

lecz

$$7\sqrt{55} = \sqrt{55 \times 49} = \sqrt{2695} = 51,91 \text{ blisko o } 0,01$$

$$7\sqrt{15} = \sqrt{15 \times 49} = \sqrt{735} = 27,11 \dots, \text{ stąd}$$

$$\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11} + \sqrt{3}} = \frac{51,91 - 27,11}{8} = \frac{24,80}{8} = 3,10.$$

Wypadek żądany jest zatem 3,10, i zbliżony do do dokładnego po  $\frac{1}{800}$ , iak o tém łatwo się przekonać.

Podobnie postępując znaleźlibyśmy, że

$$\frac{3 + 2\sqrt{7}}{5\sqrt{12} - 6\sqrt{5}} = 2,123 \text{ wypadek do dokładnego zbliżo-}$$

ny po 0,001.

## §. II. Zagadnienia i Równania drugiego stopnia.

88. Rozdzielamy równania stopnia drugiego na dwa gatunki, ieden równań z dwoma wyrazami, czyli nie zupełnych, drugi, równań z trzema wyrazami, czyli zupełnych.

Pierwszego gatunku są te równania, które zawierają wyrazy z ilością niewiadomą w stopniu drugim, i wyrazy wiadome, iako to:

$$3x^2 = 5 \text{ i } 4x^2 - 7 = 3x^2 + 9; \frac{1}{3}x^2 - 3 + \frac{5}{12}x^2 = \frac{7}{24} - x^2 + \frac{299}{24}$$

w ogólności zaś  $ax^2 = b$ . Jakoż uważając 3cie równanie które ma naywięcý wyrazów, zobaczymy, że zniósłszy mianowniki otrzymamy,

$$8x^2 - 72 + 10x^2 = 7 - 24x^2 + 299.$$

przeniósłszy zaś wyrazy niewiadome na iedną, a

wiadome na drugą stronę, i skuteczniejszy skazane dodawanie i odejmowanie; otrzymamy

$$42x^2 = 378.$$

Równania zupełne, czyli o trzech wyrazach, są te, które oprócz niewiadomej w stopniu drugim, zawierają jeszcze wyrazy, w których niewiadoma jest w stopniu pierwszym.

Takie są równania

$$5x^2 - 7x = 34.$$

$$\frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 8 - \frac{2}{3}x - x^2 + \frac{273}{12}.$$

Równanie każde tego rodzaju, za pomocą przekształceń wyżej przytoczonych, może zawsze być przywiedzione do postaci  $ax^2 + bx = c$ .

*Równania o dwóch wyrazach.*

Aby rozwiązać równanie  $ax^2 = b$ , mamy naprzód

$$x^2 = \frac{b}{a}, \text{ następnie } x = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Gdy  $\frac{b}{a}$  będzie liczbą całkowitą, albo ułomkową, będzie można otrzymać pierwiastek kwadratowy, albo zupełny, albo przez przybliżenie.

Gdy  $\frac{b}{a}$  będzie ilością algebriczną, należy zastosować prawidła podane na wyciąganie pierwiastków z ilości algebricznych.

Uważamy, że czy  $+m$ , czy  $-m$ , podniesiemy do kwadratu; otrzymamy  $+m^2$ : podobnie tak.

$+ \sqrt{\frac{b}{a}}$ , iak  $- \sqrt{\frac{b}{a}}$  podniesione do kwadratu, da,  $+\frac{b}{a}$ : a zatém, dwa są rozwiązania równania stopnia drugiego: to jest

$$x = + \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ i } x = - \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Jakoż wstawivszy zamiast  $x$ , pierwszą z tych ważności, w równanie  $ax^2 = b$ , otrzymamy

$$a \times \left( + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 = b, \text{ skąd } a \times \frac{b}{a} = b \text{ czyli } b = b,$$

wstawivszy zaś drugą ważność, w to samo równanie, otrzymamy

$$a \times \left( - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 = b \text{ czyli } a \times \frac{b}{a} = b \text{ czyli } b = b.$$

Weźmy na pierwszy przykład równanie

$$4x^2 - 7 = 3x^2 + 9.$$

przeniósłszy wyrazy będzie

$$x^2 = 16 \text{ skąd } x = \pm \sqrt{16} = \pm 4.$$

Na drugie równanie weźmy

$$\frac{1}{3}x^2 - 3 + \frac{5}{12}x^2 = \frac{7}{24} - 2x + \frac{299}{24}.$$

widzieliśmy w ustępie 88, że to równanie da się przywieść do  $42x^2 = 378$ .

podzieliwszy iego wyrazy przez 42, otrzymamy

$$x^2 = \frac{378}{42} = 9; \text{ skąd } x = \pm 3.$$

Niech będzie jeszcze równanie

$$3x^2=5; x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}} \text{ czyli } =\pm\frac{1}{3}\sqrt{15}.$$

Ponieważ 15. nie jest zupełnym kwadratem, przeto nie można otrzymać tych dwóch wartości dla niewiadomey  $x$ , chyba przez przybliżenie.

89. *Równania zupełne drugiego stopnia.* Aby rozwiązać równanie ogólne  $ax^2+bx=c$ ; podzielimy naprzód jego wyrazy przez współczynnik pierwszego,

a otrzymamy  $x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a}$ : czyli naznaczywszy

$$\frac{b}{a}=p; \frac{c}{a}=q, \text{ otrzymamy}$$

$$x^2+px=q$$

Uważamy teraz, że gdybyśmy mogli obrócić pierwszą stronę  $x^2+px$ , na kwadrat z dwumianu; samo wyciągnięcie pierwiastku zamieniłoby równanie drugiego stopnia, na równanie pierwszego. Lecz porównyując pierwszą stronę równania z kwadratem  $x^2+2ax+a^2$ , z dwumianu  $(x+a)$ ; widzimy, że  $x^2+px$  zawiera kwadrat  $x^2$ , z pierwszą częścią  $x$  dwumianu, i podwójny iloczyn  $px$ , z pier-

wszęj części  $x$ , przez drugą, która jest  $\frac{p}{2}$ ; (albowiem  $px=\frac{2px}{2}$ ), stąd wypada, że jeżeli do  $x^2+px$ ,

dodamy kwadrat z części drugiej  $\frac{p^2}{4}$ ; którego bra-

kanie, to jest  $\frac{p^2}{4}$ ; pierwsza strona równania będzie kwadratem z dwumianu  $x + \frac{p}{2}$ : aby zaś nie naruszyć równania, potrzeba  $\frac{p^2}{4}$  dodać po obu stronach; i będzie

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} + q,$$

$$\text{czyli } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q;$$

$$\text{a zatem } x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

gdzie bierzemy znak podwójny z przyczyny daney w ustępie 88, nakoniec

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

A tak, na rozwiązanie równania zupełnego stopnia 2go, służy następujące prawidło:

*Sprowadziwszy równanie do postaci*

$$x^2 + px - q = 0$$

*niewiadoma x, będzie równa połowie współczynnika wyrazu drugiego wziętego ze znakiem przeciwnym, więcej; lub mniej pierwiastkiem kwadratowym wyciągniętym z summy algebraicznej dwóch ilości; iedney, która jest kwadratem z połowy współczynnika wyrazu drugiego, drugiey która jest trzecim wyrazem równania wziętym ze znakiem przeciwnym.*

90. Weźmy na pierwszy przykład równanie

$$\frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 8 - \frac{2}{3}x - x^2 + \frac{273}{12}:$$

zniósłszy mianowniki, będzie

$$10x^2 - 6x + 9 = 96 - 8x - 12x^2 + 273,$$

czyli przywiódłszy wyrazy,

$$22x^2 + 2x = 360,$$

podzieliwszy zaś przez 22,

$$x^2 + \frac{2}{22}x = \frac{360}{22}.$$

A zatem, według prawidła, któreśmy w poprzedzającym ustępie poznali, jest dwoista ważność

$$x = -\frac{1}{22} \pm \sqrt{\frac{360}{22} + \left(\frac{1}{22}\right)^2}.$$

Pozostaie teraz wykonać działanie liczebne.

$$\text{Jest naprzód, } \frac{360}{22} + \left(\frac{1}{22}\right)^2 = \frac{360 \times 22 + 1}{(22)^2} = \frac{7921}{(22)^2},$$

a że pierwiastek kwadratowy z 7921 jest 89;

$$\text{więc } \sqrt{\frac{360}{22} + \left(\frac{1}{22}\right)^2} = \frac{89}{22} \text{ i przeto } x = -\frac{1}{22} \pm \frac{89}{22}.$$

$$\text{to jest: } x = -\frac{1}{22} + \frac{89}{22} = \frac{88}{22} = 4,$$

$$x = -\frac{1}{22} - \frac{89}{22} = -\frac{45}{11}.$$

A tak, z dwóch ważności sprawdzających równa-

nie, iedna iest dodatna całkowita, druga odienma ułomkowa.

Drugi przykład

$$6x^2 - 37x = -57.$$

Jest naprzód,  $x^2 - \frac{37}{6}x = -\frac{57}{6}.$

A zatém, według poznanego prawidła

$$x = \frac{37}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{37}{12}\right)^2 - \frac{57}{6}}.$$

Ażeby sprowadzić  $\left(\frac{37}{12}\right)^2 - \frac{57}{6}$  naprzód do iednego

go mianownika, a potém do iednéy liczby, uważamy, że  $(12)^2 = 12 \times 12 = 6 \times 24$ ; więc dosyć będzie roz-  
mnożyć wyrazy drugiego ułomku przez 24: a że

$$37 \times 37 = 1369; 57 \times 24 = 1368,$$

więc 
$$\left(\frac{37}{12}\right)^2 - \frac{57}{6} = \frac{1369 - 1368}{(12)^2} = \frac{1}{(12)^2}.$$

i przeto  $x = \frac{37}{12} \pm \frac{1}{12}$ , to iest: 
$$\begin{cases} x = \frac{37}{12} + \frac{1}{12} = \frac{38}{12} = \frac{19}{6}, \\ x = \frac{37}{12} - \frac{1}{12} = \frac{36}{12} = 3. \end{cases}$$

Weźmy równanie algiebraiczne:

$$4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18b^2,$$

przemieniwszy znaki, przeniósłszy i podzieliwszy wy-  
razy, otrzymamy

$$x^2 - ax = 2a^2 - 9ab + 9b^2,$$

więc według prawidła (ustępu 89), iest

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2a^2 - 9ab + 9b^2},$$

czyli  $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{9a^2}{4} - 9ab + 9b^2}$ : a że

$\frac{9a^2}{4} - 9ab + 9b^2$  iest kwadratem z  $\frac{3a}{2} - 3b$ ,

więc  $x = \frac{a}{2} \pm \left(\frac{3a}{2} - 3b\right)$ , to iest  $\begin{cases} x = 2a - 3b, \\ x = -a + 3b. \end{cases}$

Te dwie ważności będą dodatne, jeżeli  $2a > 3b$ , lecz gdy  $3b > a$ : to iest, jeżeli ważność liczebna  $b$ , iest większa od  $\frac{a}{3}$ , a mniejsza od  $\frac{2a}{3}$ . Dla wprawy rozwiążmy równania

$$x^2 - 7x + 10 = 0, \text{ wypadnie } \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases},$$

$$\frac{1}{3}x - 4 - x^2 + 2x - \frac{4}{5}x^2 = 45 - 3x^2 + 4x \begin{cases} x = 7,12 \\ x = -5,73 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 - 2bx + x^2 = \frac{m^2 x^2}{n^2},$$

wypadnie

$$x = \frac{n}{n^2 - m^2} \left( bn \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2 m^2 - a^2 n^2} \right).$$

91. Można rozwiązać równanie  $ax^2 + bx = c$  nieznosząc spółczynnika kwadratu,  $x^2$ ; lecz przerabianie iest trudniejsze.

I tak, wyraz  $ax^2$  może być wyrażony w postaci  $(x\sqrt{a})^2$ , a wyraz  $bx$  iest równy  $2x\sqrt{a} \times \frac{b}{2\sqrt{a}}$ ,



(mnożąc i dzieląc przez  $2\sqrt{a}$ ), skąd wynika, że  $ax^2 + bx$  tworzy dwa pierwsze wyrazy kwadratu

z  $x\sqrt{a} + \frac{b^2}{2\sqrt{a}}$ : więc dodawszy po obu stronach

$\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$ , czyli  $\frac{b^2}{4a}$ , pierwszą stronę będzie zupełnym kwadratem.

Zastosowawszy tę przemianę do równania

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4\sqrt{a}} = c + \frac{b^2}{4a},$$

$$\text{będzie } x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \pm \sqrt{c + \frac{b^2}{4a}},$$

$$x\sqrt{a} = -\frac{b}{2\sqrt{a}} \pm \sqrt{c + \frac{b^2}{4a}}.$$

Podzieliwszy wyrazy przez  $\sqrt{a}$ , a uważając

$$\text{że } 1^\circ \quad -\frac{b}{2\sqrt{a}} : \sqrt{a} = -\frac{b}{2(\sqrt{a})^2},$$

$$2^\circ \quad \sqrt{c + \frac{b^2}{4a}} : \sqrt{a} = \sqrt{\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} \quad (\text{ust: 86})$$

$$\text{otrzymamy } x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}},$$

$$\text{czyli } x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac + b^2}}{2a};$$

wypadek, który łatwiej się otrzymuje nadając równaniu postać  $x^2 + \frac{bx}{a} = \frac{c}{a}$ .

## 92. Zagadnienia.

Zagadnienie 1. *Znaleść liczbę, której kwadrat dwa razy wzięty, i powiększony tą liczbą, wziętą trzy razy, uczyni 65.*

Oznaczywszy szukaną liczbę przez  $x$ ; będzie po-  
dług podań zagadnienia, równanie

$$2x^2 + 3x = 65,$$

skąd 
$$x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{65}{2} + \frac{9}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{23}{4},$$

to jest  $x = -\frac{3}{4} + \frac{23}{4} = 5$ ;  $x = -\frac{3}{4} - \frac{23}{4} = -\frac{13}{2}.$

Pierwsza ważność sprawdza równanie  
 $2x^2 + 3x = 65$ , albowiem  $2 \times 5^2 + 3 \times 5 = 2 \times 25 + 15 = 65.$

Druga ważność sprawdza także równanie; aby zaś  
wytłomaczyć tę drugą ważność; uważamy, że gdy za  $x$   
wstawimy ważność  $-x$ ; równanie  $2x^2 + 3x = 65$  zamieni  
się na  $2x^2 - 3x = 65$ , a dla  $x$  wypadnie ważność

$$-x = \frac{3}{4} \pm \frac{23}{4},$$

to jest:  $x = \frac{13}{2}$  i  $x = -5.$

Ważności od poprzedzających różnią się tylko  
znakami. Więc można powiedzieć, że wypadek roz-

wiązania odjemny  $-\frac{13}{2}$ , odpowiada innemu zagadnie-  
niu, którego brzmienie byłoby: *Znaleść liczbę, któ-  
rę podwójny kwadrat, zmniejszony tą samą licz-  
bą wziętą trzy razy, uczyni 65; i otrzymamy po  
rozwiązaniu*

$$2 \times \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{13}{2} = \frac{169}{2} - \frac{39}{2} = 65.$$

2. Zagadnienie. Kupiono pewną liczbę łokci sukna za Złotych Polskich 240. Jeżeliby za tę sumę kupiono tego samego sukna łokci o trzy mniej; łokcie kosztowałyby cztery Złote więcej. Jaką liczbę łokci sukna kupiono?

Niech  $x$  oznacza liczbę łokci kupionych:  $\frac{240}{x}$  wyrażać będzie cenę iednego łokcia. Kupiwszy za 240 Złotych łokci  $x-3$ ; cena łokcia będzie  $\frac{240}{x-3}$ ; a że podług założenia ta ostatnia cena przewyższa pierwszą o Złt: 4; więc będzie równanie,

$$\frac{240}{x-3} - \frac{240}{x} = 4,$$

skąd  $x^2 - 3x = 180$ ;

rozwiązawszy, otrzymamy

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 180} = \frac{3 \pm 27}{2},$$

czyli  $x = 15$ ,  $x = -12$ .

Ważność dodatna czyni zadosyć brzmieniu zagadnienia; albowiem  $\frac{240}{15} = 16$  zaś  $\frac{240}{12} = 20$ , a ta liczba przewyższa liczbę 16 o 4.

Druga ważność należy do zagadnienia inne brzmienie mającego. Jakoż zamiast  $x$  wstawiwszy  $-x$  w równanie, będzie

$$\frac{240}{-x-3} - \frac{240}{-x} = 4, \text{ czyli } \frac{240}{x} - \frac{240}{x+3} = 4,$$

a zatem zagadnienie takby trzeba wysłowić:

Pewna osoba kupiła pewną liczbę łokci za 240 Złotych: gdyby tę sumę była zapłaciła za liczbę łokci większą o trzy; łokieć kosztowałby ją cztery Złote mniej.

Rozwiązując takowe zagadnienie, znajdziemy  $x=12$   $x=-15$ , albowiem równanie w tym razie będzie  $x^2 + 3x = 180$ , zamiast  $x^2 - 3x = 180$ .

Uwaga. Prawidło więc (ustępu 59) sprawdza się w zagadnieniach 2go stopnia.

Trzecie zagadnienie. Bankier wypłaca dziś pewną osobie za dwa weksle, jeden na 8776 Złot: drugi na 7488 Złp: lecz pierwszy weksel jest płatny dopiero za 9 miesięcy, drugi za 8 miesięcy. Bankier więc potrąciwszy sobie procent, płaci 1200 Złt: więcej za pierwszy, niż za drugi weksel: pytanie jaki sobie procent roczny potrącił?

Rozwiązanie. Oznaczmy procent miesięczny przez  $x$ , a zatem roczny oznaczy się przez  $12x$ , dziewięciomiesięczny przez  $9x$ , ośmiomiesięczny przez  $8x$ , a  $100 + 9x$  i  $100 + 8x$ , oznaczać będą kapitał 100 Złp: wraz z procentem za miesiące 9 i 8; więc aby oznaczyć dzisiejszą wartość obudwóch wekslów; ułożymy proporcję:

$$100 + 9x : 100 = 8776 : \frac{877600}{100 + 9x},$$

$$100 + 8x : 100 = 7488 : \frac{748800}{100 + 8x};$$

czwarte wyrazy tych dwóch proporcyy, oznaczają wartość dzisiejszą każdego weksla, a zatem stósownie do

$$\text{podania będzie równanie } \frac{877600}{100 + 9x} - \frac{748800}{100 + 8x} = 1200:$$

podzie-

podzieliwszy wyrazy przez 400, będzie

$$\frac{2194}{100+9x} - \frac{1872}{100+8x} = 3,$$

zniósłszy mianowniki i przywiódłszy wyrazy; będzie

$$216x^2 + 4396x = 2200,$$

skąd 
$$x = -\frac{2198}{216} \pm \sqrt{\frac{2200}{216} + \frac{(2198)^2}{(216)^2}};$$

sprowadziwszy zaś oba wyrazy pod znakiem pierwiastku do wspólnego mianownika, będzie

$$x = -\frac{2198}{216} \pm \frac{\sqrt{5306404}}{216};$$

mnożąc przez 12, aby otrzymać procent roczny, będzie

$$12x = -\frac{2198 \pm \sqrt{5306404}}{18};$$

aby otrzymać wartość dla  $12x$  zbliżoną o 0,01, potrzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy zbliżony o 0,1. Ten pierwiastek jest 2303,5; a zatem pierwsza wartość:

$$12x = -\frac{2198 \pm 2303,5}{18} = \frac{105,5}{18} = 5,86.$$

$$\text{Druga wartość } 12x = -\frac{4501,5}{18} = -250,08.$$

Wartość dodatnia,  $12x = 5,86$ , oznacza procent szukany.

Co do wartości ujemnej, ta należy do innego zagadnienia.

Czwarte zagadnienie. Pewna osoba kupuje konia, którego potem sprzedać za 24 dukaty. Wtę

przedaży traci tyle na 100. z ceny swęga kupna, ile ią koń kosztował.

*Pytanie za iaką cenę kupiła tego konia?*

Rozwiązanie. Niech  $x$  oznacza liczbę dukatów, za które był kupiony koń:  $x - 24$ . oznaczać będzie stratę. A że podług zagadnienia tyle traci dukatów na 100. ile jest jedności w  $x$ , więc na jednym du-

kacie traci  $\frac{x}{100}$ , a na dukatach  $x$ , traci  $\frac{x^2}{100}$ : będzie

więc równanie

$$\frac{x^2}{100} = x - 24;$$

czyli  $x^2 - 100x = -2400$ ,

skaż  $x = 50 \pm \sqrt{2500 - 2400} = 50 \pm 10$ .

to jest:  $x = 60$ ,  $x = 40$ ;

Obie te ważności odpowiadają na pytanie, iak to łatwo sprawdzić; czy 60. Złt: czy 40. Złt: wzięwszy za cenę kupna.

### *Roztrząśnienie ogólnego równania stopnia drugiego.*

Dotąd rozwiązaliśmy zagadnienia; w których ilości dane były liczbami. Weźmy teraz równanie nayogólniejsze drugiego stopnia, to jest którego spółczynniki byłyby oznaczone głoskami, i śledźmy ięgo naturę, czyli roztrząśniemy ięgo własności.

93. Widzieliśmy (ust: 89.), że każde równanie stopnia drugiego może być wyrażone w postaci

$$x^2 + px = q \dots \dots (1),$$

gdzie  $p$  i  $q$  mogą być ilości liczebne, albo algie-