^m$ iest ułożone tym samym sposobem, tak

względem x , iak względem a ; więc to samo być musi z rozwinięciem. Jeżeli przeto rozwinięcie zawiera wyraz $Ka^n x^{m-n}$, powinno także zawierać wyraz $Kx^n a^{m-n}$ czyli $Ka^{m-n} x^n$. Wyrazy te są widocznie w różnych odległościach od dwóch wyrazów skrajnych rozwinięcia: gdy bowiem liczba wyrazów poprzedzających iakikolwiek wyraz jest oznaczona wykładnikiem głoski a , tegoż wyrazu, więc wyraz $Ka^n x^{m-n}$ ma przed sobą n wyrazów, zaś wyraz $Ka^{m-n} x^n$, ma ich przed sobą $m-n$, a zatem po tym wyrazie znajduie się ich n , (ponieważ całkowita liczba wrazów iest. $m+1$).

A zatem, w rozwinięciu wszelkiéy potęgi dwumianu, spółczynniki w równéy odległości od dwóch skrajnych wyrazów są sobie równe.

150. - Wniosek drugi. Formuła ogólna.

$$(x+a)^m = x^m + m a x^{m-1} + m \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + \text{it.d.},$$

uczyniwszy $x=1$, $a=1$, zamieni się na $(1+1)^m$ czyli

$$2^m = 1 + m + m \frac{m-1}{2} + m \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} + \text{i. t. d.};$$

to iest w formie Newtona, *summa spółczynników*, równa się liczbie 2, *podniesionéy do téy potęgi do iakiéy ma być podniesiony dwumian*.

I tak w przykładzie.

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5,$$

summa spółczynników $1+5+10+10+5+1$ równa się 2^5 czyli 32. W dziesiątę potędze rozwinięty pod ustę: 148, summa spółczynników równa się $2^{10} = 1024$.

151. Wniosek trzeci. *Mając szereg liczb malejących iednością, to iest: $m, m-1, m-2, \dots$, i t. d. aż do $m-p$ (gdzie m i p są liczby całkowite), iloczyn z tych wszystkich liczb, będzie podzielny przez iloczyn z wszystkich liczb naturalnych począwszy od 1 do $p+1$.*

$$\text{To iest będzie } \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots p+1}$$

równe liczbie całkowitej. Jakoż z tego cośmy w ustępie 146 powiedzieli wypada, że to wyrażenie oznacza liczbę kombinacyi głosek m , branych po $p+1$. Aże ta liczba kombinacyi iest koniecznie liczbą całkowitą, więc wyrażenie powyższe iest liczbą całkowitą.

§ II. Wyciąganie pierwiastków z liczb szczególnych

Chociaż w Arytmetyce wyłożone są zasady wyciągania pierwiastku sześciennego, nie będzie iednak od rzeczy wznowić tu ieszcze tę Teoryą, a to dlatego: *naprzód*, że po wyciąganiu pierwiastku kwadrato-
wego, działanie to iest nayczęścięj używane, *powtórę*, że te tame rozumowania będziemy mogli zastosować do wyciągania pierwiastku 4tęj 5tęj i ... ntęj potęgi.

152. Nazywamy *sześcianem* albo *trzecią potęgą* liczby, iloczyn z trzech czynników równych, a *pierwiastkiem trzeciej potęgi* albo *sześciennym*, liczbę, która podniesiona do 3tęj potęgi, daie na iloczyn liczbę daną.