

ROZDZIAŁ PIĘRWSZY.

O Działaniach Algiebraicznych.

Wiadomości poprzednicze.

8. **K**AŻDA ilość wyrażona ięzykiem algiebraicznym, to iest: za pomocą znaków algiebraicznych, nazywa się *ilością algiebraiczną*, albo *ilością ogólną*, albo *wyrażeniem algiebraicznym ilości daney*.

I tak $3a$ iest wyrażeniem trzy razy wziętęy ilości a , $5a^2$ iest wyrażeniem pięć razy powtórzonego kwadratu z a ; $7a^3b^2$, iest wyrażeniem algiebraicznym okazującym, że iloczyn z ilości a , podniesionęy do potęgi 3, przez ilość b^2 , iest wzięty trzy razy 7. $3a-5b$, iest wyrażeniem algiebraicznym, okazującym różnicę między ilością a , trzy razy wziętą, a ilością b pięć razy wziętą. $2a^2-3ab+4b^2$, iest wyrażeniem algiebraicznym, oznaczającym, że kwadrat z ilości a powinien być zmniejszony iloczynem, z ilości a przez b , trzy razy wziętym, a powiększony kwadratem z ilości b , cztery razy wziętym.

Nazywa się *iednomianem* ilość o iednym wyrazie, albo tylko *wyrazem*, ilość algiebraiczna, która ani przez dodawanie, ani przez odejmowanie nie iest połączona z inną.

Nazywa się *wielomianem*, albo *ilością o wielu wyrazach*, wyrażenie algiebraiczne, złożone z wielu części oddzielonych znakami $+$ lub $-$. A zatem $3a$, $5a^2$, $7a^3b^2$, są iednomianami, zaś $3a-5b$, $2a^2-3ab+4b^2$, są wielomianami. Wyrażenie $3a-5b$,

zowie się *dwumianem*, ponieważ się składa z dwóch wyrazów, wyrażenie $2a^2 - 3ab + 2b^2$, zowie się *tróymianem*, ponieważ się składa z trzech wyrazów.

9. *Ważnością liczebną* wyrażenia algebraicznego, jest liczba, którąby się otrzymało, nadawszy ważności szczególne głoskom, które w to wyrażenie wchodzi, i wykonawszy wszystkie działania arytmetyczne, jakie zawiera w sobie to wyrażenie.

Ta ważność liczebna, zależy od ważności szczególnych, nadanych głoskom, i w ogólności zmieniać się powinna, za zmianą tychże szczególnych ważności.

I tak $2a^3$ będzie miało ważność liczebną 54, jeżeli uczynimy $a=3$, ponieważ sześćian z 3 jest 27, wzięty dwa razy, uczyni 54. — Lecz tego samego wyrażenia algebraicznego będzie ważność liczebna 250; jeżeli uczynimy $a=5$; albowiem sześćian z 5 ciu jest 125, wzięty dwa razy, uczyni 250.

W ogólności, jeżeli w wyrażeniu algebraicznym $a-b$, tą samą ilością powiększymy a i b , ważność liczebna będzie stałą.

I tak niech będzie $a=7$, $b=4$; a zatem $a-b=3$.

Jeżeli a będzie równe 12^{tu}, czyli $a=7+5$; a $b=4+5$, wypadnie $a-b=12-9=3$ i t. d.

Nie zmieni się ważność liczebna wielomianu, gdy iakkolwiek odmienimy porządek między wyrazami, byle tylko zachować te same znaki.

A zatem wielomiany, $4a^3 - 3a^2b + 5ac^2$; tudzież $5ac^2 - 3a^2b + 4a^3$; $4a^3 + 5ac^2 - 3a^2b$, mają tę samą ważność liczebną. Jest to wypadek oczywisty z natury dodawania i odejmowania arytmetycznego wyników. W dalszym ciągu ta uwaga będzie bardzo użyteczną.

10. Wyrazy składające wielomian dany, iedne mają znak $+$, inne znak $-$. Pierwsze nazywają się *wy-*

razami dodatnemi, drugie odjemnemi. Nazwiska te są niewłaściwe, lecz je zwyczaj upowszechnił.

Pierwszy wyraz wielomianu niema w prawdzie przed sobą znaku, lecz pospolicie domyślamy się znaku $+$.

11. Nazywają *wymiarem* wyrazu, każdy z czynników ogólnych, składających wyraz, a *stopniem* wymiaru liczbę tych czynników.

Spółczynnik niestanowi wymiaru, a tak $3a$ oznacza wyraz iednego wymiaru, albo iest ilością pierwszego stopnia, $5ab$, iest wyrazem o dwóch wymiarach, czyli drugiego stopnia. $7a^3bc^2$ iest to samo, co $7aaabcc$, i iest wyrazem o sześciu wymiarach, albo szóstego stopnia.

W ogólności: *stopień* albo *liczba wymiaru iakiego wyrazu*, oznacza się przez *sumnę wykładników tych głosek, które składają wyraz*. Według tego widzimy, że głoska, która niema wyraźnie napisanego wykładnika, ma w istocie domysłny wykładnik iedność, a tak stopień wyrazu $8a^2bcd^3$ iest $2+1+1+3$ to iest 7.

Nazywamy wielomianem *iednogatunkowym* ten, który ma wyrazy tego samego stopnia, np: $3a-2b+c$; $3a^2-4ab+b^2$; $5a^2c-4c^3+2c^2d$; lecz $8a^3-4ab+c$, nie iest wielomianem iednogatunkowym.

12. Nazywają się *wyrazami podobnemi* te, które się składają z tych samych głosek, z temi samemi wykładnikami.

Zatém $7ab$ i $3ab$, $4a^3b^2$ i $5a^3b^2$, są wyrazy podobne, lecz $8a^2b$ i $7ab^2$ nie są wyrazami podobnemi, albowiem, chociaż się składają z tych samych głosek, lecz mają wykładniki odmienne.

Zdarza się często, że wielomian zawiera w swoim wyrażeniu wiele wyrazów podobnych, w tym razie można uczynić skrócenia.

Niech będzie wielomian:

$$4a^2b - 3a^2c + 9ac^2 - 2a^2b + 7a^2c - 6b^3;$$

można go (ustęp 9) napisać tak:

$$4a^2b - 2a^2b + 7a^2c - 3a^2c + 9ac^2 - 6b^3,$$

a że $4a^2b - 2a^2b$, zamieni się na $2a^2b$; $7a^2c - 3a^2c$, zamieni się na $4a^2c$; więc cały wielomian zamieni się na:

$$2a^2b + 4a^2c + 9ac^2 - 6b^3.$$

Niech jeszcze będzie wielomian:

$$2a^3bc^2 - 4a^3bc^2 + 6a^3bc^2 - 8a^3bc^2 + 11a^3bc^2.$$

Widzimy, że summa wyrazów dodatnich $2a^3bc^2 + 6a^3bc^2 + 11a^3bc^2$, równa się $+19a^3bc^2$; summa wyrazów ujemnych $-4a^3bc^2 - 8a^3bc^2$ równa się $-12a^3bc^2$; a zatem pięć wyrazów danych sprowadzić można do dwóch $19a^3bc^2 - 12a^3bc^2$; czyli do jednego $7a^3bc^2$.

Może się zdarzyć, że summa wyrazów ujemnych będzie większa od summy wyrazów dodatnich, w tym razie odejmuje się spółczynnik dodatni od spółczynnika ujemnego, a przed wypadkiem daje się znak—. A zatem, jeżeli otrzymamy summę wyrazów dodatnich $5a^2b$, a $-8a^2b$ na summę wyrazów ujemnych; natenczas ponieważ $-8a^2b$ jest to samo co $-5a^2b - 3a^2b$, więc $5a^2b - 5a^2b - 3a^2b$ równa się $-3a^2b$.

Stąd wyprowadzimy następujące prawidło: aby uczynić skrócenie czyli redukcją, potrzeba z wyrazów podobnych dodatnich, czyli poprzedzonych znakiem $+$, uczynić wyraz jeden, to jest: dodać spółczynniki tych wyrazów, a po summie spółczynników napisać głoski wspólne, podobnież uczynić summę wyrazów ze znakiem $-$, odjąć wyraz mniejszy od większego, a przy reszcie napisać znak, jaki był przy wyrażeniu większym.

(Uważamy, że przywiedzenie ściąga się tylko do spółczynników, lecz nie do wykładników).

Na mocy tego pravidła znajdziemy, że:
 $4a^2b - 8a^2b - 9a^2b + 11a^2b - a^2b$, przywiedzie się do $-3a^2b$.

Podobnież:

$7abc^2 - abc^2 - 7abc^2 - 8abc^2 + 6abc^2$ przyw: się do $-3abc^2$.

Przywiedzenie wyrazów podobnych, działanie właściwe Algiebrze, zachodzi we wszystkich działaniach algebraicznych, podobnych do działań arytmetycznych, o których następnie mówić będziemy.

O dodawaniu Algebraiczném.

13. Niech będą do dodania wyrażenia $3a$, $5b$, $2c$; wypadek dodawania będzie $3a + 5b + 2c$, którego skrócić niemożna. Niech jeszcze będą jednomiany $4a^2b^3$, $7a^2b^3$, $2a^2b^3$; otrzymamy podług (ust: 12), $13a^2b^3$.

Weźmy teraz wielomiany:

$$3a^2 - 4ab; 2a^2 - 3ab + b^2; 2ab - 5b^2.$$

Aby znaleźć ieden wielomian, wyrażający sumę powyższych wielomianów, uważamy, że dodać liczbę wyrażoną przez $2a^2 - 3ab + b^2$, do liczby wyrażony przez $3a^2 - 4ab$, iest to dodać różnicę iedności zawartych w liczbie $2a^2 + b^2$, do liczby iedności zawartych w $3ab$. Działanie to możnaby łatwo uskutecznić, nadawszy ważności szczególne ilościom a i b , lecz uskutecznić to na daném wyrażeniu, iest rzeczą niepodobną: a zatem potrzeba dodać $2a^2 + b^2$, do $3a^2 - 4ab$, a potem odjąć $3ab$; tak więc $3a^2 - 4ab + 2a^2 + b^2 - 3ab$, zmieniając porządek wyrazów (ust: 9.) przejdzie na $3a^2 - 4ab + 2a^2 - 3ab + b^2$. Podobnież, aby dodać do tego ostatniego wyrażenia ilość $2ab - 5b^2$, dosyć będzie napisać:

$$3a^2 - 4ab + 2a^2 - 3ab + b^2 + 2ab - 5b^2.$$

Wykonawszy przywiedzenie w tém wyrażeniu (ustęp 12), otrzymamy wypadek $5a^2 - 5ab - 4b^2$. Rozumowania takowe mogą być zastosowane do in-

nych wielomianów, a zatem na dodawanie ilukolwiek wielomianów, można wyprowadzić następujące prawidło:

Napisać wielomiany dane, ieden pod drugim, zachowując te same znaki przed wyrażeniami, a następnie przywieść wyrazy podobne do najkrótszego wyrażenia, jeżeli to być może.

Oto kilka wielomianów:

$$\begin{array}{r|l}
 1^{\circ} \quad 3a^2 - 4ab - 2b^2 & 2^{\circ} \quad 7a^2b - 3abc - 8b^2c - 9c^3 + cd^2 \\
 + 5a^2 + 2ab - b^2 & + 8abc - 5a^2b + 3c^3 - 4b^2c + cd^2 \\
 + 3ab - 2b^2 - 3c^2 & + 4a^2b - 8c^3 + 9b^2c - 3d^3 \\
 \hline
 8a^2 + ab - 5b^2 - 3c^2 & 6a^2b + 5abc - 3b^2c - 14c^3 + 2cd^2 - 3d^3
 \end{array}$$

W praktyce piszą się pospolicie ilości dane iedne pod drugimi, iak w powyższych przykładach, przywodzą się wyrazy podobne, i pisze się wypadek przywieżenia z właściwemi znakami.

Jakoż w pierwszym przykładzie, uważając wyraz $3a^2$, za podobny z wyrazem $5a^2$, w drugim wierszu znajdującym się, pisze się na wypadek przywieżenia tych dwóch wyrazów $8a^2$, a te dwa wyrazy lekko się przekreślają. Przechodząc następnie do wyrazu $-4ab$ i łącząc go z wyrazami $+2ab$ i $+3ab$, otrzymamy wypadek ab ; wyrazy już przywiezione przekreślają się, a wypadek ab pisze się po prawej ręce $8a^2$.

Tak się postępuje dalej, dopóki wszystkie wyrazy nie będą przekreślone i przywiezione.

Przekreślenie wyrazów iest w tém przydatne, że tym sposobem nieopuszczimy żadnego wyrazu w wypadku, którego szukamy.

O odeymowaniu Algiebraiczném.

14. Niechby potrzeba było odjąć $4b$ od $5a$; wypadek algiebraiczny będzie $5a - 4b$. Podobnie różnica
 pomię-

pomiedzy $7a^3b$ a $4a^3b$, będzie $7a^3b - 4a^3b$ czyli $3a^3b$.

Lecz mając $2b - 3c$ odjąć od $4a$, można napisać wypadek w téj postaci: $4a - (2b - 3c)$, to iest ilość mającą się odjąć trzeba napisać w nawiasie, a przed nim dać znak $-$. Lecz zagadnienia często wymaga

B.
P.W.

ią tego, aby uczynić z takowego wyrażenia ieden wielomian, i na tém głównie polega odejmowanie algebraiczne.

Ażeby dóyść do tego celu, uważamy, że gdyby a, b, c dane były liczebnie, uskutecznilibyśmy odejmowanie skazane, przez $2b - 3c$, potem odjęlibyśmy wypadek otrzymany od $4a$; lecz, że takowe odejmowanie niemoże być uskutecznione na ilościach tak ogólnie wyrażonych; więc naprzód odeymiemy $2b$ od $4a$, i otrzymamy $4a - 2b$; lecz odeymuiąc iedności zawarte w $2b$, odjęliśmy liczbę większą, o sumę iedności zawartych w wyrażeniu $3c$; aby więc otrzymać prawdziwy wypadek potrzeba go powiększyć ilością $3c$; a zatem otrzymamy wypadek odejmowania w danym przykładzie $4a - 2b + 3c$.

Niech będzie ieszcze $5a^2 - 4ab + 3bc - b^2$, wielomian, który mamy odjąć od $8a^2 - 2ab$. To działanie może być oznaczone tym sposobem

$$8a^2 - 2ab - (5a^2 - 4ab + 3bc - b^2).$$

Lecz, aby to wyrażenie przywieśdź do iednego wielomianu; uważamy, że odjąć $5a^2 - 4ab + 3bc - b^2$, iest to właśnie odjąć różnicę, między summą $(5a^2 + 3bc)$ a summą $(4ab + b^2)$, którey wyrazy mają znak $-$. Można zaraz odjąć $5a^2 + 3bc$, otrzymamy $8a^2 - 2ab - 5a^2 - 3bc$; lecz ten wypadek iest za mały o ilość $4ab + b^2$, a zatem takową ilość trzeba dodać, aby otrzymać prawdziwą różnicę, a zatem

$$8a^2 - 2ab - 5a^2 - 3bc + 4ab + b^2,$$

czyli $8a^2 - 2ab - 5a^2 + 4ab - 3bc + b^2,$



uporządkowawszy i skróciwszy, będzie:

$$3a^2 + 2ab - 3bc + b^2.$$

Stąd wyprowadzimy następujące prawidło:

Ażeby odjąć wielomian jeden od drugiego, potrzeba, w tym wielomianie, który mamy odejmować odmienić znaki na przeciwne, napisać obok siebie wielomiany, i uczynić przywiedzenie, jeżeli może być wykonane.

Na mocy tego prawidła otrzymamy:

$$1^\circ 5a^3 - 4a^2b + 3b^2c - (3a^2b - 2a^3 - 8b^2c) =$$

$$7a^3 - 7a^2b + 11b^2c$$

$$2^\circ 4ab - cd - 2b^2 + 3a^2 - (5ab - 4cd + 3b^2 + 3a^2) =$$

$$-ab - 3cd - 5b^2.$$

15. Według tego prawidła można we wielomianach czynić pewne przekształcenia i tak można przekształcić wielomian:

$$6a^2 - 3ab + 2b^2 - 2bc,$$

na, $6a^2 - (3ab - 2b^2 + 2bc).$

$$7a^3 - 8a^2b - 4b^2c + 6b^3,$$

na $7a^3 - (8a^2b + 4b^2c - 6b^3).$

lub $7a^3 - 8a^2b - (4b^2c - 6b^3).$

Te przekształcenia, które ściągają się do tego, aby wielomian rozdzielić znakiem —, na dwie części są bardzo użyteczne w Algjebrze.

Mnożenie Algiebraiczne.

16. Uważać będziemy za dowiedzioną tę zasadę, we wszystkich Arytmetykach znajdującą się, że iloczyn z dwóch, albo więcej liczb zawsze będzie ten sam, gdy w jakimkolwiek porządku rozmnożymy te same liczby przez siebie.

To założywszy weźmy naprzód przypadek mnożenia iednomianu przez iednomian: naprzykład $7a^3b^2$ rozmnożyć przez $4a^2b$. Wyrażenie tego iloczynu może być tak napisane: $7a^3b^2 \times 4a^2b$.

Lecz można je uprościć, uważając, że podług powyższej zasady, i za pomocą znaków algiebraicznych,

można napisać także $7 \times 4 \times aaaaabbbb$. Ponieważ współczynniki są liczbami szczególnymi, więc można rozmnożyć je przez siebie, a otrzymamy 28. na współczynnik iloczynu. Co do głosek, iloczyn $aaaaa$ równy jest a^5 , podobnie $bbbb$ równa się b^3 , a zatem otrzymamy ostateczny wypadek $28a^5b^3$.

Rozmnóżmy jeszcze $12a^2b^4c^2$ przez $8a^3b^2d^2$ iloczyn można wyrazić tak:

$$12 \times 8 \times aaaaabbbbcbccdd \text{ albo } 96a^5b^6c^2d^2.$$

Stąd widzimy że, aby rozmnożyć dwie ilości jednoWyrazowe przez siebie potrzeba 1° rozmnożyć dwa współczynniki przez siebie 2° napisać obok tego iloczynu wszystkie głoski, które wchodzić zarazem do mnożnicy i mnożnika, dając każdej głosce wykładnik równy summie wykładników, które miały te głoski, będąc czynnikami: 3° jeżeli która głoska wchodzi tylko w jeden czynnik, napisać ją w iloczynie z tym samym wykładnikiem jaki miała w czynniku.

Prawidło, co do współczynników, nieprzedstawia żadnej trudności, lecz, aby udowodnić prawidło na wykładniki, uważać należy, że liczba a powinna być tyle razy wzięta za czynnik w iloczynie, ile razy jest w mnożnicy i w mnożniku.

A że (ustęp. 2) wykładniki oznaczają ile razy głoski wchodzić jako czynniki, więc summa wykładników téż samé głoski, oznacza ile razy ta głoska powinna być wzięta za czynnik w iloczynie.

Na mocy tego prawidła otrzymamy:

$$8a^2bc^3 \times 7abd^2 = 56a^3b^2c^3d^2,$$

$$21a^3b^2dc \times 8abc^3 = 168a^4b^3c^4d,$$

$$4abc \times 7df = 28abcdf.$$

17. Przejdźmy teraz do mnożenia wielomianów.

Niech będą dwa wielomiany $a+b+c$; i $d+f$, mające wszystkie wyrazy dodatne, iloczyn z tych

dwóch wielomianów można wyrazić w następującej postaci: $(a+b+c)(d+f)$; lecz często potrzeba zrobić jeden wielomian z tego iloczynu, i o to właśnie idzie w mnożeniu dwóch wielomianów.

Rzecz oczywista, że mnożyć sumę $a+b+c$ przez $d+f$ jest to wziąć $a+b+c$ tyle razy, ile jest jedności w f , i dodać te dwa iloczyny. Mnożyć zaś $a+b+c$ przez d , jest to wziąć każdą część mnożnej razy d , i te cząstkowe iloczyny dodać do siebie: zatem otrzymamy $ad+bd+cd$. Podobnie mnożyć $a+b+c$, przez f , jest to wziąć f razy każdą część mnożnika, i te cząstkowe iloczyny dodać.

A zatem $(a+b+c)(d+f)=ad+bd+cd+af+bf+cf$.

A tak, aby rozmnożyć dwa wielomiany, w których wszystkie wyrazy są ze znakami dodatnimi, potrzeba następnie mnożyć każdy wyraz mnożnej, przez każdy wyraz mnożnika, i dodać te wszystkie iloczyny.

Jeżeli w tych wielomianach będą wyrazy z wykładami i współczynnikami; potrzeba w tym razie zachować jeszcze prawidło (ustęp 16) na mnożenie iednomianów, a tak na iloczyn $(3a^2+4ab+b^2)(2a+5b)$ otrzymamy:

$$6a^3+8a^2b+2ab^2+15a^2b+20ab^2+5b^3$$

czyli skróciwszy $6a^3+23a^2b+22ab^2+5b^3$.

Aby udowodnić przypadek najogólniejszy, uważamy, że jeżeli mnożna zamyka wyrazy dodatnie i odjemne, takowy czynnik wyraża różnicę, pomiędzy liczbą jedności oznaczonych przez sumę wyrazów dodatnich, a liczbą jedności oznaczonych przez sumę wyrazów odjemnych. Podobne będzie rozumowanie, gdy mnożnik zawiera wyrazy dodatnie, i odjemne. Stąd wypada, że mnożenie dwóch wielomianów jakichkolwiek, może być uważane za przypadek

w którymby potrzeba było mnożyć przez siebie dwa wyrażenia dwuwyrazowe postaci $a-b$, $c-d$; w których a , oznacza summę wyrazów dodatnich, $-b$ summę wyrazów odjemnych mnożnéy; podobnie c i d w mnożniku, zobaczmy iak można wykonać mnożenie skazane przez $(a-b)(c-d)$.

Rozmnożyć $a-b$ przez $c-d$ iest to wziąć $a-b$ tyle razy; ile iest iedności w c , mniéy tyle razy, ile iest iedności w d , czyli wypada rozmnożyć $a-b$ przez c , a od tego odjąć iloczyn z $a-b$ przez d . Lecz mnożyć $a-b$ przez c , iest to mnożyć c przez $a-b$, na mocy zasady wyłożonéy (ustęp 16); otrzymamy więc: $ca-cb$ czyli $ac-bc$.

Podobnież iloczyn z $a-b$ przez d iest $ad-bd$, a że ten iloczyn powinien być odjęty od iloczynu poprzedzającego $ac-bc$; więc (ustęp 14) potrzeba odmienić znaki w iloczynie $ad-bd$, i napisać obok pierwszego iloczynu $ac-bc$: to uczyniwszy, otrzymamy w końcu:

$$(a-b)(c-d) = ac-bc-ad+bd.$$

Zastanowiwszy się nad sposobem, iakim utworzył się ten iloczyn, otrzymamy następujące prawidło: w każdym mnożeniu, uważając wszystkie wyrazy mnożnika za dodatne, potrzeba mnożyć każdy wyraz mnożnéy, tak dodatny iak odjemny, przez wyrazy mnożnika, i dać iloczynom cząstkowym takie znaki, iakie były przy wyrazach mnożnéy: potem, uważając wyrazy mnożnika za odjemne, mnożyć każdy wyraz mnożnéy tak dodatny iak odjemny, przez każdy wyraz mnożnika, lecz iloczynom cząstkowym, dać znaki przeciwne znakom, iakie miały przed sobą wyrazy mnożnéy. Co do mnożenia cząstkowego każdego wyrazu mnożnéy, przez każdy wyraz mnożnika, postąpić należy podług prawideł skazanych na mnożenie iednomianów (ustęp 16).

Niech będą dwa wielomiany:

$$4a^3 - 5a^2b - 8ab^2 + 2b^3,$$

$$\text{ i } 2a^2 - 3ab - 4b^2,$$

$$\begin{array}{r} 8a^5 - 10a^4b - 16a^3b^2 + 4a^2b^3 \\ - 12a^4b + 15a^3b^2 + 24a^2b^3 - 6ab^4 \\ - 16a^3b^2 + 10a^2b^3 + 32ab^4 - 8b^5 \\ \hline 8a^5 - 22a^4b - 17a^3b^2 + 48a^2b^3 + 26ab^4 - 8b^5. \end{array}$$

Napisawszy wielomiany jeden pod drugim, mnoży się każdy wyraz wielomianu pierwszego przez wyraz $2a^2$ wielomianu drugiego, z tego otrzymamy: $8a^5 - 10a^4b - 16a^3b^2 + 4a^2b^3$. Wielomian ten ma te same znaki, co mnożna. Przechodząc następnie do wyrazu $3ab$ mnożnika, przed którym znak —, mnoży się każdy z wyrazów mnożnéy przez ten wyraz, a przed każdym iloczynem cząstkowym daje się znak przeciwny znakowi, będącemu przy wyrazie odpowiadającym w mnożnéy, a tak otrzymamy: $-12a^4b + 15a^3b^2 + 24a^2b^3 - 6ab^4$, iloczyn ten pisze się pod iloczynem pierwszym.

Podobne działanie odbywszy przez wyraz $4b^2$, który jest także odjemny; otrzymamy,

$$-16a^3b^2 + 20a^2b^3 + 32ab^4 - 8b^5.$$

Następnie przywiódłszy wyrazy podobne; otrzymamy iloczyn najprościej wyrażony:

$$8a^5 - 22a^4b - 17a^3b^2 + 48a^2b^3 + 26ab^4 - 8b^5.$$

Prawidło na znaki, które jest bardzo ważne, w mnożeniu dwóch wielomianów, może być tak wysłowione: *Ile razy wyrazy mnożnéy i mnożnika mają ten sam znak, iloczyn, odpowiadający tym wyrazom ma znak +; jeżeli obadwa wyrazy mają znaki przeciwne, iloczyn ma znak —*

Mówi się jeszcze ięzykiem algebricznym; że $+$ mnożone przez $+$ lub $-$ mnożone przez $-$, daje na iloczyn $+$; zaś $-$ mnożone przez $+$; albo $+$ przez $-$,

daie —: lecz to wysłowienie, rzeczywiście nie zawierające żadnej myśli; (ponieważ nie znaczyć niemoże mnożenie przez siebie znaków, a nie ilości), powinno być tylko uważane za skrócenie brzmienia poprzedzających zasady.

Przecież często uważają Algiebraiści dla skrócenia mowy, wyrażeń niepoprawnych dla łatwiejszego pamiętania prawideł.

Przykłady dla wprawy:

$$\begin{array}{r} 1. \text{ Przykład } 3a^2 - 5bd + cf \\ \quad \quad \quad - 5a^2 + 4bd - 8cf \end{array}$$

$$\text{Iloczyn} - 15a^4 + 37a^2bd - 29a^2cf - 20b^2d^2 + 44bcd f - 8c^2f^2$$

$$\begin{array}{r} 2. \text{ Przykład } 4a^3b^2 - 5a^2b^2c + 8a^2bc^2 - 3a^2c^3 - 7abc^3 \\ \quad \quad \quad 2ab^2 - 4abc - 2bc^2 + c^3 \end{array}$$

$$\text{Iloczyn} \left\{ \begin{array}{l} 8a^4b^4 - 10a^3b^4c + 28a^3b^3c^2 - 34a^3b^2c^3 \\ - 4a^2b^3c^3 - 16a^4b^3c + 12a^3bc^4 + 7a^2b^2c^4 \\ + 14a^2bc^5 + 14ab^2c^5 - 3a^2c^6 - 7abc^6. \end{array} \right.$$

18. Nad mnożeniem algiebraicznym poczynimy następujące uwagi.

Naprzód: Jeżeli wielomiany dane do mnożenia przez siebie są iednorodne, (ustęp 11) (w istocie po większej części zagadnienia, które rozwiążemy za pomocą Algiebrы a szczególnie podania ieometryczne prowadzą do podobnych wyrażeń) *iloczyn tych wielomianów iest także iednorodny.* Jest to wniosek, wynikający z prawideł, służących głoskom i wykładnikom, w mnożeniu ilości iednowyrazowych, nadto *stopień każdego wyrazu w iloczynie, powinien być równy summie stopni dwóch wyrazów iakichkolwiek mnożnéy i mnożnika.* Jakoż w pierwszym przykładzie z dwóch poprzedzających, wszystkie wyrazy mnożnéy i mnożnika, będąc drugiego stopnia, wszystkie wyrazy iloczynu są czwartego stopnia.

W drugim przykładzie wyrazy mnożnéy są piątego, wyrazy mnożnika trzeciego stopnia, a zatém iloczyn jest osmego stopnia. Ta uwaga służy w praktyce do poznania błędów w rachunek wcisnąć się mogących, co do wykładników. Naprzykład, jeżeli w iloczynie, który powinien być iednorodny, znajdziemy, że wiedzonym z wyrazów iloczynu summa wykładników jest 6, a w innych wyrazach jest 7, to będzie znakiem, że się wcisnął błąd w dodawaniu wykładników: natenczas potrzeba powtórzyć mnożenie tych wyrazów, z których powstał ten cząstkowy iloczyn.

Powtóre: Jeżeli w iloczynie dwóch wielomianów, nie można uczynić żadnego przywiedzenia z wyrazami podobnemi, całkowita liczba wyrazów składających iloczyn, równa się iloczynowi wyrazów mnożnéy, przez liczbę wyrazów mnożnika. Jest to wypadek prawidła (ustęp 17). I tak, jeżeli się znajduje 5 wyrazów w mnożnéy, a 4 wyrazy w mnożniku, w iloczynie znajdować się powinno 5×4 czyli 20 wyrazów, w ogóle jeżeli mnożna ma wyrazów m a mnożnik ma ich n , iloczyn zamyka wyrazów $m \times n$.

Potrzebie. Jeżeli w mnożeniu znajdują się wyrazy podobne, liczba wyrazów w iloczynie skróconym może być daleko mniejsza. Lecz uważać należy, że pomiędzy różnemi wyrazami iloczynu znajdują się takie których niemożna przywiesdzić ze żadnym, takimi są: 1°. wyraz pochodzący z rozmnożenia wyrazu mnożnéy, mającego wykładnik największy pewnéy głoski, przez wyraz mnożnika mający tę samę głoskę z wykładnikiem także największym. 2°. Wyraz pochodzący z rozmnożenia dwóch wyrazów, mających najniższy wykładnik téy saméy głoski. Jakoż te dwa iloczyny cząstkowe powinny zamykać tę głoskę, z wykładnikiem albo większym,

albo mniejszym, niż którykolwiek wyraz innych iloczynów cząstkowych; a tém samém nie mogą być podobne innym iloczynom cząstkowym. Uwaga ta wyprowadzona z prawideł na wykładniki będzie bardzo użyteczna w dzieleniu.

19. Zakończymy rzecz o mnożeniu algebriczném krótkim wykładem różnych wypadków mnożenia, częstokroć zachodzących w Algjebrze.

1°. Podnieść do kwadratu, czyli do drugiey potęgi dwumian $(a+b)$, otrzymamy na mocy prawideł wiadomych,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2;$$

to jest kwadrat ze summy dwóch ilości, składa się, z kwadratu pierwszey ilości, więcey kwadratem z drugiey ilości, więcey podwójnym iloczynem z pierwszey przez drugą, i tak kwadrat, z $5a^3 + 8a^2b$, będzie

$$(5a^3 + 8a^2b)^2 = 25a^6 + 80a^5b + 64a^4b^2.$$

2°. Znajdźmy ieszcze kwadrat z różnicy $a-b$ będzie

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2,$$

to jest kwadrat z różnicy dwóch ilości, składa się z kwadratu pierwszey, więcey kwadratu z drugiey ilości, mnięcy podwójnym iloczynem z pierwszey przez drugą. Podług tego

$$(7a^2b^2 - 12ab^3)^2 = 49a^4b^4 - 168a^3b^5 + 144a^2b^6.$$

3°. Rozmnożyć $a+b$ przez $a-b$ będzie

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

A zatem sumnę dwóch ilości rozmnożywszy przez ich różnicę, wypadnie na iloczyn różnica kwadra-

tów z tych ilości. (Ta własność była okazana w ustępie 5). Podług tego

$$(8a^3 + 7ab^2)(8a^3 - 7ab^2) = 64a^6 - 49a^2b^4$$

Według takowych wypadków można znaleźć iloczyn niektórych wielomianów prędkiej, niż zwyczajnym sposobem.

I tak gdyby trzeba było rozmnożyć: $5a^2 - 4ab + 3b^2$ przez $5a^2 - 4ab - 3b^2$, uważalibyśmy, że pierwsza z tych dwóch ilości jest summa tych dwóch $5a^2 - 4ab$ i $3b^2$, druga zaś jest różnicą tychże. Łatwo więc znajdziemy na iloczyn

$$(5a^2 - 4ab)^2 - (3b^2)^2 = 25a^4 - 4a^3b + 16a^2b^2 - 9b^4.$$

20. Zastanawiając się nad otrzymanemi wypadkami z mnożenia, widzimy, że ich skład, albo sposób jakim się formują za pomocą mnożnej i mnożnika, niezależy być, ymniey od, ważności szczególnych, jakie byśmy nadali głoskom a , i b , wchodzącym do czynników.

Sposób, którym się tworzy iloczyn z dwóch czynników, nazywa się prawem iloczynu; prawo to niezmienia się, iakiekolwiek nadamy ważności głoskom, wchodzącym do obu czynników.

21. Nakoniec można niekiedy dany wielomian rozłożyć bez szczególnego działania na czynniki, co jest często bardzo przydatne. Niech np: będzie wielomian $25a^4 - 30a^3b + 15a^2b^2$: ponieważ czynniki 5 i a^2 wchodzą w każdy z wyrazów, a zatem można ten wielomian wyrazić w postaci $5a^2(5a^2 - 6ab + 3b^2)$, podobnie $64a^2b^6 - 25a^2b^8$, przemienimy na

$$(8a^2b^3 + 5ab^4)(8a^2b^3 - 5ab^4).$$

Jakoż $64a^4b^6$ i $25a^2b^8$ są kwadratami z $8a^2b^3$, i $5ab^4$; a zatem wyrażenie dane jest różnicą dwóch

kwadratów danych, którą można rozłożyć na sumę pierwiastków kwadratowych, rozmnożoną przez ich różnicę.

O dzieleniu Algebraiczném.

22. Przedmiotem dzielenia algebraicznego, tak iak arytmetycznego jest: *maiąc iloczyn i ieden z dwóch czynników znaleźć drugi czynnik.*

Uważamy naprzód przypadek dwóch iednomianów. Gdy mamy podzielić $72a^5$ przez $8a^3$, co wyrazimy tak: $\frac{72a^5}{8a^3}$; szukamy trzeciéy ilości iednowyrazowéy któraby, rozmnożona przez drugą, dała na iloczyn pierwszą. A zatém podług prawideł wyłożonych na mnożenie iednomianów, ilość szukana powinna być taka, ażeby iéy spółczynnik rozmnożony przez 8, dał na iloczyn 72; nadto ażeby wykładnik głoski a w téy szukanéy ilości, dodany do wykładnika 3 głoski a będącéy w dzielniku, uczynił wykładnik 5, iak jest w dzielnéy: Otrzymamy zaś tę ilość dzieląc 72 przez 8, odcymuiąc wykładnik 3 od wykładnika 5, to jest: $\frac{72a^5}{8a^3} = 9a^2$. Jakoż

$$9a^2 \times 8a^3 = 72a^5.$$

Podobnym sposobem znajdziemy

$$\frac{35a^3b^2c}{7ab} = 5a^{3-1}b^{2-1}c = 5a^2bc. \text{ Jakoż}$$

$$5a^2bc \times 7ab = 35a^3b^2c.$$

A zatém aby podzielić dwa iednomiany przez siebie potrzeba 1° *Podzielić spółczynnik ieden przez drugi, 2° głoski spółne w dzielniku i dzielnéy na-*