

ią za garniec wina, garniec wody; znaleźć łód ile wina pozostanie w okefcie po utoczeniu 50<sup>go</sup> garca; 2<sup>re</sup> w ilu dniach znajdować się będzie wina połowa, trzecia część, albo 4<sup>ta</sup>?

{ Odpowiedź co do pierwszego, zostanie wina 60 $\frac{1}{2}$  }  
 { garcy. }  
 { Co do drugiego: dla połowy okefetu 69 dni, dla }  
 { trzeciej części 109 dni, dla 4<sup>téy</sup> 138 dni. }

### § V. Szeregi logarytmowe i wykładnicze.

Wyłożony w ustępie 205 sposób na rozwiązanie równania  $a^x = b$ , był dostateczny, aby dać wyobrażenie ułożenia tablic logarytmowych: lecz ten sposób jest bardzo pracowity, a nawet wykonać się nie da, chcąc wyznaczyć wartość dla  $x$  w znacznym stopniu przybliżoną. Są tedy odkryte sposoby daleko dogodniejsze, tak do ułożenia nowych tablic, iak do sprawdzenia tych, które dziś mamy.

Sposoby te polegają na rozwinięciu logarytmu na szereg.

227. Niech będzie liczba  $y$ , której logarytm trzeba rozwinąć na szereg: zastosujemy sposób spółczynników nie wyznaczonych (ustę: 185.)

Nie można założyć

$$1. y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{i t. d.}$$

bo uczyniwszy  $y = 0$ , pierwsza strona zamieni się (ustę: 215:) na ilość nieskończenie wielką odjemną lub dodatną, podług tego, iak podstawa logarytmów będzie większa lub mniejsza od 1, gdy tymczasem druga strona stanie się równa ilości  $A$ , która przeto powinna być téj saméj natury co strona pierwsza.

Nie można też uczynić l.  $y = Ay + By^2 + \dots$  bo gdy  $y = 0$  będzie l. 0 czyli  $-\infty = 0$ ; lecz jeżeli  $y$  wyrazimy w postaci  $1 + x$ . i uczynimy l.  $(1 + x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots (1)$ , naówczas czyniąc  $x = 0$ ; równanie zamieni się na l.  $1 = 0$ , i już nie da wypadku niezgodnego z prawdą.

Staraymy się więc wyznaczyć współczynniki A, B, C...

W tym celu postąpmy podług sposobu (ustępu 186), i zamiast  $x$  weźmy  $z$ : będzie

$$l. (1 + z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots (2),$$

odjąwszy równanie (2) od (1), otrzymamy

$$l. (1 + x) - l. (1 + z) = A(x - z) + B(x^2 - z^2) + C(x^3 - z^3) + \dots (3).$$

Druga strona tego równania jest podzielna przez  $x - z$ , zobaczmy czy nie można tego czynnika wystawić na iaw w stronie pierwszej.

Mamy

$$l. (1 + x) - l. (1 + z) = l. \frac{1 + x}{1 + z} = l. \left( 1 + \frac{x - z}{1 + z} \right)$$

A że  $\frac{x - z}{1 + z}$  można uważać za iedną liczbę  $u$ , zatem

może być rozwinięty l.  $(1 + u)$  czyli l.  $\left( 1 + \frac{x - z}{1 + z} \right)$ ,

jak l.  $(1 + x)$ : to iest

$$l. \left( 1 + \frac{x - z}{1 + z} \right) = A \frac{x - z}{1 + z} + B \left( \frac{x - z}{1 + z} \right)^2 + C \left( \frac{x - z}{1 + z} \right)^3 + \dots$$

Wstawiliśmy to rozwinięcie zamiast  $l. (1+x) - 1. (1+z)$ , w równanie (3), i podzieliwszy obie strony równania przez  $x-z$ ; otrzymamy

$$A \cdot \frac{1}{1+z} + B \cdot \frac{x-z}{(1+z)^2} + C \cdot \frac{(x-z)^2}{(1+z)^3} + \dots \\ = A + B(x+z) + C(x^2 + xz + z^2) + \dots$$

Ponieważ równanie tak jak poprzedzające powinno się sprawdzić, gdy iakiekolwiek ważności mieć będą  $x$  i  $z$ ; uczynimy więc  $x=z$ , a wypadnie

$$\frac{A}{1+x} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \dots$$

W tém równaniu zniósłszy mianowniki i przeniósłszy wyrazy na drugą stronę otrzymamy:

$$0 = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \dots \\ - A - A \Big| - 2B \Big| - 3C \Big| - 4D \Big|$$

Każdy ze spółczynników  $x$  uczyniwszy równy zero, otrzymamy szereg równań

$$A - A = 0, 2B + A = 0, 3C + 2B = 0, 4D + 3C = 0 \dots$$

skąd,

$$A = A, B = -\frac{A}{2}, C = -\frac{2B}{3} = +\frac{A}{3}, D = -\frac{3C}{4} = -\frac{A}{4}$$

Prawo tego szeregu jest widoczne, spółczynnik wyrazu  $n$ go równa się  $\pm \frac{A}{n}$ , podług tego iak  $n$  jest parzyste lub nieparzyste, a zatem rozwinięcie  $l. (1+x)$  będzie

$$l. (1+x) = Ax - \frac{A}{2}x^2 + \frac{A}{3}x^3 - \dots \\ = A \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots \right)$$

Liczba  $A$  (ustęp 214) zowie się (modulus) *zamiennikiem*, ważność szczególna tego wykładnika odróżnia układ logarytmów, który uważamy, od innych układów.

228. Założywszy  $A=1$ , i oznaczywszy przez  $l'(1+x)$ , układ logarytmów odpowiadający temu założeniu, będzie

$$l'(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots \quad (5).$$

Nadając dla  $x$  wszelkie wartości, otrzymalibyśmy następnie w tym układzie logarytmy wszelkich liczb. Układ ten nazywa się *układem naturalnym* albo *Neperoskim*, od Nazwiska Nepera wynalazcy logarytmów.

Zaymiemy się teraz utworzeniem tego układu, albowiem z niego łatwo będzie wyprowadzić wszystkie inne, czy to nadając dla  $A$  rozmaite wartości, czy też za pomocą formuły ustępu 214.

Wziąwszy w szeregu (5),  $x=0$ , otrzymamy  $l' 1 = 0$ .

Wziąwszy  $x=1$  wypadnie

$$l' 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

szereg ten jest mało schodzący się, i dlatego trzeba by w nim wziąć wielką liczbę wyrazów, chcąc otrzymać dostateczne przybliżenie np. 100 pierwszych wyrazów, aby otrzymać wartość  $l' 2$  zbliżoną o 0,01 (ustę: 180). Wogólności, szereg ten nie mogłby dać logarytmów liczb całkowitych, albowiem dla wszelkiej liczby większej od 2, otrzymalibyśmy szereg, którego by wyrazy rosły.

Oto główne przekształcenia, które wykonać potrzeba, aby otrzymać szeregi schodzące się, czyli malejące, potrzebne do wyznaczenia logarytmów liczb całkowitych, które same należy umieścić w tablicach.

*Pierwsze przekształcenie.* Uczyńmy w szeregu

(5),  $x = \frac{1}{y}$  otrzymamy uważając że

$$l\left(1 + \frac{1}{y}\right) = l(1+y) - l'y,$$

$$l(1+y) - l'y = \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \frac{1}{4y^4} + \dots (6).$$

Strona druga tego równania jest szeregiem tym więcej schodzącym się, im większe jest  $y$ ; oprócz tego strona pierwsza oznacza różnicę dwóch logarytmów następnych. A zatem czyniąc następnie  $y = 2, 3, 4, 5 \dots$ , otrzymamy

$$l'3 - l'2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \dots$$

$$l'4 - l'3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{1}{81} - \frac{1}{324} + \dots$$

$$l'5 - l'4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{192} - \frac{1}{1024} + \dots$$

Z pierwszego szeregu za pomocą logarytmu liczby 2, otrzymamy logarytm 3, z drugiego logarytm 4 w funkcji logarytmu 3 ..., i tak następnie. Stopień przybliżenia może być zawsze oceniony (ustę: 180) ponieważ wyrazy są na przemian dodatnie i odjemne.

*Przekształcenie drugie.* Otrzymamy szeregi daleko więcej schodzące się następującym sposobem:

Wstawivszy w szereg

$$1.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

—  $x$  zamiast  $x$ , otrzymamy

$$1.(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots,$$

odjąwszy te dwa szeregi od siebie, a bacząc że

$$1.(1+x) - 1.(1-x) = 1. \frac{1+x}{1-x} \text{ otrzymamy,}$$

$$1. \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots \right).$$

Aby druga strona była szeregiem bardzo schodzącym się, potrzeba aby  $x$  było ułamkiem bardzo małym, w tym zaś razie jest  $\frac{1+x}{1-x}$  większe, lecz bar-

dzo mało, od jedności. Uczynimy więc  $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{z}$

( $z$  jest liczbą całkowitą), otrzymamy  $(1+x)z =$

$$(1-x)(z+1); \text{ skąd } x = \frac{1}{2z+1},$$

zaś szereg poprzedzający zamieni się na  $1. \left( 1 + \frac{1}{z} \right)$

czyli

$$1.(z+1) - 1.z =$$

$$2 \left( \frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \frac{1}{5(2z+1)^5} + \dots \right).$$

Szereg ten podobnie oznacza różnicę pomiędzy dwo-

ma następniemi logarytmami, lecz jest daleko bardziey schodzący się iak szereg pod liczbą 6.

Uczyniwszy następnie  $z=1, 2, 3, 4, 5 \dots$ ;  
otrzymamy  $\text{V. } 2 = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right)$ .

$$\text{V. } 3 - \text{V. } 2 = 2 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right).$$

$$\text{V. } 4 - \text{V. } 3 = 2 \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} + \frac{1}{7 \cdot 7^7} + \dots \right)$$

i tak następnie.

Niech będzie  $z=100$ , wypadie

$$\text{V. } 101 = \text{V. } 100 + 2 \left( \frac{1}{201} + \frac{1}{3(201)^3} + \frac{1}{5(201)^5} + \dots \right);$$

Skąd widzimy, że mając logarytm 100., pierwszy wyraz szeregu będzie dostateczny aby mieć logarytm 101, z siedmiu dziesiętnymi znakami.

Znaydują się ieszcze formuły bardzo dogodne do wyrachowania logarytmu w funkcyi innych logarytmów wiadomych.

Lecz z tego co poprzedziło można powziąć dostateczne wyobrażenie o sposobie ułożenia tablic.

229. Wyrachowawszy logarytmy Nepera, łatwo jest otrzymać logarytmy innego układu. Naprzykład aby mieć logarytmy zwyczajne których podstawą jest 10, potrzeba (ustęp 214) mnożyć każdy

logarytm Nepera przez *zamiennik*  $\frac{1}{\text{V. } 10}$ : ważność téj

liczby obliczona z naywiększym przybliżeniem w ułamkach dziesiętnych jest 0,4342944819. Tento *zamien-*

nik służy do przejścia z układu Nepera czyli Naturalnego do układu Bryginsza, czyli, zwyczajnego, w którym podstawą jest 10.

Nadto, ten zamiennik oznacza logarytm zwyczajny, podstawy Nepera, albowiem oznaczywszy tę podstawę przez  $e$ , mamy równanie  $e^{\lg 10} = 10$ , którego wyrazów wzięwszy logarytmy zwyczajne będzie  $\lg 10 + \lg e = \lg 10 = 1$ . skąd  $\lg e = \frac{1}{\lg 10} = 0,43429\dots$

Mając obliczone logarytmy zwyczajne znajdziemy podstawę  $e$  Nepera, za pomocą równania  $0,4342944819 = \lg e$ .

Poszukawszy bowiem w tablicach zwyczajnych jakięś liczbę odpowiada logarytm 0,4342944819, znajdziemy  $e = 2,718281828 \dots$

Niżej dojdziemy inną drogą do podstawy Nepera.

230. Rozwinięcie na szereg ilości wykładniczej  $a^x$ . Ponieważ w wyrażeniu  $a^x$ ,  $a$  oznacza podstawę układu logarytmów,  $x$  zaś jest (ustęp 210) logarytmem liczby  $a^x$ , więc rozwinięszy  $a^x$  podług potęg ilości  $x$ ; otrzymamy rozwinięcie liczby w funkcji ięć logarytmu: to zadanie jest odwrotne względem poprzedzającego. Dajmy na to żeśmy otrzymali to rozwinięcie w tej postaci

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots \quad (1);$$

uczyniwszy  $x=0$ ; równanie powyższe zamieni się na  $a^0 = 1$ , wypadek ten jest prawdziwy, a zatem rozwinięcie  $a^x$  może być w powyższej postaci wyrażone.

Aby wyznaczyć,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $\dots$ , w równa-



niu pierwszém położmy  $z$ , zamiast  $x$ , a otrzymamy

$$a^x = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots \quad (2);$$

odniawszy wyrazy równania iednego od drugiego; otrzymamy

$$a^x - a^z = A(x-z) + B(x^2 - z^2) + C(x^3 - z^3) + \dots \quad (3),$$

druga strona tego równania jest podzielna przez  $x-z$ ; więc i pierwsza musi mieć tę własność:

Jakoż  $a^x - a^z$ , można wyrazić w postaci  $a^z(a^{x-z} - 1)$ : otrzymamy więc kładąc w szeregu (1),  $x-z$  zamiast  $z$

$$a^z(a^{x-z} - 1) = a^z \{ A(x-z) + B(x-z)^2 + \dots \};$$

ważność otrzymaną dla  $a^x - a^z$  wstawiwszy w równanie (3) i podzieliwszy obie strony przez  $x-z$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} & a^z \{ A + B(x-z) + C(x-z)^2 + \dots \} \\ &= A + B(x+z) + C(x^2 + xz + z^2) + \dots \end{aligned}$$

To ostatnie równanie, uczyniwszy  $x=z$ ; zamieni się na

$$a^x \cdot A = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \dots,$$

czyli zamiast  $a^x$  położywszy rozwinięcie pod (1), będzie

$$\begin{aligned} & A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + \dots \\ &= A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \dots \end{aligned}$$

zrównawszy oddzielnie między sobą współczynniki tychże samych potęg; otrzymamy równania;

$$A = A, A^2 = 2B, AB = 3C, AC = 4D, \dots,$$

skąd wyprowadzimy

$$A=A; B=\frac{A^2}{2}; C=\frac{A^3}{2.3}; D=\frac{A^4}{2.3.4}.$$

Prawo podług którego powstał ten szereg jest oczywiste: wyraz szeregu (1) przed którym znaj-

duie się wyrazów  $n$ , jest  $\frac{A^n}{2.3.4\dots n}$ .

Widzimy, że wszystkie współczynniki  $B, C, D, \dots$  są wyrażone w funkcji współczynnika  $A$ , który jeszcze jest *niewyznaczony*: to jest, sposobem powyższym nie można go otrzymać, lecz ten współczynnik ma dla tego ważność stałą, którą otrzymamy następującym sposobem:

Można  $a^x$  wyrazić w téj postaci  $(1+a-1)^x$   
 $= (1+b)^x$ , uczyniwszy dla skrócenia,  $a-1=b$ .

Rozwiniemy  $(1+b)^x$  podług formuły dwumianu, otrzymamy:

$$(1+b)^x = 1 + x.b + x \frac{x-1}{2} b^2 + x \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{3} b^3 + \dots$$

W tem rozwinięciu biorąc tylko te wyrazy, które są mnożone przez  $x$ , ich zbiór będzie

$$\left( b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} \dots \right) x.$$

A że współczynnik ilości  $x$ , oznacza tu to samo co

$$A, \text{ w szeregu (1), więc } A = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \dots$$

czyli dla tego że  $b=a-1$

$$A = a-1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \dots = k.$$

W ważności B, C, D, wstawivszy  $k$  zamiast  $A$ , te zaś w szereg (1), otrzymamy rozwinięcie dla  $a^x$ ,

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{1.2} + \frac{k^3 x^3}{1.2.3} + \frac{k^4 x^4}{1.2.3.4} + \dots (4).$$

231. *Wnioski.* Ten szereg, uczynivwszy  $x=1$ , zamieni się na

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} + \dots$$

Skąd widzimy, że  $a$  iest wyrażone w funkcyi  $k$ , podobnież iak pierwéy  $k$  mieliśmy wyrażone w funkcyi  $a$ , . . .  $k = a - 1 - \frac{(a-1)}{2} + \dots$

To założywszy szukamy ważności szczególnéy dla  $a$ , odpowiadaiący  $k=1$ , i ważność tę szczególną oznaczimy przez  $e$ : otrzymamy:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

w szeregu tym schodzącym się dwanaście pierwszych wyrazów daia  $e = 2,7182818$ , ważność zbliżona o 0,0000001 podstawy Nepera.

Aby otrzymać rozwinięcie dla  $e^x$ , potrzeba w formule (4) uczynić  $a=e$ , i  $k=1$ , otrzymamy

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots,$$

ilości  $a$  i  $k$  zachowuią pomiędzy sobą inny stosunek, który można otrzymać za pośrednictwem szczególnéy liczby  $e$ .

Jakoż, w równaniu (4) uczynimy  $x = \frac{1}{k}$ ; otrzymamy

$$a^{\frac{1}{k}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots,$$

lecz mamy już  $e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots$ , więc

$$a^{\frac{1}{k}} = e, \text{ czyli } a = e^k.$$

Wziąwszy logarytmy układu, którego podstawą jest  $e$ , w obu stronach tego równania, nadto zważa-

jąc że  $1. e = 1$ ; otrzymamy  $1. a = k$  czyli, (zamiast  $k$

biorąc jego ważność  $(a-1) = \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} -$ )

$$1. a = (a-1) = \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \dots;$$

i uczyniwszy  $a = 1 + x$  czyli  $a-1 = x$ ; otrzymamy

$$1. (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

szereg ten jest zupełnie ten sam (identique), co szereg z którego otrzymujemy logarytmy zwyczajne czyli Nepera (ustę: 228).

Skąd widzimy, że  $e$  czyli 2,7182818... jest podstawą układu Nepera, wypadek ten sam otrzymaliśmy w ustępie 229. Stąd także wypada, że rozwinięcie ilości wykładniczych na szereg, prowadzi do szeregów logarytmowych.

Obliczenie błędu jaki popełniamy układając proporcję między liczbami i różnicami ich logarytmów. (Ustę: 217, 218.)

Naprzód otrzymaliśmy (Ustę: 228)

$$l'(y+1) - ly = \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \dots$$

Oznaczmy przez  $m$ , zamiennik 0,4342... przez który potrzeba (ustę: 229) mnożyć  $l'(y+1)$  aby otrzymać logarytm zwyczajny  $l(y+1)$ : będzie tedy

$$l.(y+1) - l.y = m\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \dots\right),$$

skąd widzimy, że różnica dwóch logarytmów po sobie następujących maleje, kiedy liczby rosną.

Powtóre. Ponieważ  $m$  czyli 0,4342..... jest  $< \frac{1}{2}$ , więc

$$l.(y+1) - ly < \frac{1}{2y} - \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{6y^3} - \dots;$$

oprócz tego wiadomo (ustę 180), że pierwszy wyraz

$\frac{1}{2y}$  tego szeregu, licznie jest większy, niż cały szereg, więc tym bardziéj mamy  $l.(y+1) - l.y < \frac{1}{2y}$ .

Niech będzie  $y = 10,000$ , mamy  $\frac{1}{2y} = \frac{1}{20,000} = 0,00005$ , a tak, dla wszystkich liczb większych od 10,000, różnica dwóch logarytmów następnych jest mniejsza od połowy iedności czwartego rzędu dziesiętnego.

To pokazuje, dla czego można było, na iednój stroniey tablic, zmieścić tak wielką liczbę logarytmów, ponieważ trzy pierwsze cyfry dziesiętne są koniecznie wspólne kilku logarytmom, więc dosyć było napisać raz te trzy cyfry, a potem umieszczać inne cztery cyfry odpowiadające innym liczbom.

*Potrzebie.* Niech będzie  $\delta = 1 \cdot (y+1) - 1 \cdot y = 1 \cdot \frac{y+1}{y}$  i

$\delta' = 1 \cdot (y+2) - 1 \cdot (y+1) = 1 \cdot \frac{y+2}{y+1}$ ; ponieważ

$$\frac{y+1}{y} \cdot \frac{y+2}{y+1} = \frac{y^2 + 2y + 1}{y^2 + 2y} = 1 + \frac{1}{y(y+2)}$$

więc  $\delta - \delta' = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{y(y+2)}\right)$ ;

czyli, wstawivszy  $y(y+2)$  zamiast  $y$  w szereg,

$$1 \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) = m \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \dots\right)$$

$$\delta - \delta' = m \left(\frac{1}{y(y+2)} - \frac{1}{2y^2(y+2)^2} + \dots\right);$$

skąd  $\delta - \delta' < \frac{1}{2y(y+2)}$ ; ponieważ  $m < \frac{1}{2}$ , a pier-

wszy wyraz jest (ustęp: 180) większy od szeregu całego.

To założyvwszy niech będzie  $y = 10000$ : otrzyma-

$$\text{my } \delta - \delta' < \frac{1}{200040000}.$$

A tak

A tak, różnica po między dwiema różnicami następnemi logarytmów liczb większych od 10000, jest mniejsza od jedności osmego rzędu dziesiętnego.

Dla téj to przyczyny kładą się w tablicach dla wszystkich liczb większych od 10000, różnice po między dwoma następnemi logarytmami. Różnice te można uważać za stałe dla wielkiej liczby logarytmów; ponieważ odmiana po między jedną różnicą a drugą, nie sciąga się iak tylko do dziewiątej cyfry dziesiętnej, gdy tym czasem tablice zawierają tylko siedm cyfr dziesiętnych.

*Wnioski z podań poprzedzających.* Przypuśćmy na chwilę, że dla wszystkich liczb większych od 10000. Przyrostkom równym liczb, odpowiadają przyrostki równe logarytmów, co można przewidzieć według tego cośmy poznali: mówię, iż w tym razie można uczynić proporcją po między różnicami liczb, i różnicami logarytmów.

Jakoż niech będą  $n$  i  $n+1$ , dwie liczby całkowite po sobie następujące większe od 10,000, zaś  $n + \frac{p}{q}$  niech będzie liczba ułomkowa środkująca: można zawsze uważać trzy liczby  $n$ ,  $n + \frac{p}{q}$ ,  $n+1$ , za trzy wyrazy proporcji arytmetycznej, który pierwszy wyraz jest  $n$ , wykładnik  $\frac{1}{q}$ , wyraz rzędu  $p+1$ , jest  $n + \frac{p}{q}$ , wyraz rzędu  $q+1$ , jest  $n + \frac{q}{p}$ , czyli  $n+1$ ; tak iż

mamy

$$\div n, n + \frac{1}{q}, n + \frac{2}{q}, \dots, n + \frac{p}{q}, \dots, n + 1.$$

Lecz założyliśmy że różnice pomiędzy logarytmami liczb całkowitych następnych, są niejako równe pomiędzy sobą, więc tym bardziej różnice pomiędzy

logarytmami ilości  $n, n + \frac{1}{q}; n + \frac{2}{q}, \dots$  mogą

być uważane za równe, a zatem oznaczwszy przez

$\delta$  różnicę  $1 \cdot \left(n + \frac{1}{q}\right) - n$ ; będziemy mieli loga-

rytmy odpowiadające szeregowi powyższemu,

$$\div n, n + \delta, n + 2\delta, \dots, n + p\delta, \dots, n + q\delta \text{ czyli } 1(n+1);$$

i w tym razie mamy proporcją

$$(n+1) - n : \left(n + \frac{q}{p}\right) - n :: (n + q\delta) - n : (n + p\delta) - n;$$

albowiem przywódzszy otrzymamy

$$1 : \frac{p}{q} = q\delta : b\delta \text{ czyli } q:p = q:p.$$

233. Obliczmy teraz błąd jaki mógł się wcisnąć w tę proporcją.

Weźmy trzy liczby,  $n, n + \frac{p}{q}; n + 1$ ; niech  $b,$

$b + \frac{f}{g}, b + c$  będą ich logarytmy; przypuszcza-

my że  $f < g$ .

Oznaczmy przez  $a$  podstawę logarytmów, układu który uważamy. Podług definicyi logarytmów



mamy,

$$a^b = n, a^{b + \frac{f}{g}c} = n + \frac{p}{q}, a^{b+c} = n+1.$$

Lecz z równania ostatniego otrzymamy,

$$a^c = \frac{n+1}{a^b} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n};$$

skąd, obie strony podnioswszy do potęgi  $\frac{f}{g}$ , wypadnie

$$a^{\frac{f}{g}c} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{f}{g}}; \text{ mnożąc obie strony przez } a^b = n,$$

otrzymamy

$$a^{b + \frac{f}{g}c} \text{ czyli } n + \frac{p}{q} = n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{f}{g}}.$$

Drugą stronę tego ostatniego równania rozwijawszy podług dwumianu Newtona, na przypadek wykładnika ułomkowego (ustęp 180), i opuściwszy wyraz  $n$ , który jest spólny obu stronom równania; otrzymamy

$$\frac{p}{q} = \frac{f}{g} \cdot \frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{1}{n} + \frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{2g-f}{3n} \cdot \frac{1}{n^2} \dots (1);$$

czyli rozmnożywszy obie strony przez  $c$ ,

$$\frac{p}{q} c = \frac{f}{g} c - \frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{c}{n} + \frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{2g-f}{3n} \cdot \frac{c}{n^2} \dots (2).$$

Uważamy teraz, że w tych dwóch szeregach: lód;  
Wyrazy następnie maleją i to tym bardziej, im lic-  
28\*

ba  $n$  jest większa. 2re. wyrazy są na przemian dodatne i ujemne, skąd koniecznie wypada, że

$$1^{\circ}. \frac{p}{q} - \frac{f}{g} < \frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{1}{n},$$

$$2^{\circ}. \frac{p}{q} c - \frac{f}{g} c < \frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{c}{n};$$

To jest: że różnica zachodząca czy to po między  $\frac{p}{q}$  i  $\frac{f}{g}$ , czy pomiędzy  $\frac{p}{q}c$  i  $\frac{f}{g}c$ , jest *liczebnie* mniejsza, od  $\frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{1}{n}$  czyli od  $\frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{c}{n}$  a tym bardziej mniejsza od  $\frac{1}{2n}$ , czyli  $\frac{c}{2n}$ , ponieważ  $\frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{g}$  jest wi-  
docznie ułomkiem.

To założywszy aby rozwiązać pierwsze zadanie ściągające się do użycia tablic logarytmowych; ułożymy proporcją.

1, różnica pomiędzy liczbami następnymi,  $n+1$ , i  $n$ , tak się ma do  $c$  różnicy pomiędzy  $1.(n+1)$  i  $1.(n)$ ,

jak  $\frac{p}{q}$  różnica po między  $n+\frac{p}{q}$  i  $n$ , do czwartego

wyrazu  $x$ , który ma oznaczać naddatek do  $1.n$ , aby

otrzymać logarytm liczby  $n+\frac{p}{q}$ ; to jest:  $1:c::\frac{p}{q}:x$ ,

skąd  $x=\frac{p}{q}c$ . Lecz prawdziwa ważność różnicy po

między  $1.\left(n+\frac{p}{q}\right)$  i  $1.n$  jest podług przypuszcze-

nia wyrażona przez  $\frac{f}{g}c$  więc wstawiając ten czwarty wyraz zamiast  $\frac{f}{g}c$ , popełnimy błąd mniejszy od  $\frac{c}{2n}$ .

Lecz widzieliśmy (ustęp 232), że w tablicach których podstawą jest 10, jeżeli liczba  $n$  jest większa od 10000; różnica pomiędzy dwoma następnymi logarytmami, jest mniejsza od połowy jedności rzędu czwartego dziesiętnego, czyli od 0,00005, a za-

tém  $\frac{c}{2n}$  jest mniejsze od  $\frac{0,00005}{20000}$  czyli od

0,0000000025, to jest: mniejsza od  $\frac{1}{4}$  jedności osmego

rzędu dziesiętnego, a zatem błąd popełniony nie może wpływać na siódmą cyfrę dziesiętną logarytmu.

Co do drugiego zagadnienia mówi się: *tak się ma c*, różnica pomiędzy logarytmami następnymi, *do 1* różnicy po-

między liczbami, *jak*  $\frac{f}{g}c$ , różnica pomiędzy logary-

tmem danym, i mniejszym od logarytmu, między któremi zawiera się szukany, *do czwartego wyrazu x*, który ma oznaczać to, co potrzeba dodać do mniejszej liczby  $n$ , aby otrzymać liczbę szukaną;

czyli  $c:1 = \frac{f}{g}c:x$  skąd  $x = \frac{f}{g}$ :

a zatem mielibyśmy liczbę szukaną  $n + \frac{f}{g}$ , gdy tym-

czasem powinno być  $\frac{p}{q}$  ważnością téj liczby: co oka-

zuje, na mocy równania (1) i rozbioru powyższego

iż błąd jest mniejszy od  $\frac{1}{2n}$ , a jeżeli iak przypuści-

liśmy  $n$  jest  $> 1,0000$ , błąd ten jest większy od

$\frac{1}{20,000}$  albowiem zamieniwszy  $\frac{f}{g}$  albo raczej  $\frac{f}{g}$  c. na

ułamek dziesiętny. Można rozciągnąć działanie aż do 10000nych byle nie dalej.

234. *Uwaga.* Przybliżenie to, które podaje teoria w drugiem zagadnieniu, w zastosowaniu przybiera nie które słabe, i nie można uważać pewności iak tylko w dwóch pierwszych cyfrach dziesiętnych. To zaśstad pochodzi, że różnica oznaczona przez c, jest złożona z dwóch albo z trzech najwyższych cyfr, z których pierwsza od lewej lewej ręki jest 5go rzędu cyfrą dziesiętną, gdy tymczasem ta różnica (ponieważ wszystkie logarytmy prócz potęg podstawy są niespółmierne) brała być powinna po między nieskończoną liczbą cyfr, z których opuszczają się te nawet, które dwiema lub trzema cyframi następują. Lecz wiadomo, że w dzieleniu jeżeli odrzucimy, ostatnią cyfrę po prawej ręce w dzielniku, i cyfry odpowiadające w dzielnej, zmieniamy iloraz, i nie jesteśmy przekonani o ścisłości iak tylko dwóch pierwszych cyfr od lewej ręki.

Uważamy jeszcze i to: że we wszystkiem cośmy powiedzieli, zakładaliśmy, iż były pod ręką tablice Kalleta. Jest zaś łatwo obliczyć błędy iakie pociąga za sobą użycie mniejszych rościągłych tablic.